第一章 几何光学

补充内容A
近轴光学中的矩阵方法

参考：崔宏斌《光学》10.8节

补充A：近轴光学中的矩阵方法

A.1 光线状态的特征描述

A.2 光线的矩阵表示

A.3 成像矩阵的计算

A.4 傍轴条件下系统物像关系的矩阵表示

A.1 光线状态的特征描述

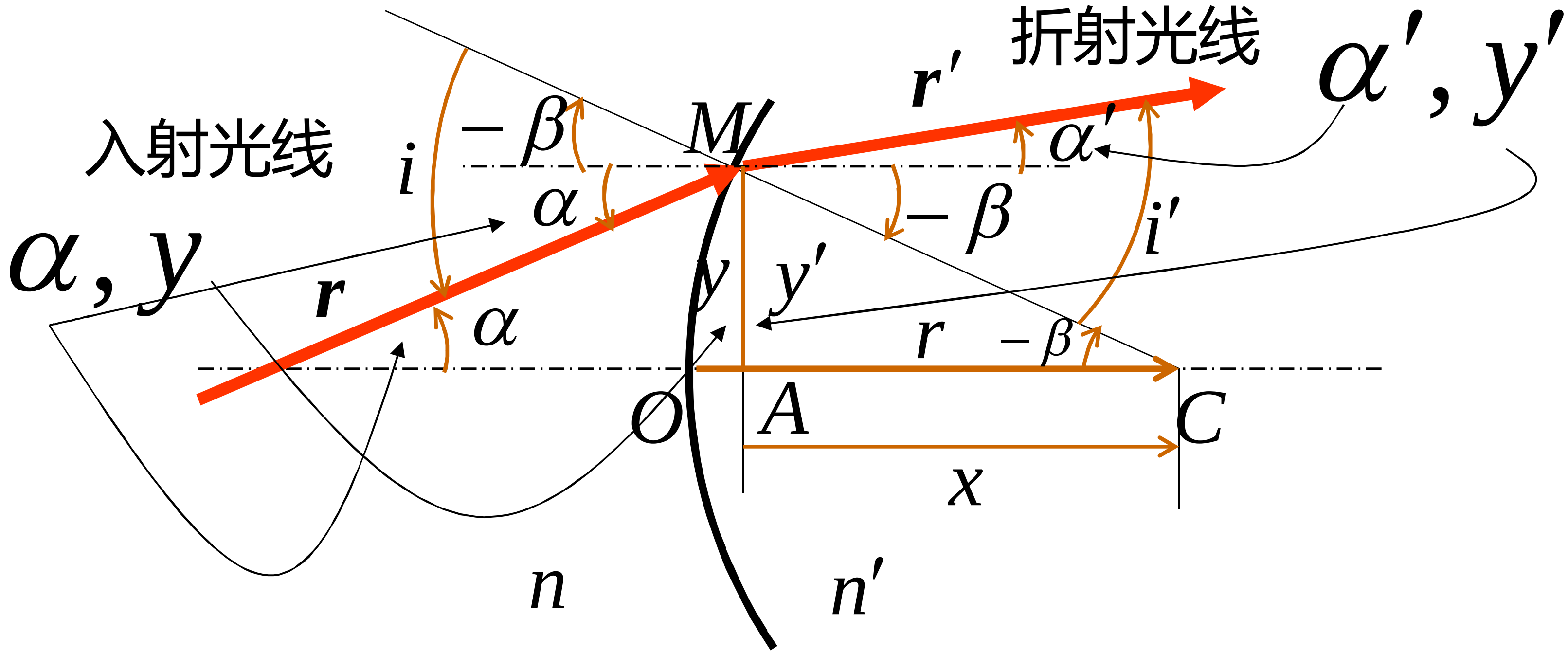
光线特征的描述要素

光线的特征可以用两个要素描述：光线的方向，和线上一点的位置。

方向：光线相对于主光轴的角度，

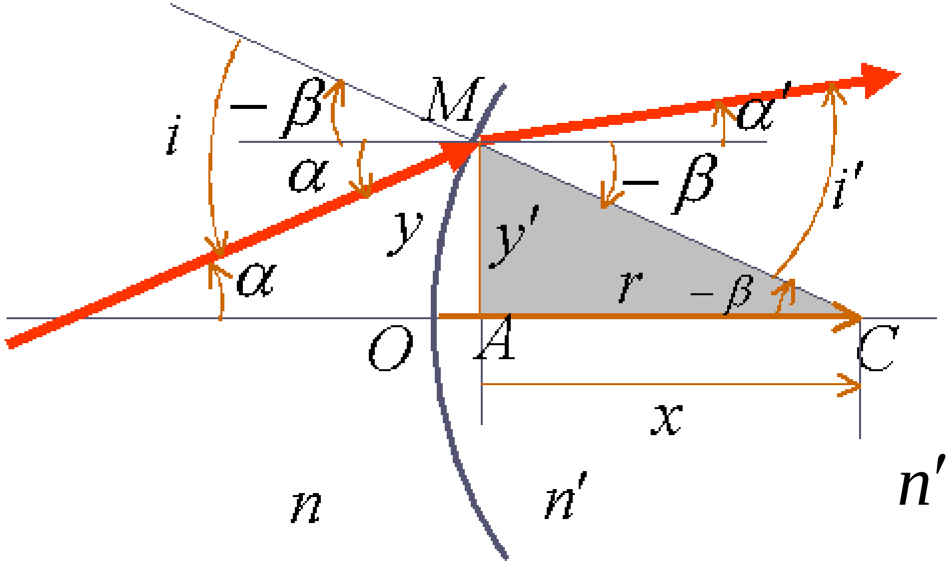
线上点的位置：线上一点到主光轴的距离。

光线经过球面后，方向改变，上述角度和高度的数值会发生改变。



A.2 光线的矩阵表示

光线的矩阵表示



$$i = \alpha - \beta \quad i' = \alpha' - \beta$$

满足近轴条件 $ni \approx n'i'$

在ΔMAC中 $-\beta \approx y'/x = y/x$

$$n(\alpha + y/x) = n'(\alpha' + y/x)$$

注意 $x \approx r$

$$n'\alpha' \approx n\alpha - \frac{n'-n}{r}y = n\alpha - \Phi y$$

$$\begin{cases} n'\alpha' = n\alpha - \Phi y \\ y' = 0 + y \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} n'\alpha' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\Phi \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n\alpha \\ y \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} n\alpha \\ y \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{r}' = \begin{bmatrix} n'\alpha' \\ y' \end{bmatrix}$$

表示光线入射前后的状态，称为光线的**状态矩阵**

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -\Phi \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

表示折射球面的作用，称为**折射矩阵**

A.2 光线的矩阵表示

$$\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} n\alpha \\ y \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{r}' = \begin{bmatrix} n'\alpha' \\ y' \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} 1 & -\Phi \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{r}' = R\boldsymbol{r}$$

光线的状态矩阵：**折射矩阵**

$|R| = 1$ 折射矩阵的行列式=1

对于反射球面 $n' = -n = -1 \quad \Phi = -\dfrac{2}{r}$

说明

① 状态矩阵表示的是光线在某一点的状态，而不是整个光线的状态。

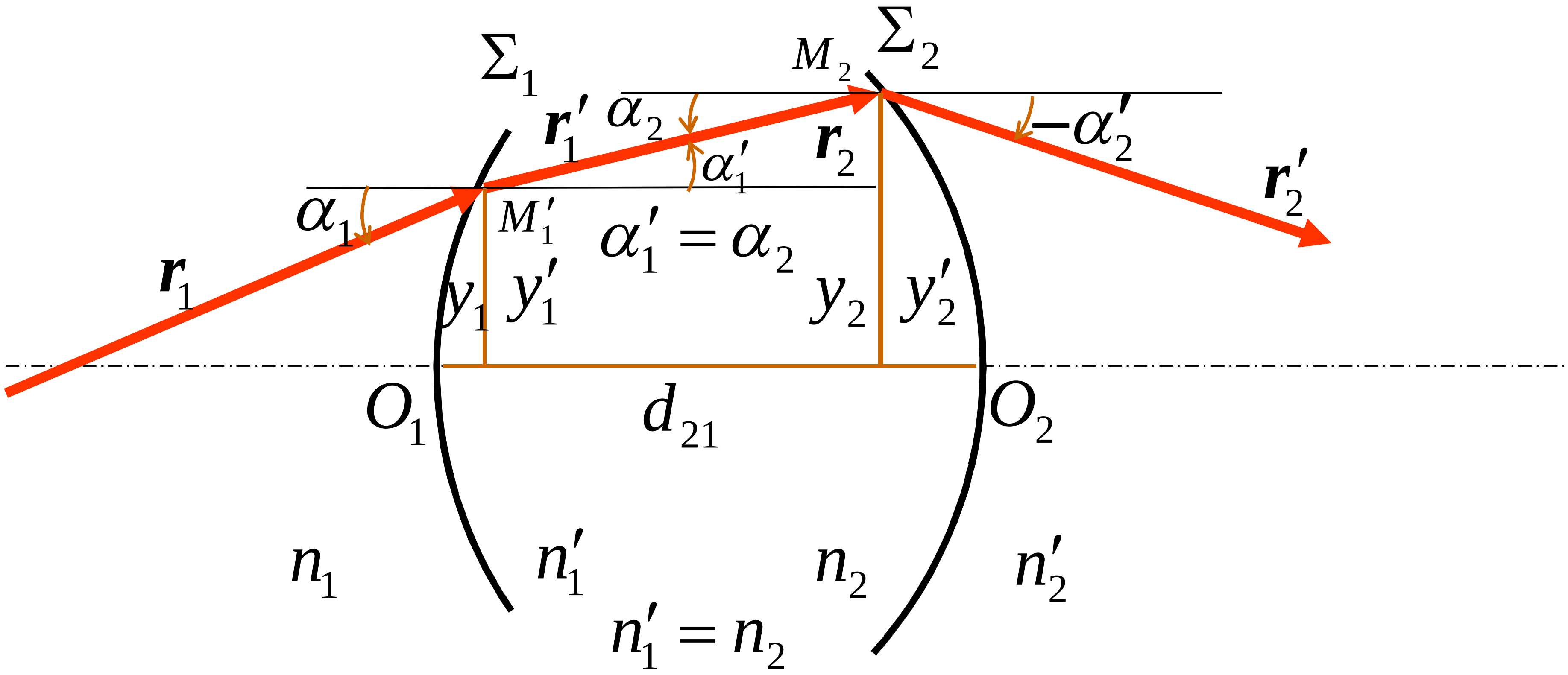
② 所以，选取的点不同，状态矩阵就不同。

③ 折射矩阵表示的是在入射点前后，光线状态的改变。

A.2 光线的矩阵表示

过渡矩阵

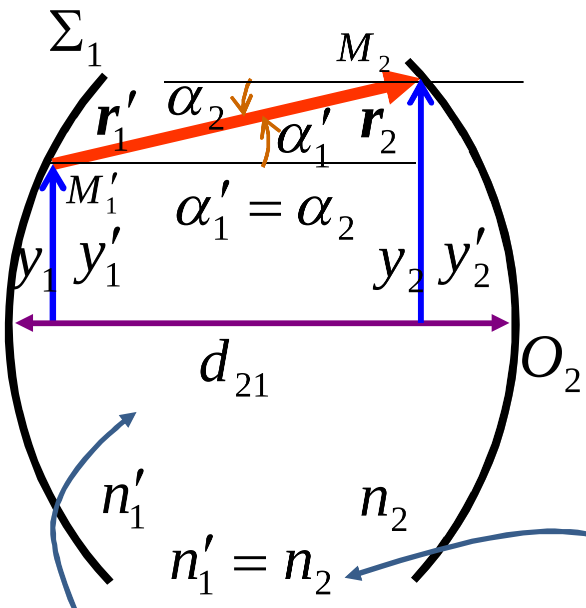
光线经过连续两个球面的折射



A.2 光线的矩阵表示

过渡矩阵

光线经过连续两个球面的折射



光线从第一折射面到第二折射面的传输过程中，没有发生折射，是自由传播，称为过渡。两折射面之间的空间称为过渡空间。

$$M_1': \ \boldsymbol{r}_1' = \begin{bmatrix} n_1'\alpha_1' \\ y_1' \end{bmatrix}$$

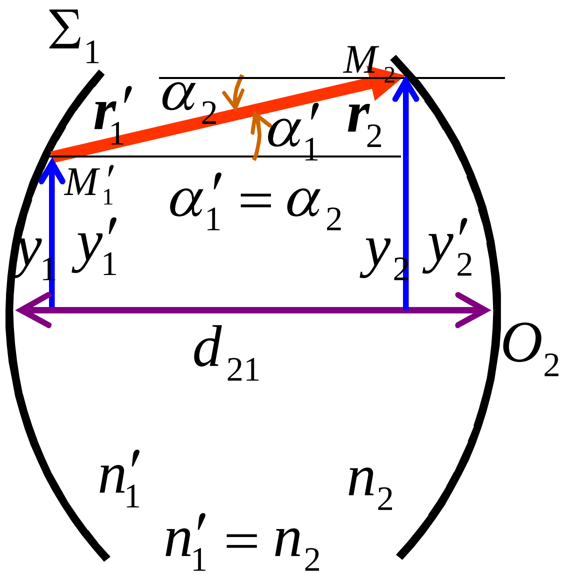
$$M_1': \ \boldsymbol{r}_2 = \begin{bmatrix} n_2\alpha_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

过渡空间的长度

过渡空间的折射率

A.2 光线的矩阵表示

过渡矩阵



$$y_2 \approx d_{21}\alpha_1' + y_1'$$

$$n_2\alpha_2 = n_1'\alpha_1' + 0$$

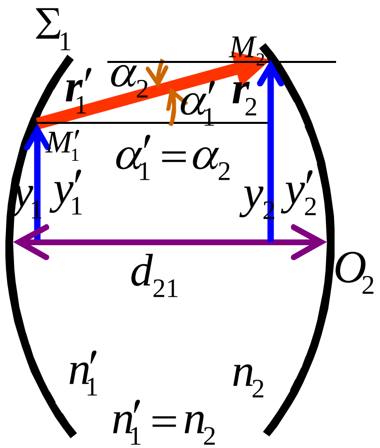
$$y_2 = (d_{21}/n_1')n_1'\alpha_1' + y_1'$$

$$\begin{bmatrix} n_2\alpha_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ d_{21}/n_1' & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1'\alpha_1' \\ y_1' \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{r}_2 = T_{21}\boldsymbol{r}_1'$$

$$T_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ d_{21}/n_1' & 1 \end{bmatrix}$$ 称为两折射面间的**过渡矩阵** $|T_{21}| = 1$

A.2 光线的矩阵表示

整个系统的传输矩阵



经过过渡空间后

$$\boldsymbol{r}_2 = T_{21}\boldsymbol{r}_1' = T_{21}R_1\boldsymbol{r}_1$$

经过整个系统后

$$\boldsymbol{r}_2' = R_2\boldsymbol{r}_2 = R_2T_{21}R_1\boldsymbol{r}_1$$

共轴球面系统的系统矩阵

$$\boldsymbol{r}_2' = S\boldsymbol{r}_1 \qquad S = R_2T_{21}R_1$$

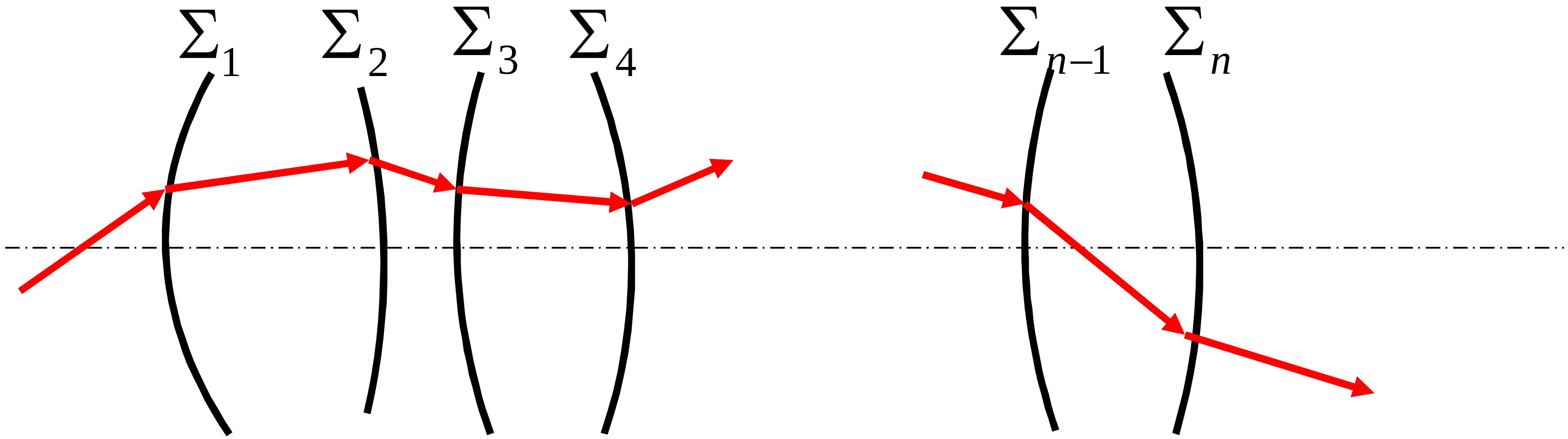
$$S = \begin{bmatrix} 1 & -\Phi_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ d_{21}/n_1' & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -\Phi_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\Phi_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -\Phi_1 \\ d_{21}/n_1' & -\Phi_1 d_{21}/n_1' + 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-\Phi_2 d_{21}/n_1' & -(\Phi_1 + \Phi_2 - \Phi_1\Phi_2 d_{21}/n_1') \\ d_{21}/n_1' & 1-\Phi_1 d_{21}/n_1' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}$$

$\Phi = -S_{12}$ 系统的光焦度 $\qquad |S| = 1$

A.2 光线的矩阵表示

多个共轴球面组成的系统



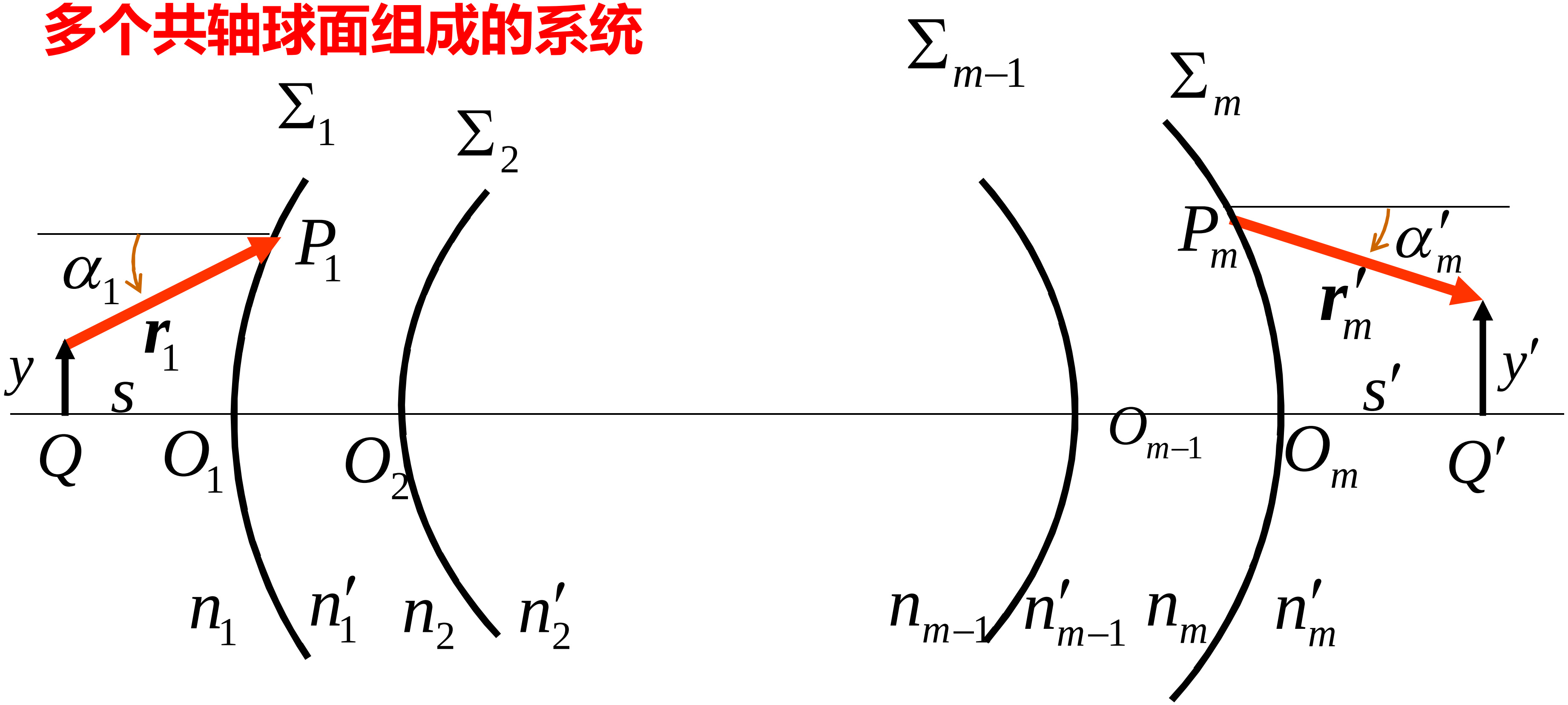
其传输矩阵为

$$S = R_n T_{n,n-1} R_{n-1} \cdots R_4 T_{43} R_3 T_{32} R_2 T_{21} R_1$$

$$|S| = 1$$

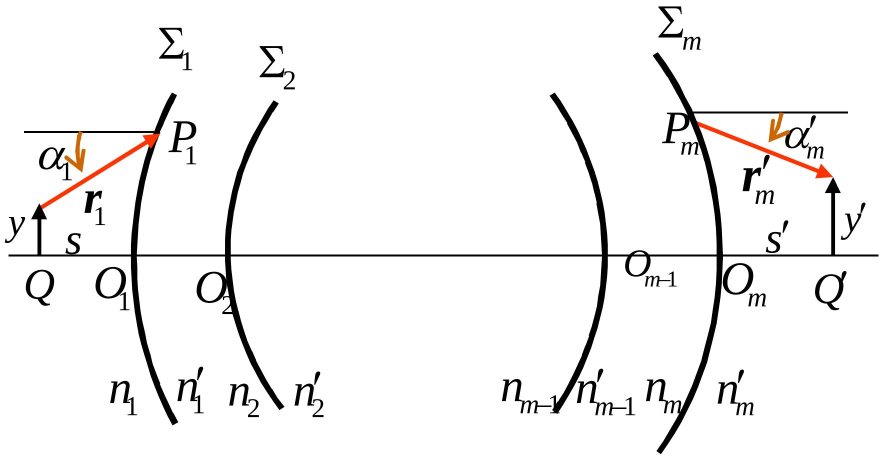
A.3 成像矩阵的计算

多个共轴球面组成的系统



在系统前后，各有一个过渡空间

A.3 成像矩阵的计算



物Q的状态矩阵　像Q'的状态矩阵

$$\boldsymbol{r}_Q = \begin{bmatrix} n_1\alpha_1 \\ y \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{r}'_{Q'} = \begin{bmatrix} n'_m\alpha'_m \\ y' \end{bmatrix}$$

Q到P_1处自由空间的过渡矩阵为　　P_m到Q'处自由空间的过渡矩阵为

$$T_{1Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s/n_1 & 1 \end{bmatrix} \qquad T_{Q'm} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s'/n'_m & 1 \end{bmatrix}$$

系统矩阵为　S

Q到Q'的光线的矩阵变换为　$\boldsymbol{r}'_{Q'} = T_{Q'm} S T_{1Q} \boldsymbol{r}_Q$

A.3 成像矩阵的计算

物像之间光线的变换用矩阵表示为

$$\begin{bmatrix} n'_m\alpha'_m \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s'/n'_m & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s/n_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1\alpha_1 \\ y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s'/n'_m & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} + (s/n_1)S_{12} & S_{12} \\ S_{21} + (s/n_1)S_{22} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1\alpha_1 \\ y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} S_{11} + (s/n_1)S_{12} & S_{12} \\ S_{21} + (s/n_1)S_{22} + (s'/n'_m)S_{11} + (ss'/n_1 n'_m)S_{12} & S_{22} + (s'/n'_m)S_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1\alpha_1 \\ y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} [S_{11} + (s/n_1)S_{12}]n_1\alpha_1 + S_{12}y \\ [S_{21} + (s/n_1)S_{22} + (s'/n'_m)S_{11} + (ss'/n_1 n'_m)S_{12}]n_1\alpha_1 + [S_{22} + (s'/n'_m)S_{12}]y \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} S_{11} + (s/n_1)S_{12} & S_{12} \\ S_{21} + (s/n_1)S_{22} + (s'/n'_m)S_{11} + (ss'/n_1 n'_m)S_{12} & S_{22} + (s'/n'_m)S_{12} \end{bmatrix}$$

A 称为**物像矩阵**，其行列式的值等于1

A.4 傍轴条件下系统物像关系的矩阵表示

$$y' = [S_{21} + (s/n_1)S_{22} + (s'/n'_m)S_{11} + (ss'/n_1n'_m)S_{12}]n_1\alpha_1 + [S_{22} + (s'/n'_m)S_{12}]y$$

在傍轴条件下，y' 与 α_1 无关，因此

$$[S_{21} + (s/n_1)S_{22} + (s'/n'_m)S_{11} + (ss'/n_1n'_m)S_{12}]n_1\alpha_1 = 0$$

$$y' = [S_{22} + (s'/n'_m)S_{12}]y$$

$$S_{21} + (s/n_1)S_{22} + (s'/n'_m)S_{11} + (ss'/n_1n'_m)S_{12} = 0$$

$$-(s'/n'_m)[S_{11} + (s/n_1)S_{12}] = S_{21} + (s/n_1)S_{22}$$

因此 $A = \begin{bmatrix} S_{11} + (s/n_1)S_{12} & S_{12} \\ S_{21} + (s/n_1)S_{22} + (s'/n'_m)S_{11} + (ss'/n_1n'_m)S_{12} & S_{22} + (s'/n'_m)S_{12} \end{bmatrix}$

简化为 $A = \begin{bmatrix} S_{11} + (s/n_1)S_{12} & S_{12} \\ 0 & S_{22} + (s'/n'_m)S_{12} \end{bmatrix}$

物像关系可以用系统矩阵元素表示为 $\dfrac{s'}{n'_m} = -\dfrac{S_{21} + (s/n_1)S_{22}}{S_{11} + (s/n_1)S_{12}}$

A.4 傍轴条件下系统物像关系的矩阵表示

系统的横向放大率为 $V=\dfrac{y'}{y}=S_{22}+(s'/n'_m)S_{12}$

由于 $|A|=\begin{vmatrix} S_{11}+(s/n_1)S_{12} & S_{12} \\ 0 & S_{22}+(s'/n'_m)S_{12} \end{vmatrix}=1$

所以 $[S_{11}+(s/n_1)S_{12}][S_{22}+(s'/n'_m)S_{12}]=1$

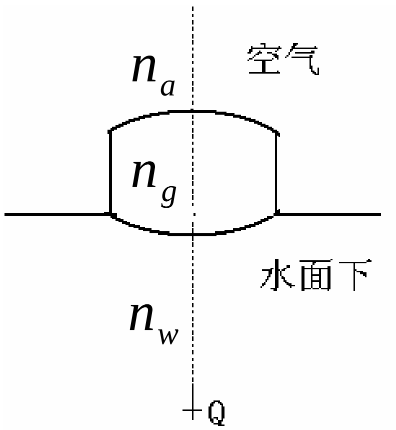
横向放大率亦可表示为 $V=1/[S_{11}+(s/n_1)S_{12}]$

系统的物像矩阵可记为 $A=\begin{bmatrix} 1/V & -\Phi \\ 0 & V \end{bmatrix}$

A.4 傍轴条件下系统物像关系的矩阵表示

例题

1、一个等曲率双凸透镜，放在水面上。球面半径为3cm，中心厚度2cm，玻璃和水的折射率分别为1.50和1.33。透镜下4cm处物点Q。计算两曲面的光焦度，并计算Q点像的位置。



$$S=\begin{pmatrix}1 & -\Phi_2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ d/n_g & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -\Phi_1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & -16.67\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0.02/1.5 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -5.67\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0.78 & -21.17\\ 0.013 & 0.93\end{pmatrix}$$

$$\frac{s'}{n'_m}=-\frac{(s/n_1)S_{22}+S_{21}}{(s/n_1)S_{12}+S_{11}} \qquad s'=-\frac{(s/n_1)S_{22}+S_{21}}{(s/n_1)S_{12}+S_{11}}n'_m \quad =-\frac{\dfrac{0.04}{1.33}\times 0.93+0.013}{\dfrac{0.04}{1.33}(-21.17)+0.78}=-0.28\text{m}$$

习题

1、一个玻璃球，直径为27mm，折射率为1.54。请用矩阵法求其焦距。