

那么, 如何计算曲率呢? 先考虑弧长参数 s 。则由右上图可知

$$\left| \dot{\vec{r}}(s + \Delta s) - \dot{\vec{r}}(s) \right| = 2 \sin \frac{\Delta\theta}{2} = \Delta\theta + o(\Delta\theta),$$

从而弧长参数下曲率的计算公式为

$$k = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\theta}{\Delta s} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\left| \dot{\vec{r}}(s + \Delta s) - \dot{\vec{r}}(s) \right|}{\Delta s} = \left| \ddot{\vec{r}}(s) \right|.$$

如果不是弧长参数, 该如何求曲率? [注意: $s(t)$ 的反函数 $t(s)$ 一般不易显式解出] 一种方法是由 $\dot{\vec{r}}(s) = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot t'(s) = \frac{\vec{r}'(t(s))}{|\vec{r}'(t(s))|}$ 直接对 s 求导, 其公式与计算过程见课本 P102 开头, 较为复杂。另一种略微简单的推导如下: 由 $\vec{r}'(t) = \dot{\vec{r}}(s)s'(t)$ 可得

$$\vec{r}''(t) = \ddot{\vec{r}}(s)(s'(t))^2 + \dot{\vec{r}}(s)s''(t).$$

两边与 $\vec{r}'(t) = \dot{\vec{r}}(s)s'(t)$ 做叉乘:

$$\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) = (\dot{\vec{r}}(s)s') \times (\ddot{\vec{r}}(s)(s')^2 + \dot{\vec{r}}(s)s'') = (s')^3(\dot{\vec{r}}(s) \times \ddot{\vec{r}}(s)).$$

由于 $|\dot{\vec{r}}(s)| = 1$, 结合推论 2.6.2 可得 $\dot{\vec{r}}(s) \perp \ddot{\vec{r}}(s)$ 。故 $|\vec{r}' \times \vec{r}''| = |\dot{\vec{r}}| |\ddot{\vec{r}}| = 1 \cdot k = k$ 。最后, 因为 $s'(t) = |\vec{r}'(t)|$, 所以我们得到一般参数下曲率的计算公式

$$k = \frac{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|}{|\vec{r}'(t)|^3}.$$

注 2.6.9: 法向量

设 $\ddot{\vec{r}}(s) \neq \vec{0}$, 则由 $\dot{\vec{r}}(s) \perp \ddot{\vec{r}}(s)$, $\dot{\vec{r}}(s) \times \ddot{\vec{r}}(s) \perp \dot{\vec{r}}(s)$ 。可知 $\dot{\vec{r}}(s)$ 和 $\dot{\vec{r}}(s) \times \ddot{\vec{r}}(s)$ 为曲线在 $\vec{r}(s)$ 处的两个互相垂直的法向量! 它们分别叫主法向量与次法向量。

例 2.6.10: 螺旋线曲率

$$\vec{r}(t) = \langle \cos t, \sin t, t \rangle.$$

解: 求导可得

$$\vec{r}'(t) = \langle -\sin t, \cos t, 1 \rangle, \quad \vec{r}''(t) = \langle -\cos t, -\sin t, 0 \rangle.$$

于是

$$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{2}, \quad \vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) = \langle \sin t, -\cos t, 1 \rangle.$$

从而

$$k = \frac{\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1}}{(\sqrt{2})^3} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

¶ 平面曲线的曲率

下设 $\vec{r} = \vec{r}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle$ 是平面正则参数曲线。此时副法向量

$$\vec{k}(t) = \vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) = \frac{\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)}{|\vec{r}'(t)|^3} = \frac{\langle x', y', 0 \rangle \times \langle x'', y'', 0 \rangle}{|\vec{r}'(t)|^3} = \frac{\langle 0, 0, x'y'' - x''y' \rangle}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}}.$$

我们称

$$k = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}}.$$

为该平面曲线的曲率。对于这种带符号的曲率，有着几何意义：

- $k > 0$ 时， $\vec{r}', \vec{r}'', \langle 0, 0, 1 \rangle$ 成右手系 \implies 曲线向左弯（逆时针）
- $k < 0$ 时， $\vec{r}', \vec{r}'', \langle 0, 0, 1 \rangle$ 成左手系 \implies 曲线向右弯（顺时针）。

例 2.6.11: 摆线

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad (a > 0, 0 < t < 2\pi).$$

$$k = \frac{(a - a \cos t)(a \cos t) - a \sin t \cdot a \sin t}{[(a - a \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t]^{3/2}} = \frac{a^2(\cos t - 1)}{(2a^2(1 - \cos t))^{3/2}} = \frac{-1}{4a \left| \sin \frac{t}{2} \right|}.$$

[书上符号弄反了!]

注 2.6.12: 显式与隐式平面曲线

1. 若平面曲线由 $y = f(x)$ 给出，则 $\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$ 代入可得：

$$k = \frac{f''(x)}{(1 + (f'(x))^2)^{3/2}}.$$

2. 还可以考虑平面隐式曲线，即由 $F(x, y) = 0$ 给出，其中 $\nabla F \neq \vec{0}$ 。不妨设 $F_y \neq 0$ ，则其隐函数 $y = f(x)$ 可导，且由隐函数定理：

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}.$$

切线方程 $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \rightsquigarrow F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$.

曲率计算（需要二阶导）：

$$f''(x) = \frac{d}{dx} \left(-\frac{F_x}{F_y} \right) = -\frac{[F_{xx} + F_{xy}y']F_y - F_x[F_{yx} + F_{yy}y']}{F_y^2}.$$

代入 $y' = -F_x/F_y$ 并整理得：

$$k = \frac{-F_{xx}F_y^2 + 2F_{xy}F_xF_y - F_{yy}F_x^2}{(F_x^2 + F_y^2)^{3/2}}.$$

注意：由对称性可知，对 $F_x \neq 0$ 所得方程及曲率表达式完全一样！

2.7 多元函数 Taylor 展开及应用

2.7.1 多元函数的 Taylor 展开

我们知道，若多元函数可微，则它有线性逼近。例如对于二元函数：

$$f(x, y) = \underbrace{f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)}_{\text{线性逼近} = \text{“一次函数逼近”}} + o\left(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\right)$$

接下来很自然的事情是：用多次多项式函数，构建更好的逼近。在数分（B1）中，大家已经学过相应的理论，即若 $y = \varphi(x)$ 是 n 阶可微的，则

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}\varphi''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n),$$

且若 φ 是 $n + 1$ 阶可导，则余项具有形式 $o((x - x_0)^n) = \frac{1}{(n+1)!}\varphi^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))$.

对于多元函数而言，理论非常类似。唯一的区别在于：多元函数有多个一阶偏导，更多的二阶偏导（ m^2 个），非常多的三阶偏导... 所以，Taylor 展开的形式就更复杂了！

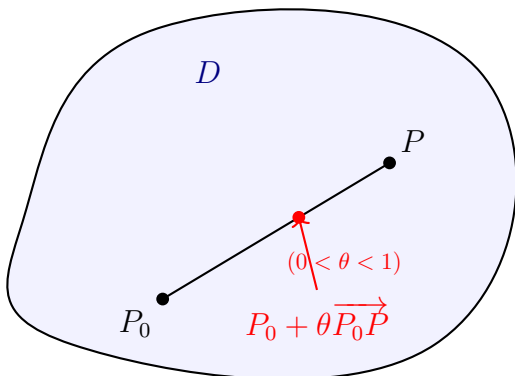
定理 2.7.1: 多元函数 Taylor 展开

设 f 是定义在点 P_0 的邻域 D 上的 m 元函数，且 $f \in C^{n+1}(D)$ （即所有 $n + 1$ 阶偏导数都连续）。设 $P \in D$ ，且 P, P_0 的连线在 D 内。记 $\overrightarrow{P_0P} = \langle h_1, h_2, \dots, h_m \rangle$ 。则

$$\begin{aligned} f(P) &= f(P_0) + \sum_{i=1}^m f'_{x_i}(P_0)h_i + \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^m f''_{x_i x_j}(P_0)h_i h_j + \dots \\ &\quad + \frac{1}{n!} \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^m f^{(n)}_{x_{i_1} \dots x_{i_n}}(P_0)h_{i_1} \dots h_{i_n} + R_n \end{aligned}$$

其中余项 R_n 可以写成 Lagrange 形式：

$$R_n = \frac{1}{(n + 1)!} \sum_{i_1, \dots, i_{n+1}=1}^m f^{(n+1)}_{x_{i_1} \dots x_{i_{n+1}}}(P_0 + \theta \overrightarrow{P_0P})h_{i_1} \dots h_{i_{n+1}}, \quad (0 < \theta < 1)$$



在证明 Taylor 展开前, 先给出多元函数的中值公式 (请把它引理 2.4.16 作对比!)。

定理 2.7.2: 多元函数微分中值定理

设 f 是定义在 P_0 的邻域 D 上的 m 元 C^1 函数。若 $P \in D$ 且线段 $P_0P \subset D$, 则 $\exists 0 < \theta < 1$ 使得

$$f(P) - f(P_0) = \sum_{i=1}^m h_i f'_{x_i}(P_0 + \theta \overrightarrow{P_0P}) = \nabla f(P_0 + \theta \overrightarrow{P_0P}) \cdot \overrightarrow{P_0P}$$

其中 $\overrightarrow{P_0P} = \langle h_1, \dots, h_m \rangle$ 。

注 2.7.3

向量值函数没有类似的中值公式:

取 $\vec{r}(t) = \langle \cos t, \sin t \rangle$, 则 $\vec{r}(2\pi) - \vec{r}(0) = \vec{0}$, 但不存在 θ 使得 $\vec{r}'(\theta) = \vec{0}$ 。

但是, 向量值函数满足微分中值不等式, 见本章综合习题第12题。

证明: 将线段 P_0P 参数化为 $P_0 + t\overrightarrow{P_0P}$ ($0 \leq t \leq 1$), 则 f 在线段上的限制是

$$\varphi(t) = f(P_0 + t\overrightarrow{P_0P})$$

这是一个一元函数。应用一元函数中值定理, 可知存在 $0 < \theta < 1$ 使得

$$f(P) - f(P_0) = \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\theta) = \sum_{i=1}^m f'_{x_i}(P_0 + \theta \overrightarrow{P_0P}) \cdot h_i.$$

□

多元函数 Taylor 公式的证明: 同样的方法, 令 $\varphi(t) = f(P_0 + t\overrightarrow{P_0P})$ 。则

$$f(P) = \varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{1}{2!}\varphi''(0) + \dots + \frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(0) + \frac{1}{(n+1)!}\varphi^{(n+1)}(\theta)$$

再由链式法则, 注意 $\overrightarrow{P_0P} = \langle h_1, \dots, h_m \rangle$ 是常向量:

$$\begin{aligned} \varphi'(0) &= \sum_{i=1}^m h_i f'_{x_i}(P_0) \\ \varphi''(0) &= \left[\sum_{i=1}^m h_i f_{x_i}(P_0 + t\overrightarrow{P_0P}) \right]'_{t=0} \\ &= \sum_{i=1}^m h_i \left(\sum_{j=1}^m f''_{x_i x_j}(P_0) h_j \right) = \sum_{i,j=1}^m f''_{x_i x_j}(P_0) h_i h_j \end{aligned}$$

归纳可得所有 $\varphi^{(k)}(0)$ 的公式, 即得结论。

□

例 2.7.4: Taylor 展开计算

求 $f(x, y) = e^x \cos y$ 在 $P_0 = (0, 0)$ 处的 Taylor 展开 (到二阶)。

解: 法一 (直接求导):

- $f(0, 0) = 1$
- $f_x = e^x \cos y \implies f_x(0, 0) = 1$
- $f_y = -e^x \sin y \implies f_y(0, 0) = 0$
- $f_{xx} = e^x \cos y \implies f_{xx}(0, 0) = 1$
- $f_{xy} = -e^x \sin y \implies f_{xy}(0, 0) = 0$
- $f_{yy} = -e^x \cos y \implies f_{yy}(0, 0) = -1$

代入公式可得

$$\begin{aligned} e^x \cos y &= 1 + (1 \cdot x + 0 \cdot y) + \frac{1}{2}(1 \cdot x^2 + 2 \cdot 0 \cdot xy + (-1)y^2) + o(\rho^2) \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + o(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

法二 (利用已知的一元展开):

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2), \quad \cos y = 1 - \frac{1}{2}y^2 + o(y^2)$$

相乘 (注意保留到二次项):

$$\begin{aligned} e^x \cos y &= \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right) \left(1 - \frac{1}{2}y^2 + o(y^2)\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2}y^2 + x - \frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^2y^2 + \dots \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + o(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

法三 (复数技巧): 此函数背后藏着复数! 根据

$$z = x + iy \implies e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$$

可得

$$\begin{aligned} e^x \cos y &= \operatorname{Re}(e^z) = \operatorname{Re}\left(1 + z + \frac{1}{2}z^2 + o(|z|^2)\right) \\ &= \operatorname{Re}\left(1 + (x + iy) + \frac{1}{2}(x^2 - y^2 + 2ixy)\right) + \dots \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}(x^2 - y^2) + o(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

同理可以展开更多项!

□

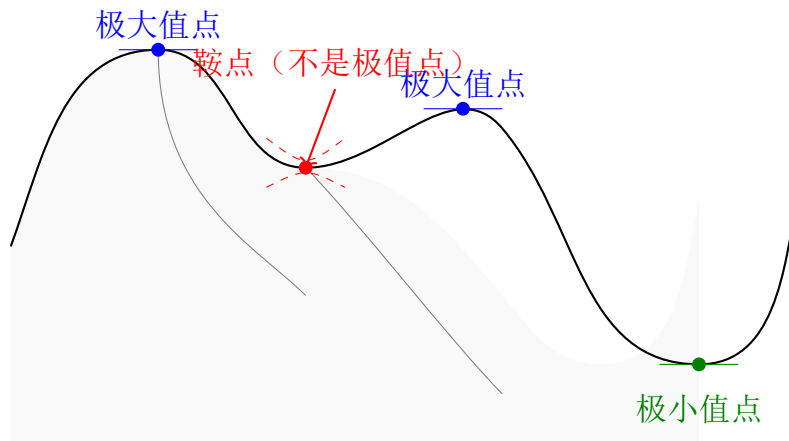
2.7.2 多元函数的极值

¶ 极值点，驻点

类似于一元函数，可以用微分/导数研究多元函数的极值问题。

定义 2.7.5: 极值

若 $\exists P_0$ 的邻域 D 使得 $f(P) \geq f(P_0), \forall P \in D$, 则称 P_0 是 f 的极小值点。反之称为极大值点。统称极值点。



类似于一元函数，一阶导（偏导）是判定一点是否是极值点的必要但不充分条件。

定理 2.7.6: 极值的必要条件

若 P_0 是 f 的极值点，并且 $f_{x_1}(P_0), \dots, f_{x_m}(P_0)$ 都存在，则

$$f_{x_1}(P_0) = \dots = f_{x_m}(P_0) = 0$$

这样的点称为驻点。

证明： 若 f 在 P_0 处取极值，则 f 在每条坐标轴方向曲线上也都在 P_0 处取极值，于是 f 的所有偏导数在 P_0 处为 0。□

注 2.7.7

驻点只是极值点的必要条件，但不能仅用驻点就分辨极大与极小。例如，

- $f(x, y) = x^2 + y^2$ 在 $(0, 0)$ 是极小值点。
- $f(x, y) = -x^2 - y^2$ 在 $(0, 0)$ 是极大值点。
- $f(x, y) = y^3$ 在 $(a, 0)$ 处既不是极大值点也不是极小值点。
- $f(x, y) = x^2 - y^2$ 在 $(0, 0)$ 是驻点，但不是极值点，而是鞍点。