第七章 偏振光学

补充内容A2
偏振光学矩阵(part1)

补充A2：偏振光学矩阵

A2.1 矩阵光学概述

A2.2 琼斯矢量

A2.3 正交偏振态的表示方法

A2.4 琼斯矩阵

A2.1 矩阵光学概述

矩阵光学的定义：用矩阵表示光学器件和光学过程。

背景和优势：
　计算机技术的发展，使大规模矩阵运算可以得到快速解决。

优势
　可以脱离具体物理实现机制，而关注其对光场的作用

应用：
　几何光学、高斯光束传播、谐振腔理论、偏振光学、晶体光学、薄膜光学等。

A2.2 琼斯矢量

每一种偏振态的电矢量都可以用如下正交分量表示

$$\begin{cases} E_x = A_x \cos(\omega t - kz + \varphi_{0x}) \\ E_y = A_y \cos(\omega t - kz + \varphi_{0y}) \end{cases}$$

用复振幅表达方式可写成

$$\begin{cases} \tilde{E}_x = A_x e^{i(\omega t - kz + \varphi_{0x})} = A_x e^{i\varphi_x(z)} e^{i\omega t} \\ \tilde{E}_y = A_y e^{i(\omega t - kz + \varphi_{0y})} = A_y e^{i\varphi_y(z)} e^{i\omega t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{E}_x = A_x e^{i\varphi_x(z)} \\ \tilde{E}_y = A_y e^{i\varphi_y(z)} \end{cases}$$

可以用矩阵表示为： $\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_x e^{i\varphi_x(z)} \\ A_y e^{i\varphi_y(z)} \end{bmatrix}$ –琼斯矢量

A2.2 琼斯矢量

（1）偏振光的琼斯矢量 $\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}\tilde{E}_x\\ \tilde{E}_y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_x e^{i\varphi_x(z)}\\ A_y e^{i\varphi_y(z)}\end{bmatrix}$

（2）偏振光的强度 $I=\left|\boldsymbol{E}\right|^2=\boldsymbol{E}\bullet\boldsymbol{E}^*=\left|\tilde{E}_x\right|^2+\left|\tilde{E}_y\right|^2=A_x^2+A_y^2$

（3）归一化的琼斯矢量 $\boldsymbol{E}=\dfrac{1}{\sqrt{A_x^2+A_y^2}}\begin{bmatrix}A_x e^{i\varphi_x(z)}\\ A_y e^{i\varphi_y(z)}\end{bmatrix}$ 其模为1。

（4）偏振态取决于两分量的相位差和振幅之比

$$\boldsymbol{E}=A_x e^{i\varphi_x(z)}\begin{bmatrix}1\\ \dfrac{A_y}{A_x}e^{i[\varphi_y(z)-\varphi_x(z)]}\end{bmatrix}=A_x e^{i\varphi_x}\begin{bmatrix}1\\ \gamma e^{i\delta}\end{bmatrix}$$

其中$\delta=\varphi_y(z)-\varphi_x(z)$　$-\pi<\delta<0$，y分量相位滞后；$0<\delta<\pi$, y分量相位超前。

A2.2 琼斯矢量

线偏振光的琼斯矢量描述

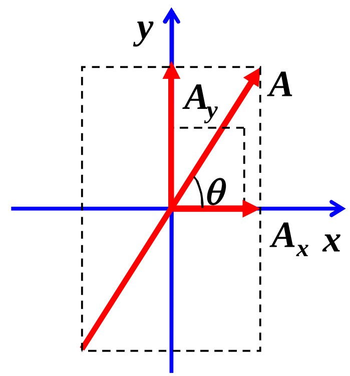
（1）电场矢量沿x轴的线偏光，其归一化琼斯矢量可以写成

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{A_x}\begin{bmatrix}A_x e^{i\varphi_x}\\0\end{bmatrix}=e^{i\varphi_x}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$ 略去公因子 $e^{i\varphi_x}$, 可以得到 $$\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

（2）电场矢量与x轴夹角为θ的线偏振光的琼斯矢量

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{\sqrt{A_x^2+A_y^2}}\begin{bmatrix}A_x e^{i\varphi_x(z)}\\A_y e^{i\varphi_y(z)}\end{bmatrix}=\frac{e^{i\varphi_x}}{A\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}}\begin{bmatrix}A\cos\theta\\A\sin\theta\end{bmatrix}=e^{i\varphi_x}\begin{bmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{bmatrix}$$

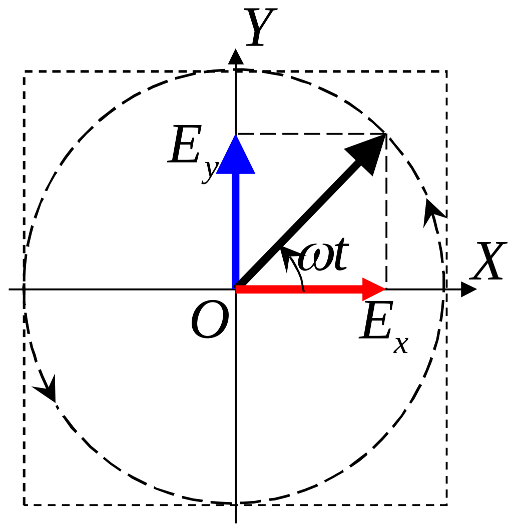
略去公因子 $e^{i\varphi_x}$, 可以得到 $$\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{bmatrix}$$



A2.2 琼斯矢量

圆偏振光的琼斯矢量描述

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{\sqrt{A_x^2+A_y^2}}\begin{bmatrix}A_x e^{i\varphi_x(z)}\\ A_y e^{i\varphi_y(z)}\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}A}\begin{bmatrix}Ae^{i\varphi_x}\\ Ae^{i\varphi_x\pm\frac{\pi}{2}}\end{bmatrix}=\frac{e^{i\varphi_x}}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ e^{\pm i\frac{\pi}{2}}\end{bmatrix}$$



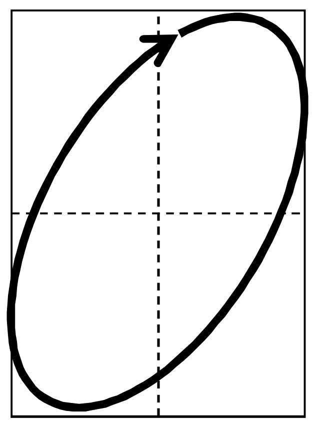
$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ \pm i\end{bmatrix}$$

$+i$，右旋；$-i$，左旋

椭圆偏振光的琼斯矢量描述

$$\Delta\varphi\in(0,\frac{\pi}{2})$$

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{\sqrt{A_x^2+A_y^2}}\begin{bmatrix}A_x e^{i\varphi_x}\\ A_y e^{i\varphi_y}\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}}\begin{bmatrix}1\\ \gamma e^{i\delta}\end{bmatrix}\qquad \gamma=\frac{A_y}{A_x}$$



- 两分量的相位差δ位于I、II象限时，为右旋；
- 两分量的相位差δ位于III、IV象限时，为左旋；

A2.3 正交偏振态的表示方法

正交琼斯矢量的定义

假设：两列光波的琼斯矢量分别为

$$\boldsymbol{E}_1=\begin{bmatrix}\tilde{E}_{1x}\\ \tilde{E}_{1y}\end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{E}_2=\begin{bmatrix}\tilde{E}_{2x}\\ \tilde{E}_{2y}\end{bmatrix}$$

如果有 $\boldsymbol{E}^{\dagger}{}_1\boldsymbol{E}_2=\tilde{E}^*_{1x}\cdot\tilde{E}_{2x}+\tilde{E}^*_{1y}\cdot\tilde{E}_{2y}=0$ 则表示两列琼斯矢量正交。

正交琼斯矢量的物理意义

两列平面偏振光 $\boldsymbol{E}_1=\begin{bmatrix}\cos\theta_1\\ \sin\theta_1\end{bmatrix}$ $\boldsymbol{E}_2=\begin{bmatrix}\cos\theta_2\\ \sin\theta_2\end{bmatrix}$

如果 $\boldsymbol{E}^{\dagger}{}_1\boldsymbol{E}_2=\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2=\cos(\theta_1-\theta_2)=0$

则有 $\theta_2=\theta_1+\dfrac{\pi}{2}$ 即两列平面偏振光正交。

此时，两列平面偏振光的琼斯矢量可以写成 $\boldsymbol{E}_1=\begin{bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{bmatrix}$ $\boldsymbol{E}_2=\begin{bmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{bmatrix}$

A2.3 正交偏振态的表示方法

正交的圆偏振光

右旋圆偏振光 $\boldsymbol{E}_R = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$

左旋圆偏振光 $\boldsymbol{E}_L = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{E}_R^* \boldsymbol{E}_L = [1 \quad -i]\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = 1 - 1 = 0$$

结论：两列圆偏振光正交。（振幅不等不影响其正交特性。）

正交的椭圆偏振光

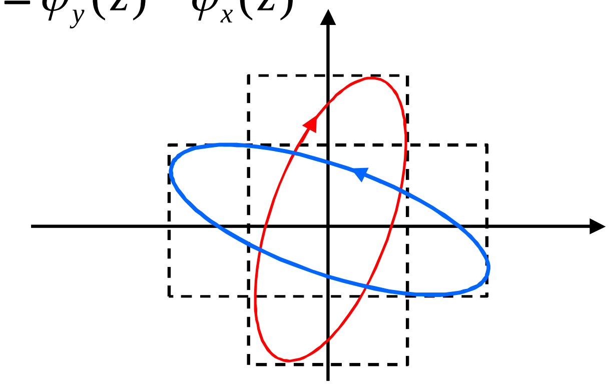
两列椭圆偏振光 $\boldsymbol{E}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{1+\gamma_1^2}}\begin{bmatrix} 1 \\ \gamma_1 e^{i\varphi_1} \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{E}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{1+\gamma_2^2}}\begin{bmatrix} 1 \\ \gamma_2 e^{i\varphi_2} \end{bmatrix}$ $\gamma_1 = \dfrac{A_{1y}}{A_{1x}}$ $\gamma_2 = \dfrac{A_{2y}}{A_{2x}}$

若 $\boldsymbol{E}_1^* \boldsymbol{E}_2 = \tilde{E}_{1x}^* \tilde{E}_{2x} + \tilde{E}_{1y}^* \tilde{E}_{2y} = 1 + \gamma_1 \gamma_2 e^{i\delta} = 0$ 其中 $\delta = \varphi_y(z) - \varphi_x(z)$

则需 $\begin{cases} \gamma_1 \gamma_2 = 1 \\ \delta = \pm\pi \end{cases}$

$\gamma_1\gamma_2 = 1 \longrightarrow$ 长短轴（外切矩形）成比例

$\delta = \pm\pi \longrightarrow$ 两列光波旋转方向相反



A2.3 正交偏振态的表示方法

任意偏振光的正交分解

一列任意偏振光表示为 $\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$

（1）可以分解为正交的平面偏振光

$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + B\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

沿x方向的振动

沿y方向的振动

（2）可以分解为正交的圆偏振光

$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \frac{A-iB}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} + \frac{A+iB}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

右旋分量

左旋分量

思考：是否可以分解为椭圆偏振光？

A2.4 琼斯矩阵

琼斯矢量和琼斯矩阵的区别

- 琼斯矢量一般用来表示输入和输出的光波场。
- 琼斯矩阵一般用来表示偏振元件。

假设输入光波场为 $\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}\tilde{E}_x\\ \tilde{E}_y\end{bmatrix}$ 经过偏振元件后变为 $\boldsymbol{E}'=\begin{bmatrix}\tilde{E}'_x\\ \tilde{E}'_y\end{bmatrix}$

用矩阵表示为 $\boldsymbol{E}'=\boldsymbol{PE}$ 其中的2×2矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{bmatrix}$ 被称为琼斯矩阵。

$$\boldsymbol{E}'=\begin{bmatrix}\tilde{E}'_x\\ \tilde{E}'_y\end{bmatrix}=\boldsymbol{PE}=\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{E}_x\\ \tilde{E}_y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p_{11}\tilde{E}_x & p_{12}\tilde{E}_y\\ p_{21}\tilde{E}_x & p_{22}\tilde{E}_y\end{bmatrix} \quad \begin{cases}\tilde{E}'_x=p_{11}\tilde{E}_x+p_{12}\tilde{E}_y\\ \tilde{E}'=p_{21}\tilde{E}_x+p_{22}\tilde{E}_y\end{cases}$$

如果顺次经过多个偏振元件，这些元件的琼斯矩阵分别为$\boldsymbol{P_1},\boldsymbol{P2}\ldots$

则出射光场的琼斯为 $\boldsymbol{E}'=\boldsymbol{P}_n\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{E}$

A2.4 琼斯矩阵

典型元件的琼斯矩阵

（1）1/2波片的琼斯矢量

假设波片的快轴沿x方向，则y方向电场分量滞后π。入射和出射光场的琼斯矢量分别可以描述为：

$$\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}\tilde{E}_x\\ \tilde{E}_y\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{E}'=\begin{bmatrix}e^{i\varphi}\tilde{E}_x\\ e^{i\varphi}e^{-i\pi}\tilde{E}_y\end{bmatrix}=e^{i\varphi}\begin{bmatrix}\tilde{E}_x\\ e^{-i\pi}\tilde{E}_y\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{忽略公共因子}}\boldsymbol{E}'=\begin{bmatrix}\tilde{E}_x\\ e^{-i\pi}\tilde{E}_y\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\tilde{E}_x\\ e^{-i\pi}\tilde{E}_y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{E}_x\\ \tilde{E}_y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p_{11}\tilde{E}_x+p_{12}\tilde{E}_y\\ p_{21}\tilde{E}_x+p_{22}\tilde{E}_y\end{bmatrix}\Longrightarrow \boldsymbol{P}_{+\lambda/2}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

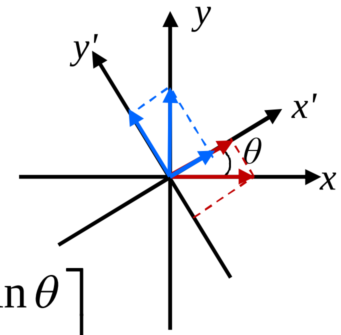
快轴沿y方向的1/2波片

$$\boldsymbol{E}'=\begin{bmatrix}e^{-i\pi}\tilde{E}_x\\ \tilde{E}_y\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{P}_{-\lambda/2}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

A2.4 琼斯矩阵

典型元件的琼斯矩阵

（1）1/2波片的琼斯矢量（续）



波片的快轴与x方向夹角为θ。—琼斯矢量的坐标变换

第一步：进行坐标变换
$$\begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' = -x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases} \qquad \boldsymbol{P}_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

第二步：通过快轴与x'重合的半波片 $\boldsymbol{P}_{+\lambda/2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

第三步：进行坐标反变换（$-\theta \rightarrow \theta$） $\boldsymbol{P}_2 = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

第四步：整体琼斯矩阵为各步骤琼斯矩阵的矢量乘积。

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_{\lambda/2}\boldsymbol{P}_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2\theta - \sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ 2\cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta - \cos^2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}$$

A2.4 琼斯矩阵

典型元件的琼斯矩阵

（2）1/4波片的琼斯矢量

波片的快轴沿x方向，则y方向电场分量滞后$\pi/2$。

$$\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}\tilde{E}_x\\ \tilde{E}_y\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{E}'=\begin{bmatrix}\tilde{E}_x\\ e^{-i\pi/2}\tilde{E}_y\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{P}_{+\lambda/4}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -i\end{bmatrix}$$

波片的快轴沿y方向，则y方向电场分量超前$\pi/2$。

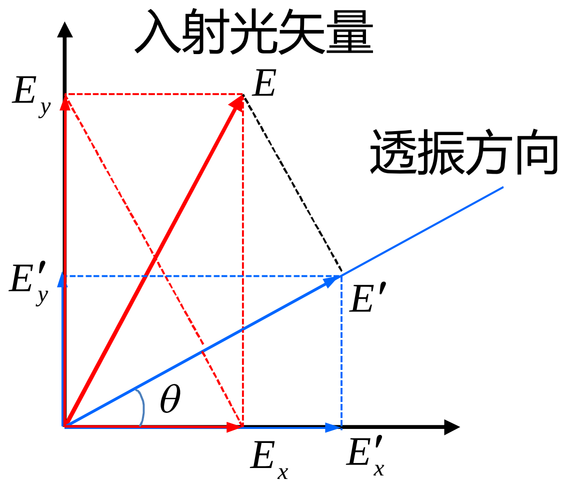
$$\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}\tilde{E}_x\\ \tilde{E}_y\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{E}'=\begin{bmatrix}\tilde{E}_x\\ e^{i\pi/2}\tilde{E}_y\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{P}_{-\lambda/4}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & i\end{bmatrix}$$

思考题：快轴与x方向夹角为θ的情况，请同学们自己推导。

A2.4 琼斯矩阵

典型元件的琼斯矩阵

（2）起偏器的琼斯矩阵



假设透振方向与x轴夹角为θ。

出射光矢量的大小等于入射光的两个正交分量在偏振片透振方向上的投影之和。

$$\tilde{E} = \tilde{E}_x \cos\theta + \tilde{E}_y \sin\theta$$

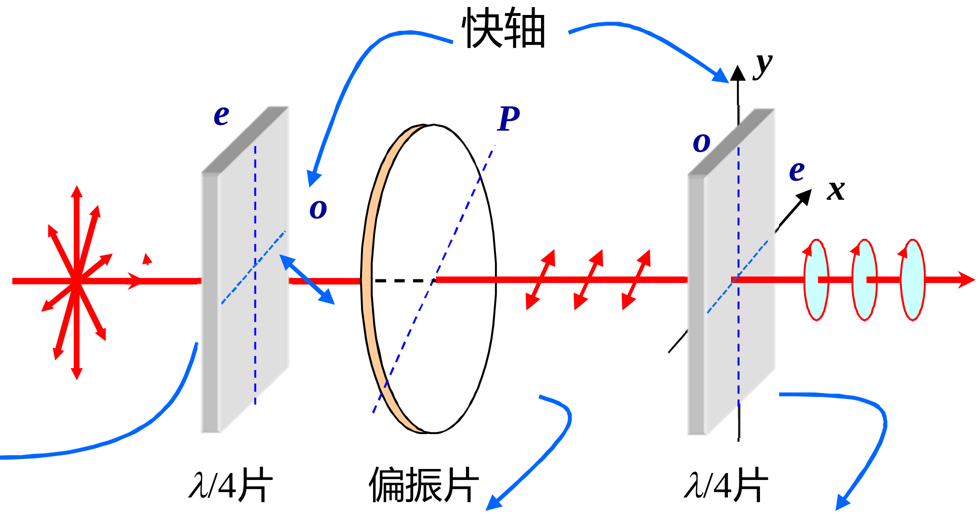
$$\begin{cases} \tilde{E}'_x = (\tilde{E}_x \cos\theta + \tilde{E}_y \sin\theta)\cos\theta \\ \tilde{E}'_y = (\tilde{E}_x \cos\theta + \tilde{E}_y \sin\theta)\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{E}'_x = \tilde{E}_x \cos^2\theta + \tilde{E}_y \sin\theta\cos\theta \\ \tilde{E}'_y = \tilde{E}_x \sin\theta\cos\theta + \tilde{E}_y \sin^2\theta \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{E}'_x \\ \tilde{E}'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_y \end{bmatrix} \Longrightarrow \boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix}$$

A2.4 琼斯矩阵

实例分析

单向圆起偏器



两个正交的λ/4波片之间插入一个偏振片。

$$\boldsymbol{P}_{\lambda/4}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -i\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{P}_{偏振片}=\begin{bmatrix}\cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta\\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{P}_{-\lambda/4}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & i\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_{-\lambda/4}\boldsymbol{P}_{偏振片}\boldsymbol{P}_{\lambda/4}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & i\end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -i\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -i\\ i & 1\end{bmatrix}$$

如何判断出射光是左旋还是右旋？ 思路：用任一线偏光作为输入

$$E'=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -i\\ i & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{E}_x\\ \tilde{E}_y\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\tilde{E}_x-i\tilde{E}_y\\ i\tilde{E}_x+\tilde{E}_y\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\tilde{E}_x-i\tilde{E}_y\\ i(\tilde{E}_x-i\tilde{E}_y)\end{bmatrix}=\frac{\tilde{E}_x-i\tilde{E}_y}{2}\begin{bmatrix}1\\ i\end{bmatrix}\longrightarrow 右旋$$

对左旋光的检验

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -i\\ i & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

补充题

（1）对于如图的单向圆偏光起偏器，如果光线从右侧入射，输出光线是什么偏振状态？

（2）如何将其改造为左旋圆偏振光起偏器？请用琼斯矩阵描述。

（3）试讨论琼斯矩阵是否可以描述部分偏振光？