

第五章 傅里叶变换光学

第一节 衍射系统的屏函数和相因子判断法

5.1 衍射系统的屏函数和相因子判断法

5.1.1 傅里叶变换光学概述

5.1.2 衍射系统及其屏函数

5.1.3 相因子分析法

5.1.4 相位衍射元件的位相变换函数及分析

5.1.5 夫琅禾费衍射场的实现装置和标准形式

5.1.1 傅里叶变换光学概述

现代光学的三件大事

- 全息术—1948年
- 像质评价的传递函数—1955年
- 激光器—1960年



Joseph Fourier
(1768-1830)
法国科学家
研究领域：数学、物理、历史

傅里叶变换光学的基本思想

引入变换的概念，将数学上周期信号的傅里叶级数展开应用于光学，对应于将复杂的图像分解为一系列单频信息的合成。

主要内容

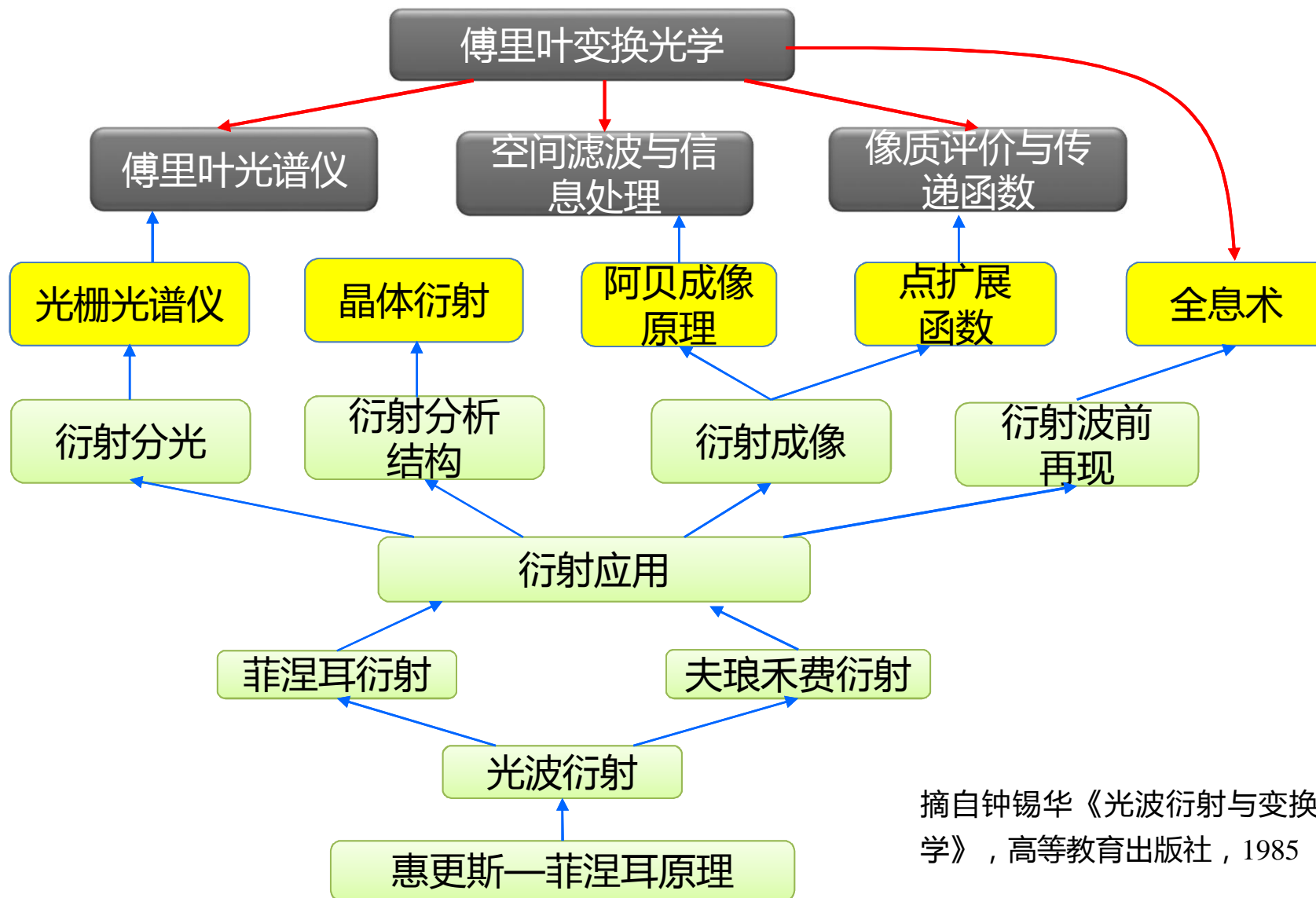
- (1) 光场的空间频谱—时间频谱的变换 (傅里叶光谱仪)
- (2) 成像系统中存在的变换关系—物像关系 (光学空间滤波、光学信息处理、光学传递函数、波前再现和全息术)

实现途径

物理器件、物理效应、和物理装置。

5.1.1 傅里叶变换光学概述

傅里叶变换光学与经典波动光学的关系（衍射）



摘自钟锡华《光波衍射与变换光学》，高等教育出版社，1985

5.1.2 衍射系统及其屏函数

衍射屏、空间和场

衍射屏

能使波前的复振幅（**波前函数**）发生改变的物，统称为**衍射屏**。

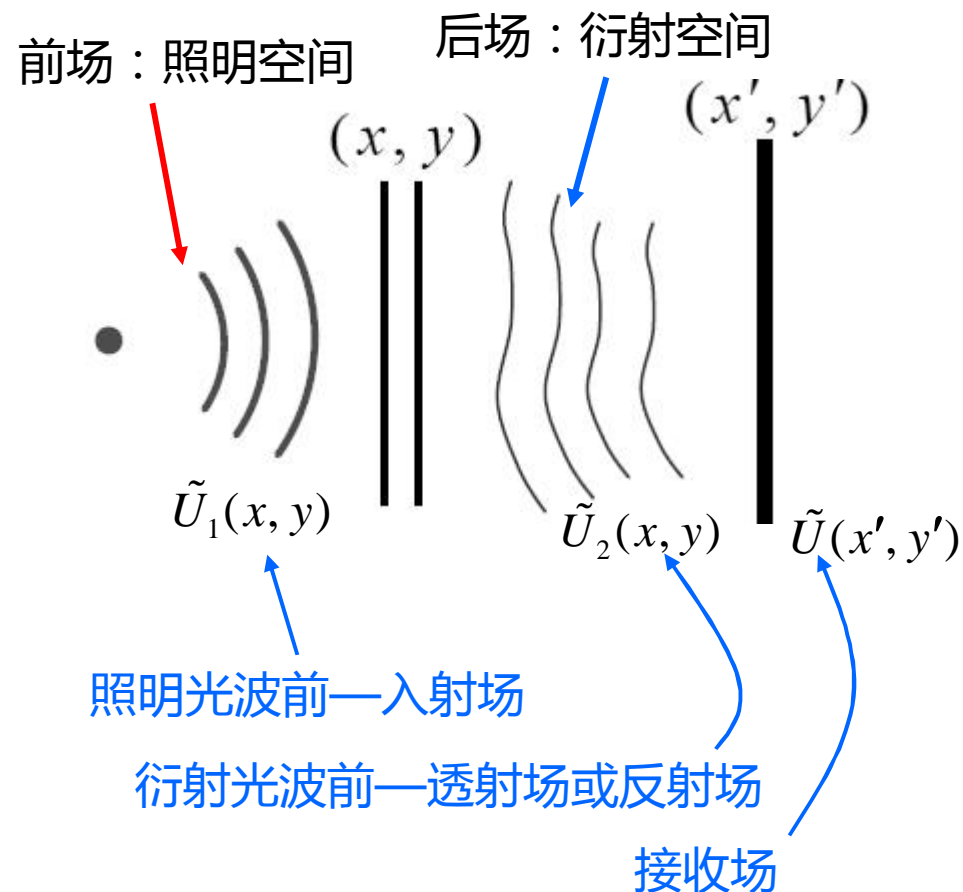
照明空间

衍射屏将波的空间分为前场和后场两部分。前场为照明空间，后场为衍射空间。

入射场、透射场与接收场

波在衍射屏的前后表面处的复振幅或波前函数分别称为入射场、透射场（或反射场），接收屏上的复振幅为接收场。

衍射系统贯穿波前变换



5.1.2 衍射系统及其屏函数

屏函数及其作用

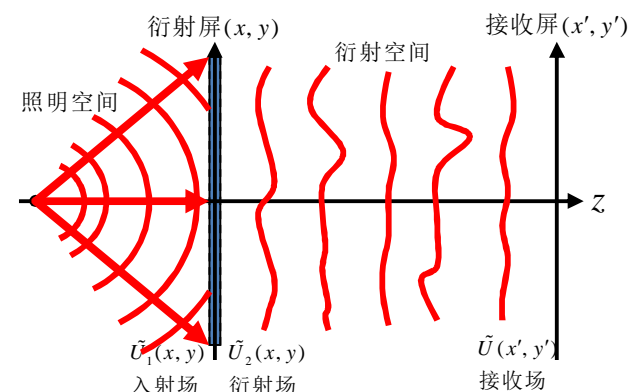
衍射屏的作用是使入射场转换为透射场（或反射场）。用函数表示，就是衍射屏的透过率或反射率函数，统称屏函数。

$$\text{衍射屏函数 } \tilde{t}(x, y) = \frac{\tilde{U}_2(x, y)}{\tilde{U}_1(x, y)}$$

$$\tilde{t}(x, y) = t(x, y) \exp[i\varphi_t(x, y)]$$

屏函数的模。

屏函数的幅角，即相位。



模为常数的衍射屏称为相位型的，如透镜、棱镜等。

幅角为常数的衍射屏称为振幅型的，如单缝、圆孔等。

思考：黑白光栅和正弦光栅是什么类型的衍射屏？二者有何区别？

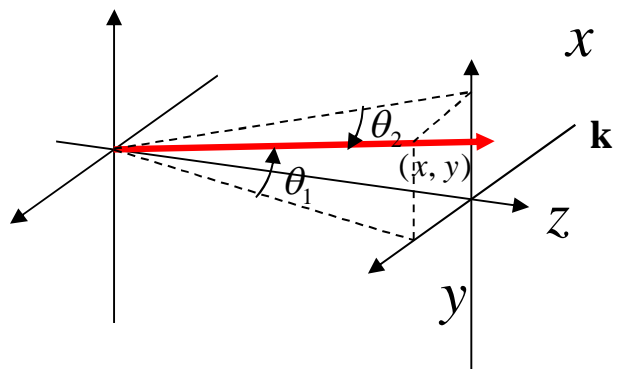
5.1.3 相因子分析法

相因子分析法的基本思路

- (1) 若已知衍射屏的屏函数，就可以确定衍射场，进而完全确定接收场。
- (2) 但由于衍射屏的复杂性以及衍射积分求解的困难，多数情况下解析的完全确定屏函数几乎是不可能的。
- (3) 因此，只能采取一定的近似方法获取衍射场的主要特征。
- (4) 如果知道了屏函数的相位，则能通过研究波的相位改变来确定波场的变化。这种方法称为相因子判断法。
- (5) 分析条件：一般在傍轴近似下进行判断。
- (6) 出发点：平面波与球面波的波动方程的表达形式。
- (7) 认为透镜和棱镜对光的吸收处处相等或无吸收，可忽略振幅的变化，认为是相位型衍射屏。

5.1.3 相因子分析法

近轴条件下典型光波场在平面波前(x,y)上的相因子



平面波 $\exp[ik(\sin \theta_1 x + \sin \theta_2 y)]$

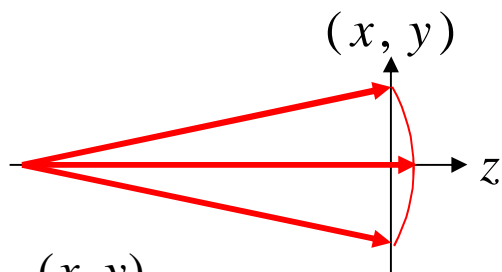
特殊情况1—传播方向平行于X-Z平面($\theta_2=0$)

$$\exp(ik \sin \theta_1 x)$$

特殊情况2—传播方向平行于Z方向($\theta_1=\theta_2=0$)

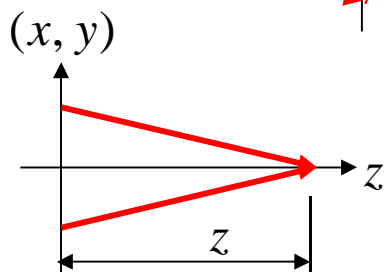
1

轴上物点球面波



发散

$$\exp\left[ik \frac{x^2 + y^2}{2z}\right]$$



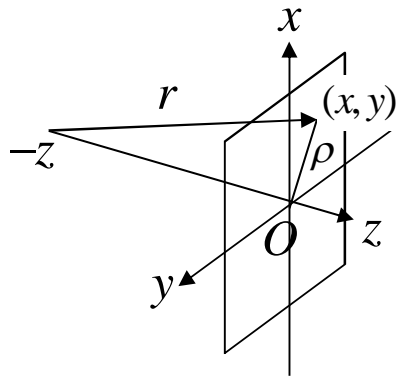
会聚

$$\exp\left[-ik \frac{x^2 + y^2}{2z}\right]$$

5.1.3 相因子分析法

近轴条件下典型光波场在平面波前(x,y)上的相因子

轴上物点球面波(续)



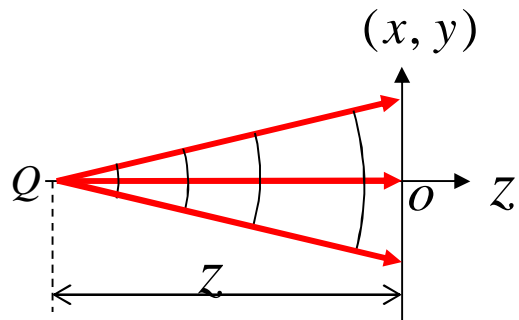
$$(1+x)^\alpha \approx 1 + \frac{\alpha}{2}x, \quad (x \rightarrow 0)$$

$$r = \sqrt{z^2 + \rho^2} = z\sqrt{1 + \frac{\rho^2}{z^2}} = z\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\rho^2}{z^2}\right)$$

$$\exp[ikr] = \exp[ikz] \exp\left[ik \frac{x^2 + y^2}{2z}\right]$$

(1) 若取 $z = 0$ 处相位为 0，即以原点为相位零点，则 xoy 平面上点 (x, y) 的相位因子为

$$\exp\left[ik \frac{x^2 + y^2}{2z}\right]$$



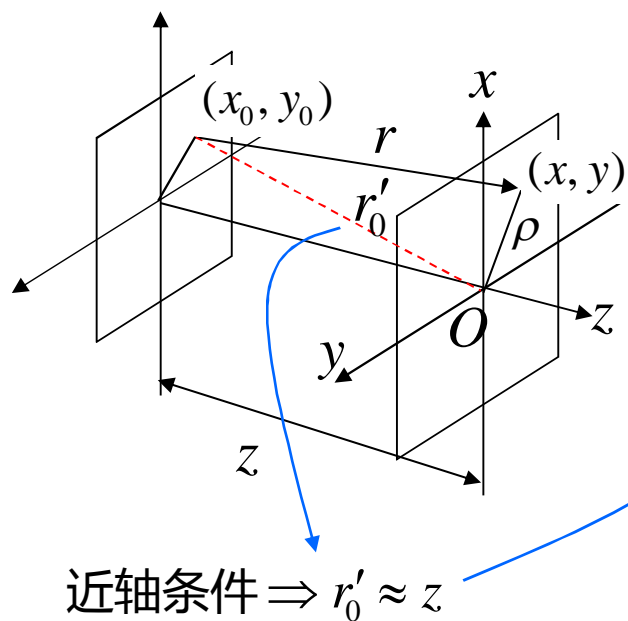
(2) 以物点相位为 0， xoy 平面上点 (x, y) 的相位因子为

$$\exp\left[ikz + ik \frac{x^2 + y^2}{2z}\right]$$

5.1.3 相因子分析法

近轴条件下典型光波场在平面波前(x,y)上的相因子

轴外物点波面相因子的计算



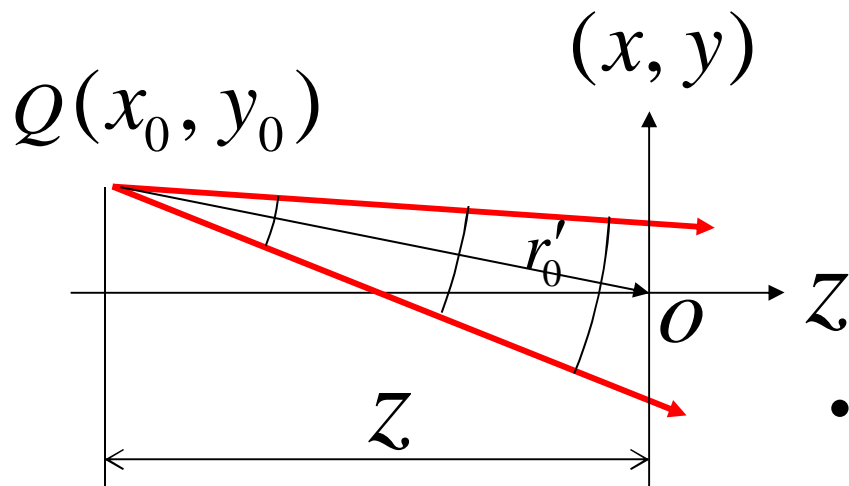
$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2} \\ &= \sqrt{z^2 + x_0^2 + y_0^2 + x^2 + y^2 - 2(xx_0 + yy_0)} \\ &= r_0' \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{r_0'^2} - \frac{2(xx_0 + yy_0)}{r_0'^2}} \\ &\approx r_0' \left(1 + \frac{x^2 + y^2}{2r_0'^2} - \frac{xx_0 + yy_0}{r_0'^2} \right) \\ &\approx r_0' + \frac{x^2 + y^2}{2z} - \frac{xx_0 + yy_0}{z} \end{aligned}$$

$$\exp[ikr] = \exp[ikr_0'] \exp\left[ik\left(\frac{x^2 + y^2}{2z} - \frac{xx_0 + yy_0}{z}\right)\right]$$

5.1.3 相因子分析法

近轴条件下典型光波场在平面波前(x,y)上的相因子

轴外物点波面相因子的计算



- 以原点相位为0 ($z=0$ 处相位为0) , xoy 平面上点 (x, y) 的位相因子

$$\exp\left[ik\left(\frac{x^2 + y^2}{2z} - \frac{xx_0 + yy_0}{z}\right)\right]$$

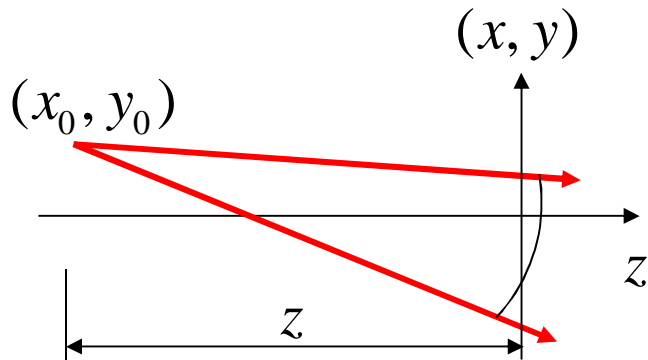
- 以物点相位为0 , xoy 平面上点 (x, y) 的相位因子

$$\exp\left[ikr'_0 + ik\left(\frac{x^2 + y^2}{2z} - \frac{xx_0 + yy_0}{z}\right)\right]$$

5.1.3 相因子分析法

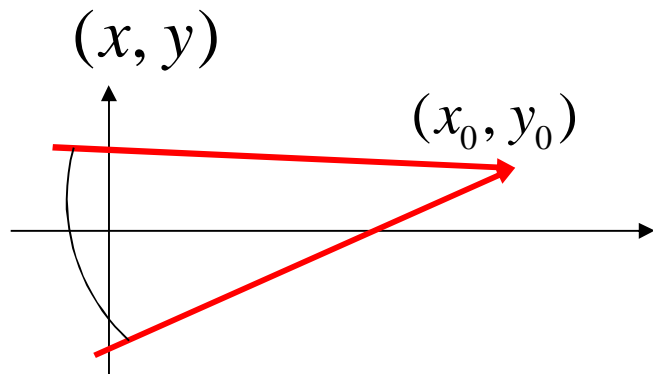
近轴条件下典型光波场在平面波前(x,y)上的相因子

轴外物点球面波



发散球面波

$$\exp\left[ik\left(\frac{x^2 + y^2}{2z} - \frac{xx_0 + yy_0}{z}\right)\right]$$



会聚球面波

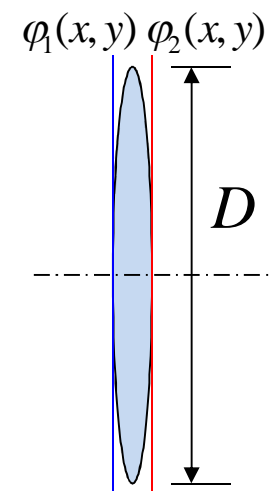
$$\exp\left[-ik\left(\frac{x^2 + y^2}{2z} - \frac{xx_0 + yy_0}{z}\right)\right]$$

5.1.4 相位衍射元件的位相变换函数及分析

透镜的位相变换函数

设透镜的有效口径为 D ，则透镜的位相变换函数为

$$\tilde{t}_L = \frac{A_2}{A_1} \exp[i(\varphi_2 - \varphi_1)] = \begin{cases} a(x, y) e^{i\varphi_L(x, y)}, & r < \frac{D}{2} \\ 0, & r > \frac{D}{2} \end{cases}$$

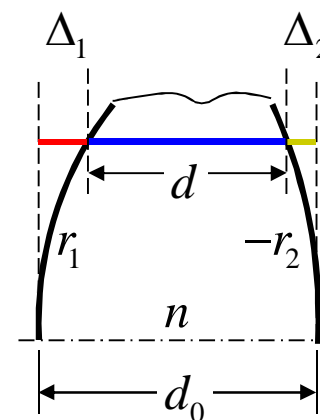
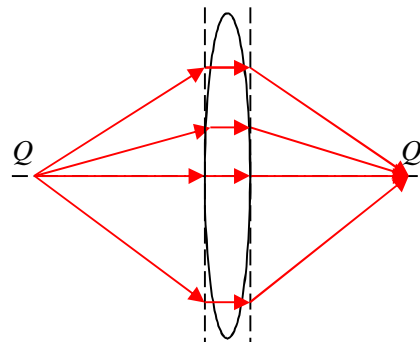


若忽略透镜的吸收，即 $a(x, y) = A_2 / A_1 = 1$

则有 $\tilde{t}_L(x, y) = \exp[i\varphi_L(x, y)] = \exp\{i[\varphi_2(x, y) - \varphi_1(x, y)]\}$

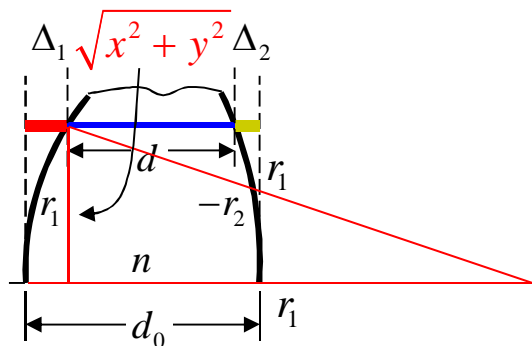
是位相型变换函数，其作用有二：（1）光瞳；（2）波面变换

进行计算的条件：傍轴近似，入射波前、出射波前取平面，此时近似认为透镜中的光波波矢平行于光轴。



5.1.4 相位衍射元件的位相变换函数及分析

透镜位相变换函数的计算



从图上可以求得光波经透镜后的相位差

$$\begin{aligned} \varphi_L(x, y) &= \frac{2\pi}{\lambda} [\Delta_1 + \Delta_2 + nd(x, y)] \\ &= \frac{2\pi}{\lambda} [\Delta_1 + \Delta_2 + n(d_0 - \Delta_1 - \Delta_2)] \\ &= \varphi_0 - \frac{2\pi}{\lambda} (n-1)(\Delta_1 + \Delta_2) \end{aligned}$$

$$\varphi_0 = \frac{2\pi}{\lambda} nd_0$$

$\frac{x^2 + y^2}{r_1^2} \rightarrow 0$ 可用 $(1+x)^\alpha \approx 1 + \frac{\alpha}{2}x$, ($x \rightarrow 0$)

傍轴条件下,

$$\Delta_1(x, y) = r_1 - \sqrt{r_1^2 - (x^2 + y^2)} = r_1 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{r_1^2}} \right) \approx \frac{x^2 + y^2}{2r_1}$$

$$\Delta_2(x, y) = -r_2 - \sqrt{r_2^2 - (x^2 + y^2)} \approx -\frac{x^2 + y^2}{2r_2}$$

$$\varphi_L(x, y) = \varphi_0 - \frac{2\pi}{\lambda} \frac{n-1}{2} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) (x^2 + y^2) = \varphi_0 - k \frac{x^2 + y^2}{2F} \quad F = \frac{1}{(n-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)}$$

5.1.4 相位衍射元件的位相变换函数及分析

透镜位相变换函数的计算（续）

$$\varphi_L(x, y) = \varphi_0 - \frac{2\pi}{\lambda} \frac{n-1}{2} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) (x^2 + y^2) = \varphi_0 - k \frac{x^2 + y^2}{2F} \quad F = \frac{1}{(n-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)}$$

位相变换函数

$$\tilde{t}_L(x, y) = \exp(i\varphi_0) \exp\left[-ik \frac{x^2 + y^2}{2F}\right] = \exp(i\varphi_0) \exp[i\varphi_L]$$

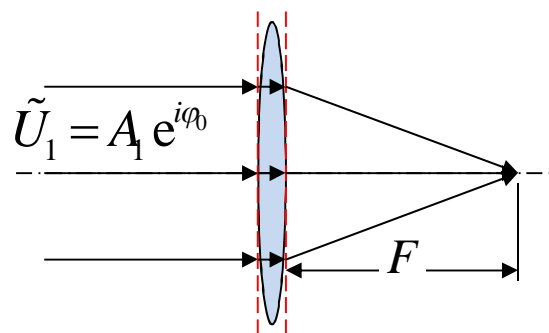
相因子 $\varphi_L = -k \frac{x^2 + y^2}{2F}$

常数因子对相位变换不起作用，可以忽略。

5.1.4 相位衍射元件的位相变换函数及分析

透镜对波面的变换—平面波入射

平行光轴入射的平面波



入射场：平面波 $\tilde{U}_1 = A_1 e^{i\phi_0}$

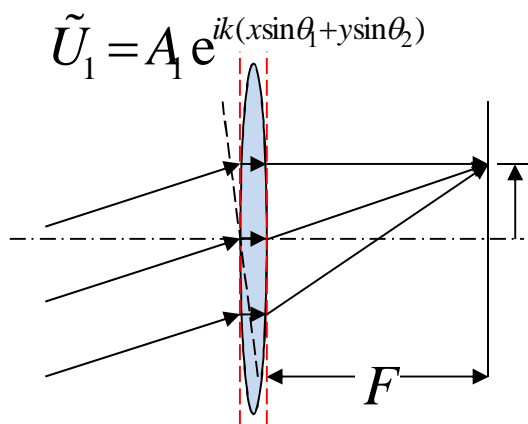
$$\phi_L = -k \frac{x^2 + y^2}{2F}$$

出射场：

$$\tilde{U}_2 = \tilde{U}_1 \tilde{t}_L(x, y) = A_1 e^{i\phi_0} e^{-ik \frac{x^2 + y^2}{2F}} = A_1 e^{-ik \frac{x^2 + y^2}{2F} + i\phi_0}$$

出射场特征：汇聚到轴上 F 处的球面波，焦距 $f = F$ 。

斜入射的平面波



入射场： $\tilde{U}_1 = A_1 e^{ik(x\sin\theta_1 + y\sin\theta_2)}$

对照

$$\exp\left[ik\left(\frac{x^2 + y^2}{2z} - \frac{xx_0 + yy_0}{z}\right)\right]$$

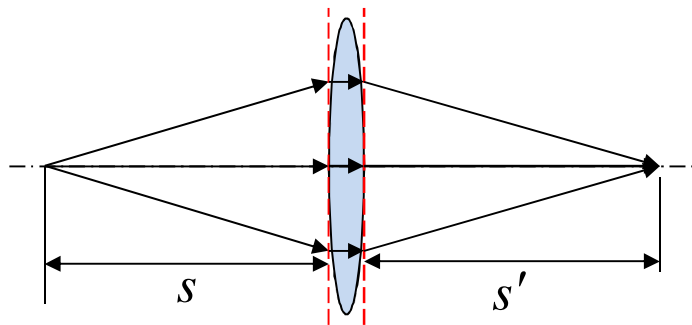
出射场： $\tilde{U}_2 = A_1 e^{-ik\left[\frac{x^2 + y^2}{2F} - (x\sin\theta_1 + y\sin\theta_2)\right]}$

$$= A_1 e^{-ik\left[\frac{x^2 + y^2}{2F} - \frac{x F \sin\theta_1 + y F \sin\theta_2}{F}\right]}$$

出射场特征：汇聚到轴外 $(F\sin\theta_1, F\sin\theta_2, F)$ 处的球面波。

5.1.4 相位衍射元件的位相变换函数及分析

透镜对波面的变换—球面波入射



入射场：球面波 $\tilde{U}_1 = A_1 e^{ik \frac{x^2+y^2}{2s}}$

出射场： $\tilde{U}_2 = A_1 e^{ik \frac{x^2+y^2}{2s}} e^{-ik \frac{x^2+y^2}{2F}}$

$$\begin{aligned} &= A_1 e^{-ik \left(\frac{x^2+y^2}{2F} - \frac{x^2+y^2}{2s} \right)} \\ &= A_1 e^{-ik \frac{x^2+y^2}{2} \left(\frac{1}{F} - \frac{1}{s} \right)} \end{aligned}$$

出射场特征：汇聚到轴上 s' 处的球面波。

球心位置 $s' = \left(\frac{1}{F} - \frac{1}{s} \right)^{-1} = \frac{sF}{s-F} \longrightarrow \frac{F}{s} + \frac{F}{s'} = 1$

Gauss 公式

5.1.4 相位衍射元件的位相变换函数及分析

棱镜的相位变换函数

对于薄的楔形棱镜，可以得到

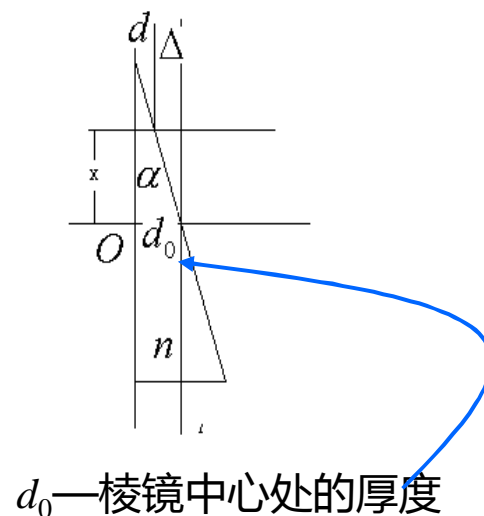
$$\begin{aligned}\varphi_P(x, y) &= \frac{2\pi}{\lambda}(\Delta + nd) = \frac{2\pi}{\lambda}(\Delta + nd_0 - n\Delta) \\ &= \varphi_0 - \frac{2\pi}{\lambda}(n-1)\Delta\end{aligned}$$

其中 $\varphi_0 = \frac{2\pi}{\lambda}nd_0$ $\Delta = \alpha x$

省略初相位 φ_0

相因子 $\varphi_P(x, y) = -k(n-1)\alpha x$

位相变换函数 $\tilde{t}_P(x, y) = \exp[-ik(n-1)(\alpha_1 x + \alpha_2 y)]$



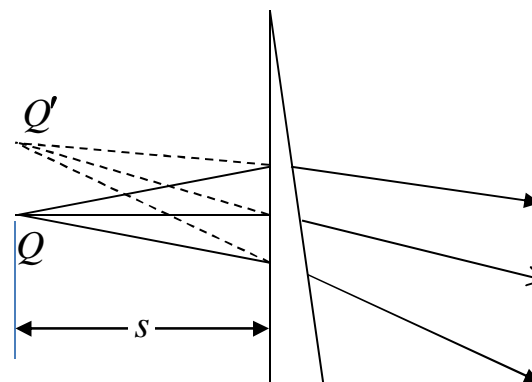
5.1.4 相位衍射元件的位相变换函数及分析

棱镜的相位变换作用

轴上物点与棱镜之间的距离为 s ，考虑一维情况。

入射波前函数（球面波） $\tilde{U}_1 = A_1 e^{ik \frac{x^2+y^2}{2s}}$

出射波前函数 $\tilde{U}_2 = \tilde{U}_1 \tilde{t}_p = A_1 e^{ik \frac{x^2+y^2}{2s}} e^{-ik(n-1)(\alpha_1 x + \alpha_2 y)}$
 $= A_1 e^{ik \left[\frac{x^2+y^2}{2s} - \frac{(n-1)s(\alpha_1 x + \alpha_2 y)}{s} \right]}$ → 波前函数标准化



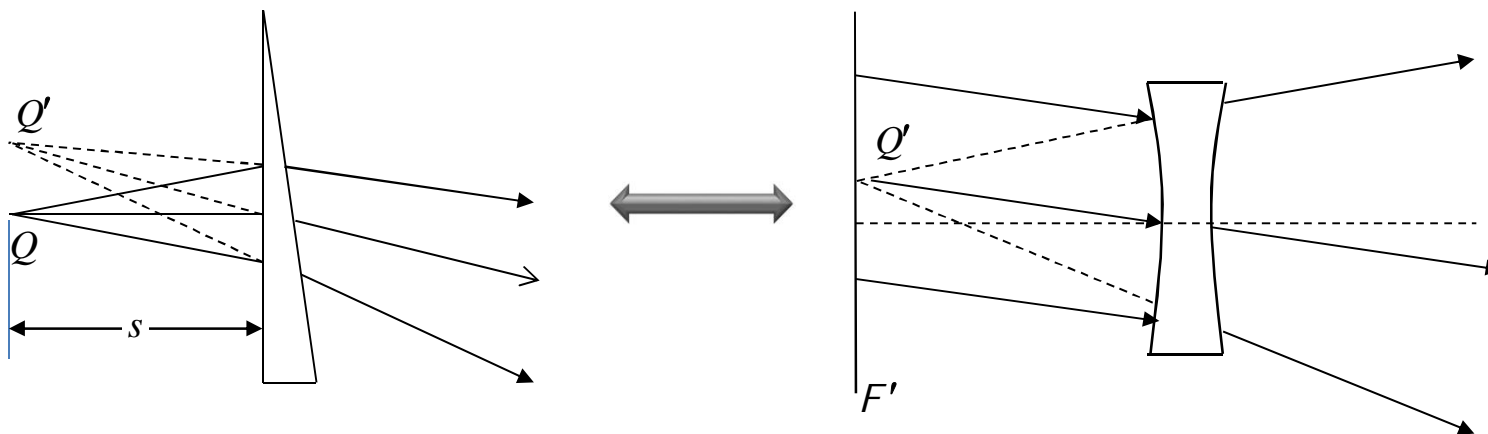
对比轴外物点发散球面波的相关因子表达式 $\exp\left[ik\left(\frac{x^2 + y^2}{2z} - \frac{xx_0 + yy_0}{z}\right)\right]$

可以得到出射波前函数代表的是从轴外点源发出的发散球面波，点源 Q' 的位置为

$$\begin{cases} x' = (n-1)\alpha_1 s \\ y' = (n-1)\alpha_2 s \\ z = s \end{cases}$$

5.1.4 相位衍射元件的位相变换函数及分析

棱镜的相位变换的一种等效观点



以另一种思路考虑棱镜的相位变换函数，将相因子对调：

$$\tilde{U}_2 = A_1 e^{-ik(n-1)(\alpha_1 x + \alpha_2 y)} \cdot e^{-ik \frac{x^2 + y^2}{2(-s)}} = \tilde{U}_{el} \cdot \tilde{t}_{eL}$$

可以认为是一个焦距为 $-s$ 的发散透镜，作用于一束偏向角为 $\{(n-1)\alpha_1, (n-1)\alpha_2\}$ 的平面波，最终形成一束从 Q' 点发散的球面波。

5.1.4 相位衍射元件的位相变换函数及分析

傅里叶变换光学的总结

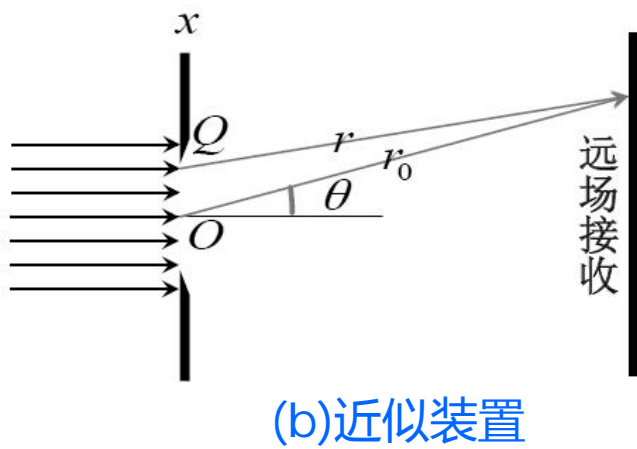
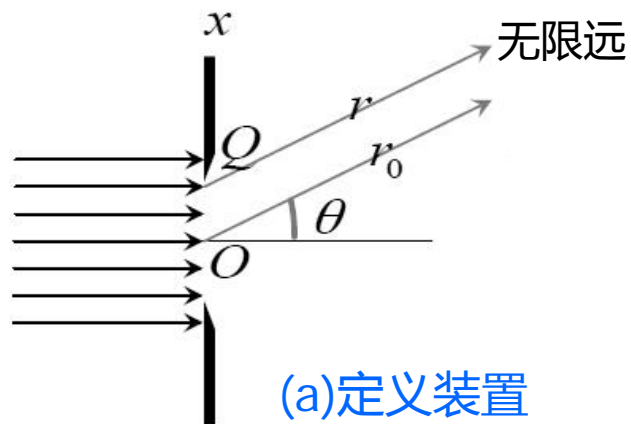
具体来说，对图像产生的复杂波前的傅里叶分析，其内容和特点主要包括以下几点：

- (1) 出发点：二维波前决定三维波场，其特征主要体现在波前函数的相位因子上；
- (2) 根据波前函数的相因子，可以判断波场的类型，分析其衍射场的主要特征。
- (3) 傅里叶变换光学将复杂的衍射场分解为一些列不同方向、不同振幅的平面衍射波。
- (4) 特定方向的平面衍射波作为一种载波，携带特定空间频率的光学信息。

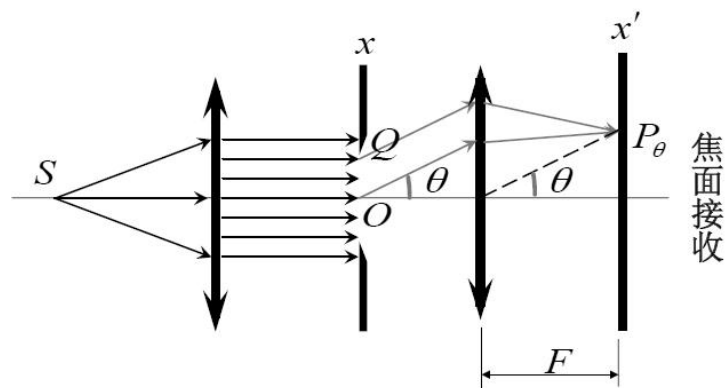
- 分析光信息—空间频谱的语言
- 处理光信息—改变频谱的手段
- 像质评价—频谱被改变的眼光

5.1.5 夫琅禾费衍射的实现装置和标准形式

夫琅禾费衍射的五种实现装置

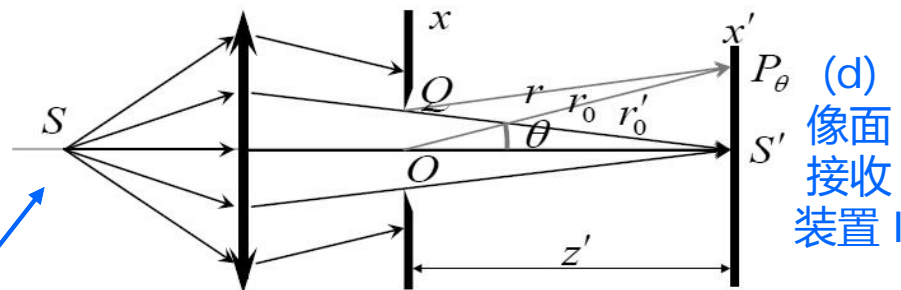


等价装置

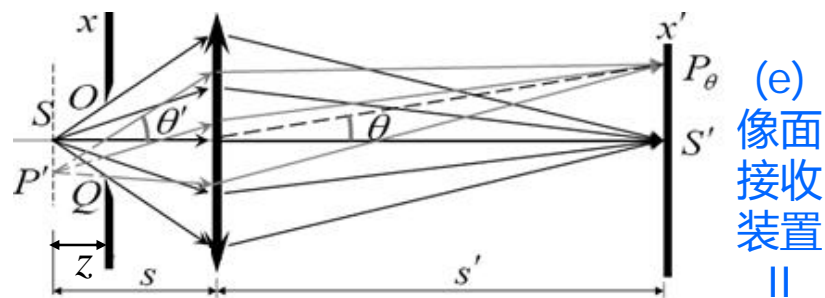


焦面接收

(c) 焦面装置



(d) 像面装置 I



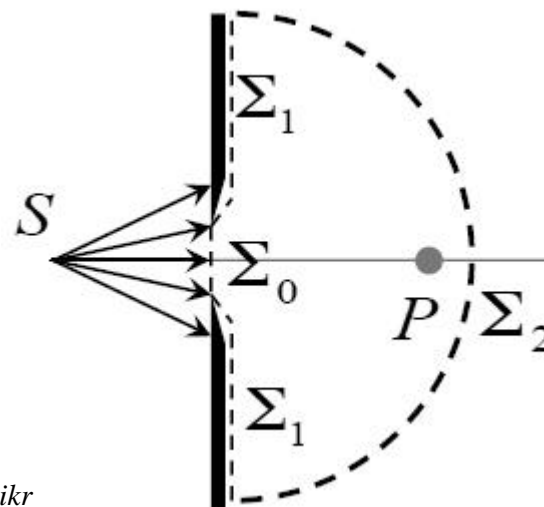
(e) 像面装置 II

5.1.5 夫琅禾费衍射场的实现装置和标准形式

夫琅禾费衍射积分

回顾：基尔霍夫边界条件

$$\begin{cases} \Sigma_0 & \text{全透过} \\ \Sigma_1 & \text{全遮蔽} \\ \Sigma_2 & \text{积分为0} \end{cases}$$



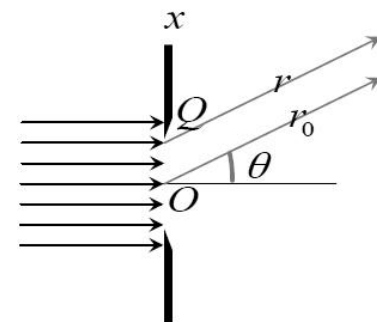
菲涅耳—基尔霍夫边界衍射公式

$$\tilde{U}(x', y') = -\frac{i}{2\lambda} \iint (\cos \theta_0 + \cos \theta) \tilde{U}_2(x, y) \frac{e^{ikr}}{r} dx dy$$

其中 $\tilde{U}_2(x, y) = \tilde{U}_1(x, y) \tilde{t}(x, y)$ —衍射屏的透射波前

实验装置满足傍轴条件 $\cos \theta_0 \approx 1, \cos \theta \approx 1, \frac{1}{r} \approx \frac{1}{r_0} = \text{常数}$, 则有

$$\tilde{U}(x', y') \approx C \iint \tilde{U}_2(x, y) e^{ikr} dx dy$$



5.1.5 夫琅禾费衍射场的实现装置和标准形式

定义装置夫琅禾费衍射积分的标准形式

定义装置(a)中，入射光为平行光正入射，因此

$$\tilde{U}_1(x, y) = A_1$$

对于平行衍射线，有

$$kr = kr_0 - k \sin \theta_1 x - k \sin \theta_2 y$$

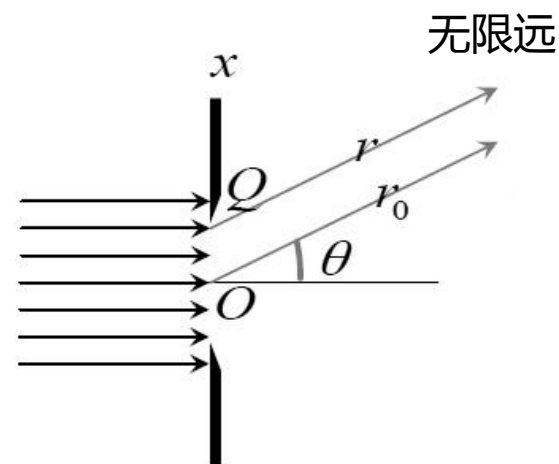
因此，夫琅禾费衍射积分的标准形式为

$$\tilde{U}(x', y') = CA_1 e^{ikr_0} \iint \tilde{t}(x, y) \frac{e^{-i(k \sin \theta_1 x + k \sin \theta_2 y)}}{dx dy}$$

屏函数

线性相因子

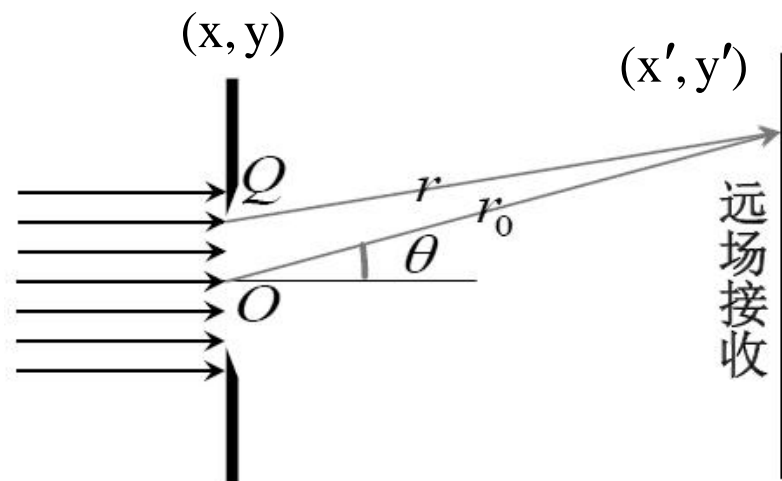
任何可以写成这种形式的装置都可以认为是夫琅禾费衍射。由此可以忽略具体的照明和接收装置的特性。



5.1.5 夫琅禾费衍射场的实现装置和标准形式

近似装置的夫琅禾费衍射积分

近似装置(b)中，衍射光线不是严格的平行光，但当衍射屏较小时，可认为物点同时满足傍轴条件和远场条件。此时，积分形式变为



$$\tilde{U}(x', y') = CA_1 e^{ikr_0} \iint \tilde{t}(x, y) e^{\frac{-ik}{z}(xx' + yy')} dx dy$$

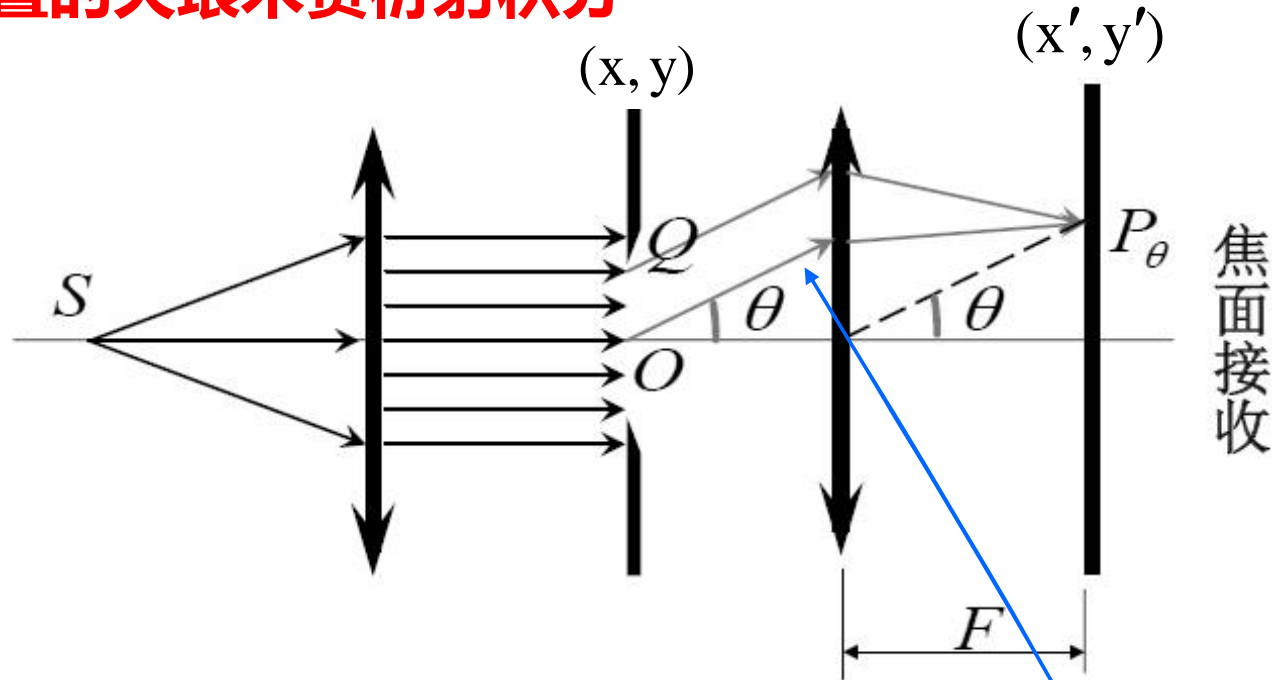
其中 $r_0 = \frac{z + (x'^2 + y'^2)}{2z}$ 因为 $\sin \theta_1 \approx \frac{x'}{z}, \sin \theta_2 \approx \frac{y'}{z}$

因此，积分形式可以变化为

$$\tilde{U}(x', y') = CA_1 e^{ikr_0} \iint \tilde{t}(x, y) e^{-i(k \sin \theta_1 x + k \sin \theta_2 y)} dx dy$$

5.1.5 夫琅禾费衍射场的实现装置和标准形式

焦面装置的夫琅禾费衍射积分



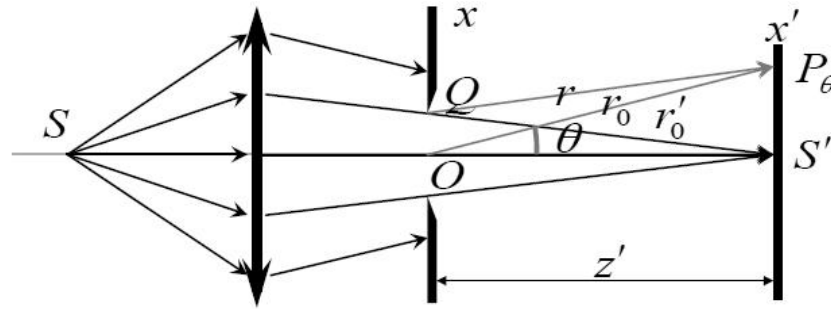
由于会聚于接收屏幕同一点的衍射线严格平行，因此衍射场可以写成

$$\tilde{U}(x', y') = CA_1 e^{ikL_0} \iint \tilde{t}(x, y) e^{-i(k \sin \theta_1 x + k \sin \theta_2 y)} dx dy$$

其中 L_0 是衍射屏中心 O 点到场点 P 的光程。

5.1.5 夫琅禾费衍射场的实现装置和标准形式

等价装置的夫琅禾费衍射积分（会聚球面波照射）



入射照明光波为球面波，此时衍射屏不再是等相位面

$$\tilde{U}_1(x, y) = A_1 e^{i\varphi_1(x, y)}$$

点光源S与衍射屏上任一点Q(x,y)的相位差

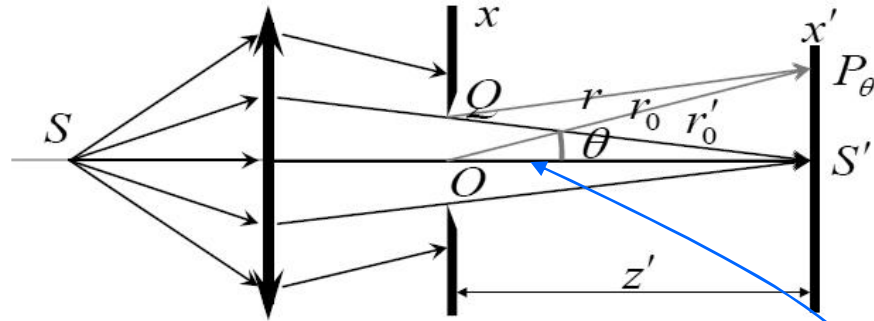
在傍轴条件下考虑上式，可认为A₁是常量。此时可以得到：

$$\begin{aligned} \tilde{U}(x', y') &= C \iint \tilde{t}(x, y) \tilde{U}_1(x, y) e^{ik(r'_0 + \frac{x'^2 + y'^2}{2z'})} e^{-\frac{ik}{z'}(xx' + yy')} dx dy \\ &= CA_1 e^{ik(\frac{x'^2 + y'^2}{2z'})} \iint \tilde{t}(x, y) e^{(i\varphi_1(x, y) + ikr'_0)} e^{-\frac{ik}{z'}(xx' + yy')} dx dy \end{aligned}$$

球面波在衍射屏上的波前函数。

$$\varphi_1(x, y) + kr'_0 = k(SQ + QS') = kSQS'$$

5.1.5 夫琅禾费衍射场的实现装置和标准形式 等价装置的夫琅禾费衍射积分（会聚球面波照射）



$$\tilde{U}(x', y') = CA_1 e^{ik\left(\frac{x'^2 + y'^2}{2z'}\right)} \iint \tilde{t}(x, y) e^{i(\varphi_1(x, y) + kr'_0)} e^{-\frac{ik}{z'}(xx' + yy')} dx dy$$

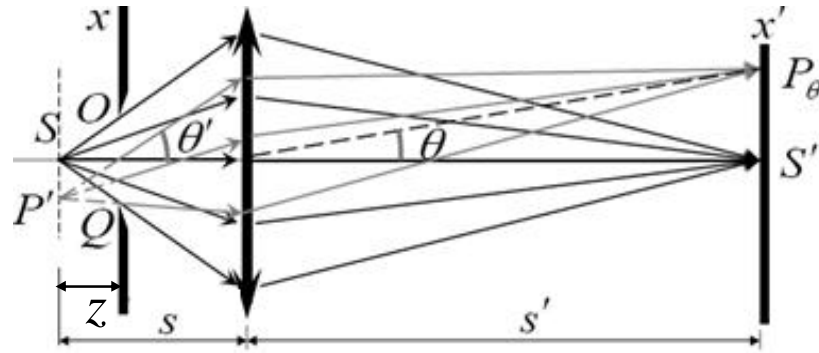
由物像之间的等光程性 $\varphi_1(x, y) + kr'_0 = kSQS' = kL_0$ 因此

$$\tilde{U}(x', y') = CA_1 e^{ikL_0} e^{ik\left(\frac{x'^2 + y'^2}{2z'}\right)} \iint \tilde{t}(x, y) e^{-\frac{ik}{z'}(xx' + yy')} dx dy$$

与近似装置的夫琅禾费积分形式相同，也符合标准形式。

5.1.5 夫琅禾费衍射场的实现装置和标准形式

等价装置的夫琅禾费衍射积分（发散球面波照射）



最终形式为

$$\tilde{U}(x', y') = CA_1 e^{ikL_0} e^{ik\left(\frac{x'^2 + y'^2}{2|V|z}\right)} \iint \tilde{t}(x, y) e^{\frac{-ik}{|V|z}(xx' + yy')} dx dy$$

与会聚球面波入射等价装置的形式相同，变化仅仅为

$$z' \rightarrow z, \quad (x', y') \rightarrow \left(\frac{x'}{|V|}, \frac{y'}{|V|}\right) \quad |V| \text{ — 横向放大率}$$

结论

在照明光源像平面上接收到的就是屏函数的夫琅禾费衍射场，与屏放置在什么位置无关。夫琅禾费衍射就是屏函数的傅里叶变换。

本节重点

1. 衍射系统和屏函数的概念（理解）
2. 平面波和球面波的同因子表示法（记忆）
3. 透镜和棱镜的同因子、透射函数及其作用（计算）
4. 夫琅禾费衍射的五种实现装置（理解）
5. 夫琅禾费衍射的标准形式（理解）

作业

P52-1,2,3 (重排p293)