

第四章 霍尔效应

- 4.1 Bloch 电子在恒定磁场中运动的准经典图像
- 4.2 经典 Hall 效应
- 4.3 二维 Bloch 电子在磁场中的量子化运动
- 4.4 整数量子 Hall 效应
- 4.5 IQHE 的第一个解释：扩展态和局域态
- 4.6 IQHE 的第二种解释：Chiral 边界态
- 4.7 理解量子 Hall 效应的四百种方法
- 4.8 分数量子 Hall 效应

References

- “Solid State Properties”, Chaps 10, 14
- “Lectures on the Quantum Hall Effect”, David Tong,
arXiv:1606.06687
<http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/qhe.html>
- “The Quantum Hall Effect”, S. M. Girvin,
arXiv:cond-mat/9907002
- “Quantum Hall Effects”, M. Goerbig, arXiv:0909.1998

真空中经典电子在恒定磁场下的运动

$$\dot{\mathbf{p}} = m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F} = -e\mathbf{v} \times \mathbf{B} = -ev_{\perp} \times \mathbf{B}$$

- 磁场不做功，粒子能量保持不变 \Rightarrow 在动量空间粒子轨道在等能面上。
- 平行磁场方向速度 v_{\parallel} 不变，此方向上的实空间运动是匀速运动。
- 垂直磁场方向上做回旋运动，实空间和动量空间里都是如此。
 - 回旋频率 $\omega_c = eB/m$
 - 实空间半径 $R = v_{\perp}/\omega_c = mv_{\perp}/eB$

真空中经典电子在恒定电、磁场下的运动

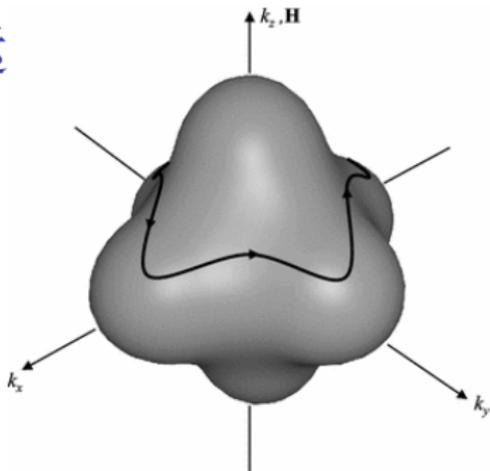
$$\dot{\mathbf{p}} = m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = -e\mathbf{E}_{\parallel} - e(\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{B})$$

- 平行磁场方向上做匀加速运动，加速度为 $-e\mathbf{E}_{\parallel}/m$
- 垂直磁场方向上做螺旋运动：回旋运动加上匀速运动
 - 回旋频率 $\omega_c = eB/m$
 - 匀速运动速度： $-\mathbf{E}_{\perp} \times \mathbf{B}/B^2$
 \Rightarrow 同时垂直于电场 \mathbf{E}_{\perp} 和磁场 \mathbf{B} 。
- ☞ 可以不考虑平行磁场方向的运动，只考虑电场 \mathbf{E} 和速度 \mathbf{v} 都垂直磁场时的运动。

Bloch 电子在恒定磁场中的准经典运

$$\hbar \dot{\mathbf{k}} = \mathbf{F} = -e\mathbf{v}_n(\mathbf{k}) \times \mathbf{B}$$

- $\mathbf{F} \perp \mathbf{B}$ ，沿着 \mathbf{B} 方向的 \mathbf{k} 分量不改变。电子在垂直于 \mathbf{B} 的平面内运动。
- $\mathbf{F} \perp \mathbf{v}_n$ ，电子能量不随时间改变
 - ☞ 电子在等能面上运动。
 - ☞ 电子在垂直于磁场的等能线上运动
- 和自由电子类似，在动量空间电子沿等能线运动。不从磁场里获得能量，也不把能量传递给磁场。
- 在动量空间，自由电子的运动是周期的，轨迹是一个圆，比较简单。Bloch 电子的运动也是周期循环的，但是轨迹一个复杂的（封闭）曲线。



Bloch 电子在恒定磁场中的准经典运动

$$\hbar \dot{\mathbf{k}} = \mathbf{F} = -e \mathbf{v}_n(\mathbf{k}) \times \mathbf{B}$$

- 实空间中的运动轨迹

$$\hbar \frac{d\mathbf{k}}{dt} = -e \mathbf{v}_n(\mathbf{k}) \times \mathbf{B} = -e \frac{d\mathbf{R}}{dt} \times \mathbf{B}$$

$$[\mathbf{k}_\perp(t + \delta t) - \mathbf{k}_\perp(t)] = \frac{e}{\hbar} \mathbf{B} \times [\mathbf{R}_\perp(t + \delta t) - \mathbf{R}_\perp(t)]$$

- 平行磁场方向匀速运动
- 垂直磁场方向的实空间轨道和 k 空间中轨道形状相同，但是旋转了 90° ，并且放大了 \hbar/eB 倍。
- 回旋运动周期和频率
在垂直于 \mathbf{B} 的平面内

$$T = \oint_{\varepsilon_n = \text{const}} dt = \oint \frac{dk}{|\dot{\mathbf{k}}|} = \frac{\hbar}{eB} \oint_{\varepsilon(\mathbf{k}) = \text{const}} \frac{dk}{|\mathbf{v}_\perp(\mathbf{k})|}$$

$$\omega_c = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi eB}{\hbar \oint_{\varepsilon(\mathbf{k}) = \text{const}} \frac{dk}{|\mathbf{v}_\perp(\mathbf{k})|}}$$

Bloch 电子在恒定磁场中的准经典运动

- 各向同性的能带底部/顶部

$$\varepsilon(\mathbf{k}) = \varepsilon_0 + \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m^*}$$

$$\omega_c = \frac{2\pi eB}{\hbar \oint_{k_\perp} \frac{dk}{|\mathbf{v}_\perp(\mathbf{k})|}} = \frac{2\pi eB}{\hbar(2\pi k_\perp)/(\hbar k_\perp/m^*)} = \frac{eB}{m^*}$$

这个结果和自由电子一致，只是用有效质量代替电子质量。

- 有效质量是各项异性的情况：轨迹是一个椭圆，可以类似的求积分。一般通过求解运动方程更加简单。

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{m^*} \cdot \mathbf{F} = -e \frac{1}{m^*} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad m^* = \begin{pmatrix} m_x^* & & \\ & m_y^* & \\ & & m_z^* \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{eB}{m_x^*} v_y \\ \frac{eB}{m_y^*} v_x \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \omega_c^z = \frac{eB}{\sqrt{m_x^* m_y^*}}$$

☞ 回旋频率也是各向异性的。

各向同性的 Bloch 电子在恒定磁场中运动的经典图像

各向同性时质量为 m^* ，电荷为 $-e$ ，速度为 \mathbf{v}

Bloch 电子的运动和经典电子在恒定磁场中运动的图像完全相同，除了把质量改为有效质量外，

- 受力： $\mathbf{F} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ ，Lorentz 力
- 平行磁场方向的运动不受磁场影响
 - ☞ 只需要考虑 $\mathbf{B} \perp \mathbf{E}, \mathbf{v}$ 的情况
- 无外加电场，垂直磁场方向做周期的回旋运动
 - ☞ 电子围绕磁力线做回旋运动
 - ☞ 回旋频率： $\omega_c = \frac{eB}{m^*}$
 - ☞ 实空间回旋半径： $R = \frac{m^*v}{eB}$ 。
- 有外加电场时粒子做螺旋运动：回旋运动，同时在与电场和磁场都垂直的方向上加上一个匀速运动
 - ☞ 垂直方向的速度 $\mathbf{v} = -\mathbf{E} \times \mathbf{B}/B^2$

Drude model 下的 Hall 效应

假设 $\mathbf{B} \parallel \hat{z}$

$$\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z) \quad \mathbf{B} = (0, 0, B) \quad \mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$$

$$\mathbf{F} = -e(\mathbf{E} - \mathbf{B} \times \mathbf{v}) = -e(E_x, E_y, E_z) + eB(-v_y, v_x, 0)$$

$$0 = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\mathbf{F}}{m^*} - \frac{\mathbf{v}}{\tau} = -\frac{e}{m^*}(E_x + Bv_y, E_y - Bv_x, E_z) - \frac{(v_x, v_y, v_z)}{\tau}$$

$$v_z = \frac{-eE_z\tau}{m^*} \quad J_z = n(-e)v_z = \frac{ne^2}{m^*}E_z = \sigma_0 E_z$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\tau} & \frac{eB}{m^*} = \omega_c \\ -\frac{eB}{m^*} = -\omega_c & \frac{1}{\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = -\frac{e}{m^*} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \frac{e\tau}{m^*} \frac{1}{1 + (\omega_c\tau)^2} \begin{pmatrix} 1 & -\omega_c\tau \\ \omega_c\tau & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{J} = n(-e)\mathbf{v} = \frac{ne^2\tau}{m^*} \frac{1}{1 + (\omega_c\tau)^2} \begin{pmatrix} 1 & -\omega_c\tau \\ \omega_c\tau & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}$$

Classical Hall effect

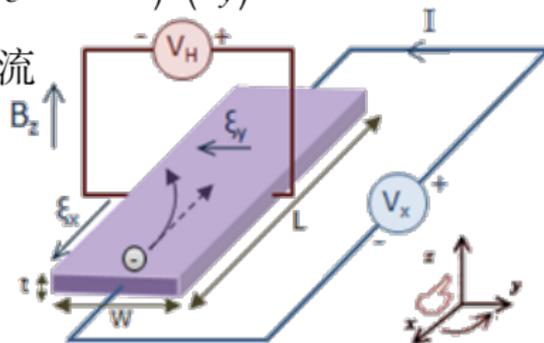
$$\begin{pmatrix} J_x \\ J_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \frac{\sigma_0}{1 + \omega_c^2 \tau^2} \begin{pmatrix} 1 & -\omega_c \tau \\ \omega_c \tau & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} \\ \rho_{yx} & \rho_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sigma_0} \begin{pmatrix} 1 & \omega_c \tau \\ -\omega_c \tau & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \end{pmatrix}$$

- x 方向加电场, y 方向闭路, 有电流

$$\sigma_{xx} = \frac{J_x}{E_x} = \frac{\sigma_0}{1 + \omega_c^2 \tau^2}$$

$$\sigma_{yx} = \frac{J_y}{E_x} = \frac{\sigma_0 \omega_c \tau}{1 + \omega_c^2 \tau^2}$$



- x 方向长度 L , 加电场, 电压 V_x , 电流 I ,
 y 方向长度 W , 开路, 无电流, 有电场, 电压 V_H

$$R_{xx} = \frac{V_x}{I = J_x W} = \frac{E_x L}{J_x W} = \frac{L}{\sigma_0 W} = \rho_0 L / W$$

$$R_{yx} = \frac{U_H}{I} = \frac{E_y W}{J_x W} = -\frac{\omega_c \tau}{\sigma_0} = -\frac{B}{ne}$$

磁阻以及 Hall 效应

- 只考虑一种简单载流子时， $R_{xx}(B) = R_{xx}(0) = \rho_0 L_x / L_y$
 $1/\rho_0 = \sigma_0 = ne^2\tau/m^*$
电阻和磁场无关，磁阻为零
- 考虑多种载流子时（或者电子有效质量不同时），可以有非零磁阻
- 费米面各向异性时，有磁阻
- 磁性材料中散射和载流子自旋有关，有磁阻
- $R_H = R_{xy}/B = 1/[n(-e)]$ ，与系统尺寸、载流子有效质量等无关，只和载流子浓度、电荷有关。

无散射极限： $\tau \rightarrow \infty$

$$\sigma_{xx} = \frac{\sigma_0}{1 + \omega_c^2 \tau^2} = \frac{ne^2 \tau / m^*}{1 + e^2 B^2 \tau^2 / m^{*2}} = \frac{nm^*}{B^2 \tau} \rightarrow 0$$

$$\sigma_{yx} = \frac{\sigma_0 \omega_c \tau}{1 + \omega_c^2 \tau^2} = \frac{ne^2 \tau / m^*}{eB\tau / m^*} = \frac{ne}{B}$$

$$J_x = n(-e)v_x = 0$$

$$J_y = n(-e)v_y = n(-e) \frac{-E_x}{B} = \frac{ne}{B} E_x$$

- 杂质/无序在 Hall 效应中扮演极其重要的作用。
- 经典物理中，没有散射时，电子做回旋运动加上垂直电场方向的匀速运动，但在平行电场方向不运动。所以对角电导率为零，非对角电导率非零。
- 散射破坏回旋运动，导致电子有沿着电场方向的净运动，对角电导率非零。
- 这种图像在考虑量子效应时也是正确的。

零电导 = 零电阻

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho = \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sigma_{xy} \\ -1/\sigma_{xy} & 0 \end{pmatrix}$$

- 零对角电导率为零意味着零对角电阻
- 电流方向垂直电场方向，不做功： $P = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = 0$ 。

经典 Hall 效应的应用

- $R_H = \frac{1}{n(-e)}$

实验上用以测量载流子浓度和载流子类型

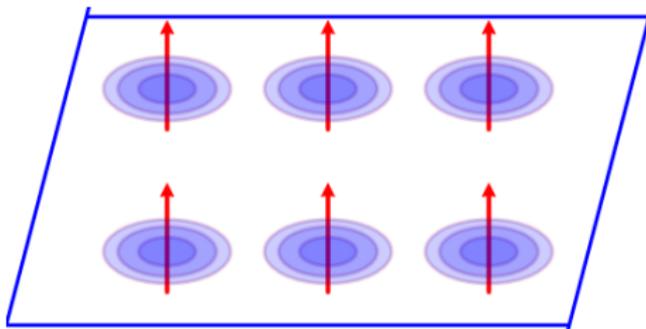
- Hall 传感器

$B = U_y / (neJ_x)$, 可以测量磁场, 包括静磁场。

- 车轮转速 \Rightarrow 车速

- 手机、平板的 Smart cover

二维 Bloch 电子在磁场中的运动：半经典量子化



- 经典的回旋运动 \Leftrightarrow 周期性 \Leftrightarrow 能级量子化
回旋频率 $\omega_c = eB/m^*$; 实空间半径 $R = v/\omega_c = m^*v/eB$
- Bohr-Sommerfeld 量子化规则 $\oint \mathbf{p} \cdot d\mathbf{r} = (n + \gamma)h$

$$\mathbf{p} = \Pi \left[\text{正则动量} = m^* \mathbf{v} \right] - e\mathbf{A}$$

$$(n + \gamma)h = \oint (m^* \mathbf{v} - e\mathbf{A}) \cdot d\mathbf{r} = eBR \times 2\pi R - e \int (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}$$

$$= 2eB\pi R^2 - e\Phi = e\Phi$$

$$\Phi = \pi R^2 B \text{ 轨道包含的磁通}$$

$$\Phi = (n + \gamma)h/e = (n + \gamma)\Phi_0$$

$$\text{量子磁通: } \Phi_0 = h/e$$

半经典量子化条件

零点运动
 $\gamma = 1/2$

- 量子化条件: $B\pi R^2 = \Phi = (n + \gamma)\Phi_0 = (n + \gamma)h/e$

$$R_n^2 = (n + \gamma) \frac{h}{e\pi B} = (n + \gamma) l_B^2$$

$$l_B = \sqrt{\frac{h}{e\pi B}} = \sqrt{\frac{2\hbar}{eB}}: \text{磁长度}$$

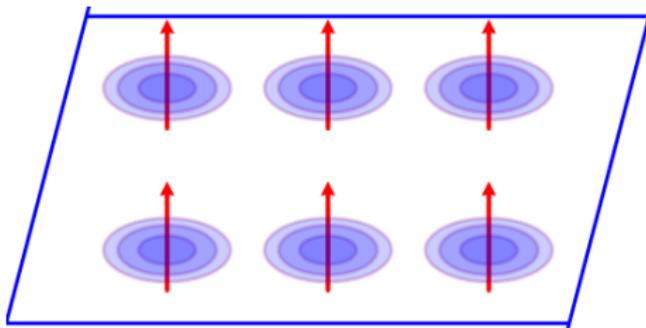
$$v_n = \omega_c R_n = eBR_n/m^*$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &= \frac{m^* v_n^2}{2} = \frac{m^* \omega_c^2 R_n^2}{2} = \frac{1}{2} m^* \frac{e^2 B^2}{m^{*2}} (n + \gamma) \frac{h}{e\pi B} \\ &= (n + \gamma) \frac{h}{2\pi} \frac{eB}{m^*} = (n + \gamma) \hbar \omega_c \end{aligned}$$

Landau 能级

- 很多书 / 文献里在考虑量子化条件时没有考虑正则动量和动量之间的差别, 这样得到的结果和实际相差两倍。
- Bohr-Sommerfeld 量子化条件等价于在轨道上形成驻波 \Leftrightarrow 电子绕轨道一周后总相位改变 2π 整数倍
相位改变主要有两部分贡献: 波传播导致的 $\oint \mathbf{\Pi} \cdot d\mathbf{r}/h$ + 带电粒子绕磁场运动额外增加的相位 (AB 效应)

半经典量子化条件



- 电子绕磁力线做量子化的回旋运动：半径 $R_n^2 = (n + \gamma)l_B^2$ ，不同半径对应不同能量的量子态，能量为 $\varepsilon_n = (n + \gamma)\hbar\omega_c$ 。
- 每个量子化轨道占据面积： $\pi\Delta R_n^2 = \pi l_B^2 = h/(eB) = \Phi_0/B$
- 相同半径但围绕不同磁力线的回旋运动是简并的量子态。
- 量子化能级简并度 = 面积 A 里可以容纳的量子化轨道数目
 $\Omega_L = \frac{A}{\Phi_0/B} = \frac{AB}{\Phi_0} = \frac{\Phi}{\Phi_0} =$ 量子磁通的数目 = 磁力线个数

填充因子/Filling factor

二维系统中

$$\nu = \frac{N}{\Omega_L} = \frac{N}{\Phi/\Phi_0} = \frac{N}{A} \frac{h}{ABe} = \frac{nh}{Be} = n\pi l_B^2$$
$$n = \frac{N}{A} \quad \text{电子密度}$$

- 电子是 Fermion，先占据 / 填充低能的能级，只有把低的 Landau 能级全部占据后才会占据高的 Landau 能级。
- ν 代表有多少个 Landau 能级被完全占据，或者最高被占据的 Landau 能级指标。
- 填充因子是一个非常重要的指标，作用和 Fermi 面 / Fermi 能类似。
- 很多物理由这个指标决定，例如 der Haas-van Alphen 效应，量子 Hall 效应等。

Landau 规范下的 Landau 能级

$$\mathcal{H} = \frac{(\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2}{2m^*} + V(\mathbf{r}) \quad V = 0, \mathbf{B} = B\hat{z}, \mathbf{A} = (0, xB, 0)$$

$$= \frac{p_x^2}{2m^*} + \frac{(p_y + eBx)^2}{2m^*} \quad \psi = \phi(x)e^{ik_y y}$$

$$E\phi = \left[\frac{p_x^2}{2m^*} + \frac{(\hbar k_y + eBx)^2}{2m^*} \right] \phi = \left\{ \frac{p_x^2}{2m^*} + \frac{1}{2}m^*\omega_c^2 [x + k_y\hbar/(eB)]^2 \right\} \phi$$

$$E_n(k_y) = (n + 1/2)\hbar\omega_c$$

- Landau 规范下电子本征态在 y 方向扩展，但在 x 方向局域在 $x_0(k_y) = -k_y\hbar/(eB)$ 附近。
- 这和经典的回旋运动差别巨大 \Rightarrow 相同 n 但是不同 k_y 能级简并，这些不同 k_y 的态可以组合出回旋运动。这种组合仍然是能量的本征态。
- 能级简并度：相同 n 不同 k_y 的态简并，

$$\Omega_{\text{Landau}} = \frac{L_x}{\Delta x_0} = \frac{L_x}{\Delta k_y \hbar / (eB)} = \frac{L_x eB}{(2\pi/L_y)\hbar} = \frac{ABe}{h} = \frac{\Phi}{\Phi_0}$$

☞ Landau 能级及其简并度和半经典量子化结果完全相同。

有电场时的 Landau 能级

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \frac{(\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2}{2m^*} + eEx \rightarrow \frac{p_x^2}{2m^*} + \frac{(\hbar k_y + eBx)^2}{2m^*} + eEx \\ &= \frac{p_x^2}{2m^*} + \frac{m^*\omega_c^2}{2} \left[x + k_y \frac{\hbar}{eB} + \frac{eE}{m^*\omega_c^2} \right]^2 - \frac{\hbar k_y E}{B} - \frac{(eE)^2}{2m^*\omega_c^2}\end{aligned}$$

$$x_0(k_y) = -\frac{k_y \hbar}{eB} - \frac{eE}{m^*\omega_c^2}$$

$$E_n(k_y) = (n + 1/2)\hbar\omega_c - \frac{(eE)^2}{2m^*\omega_c^2} - \frac{\hbar k_y E}{B}$$

- 电场对量子态对 y 方向波函数没有任何改变，在 x 方向仅仅挪动了局域中心。
- 电场解除了能量对 k_y 的简并。

Landau 规范下的 Hall 效应

- 没有电场时，和经典图像一样，电子不能有宏观运动
 - x 方向局域在 $x_0 = \hbar k_y / (eB)$ ，速度为零。
 - y 方向电子速度 $v_y = \partial_{\hbar k_y} E_n(k_y) = 0$ 。
- 有 x 方向电场时，同样和经典图像一样，只有垂直方向运动
 - x 方向局域在 $x_0 = \hbar k_y / (eB) + eE$ 。
 - y 方向电子速度 $v_y = \partial_{\hbar k_y} E_n(k_y) = -E/B$ 。
 - ☞ $\sigma_{xx} = 0$, $\sigma_{yx} = 1/R_{xy} = (ne)/B$ 。
- 存在杂质/无序时， k_y 不再是好量子数，杂质可以改变 k_y ，从而改变 x_0 ，使得电子可以同时 x , y 方向移动。此时 σ_{xx} , σ_{xy} 均不为零。

$$\sigma_{yx} = n(-e)(v_y)/E = \frac{ne}{B}$$

$$R_{xy} = \frac{\sigma_{yx}}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yx}^2} \neq \frac{B}{ne}$$

整数量子 Hall 效应?

- 例外的情况是当电子刚刚填满一个 Landau 能级时，所有可能的 k_y 态都被占据，杂质无法散射电子。此时类似于满带绝缘体， $\sigma_{xx} = 0$ 。
- 但是和满带绝缘体不同的是 $v_n(k_y) \equiv -E/B$,

$$J_y = n(-e)v_n(k_y) = neE/B$$

$$\sigma_{yx} = \frac{ne}{B} = \nu(e^2/h)$$

$$R_{xy} = \frac{\sigma_{yx}}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yx}^2} = \frac{1}{\sigma_{yx}} = R_K/\nu$$

第二章中我们得到满带电子的总电流为零，此处为何非零?

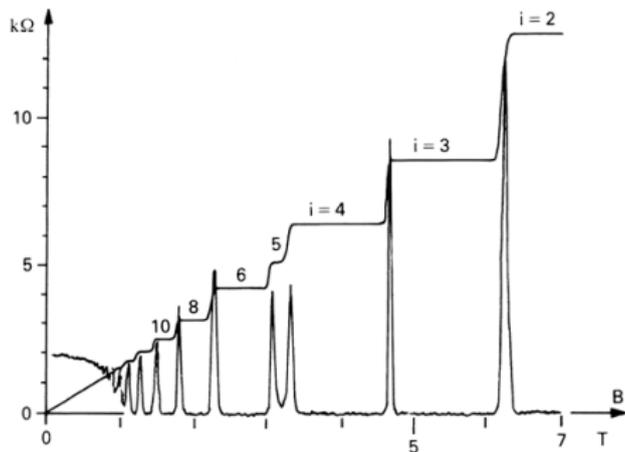
ν 是整数，即 Hall 电导/电阻量子化。

- 这个结果在 1975 年就被预言。但是要观测到这个量子化的电导/电阻，需要电子填充恰好是整数。一旦偏离整数填充， ν 就不是整数，而且由于杂质散射 σ_{xx} 非零，导致 R_{xy} 更加偏离量子化的值。因此没有人相信实验上可以观测到这个量子化的电导/电阻。

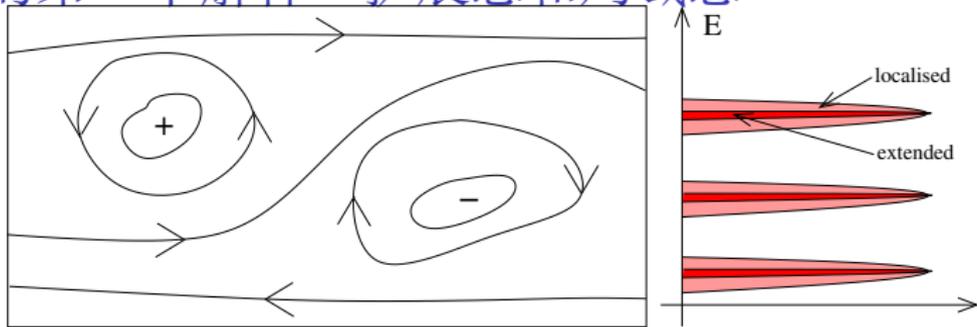
整数量子霍尔效应 / Integer Quantum Hall effect (IQHE)

1980年，von Klitzing 在研究异质结中的杂质散射时意外的发现 Hall 电导/电阻量子化是非常稳定的现象。在整数填充的时候出现预料的量子化电导。但是偏离整数填充时，Hall 电导并没有改变。 R_{xy} 随电子填充或者磁场改变呈台阶状。杂质的存在没有破坏量子化。恰恰相反，在适当范围内，杂质浓度越大，平台宽度越大，量子化越加稳定。

理论上有非常多种理解 IQHE 的方法：杂质导致的局域态 / 扩展态；手征边界态；规范不变；拓扑绝缘体 …



IQHE 的第一个解释：扩展态和局域态



- 存在杂质时，在杂质附近势能改变 \Rightarrow 电子沿着等能面运动。能量高/低：在杂质附近，绕着杂质运动 \Rightarrow 局域态。中间能量：可以在全部空间运动 \Rightarrow 扩展态。
- 电子正好填满一个 Landau 能级： $\sigma_{xx} = 0$ ，Hall 电导量子化。
- 增加电子时，开始填充下一个 Landau 能级，新增电子处于局域态， x, y 方向都不能运动。新增加的电子对电导没有任何贡献，因此 σ_{xx} ， σ_{yx} 都不改变，仍然保持量子化状态。
- 继续增加电子，一直保持相同的量子化状态，直到能量达到扩展态。 $\sigma_{xx} \neq 0$ ，量子化被破坏。
- 继续增加电子到高能局域态，又变成 $\sigma_{xx} = 0$ 过渡到另外一个平台。

IQHE

局域态和延展态在整数量子 Hall 效应中的角色（请用电脑上的 adobe reader 看动态图）

更加微妙的杂质作用

- 只有扩展态的电子才对电导 σ_{xx}, σ_{yx} 有作用。

$$\sigma_{yx} = n_{ext} e / B = v_{ext} (e^2 / h) < v (e^2 / h)$$

杂质会束缚电子，导电电子数 $\searrow \Rightarrow$ 电导降低

- 杂质会加速扩展态电子的运动速度： $v_y \nearrow \Rightarrow$ 电导上升
- 这两个效应互相抵消， σ_{yx} 保持整数倍的 e^2/h 。
- 由于固体中杂质和缺陷不可完全消除，固体物理通常是被认为肮脏的物理。即使存在量子效应也会被这些缺陷模糊化。没有人事先预料到缺陷实际上有助于观察到量子化的电导。目前实验上 $R_K = h/e^2$ 可以准确到 10^{-10} 。1990–2018 年是标准电阻， $R_K = 25812.807 \Omega$ 。目前 h, e 确定， $R_K = 25812.80745 \dots \Omega$
- von Klitzing 第一篇 QHE 的文章： PRL **45**, 494 (1980)
初稿题目：“Realization of a Resistance Standard Based on Natural Constants” \Rightarrow 审稿人建议：
“New method for high-accuracy determination of the fine-structure constant based on quantized Hall resistance”

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = \frac{c\mu_0}{2R_k}$$

自旋的角色

- 考虑自旋之后，有 Zeeman 劈裂

$$\varepsilon_{n\sigma} = (n + 1/2)\hbar\omega_c + g\mu_B B\sigma$$

- 自由电子: $g = g_s = 2$, $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon_{n\uparrow} - \varepsilon_{n\downarrow} = g\mu_B B = \hbar \frac{eB}{m_e} = \hbar\omega_c \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{n\uparrow} = \varepsilon_{n+1\downarrow}$$

除了 $|0\downarrow\rangle$ 外，其它 Landau 能级都是双重简并 $\Rightarrow \nu$ 为奇数

- 晶体里 $g = g^*$, $\omega_c = eB/m^*$

$$\Delta\varepsilon = g\mu_B B = g^* \frac{e\hbar B}{2m_e} \sigma = \frac{g^*}{g_s} \frac{m^*}{m_e} \hbar\omega_c \sigma$$

- Si, Ge: $\Delta\varepsilon \sim 0.1\hbar\omega_c$, 不同自旋的电子不简并，因此在强磁场下可以观测到所有 ν 平台
- GaAs: $\Delta\varepsilon \sim 0.1 \times 0.1\hbar\omega_c$, 在目前实验能实现的磁场强度下不同自旋电子基本简并，因此上只能看到偶数 ν 平台

Room temperature IQHE in Graphene

[“Room-Temperature Quantum Hall Effect in Graphene”, Geim group, Science **315**, 1379 (2007)]

- 电-声子作用可以把电子从一个 Landau 能级散射到另一个 Landau 能级 → 破坏量子 Hall 效应
→ 只能在低温下观测

$$\Delta E = \hbar\omega_c \sim k_B\Theta_D \sim 10 - 100 \text{ K}$$

最好的半导体在 30 K 附近平台就模糊了。

- Graphene 中的 Landau 能级

$$\mathcal{H} = v_F(\mathbf{p} + e\mathbf{A}) \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

$$\mathcal{H}^2 = v_F^2(\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2 + v_F^2\hbar e\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

$$E_n^2 = n(2v_F^2\hbar eB)$$

$\Delta E = v_F\sqrt{2\hbar eB} \sim 3000 \text{ K}$ if $B = 45 \text{ T}$, 可以在室温下观测到平台。

- $\sigma_{yx} = 4(\nu + 1/2)e^2/h$

\mathbf{K} 和 \mathbf{K}' 双重简并 (sublattice), 自旋双重简并 $\Rightarrow 4\nu$

IQHE in Graphene

$$\mathcal{H} = v_F(\mathbf{p} + e\mathbf{A}) \cdot \boldsymbol{\sigma} = v_F[p_x\sigma_x + (p_y + eBx)\sigma_y] \quad \mathbf{A} = (0, Bx, 0)$$

$$= v_F \begin{pmatrix} 0 & p_x - i(p_y + eBx) \\ p_x + i(p_y + eBx) & 0 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon\psi = \mathcal{H}\psi \quad \psi = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \mathcal{H} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = v_F \begin{pmatrix} 0 & p_x - i(p_y + eBx) \\ p_x + i(p_y + eBx) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon^2 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = v_F^2 \begin{pmatrix} [p_x - i(p_y + eBx)] & \\ & [p_x + i(p_y + eBx)] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$
$$= v_F^2 \begin{pmatrix} p_x^2 + (p_y + eBx)^2 + \hbar eB & \\ & p_x^2 + (p_y + eBx)^2 - \hbar eB \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

IQHE in Graphene

$$\varepsilon^2 \alpha = \left[\frac{p_x^2}{2 \times \frac{1}{(2v_F^2)} = m^*} + \frac{1}{2} \frac{1}{2v_F^2} 4v_F^2 (eBv_F)^2 (x + \hbar k_y / eB)^2 + \hbar v_F^2 eB \right] \alpha$$

$$m^* = \frac{1}{2v_F^2} \quad \omega_c = 2eBv_F^2$$

$$\varepsilon_n^2 = (n - 1 + 1/2)\hbar\omega_c + \hbar\omega_c/2 = n\hbar\omega_c \quad \alpha_n = c_1 \psi_{n-1}(x) e^{ik_y y}$$

$$\varepsilon^2 \beta = \left[\frac{p_x^2}{2m^*} + \frac{1}{2} m^* \omega_c^2 (x + \hbar k_y / eB)^2 - \hbar\omega_c/2 \right] \beta \Rightarrow \beta_n = c_2 \psi_n(x) e^{ik_y y}$$

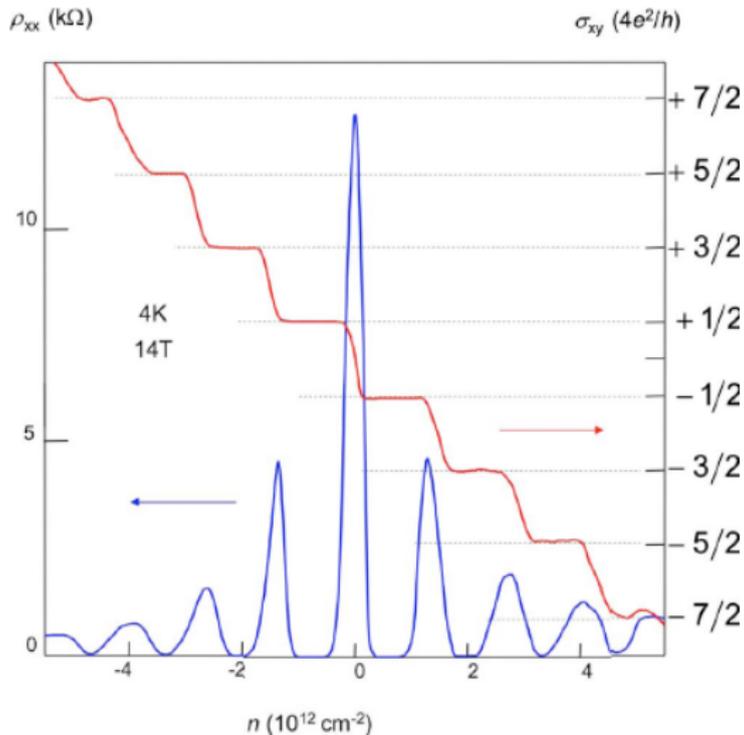
$$\pm \varepsilon_n \begin{pmatrix} \pm \psi_{n-1} \\ \psi_n \end{pmatrix} = \mathcal{H} \begin{pmatrix} \pm \psi_{n-1} \\ \psi_n \end{pmatrix} \quad n = 1, 2, \dots \Rightarrow \begin{array}{l} \text{电子: } +\varepsilon_n \\ \text{空穴: } -\varepsilon_n \end{array}$$

$$0 \begin{pmatrix} 0 \\ \pm \psi_0 \end{pmatrix} = \mathcal{H} \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_0 \end{pmatrix} \quad n = 0 \quad \text{电子、空穴}$$

- $n \geq 1$ 的轨道分为电子 ($\varepsilon_n = \sqrt{n\hbar\omega_c}$) 和空穴 ($\varepsilon_n = -\sqrt{n\hbar\omega_c}$)。每个轨道简并度为 4 (\mathbf{K} 和 \mathbf{K}' , 自旋)。

☞ 考虑 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}$ 理论中更高阶效应之后, $n = 0$ 的轨道会进一步劈裂成两部分, 一半为电子, 一半为空穴 $\Rightarrow n = 0$ 轨道简并度为 2。

IQHE in Graphene



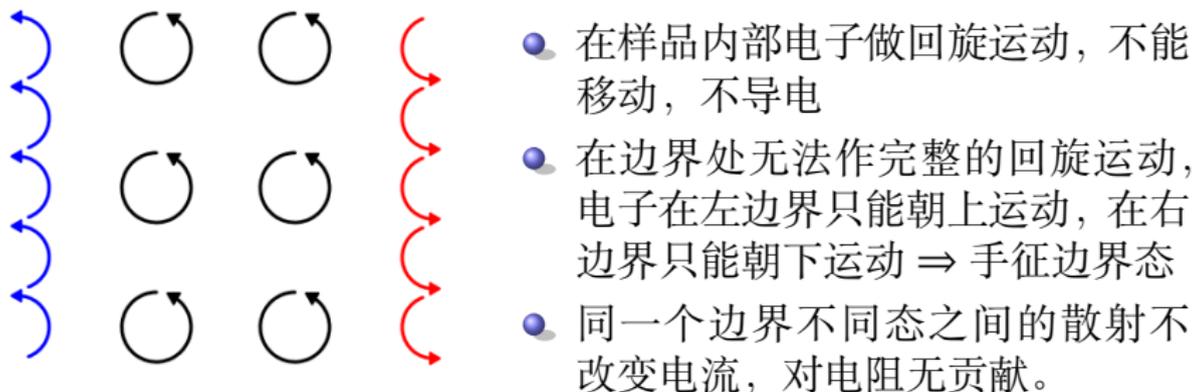
Novoselov, Geim, Morozov, *et al.*, 2005

IQHE 的第二种解释: Chiral edge states

☞ 量子 Hall 效应包括两个方面

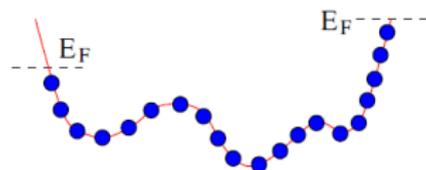
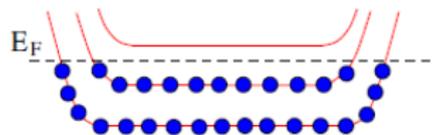
- 出现 Hall 电导平台: 平台的出现可以用杂质导致的局域态和扩展态来解释
- 平台处 Hall 电导严格量子化: 杂质散射并不能非常充分解释量子化现象

☞ 为此物理学家发展了众多的理论来解释 Hall 电导严格量子化这一现象。其中手征边界态最容易被理解。



- 只有把电子从一个边界散射到另外一个边界时, 才能改变电流, 从而改变电阻。这种散射机率 $\propto e^{-L_x/l}$, 宏观样品中 $L_x \rightarrow \infty$, 因此每个电子不受散射的从上下两边流动。

从边界态看量子 Hall 效应



- 边界态运动受到限制，由测不准原理其动量大于体态，因此能量也大于体态。电子占据新 Landau 能级时，先占据体态。填满体态之后才开始占据边界态。此时体内没有电流（满带），只有边界态对电流有贡献。
- x 方向上没有电场时，左右两个边界等价，左右电流抵消，总体没有电流。
- x 方向上加电压时，左右两个边界不等价，某个边界电流更大，有净电流。
- 每个被填充的 Landau 能级的边界态是一个导电通道，对电导的贡献 $G_0 = e^2/h$ 。总电导 $\sigma_{yx} = \nu G_0 = \nu e^2/h$ 。
- 量子化时杂质对边界态导电没有影响，因此量子化平台是稳定的。

理解量子 Hall 效应有四百种方法，你知道吗？

回 回 回 回

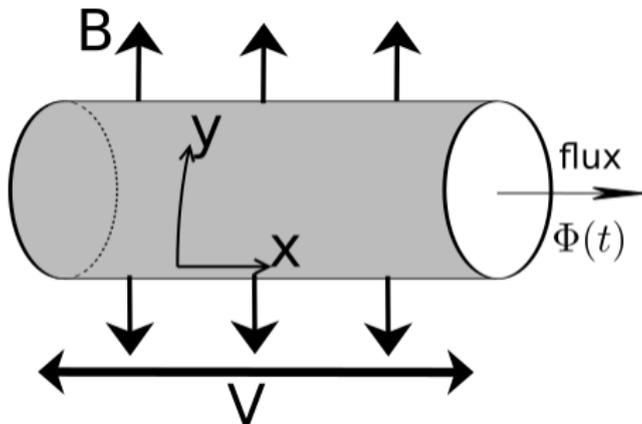
- 两种完全不同的方式理解整数量子 Hall 效应体的输运性质 vs 边界输运性质
- 从理解实验角度上，这两者得到相同结论
- 但扩展到新的理论 / 实验，这两者提供不同思路
- 还有更多的理解方式：拓扑绝缘体、规范不变理论 ...

Any theoretical physicist of any good knows six or seven different theoretical representations for exactly the same physics. And he knows that they are all equivalent, and that nobody is ever able to decide which one is right at that level. But he keeps them in his head hoping that they will give different ideas for guessing (new theories).

“Knowing versus Understanding”, Richard Feynman

Laughlin's gedankenexperiment:

从规范不变角度看量子 Hall 效应



从拓朴绝缘体角度看量子 Hall 效应

- 整数量子 Hall 效应发生在填充因子 ν 为整数附近。
- 此时的系统可以看成是满带绝缘体。
- 但是存在特殊的可导电的 chiral 边界态。
- Hall 电导的 TKNN 表达式

拓朴绝缘体

$$v_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\hbar} \nabla_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{k}} - \frac{e}{\hbar} \mathbf{E} \times \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{k})$$

$$J_y = -e \sum_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} = \frac{e^2}{\hbar} E_x \sum_{\mathbf{k}} \Omega_{xy}(\mathbf{k}) \quad \text{满带}$$

$$\sigma_{yx} = \frac{J_y}{E_x} = \frac{e^2}{\hbar} \sum_{\mathbf{k}} \Omega_{xy}(\mathbf{k}) = \frac{e^2}{2\pi h} \int \Omega dk_x dk_y \quad \text{Berry connection}$$

$$= G_0 C_1$$

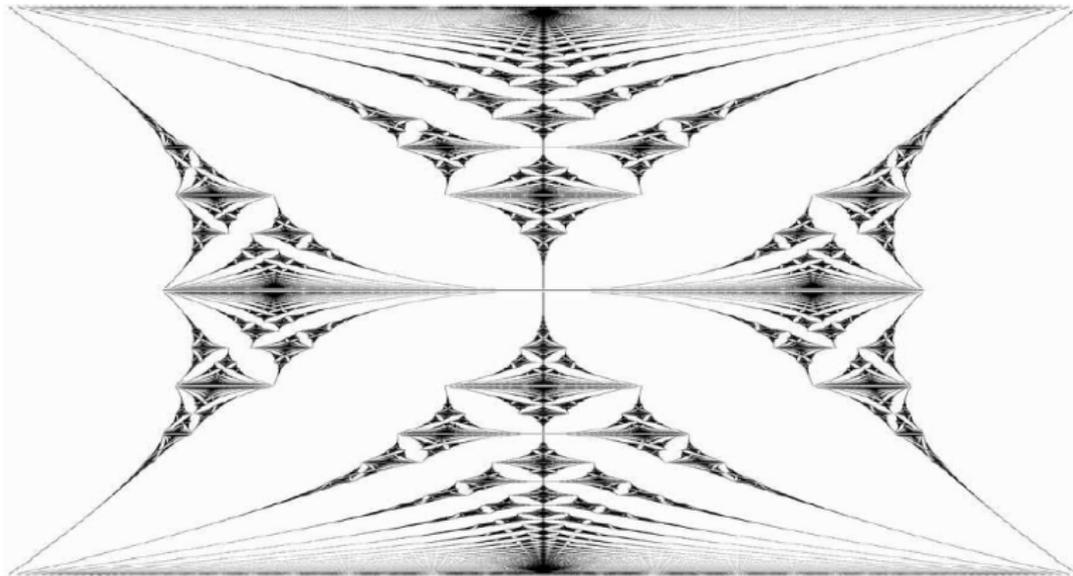
$$\text{First Chern number: } C_1 = \frac{1}{2\pi} \int \Omega dk_x dk_y$$

这里不考虑散射，TKNN 考虑散射后上述式子仍然成立。

从拓扑角度看量子 Hall 效应：Hofstadter Butterfly

[D. R. Hofstadter, PRB **14**, 2239 (1976)]

“Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid”



x: Magnetic Field; y: Energy

$$\mathcal{H} = \sum_{ij} t e^{-e/\hbar \int_{\mathbf{r}_i}^{\mathbf{r}_j} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}} |i\rangle \langle j|$$

$$\alpha = a^2 B / (h/e) = a^2 B / \Phi_0$$

强磁场下的能带结构

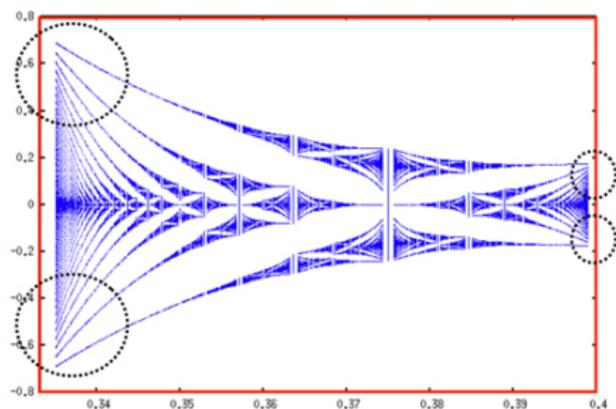
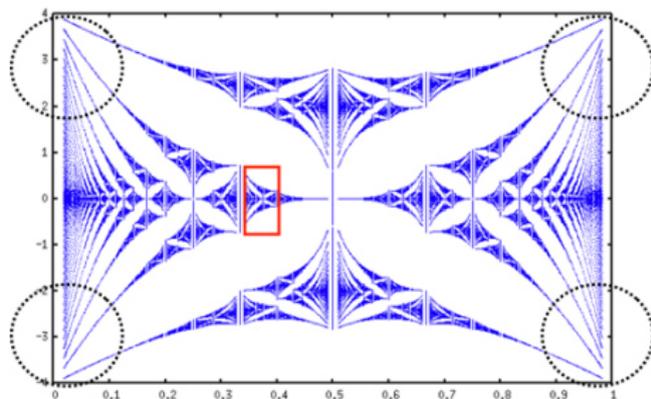
$$\alpha = \frac{a^2 B}{\Phi_0}$$

- 如果 $\alpha = p/q$ 是有理数, p, q 是互质的整数
 - 能带分为 q 个子带
 - 有些子带非常靠近, 整体上看近乎有 $[q/p = 1/\alpha]$ 个子带
- 如果 α 是无理数
 - 无穷多个子带
 - 子带形成 Cantor 集

强磁场下的能带结构

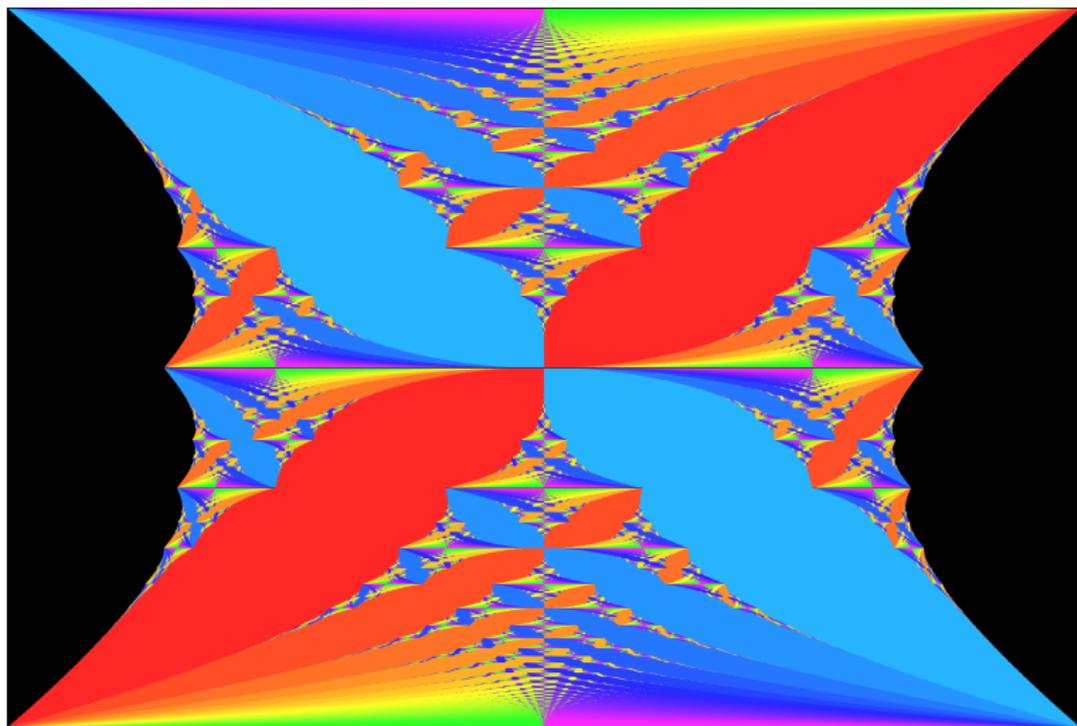
$$\alpha = \frac{a^2 B}{\Phi_0}$$

- 能带为具有自相似性的分型结构
- 存在杂质/无序的时候，精细的子带结构会被抹平，整体上看近乎有 $[1/\alpha]$ 个子带



I. Satija, "Butterfly in the Quantum World"
Fig 7.8

从拓扑角度看量子 Hall 效应：Hofstadter Butterfly



x: Magnetic field; y: Chemical potential; Color: Integer Hall Conductance

Fractional Hall Effect

在非常干净的样品里，填充因子 ν 是分数而不是整数时发生量子化平台

