¶ 应用：一阶微分形式的不变性

考虑 $w=f(u,v)$。若视 u,v 是自变量，则

$$dw=\boxed{\frac{\partial f}{\partial u}du+\frac{\partial f}{\partial v}dv}_1$$

若u,v只是中间变量，例如 $u=u(x,y),v=v(x,y)$，则$w=f(u(x,y),v(x,y))$ 是x,y的函数，从而

$$dw=\boxed{\frac{\partial w}{\partial x}dx+\frac{\partial w}{\partial y}dy}_2.$$

一个自然的问题是：dw的这两个表达式是否“一致”？答案是肯定的：在dw的第一个表达式$\boxed{\cdots}_1$中，代入

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy,\quad dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy$$

可得

$$\begin{aligned}\boxed{\cdots}_1&=\frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\right)+\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy\right)\\&=\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy\\&=\frac{\partial w}{\partial x}dx+\frac{\partial w}{\partial y}dy\\&=\boxed{\cdots}_2.\end{aligned}$$

结论：无论 u,v 是自变量还是中间变量，一阶微分形式 dw都可以表达为

$$dw=\frac{\partial f}{\partial u}du+\frac{\partial f}{\partial v}dv.$$

注 2.4.26

一阶微分不变性为微分几何、张量分析等数学与物理相关理论提供了基石。

注 2.4.27

对于更多的变量，以及对于更多层的复合，上述一阶微分的不变性依然成立。例如

- 若$w=f(u_1,u_2,u_3,u_4)$而$u_i=u_i(x_1,x_2)$，则

$$dw=\frac{\partial w}{\partial u_1}du_1+\frac{\partial w}{\partial u_2}du_2+\frac{\partial w}{\partial u_3}du_3+\frac{\partial w}{\partial u_4}du_4=frac\partial w\partial x_1dx_1+\frac{\partial w}{\partial x_2}dx_2$$

- 若$w=w(u,v)$, 其中 $u=u(x,y),v=v(x,y)$，其中$x=x(s,t),y=y(s,t)$，则

$$dw=\frac{\partial w}{\partial u}du+\frac{\partial w}{\partial v}du=\frac{\partial w}{\partial x}dx+\frac{\partial w}{\partial y}dy=frac\partial w\partial sds+\frac{\partial w}{\partial t}dt$$

2.5 隐函数定理

2.5.1 隐函数

¶ 问题引入

除了用 $y=f(x), z=f(x,y)$ 之类的关系式表达变量（此时自变量和因变量的地位区分是自明的）之间的函数关系外，还可以用含所有变量的方程表达它们之间关系的（此时自变量和因变量的地位区分是不明的）。对于后者，有时候可以将一个变量用别的变量解出来，有时候则做不到。

例 2.5.1: 方程与函数关系

1. $x+y+z=1 \rightsquigarrow$ 可以解出三个简单的显式函数关系 $z=1-x-y, \quad y=1-x-z, \quad x=1-y-z.$

2. $x^2+y^2=1 \rightsquigarrow$ 可以解出两个"函数关系" $y=\pm\sqrt{1-x^2}, \quad x=\pm\sqrt{1-y^2}$. 不过，严格意义上它们并不是函数关系，例如我们考察$y=\pm\sqrt{1-x^2}$，则对于几乎每个x，都有两个y与之对应。

   - 乍一看，$x=\pm1$是最好的，因为此时只有一个y与之对应。但事实恰好相反：对于每个$|x|<1$，虽然都各有两个y与之对应，但无论是点$(x,\sqrt{1-x^2})$还是点$(x,-\sqrt{1-x^2})$，在其附近（即在某个含x的开区间上）y都可表示为x的一个可微函数。而对于$x=\pm1$，即点$(1,0)$和$(-1,0)$，则始终无法在其附近将y表示成x的函数。

3. $x^2+y^2+z^2+\sin(xyz)=1 \rightsquigarrow$ 此时解不出具体的表达式，但变量 x,y,z 之间确实存在依赖关系。

定义 2.5.2: 隐函数

若变量x,y之间的函数关系由方程 $F(x,y)=0$ 给出，或变量 x,y,z 之间的函数关系由方程 $F(x,y,z)=0$ 给出，则称这些变量之间的函数关系为隐函数。

¶ 隐函数求导

一般地，给定确定隐函数关系的方程 $F(x,y)=0$ 或 $F(x,y,z)=0$ 给出，可否不解方程而得出 x,y或 x,y,z 之间的依赖关系呢？当然，因为不解方程，所以不能得到精确的公式。但依然可以问：能否得到y关于x的变化率呢？

想法: 先假设可以，找出相关的导数/依赖关系，再证明之。

若 $F(x,y)=0$ 确定了一个隐函数 $y=y(x)$，则代入可得恒等式 $F(x,y(x))\equiv 0$。由

复合函数求导的链式法则可得

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)y'(x)=0.$$

于是，若 y 是 x 的可微函数，即$y'(x)$存在，则$y'(x)$必然等于

$$y'(x)=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}.$$

特别地，这要求 $F'_y \neq 0$.

例 2.5.3: 直线

考虑 $F(x,y)=ax+by=0$。要想解出$y=-\frac{a}{b}x$，就必然要求$b\neq 0$，而$b=F'_y$.

例 2.5.4: 圆

回到 $x^2+y^2=1$ 的例子，即 $F(x,y)=x^2+y^2-1=0$。在 $x=1,y=0$ 即点 $(1,0)$ 处，

$$F_y(1,0)=2y\big|_{(1,0)}=0.$$

这就是为什么在该点邻域内 y 不是 x 的函数（切线垂直，斜率无穷大）。

类似地，若 $F(x,y,z)=0$ 确定了一个隐函数 $z=z(x,y)$，则由 $F(x,y,z(x,y))\equiv 0$ 求导：

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0 \implies \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0 \implies \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}$$

（前提是 $F'_z\neq 0$）。

例 2.5.5: 隐函数求导实例

设 $x^2+y^2+z^2+\sin(xyz)=1$。求 $\frac{\partial z}{\partial x}$。 **方法一：公式法** 令 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+\sin(xyz)-1$。

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{2x+\cos(xyz)yz}{2z+\cos(xyz)xy}.$$

方法二：利用一阶微分不变性 记 $w=x^2+y^2+z^2+\sin(xyz)$。方程即 $w=1$，故 $dw=0$。

$$dw=2xdx+2ydy+2zdz+\cos(xyz)(yzdx+xzdy+xydz)=0.$$

整理含 dz 的项与含 dx,dy 的项：

$$(2z+xy\cos(xyz))dz+(2x+yz\cos(xyz))dx+(\dots)dy=0.$$

移项即得 $\frac{\partial z}{\partial x}$（即 dz 中 dx 的系数的负值除以 dz 的系数）。

2.5.2 隐函数定理及其证明

下面给出定理及其证明。为简单起见，仅考虑 $F(x,y)=0 \rightsquigarrow y=y(x)$ 的情形。

定理 2.5.6: 隐函数存在定理

设 $F(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 的邻域 D 内有定义，且满足：

1. $F\in C^1(D)$，即 F 在 D 内有连续偏导数；
2. $F(x_0,y_0)=0$；
3. $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$。

则存在 P_0 的矩形邻域 $(a,b)\times(c,d)\subset D$，使得对任意 $x\in(a,b)$，方程 $F(x,y)=0$ 在 (c,d) 内**有唯一解** $y=f(x)$，满足 $y_0=f(x_0)$。此外，该解 $y=f(x)$ 具有**连续的微分**（即 $f(x)$ 连续可导），其导数为：

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)}.$$

注 2.5.7

1. 若条件 (3) 变为 $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)\neq 0$，则在$y_0$的邻域内存在解 $x=g(y)$，使得$x_0=g(y_0)$，此时其导数为$g'(y)=-\frac{F_y'(x,y)}{F_x'(x,y)}$。
2. 条件 $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$ 的几何意义：曲线$F(x,y)=0$在(x_0,y_0)处的法向量非零且不是水平向量，即存在切线且切线不是竖直直线。此时切线方程能表示成（线性函数）$y=\tilde{f}(x)$的形式。而结论则是在该点附近函数也能表示成（一般而言不再是线性函数）$y=f(x)$的形式，且其切线就是线性函数$y=\tilde{f}(x)$。

证明： **1. 先证明存在矩形邻域 $(a,b)\times(c,d)$ 使得解 $y=f(x)$ 存在。**

不妨设 $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)>0$。（若 <0，则可考虑 $-F$）。

由于 $\frac{\partial F}{\partial y}$ 在 D 内连续，故存在 P_0 的矩形闭邻域 $[a',b']\times[c,d]$，使得在该邻域内恒有

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)>0,\quad \forall(x,y)\in[a',b']\times[c,d].$$

这说明对于每一个固定的 $x\in[a',b']$，函数 $F(x,y)$ 作为 y 的函数，在 $[c,d]$ 上是**严格单调递增**的。

因为 $F(x_0,y_0)=0$，且 $y_0\in[c,d]$（实际上可以取 $c<y_0<d$），所以

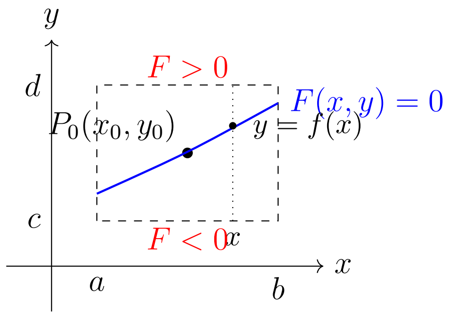
$$F(x_0,c)<F(x_0,y_0)=0<F(x_0,d).$$

由于 $F(x,y)$ 有连续偏导数 $\Longrightarrow$ 可微 $\Longrightarrow$ 连续，所以存在 x_0 的邻域 $[a,b]\subset$

$[a',b']$，使得对任意 $x\in[a,b]$，都有

$$F(x,c)<0 \quad \text{且} \quad F(x,d)>0.$$

再由 F 的连续性，且 $F(x,y)$ 作为 y 的函数在 $[c,d]$ 上严格单调递增，根据**介值定理**（定理2.3.7）：对任意 $x\in[a,b]$，存在唯一的 $y\in(c,d)$（记为 $y=f(x)$），使得 $F(x,f(x))=0$。这就是所求的函数（解）。



2. 验证这个解满足性质（连续性与可微性）。

对任意 $x\in(a,b)$，取 h 充分小使得 $x+h\in(a,b)$，并记 $k=f(x+h)-f(x)$。则

$$0=F(x+h,f(x+h))=F(x+h,f(x)+k).$$

又 $0=F(x,f(x))$。相减得：

$$0=F(x+h,f(x)+k)-F(x,f(x)).$$

应用引理2.4.16可得

$$0=h\frac{\partial F}{\partial x}(x+h',f(x)+k')+k\frac{\partial F}{\partial y}(x+h',f(x)+k')$$

其中 h' 在 0 与 h 之间，k' 在 0 与 k 之间。

整理得：

$$k=-h\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x+h',f(x)+k')}{\frac{\partial F}{\partial y}(x+h',f(x)+k')}.$$

当 $h\to 0$ 时，由于 F_y 有界且非零（在局部），可推知 $k\to 0$。故 $f(x)$ **连续**。

最后说明 $y=f(x)$ 有连续的导数。为此，计算极限：

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{k}{h}=\lim_{h\to 0}-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x+h',f(x)+k')}{\frac{\partial F}{\partial y}(x+h',f(x)+k')}.$$

由于 f 连续，当 $h\to 0$ 时，$k\to 0$。又 $h',k'\to 0$。利用 F_x,F_y 的连续性，得：

$$f'(x)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)}.$$

于是 $f'(x)$ 存在，且由 F_x,F_y 的连续性知 $f'(x)$ 连续。 □

¶ **隐函数求导举例**

例 2.5.8

$y=1+y^x$。记 $F(x,y)=1+y^x-y=0$。则

$$\frac{\partial F}{\partial x}=y^x\ln y,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=xy^{x-1}-1.$$

于是

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y^x\ln y}{xy^{x-1}-1}\quad (xy^{x-1}\neq 1).$$

例 2.5.9: 失效点分析

$F(x,y)=y^3-x=0$。在点 $(0,0)$ 处，$\frac{\partial F}{\partial x}=-1, \frac{\partial F}{\partial y}=3y^2\big|_{(0,0)}=0$。

- $F(0,0)=0$。
- $\frac{\partial F}{\partial y}=0$，定理条件不满足。

结论：

1. x 是 y 的可微函数：$x=y^3$（因为 $\frac{\partial F}{\partial x}\neq 0$）。
2. y 是 x 的函数：$y=x^{1/3}$，但在 $x=0$ 处**不可导**（切线垂直）。

例 2.5.10: 笛卡尔叶形线

$F(x,y)=x^3+y^3-3xy=0$。

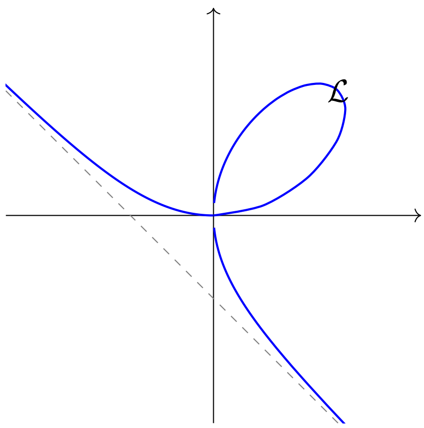
计算偏导数：

$$\frac{\partial F}{\partial x}=3x^2-3y,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=3y^2-3x.$$

在原点 $(0,0)$ 处：

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0,0)=0,\quad \frac{\partial F}{\partial y}(0,0)=0.$$

此时定理完全失效。事实上，在 $(0,0)$ 处图像出现自交，既不存在 $y=f(x)$ 也不存在 $x=g(y)$（局部不是单值函数）。



2.5.3 更多的隐函数定理

¶ 多变量的情形

不难将 $F(x,y)=0$ 给出的隐函数推广到更多变量情形。例如，若方程 $F(x,y,z)=0$ 有一个解 $F(x_0,y_0,z_0)=0$，且设该方程能给出隐函数关系 $z=f(x,y)$，即存在隐函数 $z=f(x,y)$ 使得 $F(x,y,f(x,y))\equiv 0$。则两边求导可得

$$0=F'_x+F'_zf'_x \implies f'_x=-\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}$$

$$0=F'_y+F'_zf'_y \implies f'_y=-\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}$$

于是，自然需要要求 $F\in C^1$（有连续偏导数），且 $F'_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$。

定理 2.5.11: 隐函数定理（多元情形）

设 $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ 在点 $P_0(x_1^0,\ldots,x_n^0)$ 的邻域 D 内有定义，且

1. $F\in C^1(D)$ (i.e. 有连续偏导数)；
2. $F(x_1^0,\ldots,x_n^0)=0$；
3. $F'_{x_n}(x_1^0,\ldots,x_n^0)\neq 0$。

则在 P_0 的某邻域内，方程 $F(x_1,\ldots,x_n)=0$ 唯一确定一个隐函数 $x_n=f(x_1,\ldots,x_{n-1})$，且 f 有连续偏导数：

$$\frac{\partial x_n}{\partial x_i}=-\frac{F'_{x_i}(x_1,\ldots,x_n)}{F'_{x_n}(x_1,\ldots,x_n)}\quad (i=1,\ldots,n-1).$$

注 2.5.12

同理，只要有某个 $F'_{x_k}(P_0)\neq 0$，就说明存在某个隐函数

$$x_k=g(x_1,\ldots,x_{k-1},x_{k+1},\ldots,x_n)$$

换言之，只有当 $\nabla F(P_0)=\vec{0}$ 时，才完全无法用此定理。

例 2.5.13

$F(x,y,z)=e^z-xyz=0$。求 z_x,z_y。

解直接计算可得

$$F'_x=-yz,\quad F'_y=-xz,\quad F'_z=e^z-xy\quad (=xyz-xy=xy(z-1)).$$

于是

$$z'_x=\frac{yz}{e^z-xy},\quad z'_y=\frac{xz}{e^z-xy}.$$

（注：利用方程本身可化简为 $z'_x=\frac{yz}{xy(z-1)}=\frac{z}{x(z-1)}$ 等）。