

1.5 曲线与曲面, 二次曲面

1.5.1 曲线与曲面

¶ 参数方程的几何意义

$$\text{直线参数方程} \begin{cases} x = x_0 + tl \\ y = y_0 + tm \\ z = z_0 + tn \end{cases} \quad \text{有明确的几何意义: 从点 } (x_0, y_0, z_0) \text{ 出发, 朝 } \langle l, m, n \rangle$$

所代表的方向延伸的 **1维** 几何对象。一个自然的问题是:

Q: 平面有参数方程吗?

A: 有。可以视平面为“从 (x_0, y_0, z_0) 出发, 朝 $\vec{v}_1 = \langle l_1, m_1, n_1 \rangle$ 和 $\vec{v}_2 = \langle l_2, m_2, n_2 \rangle$ 以及它们所有可能的线性组合方向延伸的几何对象”。于是我们有平面参数方程:

$$\begin{cases} x = x_0 + tl_1 + sl_2 \\ y = y_0 + tm_1 + sm_2 \\ z = z_0 + tn_1 + sn_2 \end{cases} \quad (\text{向量形式: } \vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}_1 + s\vec{v}_2)$$

注 1.5.1: 维数与方程个数的关系

比较平面与直线的参数方程以及一般方程, 可以发现在空间中,

(1) 参数方程都由3个方程组成 (因为每个点的坐标是3个数)。

- 参数的个数表征着自由度, 即该几何对象的维数 = 参数个数。
- 直线 (1个参数 t) \rightarrow 1维; 平面 (2个参数 t, s) \rightarrow 2维。

(2) 一般方程均由“含3个未知数 x, y, z 的方程”组成。

- 方程的个数表示 3个未知数 x, y, z 所满足约束的个数。
- 维数 = 3 (空间维数) - 约束个数 (方程个数)。

¶ 空间曲线

曲线是直线的推广, 也是 **1维** 的几何对象。类似于直线, 可以用参数方程描述空间里的曲线:

定义 1.5.2: 曲线的参数方程

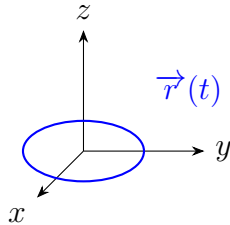
$$\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \\ z = f_3(t) \end{cases} \quad (t \in (a, b)) \quad \text{向量形式: } \vec{r} = \vec{f}(t)$$

有时可以通过消去参数 t 得到“一般方程”。

例 1.5.3: 圆与螺旋线

1. 圆

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = 0 \end{cases} \quad (xy \text{ 平面中的单位圆})$$



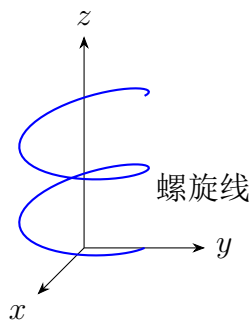
注：通过消去参数 t ，可得一般方程：

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

注意到在空间中，方程 $x^2 + y^2 = 1$ 表示柱面而方程 $z = 0$ 表示平面，故上述一般方程表明“该圆是圆柱与平面 $z = 0$ 的交线”。

2. 螺旋线

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t \end{cases}$$



思考：螺旋线的一般方程是什么？如何实现为两曲面之交？

¶ 曲面

曲面是平面的推广，也是 **2维** 的几何对象。因为曲面有两个自由度，所以其参数方程有两个参数。

定义 1.5.4: 曲面的方程

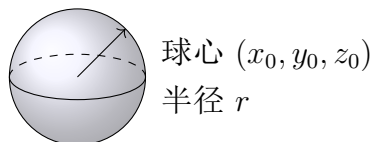
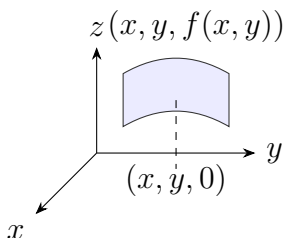
1. 参数方程:

$$\begin{cases} x = f_1(t, s) \\ y = f_2(t, s) \\ z = f_3(t, s) \end{cases} \quad (t, s) \in D \quad [\text{向量形式: } \vec{r} = \vec{f}(t, s)]$$

2. 一般方程 (隐函数形式): 或者对于简单的曲面, 可以不必用参数, 而用一个含 x, y, z 的一般方程描述:

$$F(x, y, z) = 0$$

例 1.5.5: 常见曲面举例

1. 球面: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$ 。2. 函数图像: $z = f(x, y)$ 。可以改写为一般方程形式: $f(x, y) - z = 0$ 。

注 1.5.6

一般方程 $F(x, y, z) = 0$ 未必表示一个二维的曲面!

例如:

$$(x + y + z + 1)^2 + (x + y - z)^2 = 0$$

由于平方非负, 这等价于:

$$\begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

这表示两平面的交线 (直线), 而不是曲面! 用同样的方式, 不难给出用一个方程表示一个点甚至几何上更复杂对象的例子。

下面给出两种“从平面曲线构建空间曲面”的方法, 并给出其方程。

¶ “广义”柱面

设 C 是 xy 平面内的一条曲线，方程为 $f(x, y) = 0$ 。将它沿着 z 轴方向上下拖动（平移），所得曲面叫做以曲线 C 为准线的柱面。

它的方程依然是：

$$f(x, y) = 0$$

注 1.5.7

在不同语境下，同一个方程表示的意义是不同的：

- 作为 x, y 两个变量的函数， $f(x, y) = 0$ 表示 xy 平面内的一条曲线。
- 作为 x, y, z 三个变量的函数， $f(x, y) = 0$ 表示一个“沿 z 轴方向延伸”的曲面。

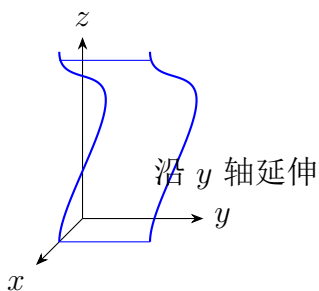
例如：

- $x = 1$ in \mathbb{R} (1维): 一个点。
- $x = 1$ in \mathbb{R}^2 (2维): 一条直线 (垂直于 x 轴)。
- $x = 1$ in \mathbb{R}^3 (3维): 一个平面 (垂直于 x 轴)。

同理， $f(x, z) = 0$ 可用于表示一个“沿 y 轴方向平行”的柱面。

例 1.5.8: 波浪形柱面

$x = \cos z$ (in \mathbb{R}^3)。

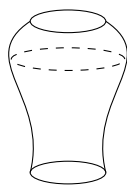


思考题解答：螺旋线

螺旋线 $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t \end{cases}$ 可视为这个波浪形柱面 ($x = \cos z$) 与“标准圆柱面 $x^2 + y^2 = 1$ ”的交线!

1. 旋转面

将 yz 平面内的曲线 $f(y, z) = 0$ 绕 z 轴旋转一圈, 所得曲面叫做**旋转面**。



下面推导其方程。假设点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 在该旋转曲面上, 则过点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 且圆心在 $(0, 0, z_0)$ 的圆都在该曲面上。根据例1.5.3, 这个圆的方程是
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2 \\ z = z_0 \end{cases}.$$

不难算出, 这个圆跟 yz 平面的交点是 $(0, \pm\sqrt{x_0^2 + y_0^2}, z_0)$ 。根据定义, 这个点(在忽略 x 坐标0之后)必须落在开始的曲线 $f(y, z) = 0$ 上。于是我们推导出, 点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 在该旋转曲面上的条件是 $f(\pm\sqrt{x_0^2 + y_0^2}, z_0) = 0$ 。故

命题 1.5.9: 旋转面方程

将 yz 平面内的曲线 $f(y, z) = 0$ 绕 z 轴旋转一圈, 所得曲面方程是:

$$f(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$$

类似地: 若将 $f(x, z) = 0$ 绕 x 轴旋转一圈, 所得旋转面为 $f(x, \pm\sqrt{y^2 + z^2}) = 0$ 。其他类似情形同理。

例 1.5.10: 旋转面举例

1. $x^2 + y^2 = 1$ (in xy 平面):

- 无论绕 x 轴还是绕 y 轴转, 都得到 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (球面)。

2. $x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$:

- 绕 x 轴转: $x^2 + \frac{y^2 + z^2}{2} = 1$ (旋转椭球面)。
- 绕 y 轴转: $x^2 + z^2 + \frac{y^2}{2} = 1$ (另一个旋转椭球面)。

1.5.2 二次曲面

- 最简单的曲面是**平面**, 其方程由**三元一次函数**给出: $ax + by + cz + d = 0$ 。
- 次简单的曲面是**二次曲面**, 其方程由**三元二次函数**给出。

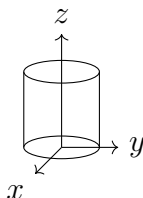
一般的三元二次方程:

$$F(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0$$

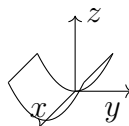
其中 a, b, \dots, f 不全为 0。

下面给出一些简单的二次曲面（不含交叉项以及一次项/常数项）：

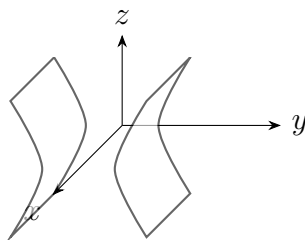
1. 椭圆柱面: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



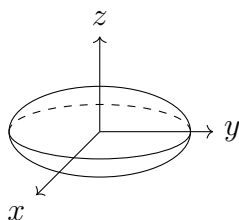
2. 抛物柱面: $z = ay^2$



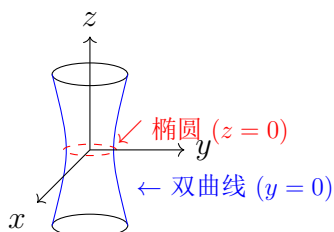
3. 双曲柱面: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$



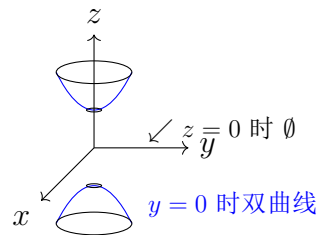
4. 椭球面: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$



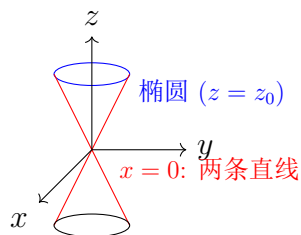
5. 单叶双曲面: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$



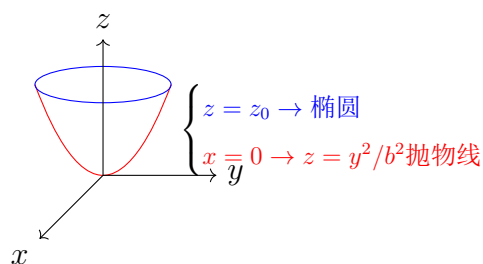
6. 双叶双曲面: $\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$



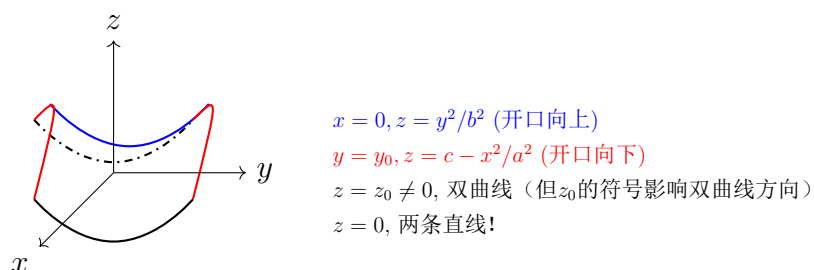
7. 二次锥面: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$



8. 椭圆抛物面: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$



9. 双曲抛物面 (马鞍面): $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$



Q: 对于更复杂的二次函数，对应的二次曲面是否更复杂？

A: (非退化) 二次曲面只有这9类。方程复杂只是因为坐标系没选好！通过旋转和平移坐标轴，总可以化为上述标准方程之一。