2.6 对曲线与曲面的应用

2.6.1 切线与切平面

¶ 参数曲线

首先考虑参数曲线

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t)\rangle, \quad a \le t \le b.$$

其“导数”（= 一个切向量 = 运动速度）为

$$\vec{r}'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)}{h} = \langle x'(t), y'(t), z'(t)\rangle.$$

类似地，还可以计算“二阶导数”（= 加速度，与下文的“曲率”相关）

$$\vec{r}''(t) = \langle x''(t), y''(t), z''(t)\rangle$$

以及积分

$$\int_a^b \vec{r}(t)dt = \left\langle \int_a^b x(t)dt, \int_a^b y(t)dt, \int_a^b z(t)dt \right\rangle.$$

因为向量值函数的每个分量都是一元函数，所以只要对各分量分别处理，就很容易证明（请自行补出证明细节）

命题 2.6.1: 向量微积分运算法则

(1) $(\vec{r}_1 \pm \vec{r}_2)'(t) = \vec{r}_1'(t) \pm \vec{r}_2'(t)$

(2) $(f\vec{r})'(t) = f'(t)\vec{r}(t) + f(t)\vec{r}'(t)$

(3) $(\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2)'(t) = \vec{r}_1'(t)\cdot\vec{r}_2(t) + \vec{r}_1(t)\cdot\vec{r}_2'(t)$

(4) $(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)'(t) = \vec{r}_1'(t)\times\vec{r}_2(t) + \vec{r}_1(t)\times\vec{r}_2'(t)$

作为应用，可以证明

推论 2.6.2

若 $|\vec{r}(t)| = c$，则 $\vec{r}(t) \perp \vec{r}'(t)$。【几何意义：若曲线落在球心在原点的球面上，则其切线与径向垂直】

证明： 由 $|\vec{r}(t)| = c$ 得 $\vec{r}(t)\cdot\vec{r}(t) = c^2$。两边求导得

$$2\vec{r}(t)\cdot\vec{r}'(t) = 0,$$

即$\vec{r}(t) \perp \vec{r}'(t)$ 。 □

注 2.6.3

上述定义与计算均使用固定的欧氏坐标系。若采用其它坐标系，则还需要考虑相应标架向量的变化率。例如考虑平面极坐标系，此时相应的标架是在任意点(r,θ)处互相垂直的两个单位向量

$$\overrightarrow{e}_r = \langle \cos\theta, \sin\theta\rangle, \quad \overrightarrow{e}_\theta = \langle -\sin\theta, \cos\theta\rangle.$$

于是任意平面曲线$\overrightarrow{r}(t)$在该标架下可表示为

$$\overrightarrow{r}(t) = \langle x(t), y(t)\rangle = \langle r(t)\cos\theta(t), r(t)\sin\theta(t)\rangle = r(t)\overrightarrow{e}_r.$$

而其导数则为

$$\overrightarrow{r}'(t) = r'(t)\overrightarrow{e}_r + r(t)\overrightarrow{e}'_r,$$

其中标架都是在$\overrightarrow{r}(t) = \langle r(t)\cos\theta(t), r(t)\sin\theta(t)\rangle$处取的，即 $\overrightarrow{e}_r = \langle\cos\theta(t), \sin\theta(t)\rangle$，而

$$\overrightarrow{e}'_r = \langle -\sin\theta(t)\theta'(t), \cos\theta(t)\theta'(t)\rangle = \theta'(t)\overrightarrow{e}_\theta.$$

¶ 参数曲线的切线与法平面

设 $\overrightarrow{r}'(t_0) \neq \overrightarrow{0}$ [此时称点 $P(t_0)$ 为曲线的**正则点**，非正则点称为**奇点**]。则过点 $P_0 = \overrightarrow{r}(t_0)$ 的**切线**方程为

$$\begin{cases} x = x(t_0) + x'(t_0)t \\ y = y(t_0) + y'(t_0)t \\ z = z(t_0) + z'(t_0)t \end{cases}$$

而过 P_0 且与曲线垂直的平面 [称为**法平面**] 为

$$x'(t_0)(x - x(t_0)) + y'(t_0)(y - y(t_0)) + z'(t_0)(z - z(t_0)) = 0.$$

¶ 隐式曲线

若曲线不是由参数方程组给出，而是由隐式方程组 $\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$ 给出。此时“正则性”条件就是隐函数定理出现的条件

$$\nabla F \times \nabla G \neq \overrightarrow{0}.$$

对于曲线上的 P_0 点，因为 $\nabla F(P_0)$ 是曲面 $F(x,y,z) = 0$ 的法线，$\nabla G(P_0)$ 是曲面 $G = 0$ 的法线，所以曲线在 P_0 点的切线与 $\nabla F(P_0), \nabla G(P_0)$ 均垂直，切方向为

$$\nabla F(P_0) \times \nabla G(P_0) = \left\langle \frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}, \frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}, \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} \right\rangle.$$

有了切向量，切线方程和法平面方程便容易写出。

注 2.6.4: 平面隐式曲线

对于平面隐式曲线 $F(x,y)=0$，其在 P_0 处的法向 $\vec{n}=\nabla F=\langle F'_x,F'_y\rangle$，从而切线方向 $\vec{v}=\langle F'_y,-F'_x\rangle$。

¶ 曲面的法向与切平面

接下来考虑曲面。先考虑空间隐式曲面，即由方程 $F(x,y,z)=0$ 给出，其中 $F\in C^1$。此时，由隐函数定理，所需的“正则性条件”是 $\nabla F\neq\vec{0}$。此时曲面在 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的法向量为 $\vec{n}=\nabla F=\langle F'_x,F'_y,F'_z\rangle$。（见注2.4.20）。于是曲面在$P_0$处的**切平面方程**为

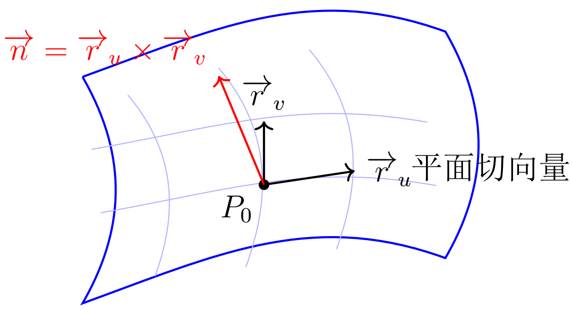
$$F'_x(P_0)(x-x_0)+F'_y(P_0)(y-y_0)+F'_z(P_0)(z-z_0)=0.$$

还可以考虑**参数曲面** $\vec{r}=\vec{r}(u,v)=\langle x(u,v),y(u,v),z(u,v)\rangle,\quad (u,v)\in D$。假设在任意点 $P_0=\vec{r}(u_0,v_0)$ 处，

$$\vec{r}_u=\langle x_u,y_u,z_u\rangle,\quad \vec{r}_v=\langle x_v,y_v,z_v\rangle$$

是切平面里的两个线性无关向量（这是参数曲面的“正则性假设”）。则曲面在 P_0 处切平面的法向为 $(\vec{r}_u\times\vec{r}_v)(P_0)=\left\langle \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right\rangle$。于是，曲面在 P_0 处**切平面方程**为

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}(x-x(u_0,v_0))+\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}(y-y(u_0,v_0))+\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(z-z(u_0,v_0))=0.$$



2.6.2 曲线的几何：弧长与曲率

¶ 弧长

如何计算正则参数曲线(所有点都正则) $\vec{r}=\vec{r}(t)(a\le t\le b)$ 的长度？用折线逼近！

$$\text{Length}=\lim_{\Delta\to0}\sum_{i=1}^{n}|\vec{r}(t_i)-\vec{r}(t_{i-1})|=\lim_{\Delta\to0}\sum|\vec{r}\,'(t_{i-1})|\,(t_i-t_{i-1})=\int_a^b|\vec{r}\,'(t)|\,dt.$$

其中用到近似 $|\vec{r}(t_i)-\vec{r}(t_{i-1})|\approx|\vec{r}\,'(t_{i-1})|\,(t_i-t_{i-1})$。

例 2.6.5: 螺旋线弧长

计算曲线 $\vec{r}(t)=\langle\cos t,\sin t,t\rangle,\quad 0\le t\le 2\pi$ 的长度。

解: 由 $\vec{r}\,'(t)=\langle-\sin t,\cos t,1\rangle$ 可得

$$|\vec{r}\,'(t)|=\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2+1^2}=\sqrt{2}.$$

于是曲线长度为$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{2}dt=2\sqrt{2}\pi$. □

注 2.6.6

- 【平面曲线】平面曲线 $y=f(x)(a\le x\le b)$可被参数化为$\begin{cases}x=t\\ y=f(t)\\ z=0\end{cases}$，其中$a\le t\le b$。于是其长度为

$$l=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}dx.$$

- 【逐段光滑】若曲线分几段处处可导（但连接点处仅连续），可分段为逐段光滑曲线，此时可以对每一段用上述公式计算长度。

- 【参数无关】曲线长度不依赖于参数的选取：若 $u:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ 是可导的增函数，则 $\vec{r}=\vec{r}(t)$ 可被重新参数化为

$$\vec{\gamma}=\vec{r}(u(\tau)),(\alpha\le\tau\le\beta)$$

此时

$$|\vec{\gamma}\,'(\tau)|=|\vec{r}\,'(u(\tau))u'(\tau)|=|\vec{r}\,'(u(\tau))|\,u'(\tau).$$

故

$$\int_\alpha^\beta|\vec{\gamma}\,'(\tau)|\,d\tau=\int_\alpha^\beta|\vec{r}\,'(u(\tau))|\,u'(\tau)d\tau=\int_a^b|\vec{r}\,'(t)|\,dt.$$

¶ 弧长参数化

曲线是一个几何对象，参数化是我们看待/处理该曲线的手段。

Q: 有没有一种比较好的（自然的）参数化?

A: 有，用**弧长**作参数!

设 $\vec{r}=\vec{r}(t)\quad(a\le t\le b)$ 为正则曲线。对于任意 t，从起点 $\vec{r}(a)$ 到 $\vec{r}(t)$ 这一段曲线的长度为

$$s(t)=\int_a^t|\vec{r}\,'(\tau)|\,d\tau\quad(a\le t\le b).$$

于是得到函数 $s:[a,b]\to[0,l]$，其中 l 为 $\vec{r}$ 的长度。由 $\vec{r}$ 正则可知

$$s'(t)=|\vec{r}\,'(t)|>0.$$

故由反函数定理，存在可微的反函数 $t:[0,l]\to[a,b]$。于是可以用弧长 s 作参数：

$$\vec{r}=\vec{r}(t(s)),\quad 0\le s\le l.$$

这个参数方程称为该曲线的弧长参数方程，它是一种自然的几何参数方程。由

$$\vec{r}\,'(s)=\vec{r}\,'(t(s))t'(s)=\frac{\vec{r}\,'(t(s))}{|\vec{r}\,'(t(s))|}$$

可知 $\vec{r}\,'(s)$ 是 $\vec{r}(s)$ 处的**单位切向量**。记号：$\dot{\vec{r}}(s)=\frac{d}{ds}\vec{r}(s),\ddot{\vec{r}}(s)=\frac{d^2}{ds^2}\vec{r}(s)$。

例 2.6.7

考虑曲线 $\vec{r}(t)=\langle\cos t,\sin t,t\rangle,\quad 0\le t\le 2\pi$. 则由 $|\vec{r}\,'(t)|=\sqrt{2}$ 可知弧长参数$s(t)=\sqrt{2}t$. 其反函数为$t=\frac{s}{\sqrt{2}}$。故该曲线的弧长参数化为

$$\vec{r}(s)=\langle\cos\frac{s}{\sqrt{2}},\sin\frac{s}{\sqrt{2}},\frac{s}{\sqrt{2}}\rangle,\quad 0\le s\le 2\sqrt{2}\pi$$

¶ 曲线的曲率

有了切向量与弧长，就可以进一步研究曲线的“弯曲”程度。

定义 2.6.8: 曲率

设 $\vec{r}=\vec{r}(t)$ 是具有连续二阶导数的正则曲线。对于任意 $P_0=\vec{r}(t_0)$，称 P_0 处切线指关于弧长的变化率为曲线在该点处的**曲率**，即

$$k(P_0)=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right|.$$

其中 $\Delta\theta$ 为切线角度的变化量（即切线夹角），Δs 为一小段弧的弧长。
【直观：“弯曲程度越大，则曲率越大”】