

3.1 二重积分

3.1.1 长方形区域上的积分

¶ 回顾一元积分理论

考虑 $[a, b]$ 上函数的Riemann积分, 其定义可分为三步 (“Riemann三板斧”):

第1步 常数 C 的积分定义为 $\int_a^b C dx = C(b-a)$ 。

第2步 将 $[a, b]$ 细分 $P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, 使得每个区间长度 $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ 都充分小 (且 $\Delta x_k \rightarrow 0$)。

要点: 若 f 连续 (或有界且只在少量点处不连续), 则 f 在 (几乎) 每个小区间 $[x_{k-1}, x_k]$ 上几乎是常数, 于是由第1步可知

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx \approx \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_k^*) dx = f(x_k^*) (x_k - x_{k-1}), \quad \text{其中 } x_k^* \in [x_{k-1}, x_k]$$

第3步 将这些量叠加并求极限【极限的存在性是由(一致)连续性保证的】, 就得到函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的积分

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k$$

性质 3.1.1: 一元函数积分的基本性质

- [线性性] $\int_a^b (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int_a^b f dx + \beta \int_a^b g dx$ 。
- [保序性] $f \leq g \implies \int_a^b f dx \leq \int_a^b g dx$ 。
- [中值定理] 若 f 连续, 则 $\exists \xi \in [a, b]$ 使得 $\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a)$ 。
- [可加性] $\int_a^b f dx = \int_a^c f dx + \int_c^b f dx$ 。

¶ 矩形上二重积分的定义

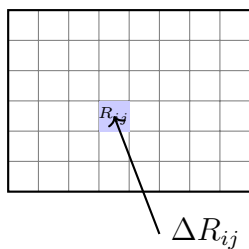
对于二维长方形区域 $R = [a, b] \times [c, d]$, 我们同样可以祭起Riemann三板斧,

第1步 常数 C 的积分 定义为 $\iint_R C dx dy = C \cdot \text{Area}(R) = C(b-a)(d-c)$

- 几何意义: 底面为 R , 高为 C 的长方体体积。
- 物理意义: 密度为 R 的长方形物体质量。

第2步 将 R 细分, 即 $R = \bigcup_{i,j} R_{ij}$, 其中每个小矩形 $R_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ 都充分小

- x 轴方向: $P_x: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ (每个 $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ 都很小)
- y 轴方向: $P_y: c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d$ (每个 $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$ 都很小)



要点： 设 f 连续，且 $\Delta x_i, \Delta y_j$ 都充分小，则 f 在 R_{ij} 上几乎是常数，从而

$$\iint_{R_{ij}} f(x, y) dx dy \approx \iint_{R_{ij}} f(P_{ij}^*) dx dy = f(P_{ij}^*) \Delta R_{ij}$$

第3步 将这些量叠加并求极限，就得到函数 $f(x, y)$ 在矩形 R 上的积分：

定义 3.1.2: 矩形 R 上的二重积分

$$\iint_R f(x, y) dx dy := \lim_{n, m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} f(P_{ij}^*) \Delta R_{ij} \quad (\dagger)$$

右边的和式称为黎曼和。

当然，上述极限的存在性并非不证自明的。对于连续函数，可以证明极限总存在：

命题 3.1.3: 可积性

设 f 在 $R = [a, b] \times [c, d]$ 上连续，则极限 $(\dagger)$ 存在。

证明思路： 由于 f 在有界闭集 R 上连续，可以证明它一致连续，即

对于任意 $\varepsilon > 0$ ，存在 $\delta > 0$ (仅依赖于 ε) 使得只要 $d(P, Q) < \delta$ ，就有 $|f(P) - f(Q)| < \varepsilon$ 。

取 m, n 充分大，使得每个 R_{ij} 的直径都小于 δ 。设 U_{ij} 和 L_{ij} 分别是 f 在 R_{ij} 上的最大值和最小值，则 $0 \leq U_{ij} - L_{ij} \leq \varepsilon$ 。这说明 Darboux 上和 $U(n, m)$ 与下和 $L(n, m)$ 满足

$$L(n, m) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} L_{ij} \Delta R_{ij} \leq \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} f(P_{ij}^*) \Delta R_{ij} \leq \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} U_{ij} \Delta R_{ij} = U(n, m)$$

且

$$U(n, m) - L(n, m) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} (U_{ij} - L_{ij}) \Delta R_{ij} \leq \varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \Delta R_{ij} = \varepsilon (b-a)(d-c)$$

另一方面，如果把 $n \times m$ 划分加密为 $2n \times 2m$ 划分，显然有

$$L(n, m) \leq L(2n, 2m) \leq \cdots \leq U(2n, 2m) \leq U(n, m).$$

于是由单调有界原理可知在加倍划分下极限存在。对于更一般的划分，上述极限点存在性可通过“公共加细”的方法证明，此处略去该技术性细节。 $\square$

跟一元积分类似, 矩形上的积分有如下基本性质:

性质 3.1.4: 矩形上的积分基本性质

1. [线性性] $\iint_R (\alpha f + \beta g) = \alpha \iint_R f + \beta \iint_R g$ 。
2. [保序性] $f \leq g \implies \iint_R f \leq \iint_R g$ 。
3. [可加性] 若 $a < e < b$, 则 $\iint_{[a,b] \times [c,d]} f = \iint_{[a,e] \times [c,d]} f + \iint_{[e,b] \times [c,d]} f$ 。
4. [中值定理] 若 f 连续, 则 $\exists P \in R$ 使得 $\iint_R f dx dy = f(P) \cdot (b-a)(d-c)$ 。

证明: 前三条是比较显然的, 仅证明(4): 由连续性以及 R 有界闭可知 $\exists P_1, P_2 \in R$ 使得 $f(P_1) \leq f(x, y) \leq f(P_2)$ 。于是 $f(P_1)\text{Area}(R) \leq \iint f \leq f(P_2)\text{Area}(R)$, 即 $\frac{1}{\text{Area}(P)} \iint f$ 是介于 $f(P_1)$ 和 $f(P_2)$ 之间的一个数。再由 R 的连通性和连续函数的介值性就得到该结论。 $\square$

¶ 矩形二重积分化为累次积分

那么怎么算 $\iint_R f(x, y) dx dy$? 在一元微积分里, 算 $\int_a^b f(x) dx$ 的方法是求原函数 F , 然后计算 $F(b) - F(a)$ 。对于多元函数而言, 并不存在这样一个“原函数”使得它在某点的值给出了所求的积分¹。不过, 我们可以通过把二重积分转化为累次积分的方法, 用一元微积分的技巧去计算。

累次积分的原理: 在 (†) 中, 选取特定的点 $P_{ij}^* = (\xi_i, \eta_j)$ 。则黎曼和变成

$$\sum_i \sum_j f(\xi_i, \eta_j) \Delta x_i \Delta y_j = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{m-1} f(\xi_i, \eta_j) \Delta y_j \right) \Delta x_i$$

若令 $\varphi(x) = \int_c^d f(x, y) dy$, 则由一元微积分,

$$\varphi(\xi_i) = \int_c^d f(\xi_i, y) dy \approx \sum_{j=0}^{m-1} f(\xi_i, \eta_j) \Delta y_j$$

于是

$$\sum_i \sum_j f(\xi_i, \eta_j) \Delta x_i \Delta y_j \approx \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(\xi_i) \Delta x_i \rightarrow \int_a^b \varphi(x) dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

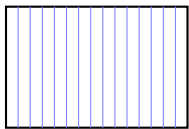
另一方面, 上式左边的Riemann和的极限应该是 $\iint_R f(x, y) dx dy$ 。所以, 我们要算的二重积分 $\iint_R f(x, y) dx dy$ 就等于上式右端的累次积分。换言之, 在计算二重积分时, 可以先把 $f(x, y)$ 当做 y 的函数 (有点像求偏导数时的情形) 进行积分, 所得的结果此时是一个关于 x 的函数, 对它再进行积分就得到矩形上二重积分的值。

同理, 在上述过程中也可以先算 x 积分 (得到 y 的函数), 后算 y 积分, 从而我们得到

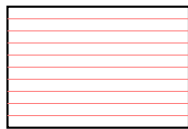
¹在一定意义下确实可以建立内部积分与边界积分之间的关系, 这是下一章的主题。

定理 3.1.5: Fubini 定理 (矩形情形)

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

先积 y (定 x)

$$\int (\int f dy) dx$$

先积 x (定 y)

$$\int (\int f dx) dy$$

注 3.1.6

变量与上下限要配对, $\int_a^b (\int_c^d f(x, y) dy) dx \neq \int_a^b (\int_c^d f(x, y) dx) dy$ 。

例 3.1.7: 计算二重积分

$$I = \iint_R xy dx dy, \quad R = [1, 2] \times [0, 1]。$$

解: 先对 x 积分 (把 y 当常数):

$$I = \int_0^1 \left(\int_1^2 xy dx \right) dy = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} x^2 y \right]_{x=1}^{x=2} dy = \int_0^1 \frac{3}{2} y dy = \left[\frac{3}{4} y^2 \right]_0^1 = \frac{3}{4}$$

或者先对 y 积分:

$$I = \int_1^2 \left(\int_0^1 xy dy \right) dx = \int_1^2 \left[\frac{1}{2} xy^2 \right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_1^2 \frac{x}{2} dx = \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^2 = \frac{3}{4}$$

□

例 3.1.8: 选择合适的积分顺序

$$I = \iint_R x \cos(xy) dx dy, \quad R = [0, \pi] \times [0, 1]。$$

解: 若先对 x 积分, 可得

$$I = \int_0^1 \int_0^\pi x \cos(xy) dx dy = \int_0^1 \left[x \frac{1}{y} \sin(xy) \Big|_{x=0}^\pi - \int_0^\pi \frac{1}{y} \sin(xy) dx \right] dy = \dots$$

需要分部积分, 较繁琐(可以算出来)。若先对 y 积分, 则很简单:

$$I = \int_0^\pi \left(\int_0^1 x \cos(xy) dy \right) dx = \int_0^\pi [\sin(xy)]_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^\pi \sin x dx = 2$$

【由此可见, 选择合适的顺序开始计算非常重要!】

□

3.1.2 一般区域 D 上的积分

¶ 一般区域 D 上积分的定义

从区间的积分到长方形上的积分，基本上是“自然推广”，虽然维数上升了，但通过累次积分的方法，还是还原到了一元函数积分。那么，多重积分理论里面，新的现象是什么？二维跟一维相比，最大的新现象在于**积分区域**：一维时本质上都是在区间上积分，二维时可以在各种奇形怪状上积分！

现设 D 为平面有界闭区域。跟之前类似，可以祭起我们的Riemann三板斧：

第1步 定义常数 C 的积分为 $\iint_D C dx dy = C \cdot \text{Area}(D)$ 。

- 几何意义/物理意义同前

第2步 分割+逼近：把区域 D 分成很多小块 D_{ij} ，使得每个 D_{ij} 的直径充分小，从而

$$\iint_{D_{ij}} f(x, y) dx dy \approx f(P_{ij}^*) \text{Area}(D_{ij})$$

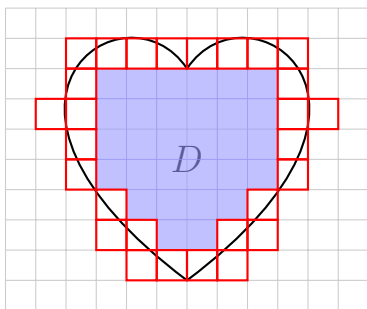
第3步 求黎曼和的极限，得到 $f(x, y)$ 在 D 上的积分

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{D_{ij} \rightarrow 0} \sum f(P_{ij}^*) \text{Area}(D_{ij})$$

特别的，区域面积就是1的积分： $\text{Area}(D) = \iint_D 1 dx dy$ 。

注 3.1.9: 多元微积分中的爱情故事(上)

这就是为什么当你的另一半想精确知道你到底有多爱她/他时，会不小心“割碎”你的心。割得越碎，答案才约精确！



¶ Jordan 可测集

但是，这里还有一个意料之外的新现象需要小心处理：对于一般的平面点集 D ，它的**面积**是什么？事实上，并非任意点集都可以定义面积。

怎么判定一个区域是否有面积，以及对于有面积的区域，其面积是怎么定义的？因为面积本质上就是常数 1 的积分，所以我们可以借用定义黎曼积分的方式[何时黎曼积分存在？“Darboux上和”=“Darboux下和”。何时面积存在？“上面积”=“下面积”]：

设 D 是有界集， $D \subset [a, b] \times [c, d]$ 。将后者细分成很多边长为 h 的小正方形。令

- $A_L(h, D)$ = 完全包含在 D 内的方块(对于心形, 就是上图中那些蓝色正方形)的面积和。
- $A_U(h, D)$ = 与 D 有交集的方块(对于心形, 就是上图中那些蓝色和红色正方形)的面积和。

显然 $A_L(h, D) \leq A_L(\frac{1}{2}h, D) \leq \cdots \leq A_U(\frac{1}{2}h, D) \leq A_U(h, D)$ 。

于是自然考虑“下面积”和“上面积”

$$A_L(D) := \lim_{h \rightarrow 0} A_L(h, D), \quad A_U(D) := \lim_{h \rightarrow 0} A_U(h, D).$$

定义 3.1.10: Jordan 测度

若 $A_L(D) = A_U(D)$, 则称 D 是 **Jordan 可测集** (即“有面积”集), 且称 $A(D) = A_L(D) = A_U(D)$ 为其 **Jordan 测度** (即面积)。

注 3.1.11

事实上, D 是 Jordan 可测集 $\iff \partial D$ 是 Jordan 可测且其 Jordan 测度为零。

关于面积, 有以下基本性质:

性质 3.1.12: 面积的基本性质

1. 若 $D_1 \subset D_2$ 且都有面积, 则 $\text{Area}(D_1) \leq \text{Area}(D_2)$ 。
2. 若 D_1, D_2 都有面积只在边界上相交, 则 $\text{Area}(D_1 \cup D_2) = \text{Area}(D_1) + \text{Area}(D_2)$ 。
3. $\text{Area}(\text{矩形 } [a, b] \times [c, d]) = (d - c)(b - a)$ 。

例 3.1.13: 无面积集示例

$$D = \mathbb{Q}^2 \cap ([0, 1] \times [0, 1]) = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{Q}, 0 \leq x_1, x_2 \leq 1\}.$$

则对于任意分割, 均有:

- $A_L(h, D) = 0$ (因为每个方块内都有无理点, 不可能完全包含在 D 内)。
- $A_U(h, D) = 1$ (因为每个方块都是边界块!)。

故 $A_L(D) = 0 \neq A_U(D) = 1$, 从而 D 不是 Jordan 可测集。

例 3.1.14: 圆盘的可测性

$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ 。当 h 充分小时, 作半径分别为 $1 - 2h$ 和 $1 + 2h$ 的两个辅助圆。则“所有内部块”合在一起包含了半径为 $1 - 2h$ 的小圆, 而“所有内部和边界块”均包含于半径为 $1 + 2h$ 的大圆中。故

$$\pi(1 - 2h)^2 \leq A_L(h, D) \leq A_U(h, D) \leq \pi(1 + 2h)^2$$

令 $h \rightarrow 0$ 可得 $A_L(D) = A_U(D) = \pi$ 。