

# 第五章 电磁场中的几何相位

- 5.1 规范变换
- 5.2 电磁场的几何相位
- 5.3 电磁场几何相位的例子
- 5.4 电磁场几何相位的实验观测
- 5.5 整数量子 Hall 效应的规范不变解释

# References

- “Geometric Phases in Classical and Quantum Mechanics”, Chruścín-ski and Jamiołkowski, Springer (2004)
- “A Short Course on Topological Insulators”, Asbóth, Oroszlány, and Pályi, Springer (2016)
- “Topology in Modern Solid State Physics: From Topological Insulators to Weyl semimetals”, Adam Lantos.  
[https://www.ucy.ac.cy/phy/documents/Lantos\\_Thesis.pdf](https://www.ucy.ac.cy/phy/documents/Lantos_Thesis.pdf)
- “Topological Insulators and Topological Superconductors”, Bernevig, Princeton (2013)
- “Topology and Geometry for Physicists”, Nash and Sen, Dover (1983)
- “Topology Illustrated”, P. Savelie, (2016)

## 波函数的相位

$$\begin{aligned}i\hbar\partial_t\psi(\mathbf{r},t) &= \left\{ \frac{[\mathbf{p} + e\mathbf{A}_Q(\mathbf{r},t)]^2}{2m} - e\phi_Q(\mathbf{r},t) \right\} \psi(\mathbf{r},t) \\&= \left\{ \frac{[-i\hbar\nabla + e\mathbf{A}_Q(\mathbf{r},t)]^2}{2m} - e\phi_Q(\mathbf{r},t) \right\} \psi(\mathbf{r},t)\end{aligned}$$

$$\mathbf{E}_Q = -\nabla\phi_Q + \partial_t\mathbf{A}_Q \quad \mathbf{B}_Q = \nabla \times \mathbf{A}_Q \quad Q = (Q_1, Q_2, \dots) \quad \text{参数}$$

●  $\psi(\mathbf{r},t) = |\psi(\mathbf{r},t)|e^{i\theta(\mathbf{r},t)}$

$|\psi(\mathbf{r},t)|^2 =$  粒子密度, 可测量;  $\theta(\mathbf{r},t)$  无法直接测量

●  $\theta(\mathbf{r},t) \Rightarrow \theta(\mathbf{r},t) + \chi(\mathbf{r},t) + \varphi_Q$

不改变局域的可测量

$$\psi'(\mathbf{r},t) \Rightarrow e^{i\chi(\mathbf{r},t)+i\varphi_Q}\psi(\mathbf{r},t)$$

Schrödinger 方程

$$i\hbar\partial_t[e^{-i\chi-i\varphi}\psi'] = \left[ \frac{(-i\hbar\nabla + e\mathbf{A})^2}{2m} - e\phi \right] [e^{-i\chi-i\varphi}\psi']$$

$$e^{-i\chi-i\varphi}[i\hbar\partial_t\psi' + (\hbar\partial_t\chi)\psi'] = e^{-i\chi-i\varphi}\left[ \frac{(-i\hbar\nabla - \hbar\nabla\chi + e\mathbf{A})^2}{2m} - e\phi \right] \psi'$$

$$i\hbar\partial_t\psi' = \left[ \frac{[-i\hbar\nabla + e(\mathbf{A} - \hbar\nabla\chi/e)]^2}{2m} - e(\varphi + \hbar\partial_t\chi/e) \right] \psi'$$

$\varphi_Q$ : 全局相位, 可以只和外界参数  $Q$  有关, 和时空点无关。  
 $\chi(\mathbf{r},t)$ : 局域相位, 依赖时空  
只考虑局域相位, 省略下标  $Q$

## 规范变换

Schrödinger 方程中不包含全局相位，现在只关注局域相位  $\chi(\mathbf{r}, t)$

$$\phi \rightarrow \phi'(\mathbf{R}, t) = \phi(\mathbf{R}, t) + \hbar \partial_t \chi(\mathbf{R}, t)/e$$

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}'(\mathbf{R}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{R}, t) - \hbar \nabla_{\mathbf{R}} \chi(\mathbf{R}, t)/e$$

$$\mathbf{E} = \nabla_{\mathbf{R}} \phi + \partial_t \mathbf{A} \rightarrow \nabla_{\mathbf{R}} (\phi + \hbar \partial_t \chi/e) + \partial_t (\mathbf{A} - \hbar \nabla_{\mathbf{R}} \chi/e) = \nabla_{\mathbf{R}} \phi' + \partial_t \mathbf{A}'$$

$$\mathbf{B} = \nabla_{\mathbf{R}} \times \mathbf{A} \rightarrow \nabla_{\mathbf{R}} \times (\mathbf{A} - \hbar \nabla_{\mathbf{R}} \chi/e) = \nabla_{\mathbf{R}} \times \mathbf{A}'$$

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\chi} \psi$$

$$\begin{aligned} i\hbar \partial_t \psi &= \left[ \frac{(-i\hbar \nabla_{\mathbf{R}} + e\mathbf{A})^2}{2m} - e\phi \right] \psi = \left[ \frac{(\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2}{2m} - e\phi \right] \psi \\ &\rightarrow i\hbar \partial_t \psi' = \left[ \frac{(-i\hbar \nabla_{\mathbf{R}} + e\mathbf{A}')^2}{2m} - e\phi' \right] \psi' = \left[ \frac{(\mathbf{p} + e\mathbf{A}')^2}{2m} - e\phi' \right] \psi' \end{aligned}$$

☞ 可以自由选择不同的规范：相位  $\chi(\mathbf{r}, t)$

☞ 不同规范，波函数、电磁势不同

☞ Schrödinger 方程形式不变

☞ 可测量 ( $|\psi|^2$ 、 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{B}$  等) 不变

# 电磁场的几何

- 量子力学中最简单的情况  
规范自由度  $\Leftrightarrow$  波函数局域相位  $\chi(\mathbf{r}, t)$  的自由度
- 可以选择  $\chi$ ，使得局域的电磁势为零

$$\chi(\mathbf{r}, t) = -\gamma(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{\hbar} \int_{\mathbf{r}_0, t_0}^{\mathbf{r}, t} (\phi, -\mathbf{A}) \cdot (dt, d\mathbf{r})$$

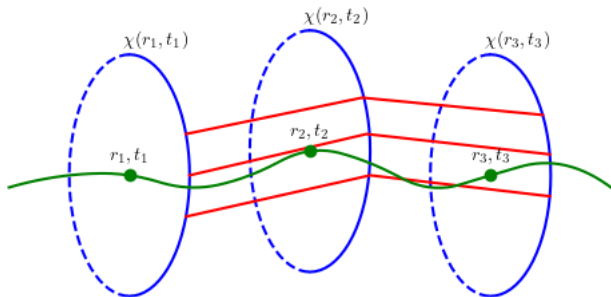
$$\phi' = 0 \quad \mathbf{A}' = 0$$

$$i\hbar\partial_t\psi' = \frac{(-i\hbar\nabla)^2}{2m}\psi' = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}\psi'$$

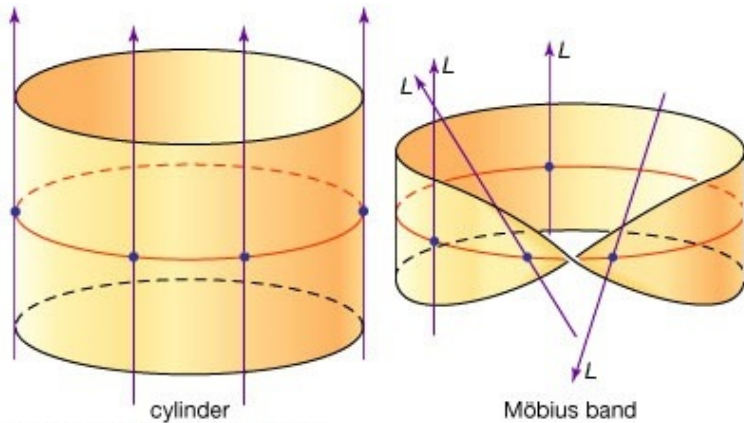
- 电磁场的作用完全体现在相位  $\chi(\mathbf{r}, t)$  里
  - $\chi(\mathbf{r}, t)$  依赖于电磁势的规范选取
  - 不一定能够在全局上解析地定出  $\chi(\mathbf{r}, t)$

# 电磁场的几何属性

- $e^{i\chi} = e^{i(\chi+2\pi)}$   
 $\chi(\mathbf{r}, t)$  可以看成时空里的点  $(t, \mathbf{r})$  上的一周期性线段，或圆，或平面上的单位向量
- 在每个时空点上，都可以任意选择  $\chi(\mathbf{r}, t)$ 。但为了使得这些  $\chi$  描述同一个体系，不同时空点上的相位必须按照某种方式连接起来：Connection:  $\partial_t \chi = e\phi/\hbar$ ,  $\nabla \chi = -e\mathbf{A}/\hbar$
- 把所有时空点上的线段（圆）连接起来，形成一个几何体  
☞ 纤维丛 (fibre bundle), line bundle, ...
- 电磁场体现在 line bundle 的几何属性



# Line bundle



- 🔔 Fibre bundle 由底流形（例如时空点集合）和 fibre（例如相位空间）组合而成
- 🔔 局部看相同底流形、相同 fibre 的 bundle 结构没有区别
- 🔔 全局看不同 bundle 结构可以不同
- 🔔 底流形为圆，fibre 为线的两种不同 bundle：柱面和 Möbius 圈

# Möbius strip

☞ 柱面有两个面，Möbius 圈只有一个

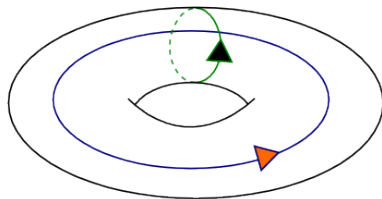
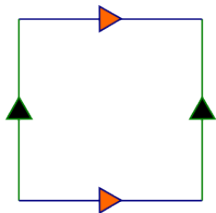
# Möbius strip

- ❏ 柱面有两个边界，Möbius 圈只有一个

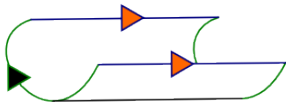
# 环面

- ☞ 底流形为圆环，fibre 也是环的 bundle
- ☞ 拓扑平凡的 bundle

Torus

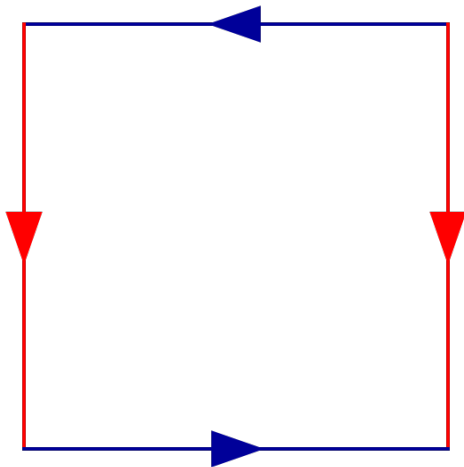


If we actually fold



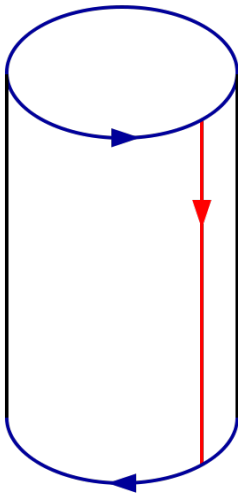
# Klein Bottle

- 底流形为圆环，fibre 也是环的 bundle
- 拓扑不平凡的 bundle



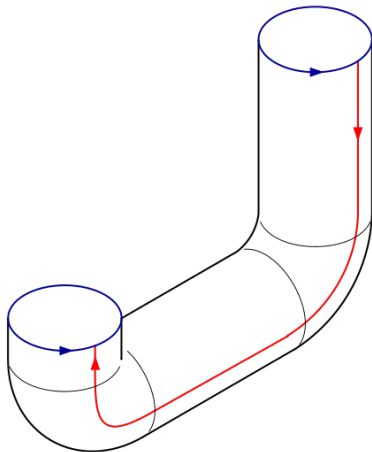
# Klein Bottle

- ☞ 底流形为圆环，fibre 也是环的 bundle
- ☞ 拓扑不平凡的 bundle



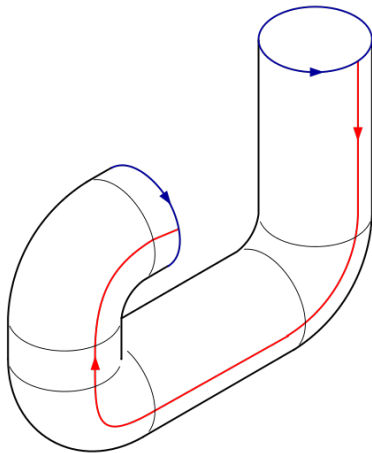
# Klein Bottle

- 底流形为圆环，fibre 也是环的 bundle
- 拓扑不平凡的 bundle



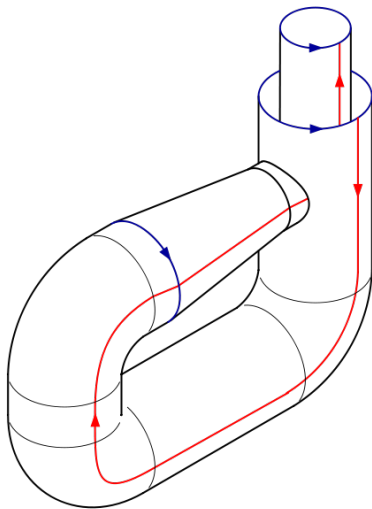
# Klein Bottle

- 底流形为圆环，fibre 也是环的 bundle
- 拓扑不平凡的 bundle



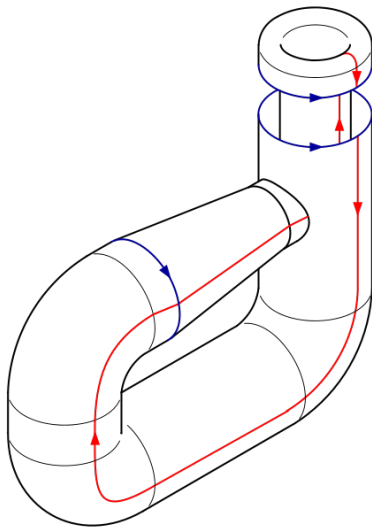
# Klein Bottle

- 底流形为圆环，fibre 也是环的 bundle
- 拓扑不平凡的 bundle



# Klein Bottle

- 底流形为圆环，fibre 也是环的 bundle
- 拓扑不平凡的 bundle



# Klein Bottle

# 非平凡的几何： 闭合路径下的相位改变

## Aharonov–Bohm(AB)/Berry phase/anholonomy angle

无穷小环  $C = (t, \mathbf{r}) \text{---} (t, \mathbf{r}) + (dt_1, d\mathbf{r}_1) \text{---} (t, \mathbf{r}) + (dt_1 + dt_2, d\mathbf{r}_1 + d\mathbf{r}_2) \text{---} (t, \mathbf{r}) + (dt_2, d\mathbf{r}_2) \text{---} (t, \mathbf{r})$

$$\begin{aligned} \frac{\hbar}{e} \delta\chi &\simeq [\phi(t, \mathbf{r}) dt_1 - \mathbf{A}(t, \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}_1] \\ &+ [\phi(t + dt_1, \mathbf{r} + d\mathbf{r}_1) dt_2 - \mathbf{A}(t + dt_1, \mathbf{r} + d\mathbf{r}_1) \cdot d\mathbf{r}_2] \\ &- [\phi(t + dt_2, \mathbf{r} + d\mathbf{r}_2) dt_1 - \mathbf{A}(t + dt_2, \mathbf{r} + d\mathbf{r}_2) \cdot d\mathbf{r}_1] \\ &- [\phi(t, \mathbf{r}) dt_2 - \mathbf{A}(t, \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}_2] \\ &\simeq [\phi dt_1 - \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}_1] - [\phi dt_2 - \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}_2] \\ &+ [(\phi + \partial_t \phi dt_1 + \nabla \phi \cdot d\mathbf{r}_1) dt_2 - (\mathbf{A} + \partial_t \mathbf{A} dt_1 + d\mathbf{r}_1 \cdot \nabla \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{r}_2] \\ &- [(\phi + \partial_t \phi dt_2 + \nabla \phi \cdot d\mathbf{r}_2) dt_1 - (\mathbf{A} + \partial_t \mathbf{A} dt_2 + d\mathbf{r}_2 \cdot \nabla \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{r}_1] \\ &= -(\nabla \phi + \partial_t \mathbf{A}) dt_1 \cdot d\mathbf{r}_2 + (\nabla \phi + \partial_t \mathbf{A}) dt_2 \cdot d\mathbf{r}_1 \\ &\quad - d\mathbf{r}_1 \cdot \nabla \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}_2 + d\mathbf{r}_2 \cdot \nabla \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}_1 \\ &= \mathbf{E} \cdot (-dt_1 d\mathbf{r}_2 + dt_2 d\mathbf{r}_1) + \mathbf{B} \cdot (d\mathbf{r}_1 \times d\mathbf{r}_2) \end{aligned}$$

# 非平凡的几何：闭合路径下的相位改变

## Aharonov-Bohm(AB)/Berry phase/anholonomy angle

无穷小环  $C = (t, \mathbf{r}) \longrightarrow (t, \mathbf{r}) + (dt_1, d\mathbf{r}_1) \longrightarrow (t, \mathbf{r}) + (dt_1 + dt_2, d\mathbf{r}_1 + d\mathbf{r}_2) \longrightarrow (t, \mathbf{r}) + (dt_2, d\mathbf{r}_2) \longrightarrow (t, \mathbf{r})$

$$\frac{\hbar}{e} \delta\chi = \mathbf{E} \cdot (-dt_1 d\mathbf{r}_2 + dt_2 d\mathbf{r}_1) + \mathbf{B} \cdot (d\mathbf{r}_1 \times d\mathbf{r}_2)$$

存在电磁场时

- 经一闭合的环路，时空上回到出发点，但相位发生改变
- 相位改变量和路径有关，和电磁场有关，但是和规范无关
- 相位改变量正比于闭合路径里的电磁场“通量”

静磁场时

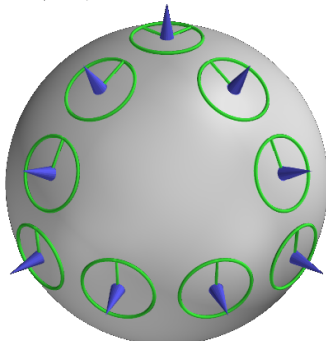
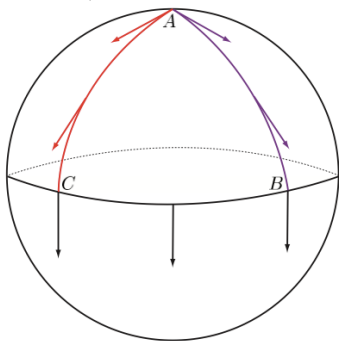
$$\begin{aligned} \delta\chi &= -\frac{e}{\hbar} \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{2\pi}{h/e} \iint \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{2\pi}{\Phi_0} \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \\ &= -2\pi\Phi/\Phi_0 \quad \Phi_0 = h/e \text{ 量子磁通} \end{aligned}$$

- 可以局域定义  $\chi$ ，但无法在全球上定义行为良好（连续、单值）的  $\chi$

## $\delta\chi$ : 局部相位的 anholonomy angle

$\delta\chi$  可以看成是单位向量在时空中平行移动 (parallel transport) 一周后出来的角度。Parallel transport: 在空间中沿某曲线移动矢量, 使得移动前后矢量“平行”。大体上: 移动时尽可能保持矢量和该曲线夹角不变。

- 例子: 球面上的矢量保持方向平行移动一圈回到原点, 和原矢量有个夹角,  $\gamma_C = \Omega_C$ : anholonomy angle / 不对称角
- $\gamma_C \neq 0$  是球面弯曲造成, 由球面的几何性质决定。
- 经典力学中的几何相位: 猫落地, 傅科摆



# 电磁场的几何

1918/1919, H. Weyl 仿效 Einstein 的广义相对论把电磁力几何化

把带电粒子在时空上的 line bundle 当成一个几何体，可以用几何的语言来理解电磁场的行为

- 电磁势  $\Rightarrow$  line bundle 上的连接
- 电磁场  $\Rightarrow$  line bundle 的曲率
  - 电场  $\Rightarrow$  时间 + 真实空间上的曲率
  - 磁场  $\Rightarrow$  真实空间上的曲率
- 环绕一周后，相位改变 AB/Berry phase  $\Rightarrow$  anholonomy angle  $\Rightarrow$  时空上的场“通量”
- 这个相位由 line bundle 的“几何”决定  $\Rightarrow$  几何相位
- 拓扑性：line bundle 的全局几何性质

## 圆环里电子波函数的 line bundle

半径为  $R$  的圆环，中心有磁通  $\Phi$

$$\mathbf{A} = \Phi/(2\pi R)\hat{e}_\phi \quad \Phi = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad \text{环上磁场强度为零}$$

$$\mathcal{H}[\Phi] = \frac{(-i\hbar\nabla + e\mathbf{A})^2}{2m^*} = \frac{\hbar^2}{2m^*} \left[ \frac{-i\partial_\phi}{R} + \frac{e\Phi}{Rh} \right]^2 = \frac{\hbar^2}{2m^*R^2} \left( -i\partial_\phi + \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2$$

可做如下规范变换

$$\chi(\phi) = \chi_0 - n\phi \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$e^{-i\chi} \hat{H}[\Phi] e^{i\chi} \Rightarrow \frac{\hbar^2}{2mR^2} \left( -i\partial_\phi + \frac{\Phi}{\Phi_0} - n \right)^2$$

$$= \hat{H}[\Phi - n\Phi_0]$$

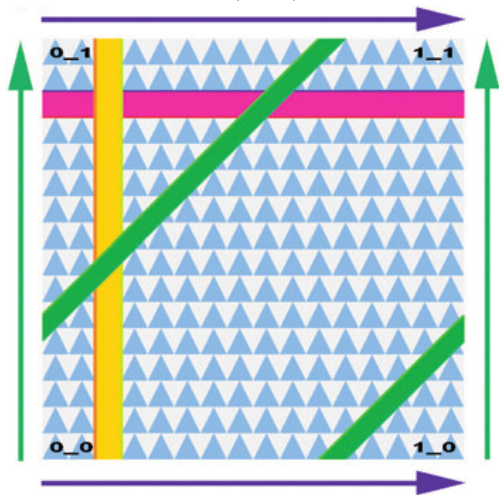
圆环中做规范变换  $n$  只能选取整数, why?

当  $\Phi = n\Phi_0$  时, 磁场可以被完全消除

$$e^{-i\chi} \hat{H}[\Phi] e^{i\chi} \Rightarrow \hat{H}[0]$$

## $\Phi = 0$ 时的一个 line bundle

C. H. Séquin, “Topological tori as abstract art”, Journal of Mathematics and the Arts **6**, 191–209, (2012)



- 横向为  $\chi$ , 纵向为  $\phi$ 。每条横着线代表一个 fiber, 不同 fiber 组合起来形成 bundle。
- $\Phi = 0 \Rightarrow \chi(\phi) \equiv \chi_0$
- 三角形顶点指向从一个 fiber 到其邻居的连接点。当  $\Phi = 0$  时, 不同的  $\phi$ , 对应相同的  $\chi$ , 相邻 fiber 没有任何变化地粘在一起。
- 金黄色的线代表对同一个系统的描述。

## $\Phi = 0$ 时的一个 line bundle

C. H. Séquin, “*Topological tori as abstract art*”, Journal of Mathematics and the Arts **6**, 191–209, (2012)



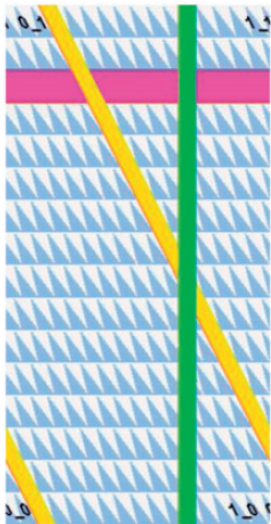
## $\Phi = 0$ 时的一个 line bundle

C. H. Séquin, “*Topological tori as abstract art*”, Journal of Mathematics and the Arts **6**, 191–209, (2012)



## $\Phi = \Phi_0$ 时圆环里电子的一个 line bundle

C. H. Séquin, “*Topological tori as abstract art*”, Journal of Mathematics and the Arts **6**, 191–209, (2012)



- 横向为  $\chi$ ，纵向为  $\phi$ 。每条横着线代表一个 fiber，不同 fiber 组合起来形成 bundle。
- $\Phi = \Phi_0 \Rightarrow \chi(\phi) = \chi_0 - \phi$
- 三角形顶点指向从一个 fiber 到其邻居的连接点。当  $\Phi = \Phi_0$  时，不同的  $\phi$ ，对应不同的  $\chi$ ，相邻 fiber 错位粘在一起。
- 金黄色的线代表对同一个系统的描述。

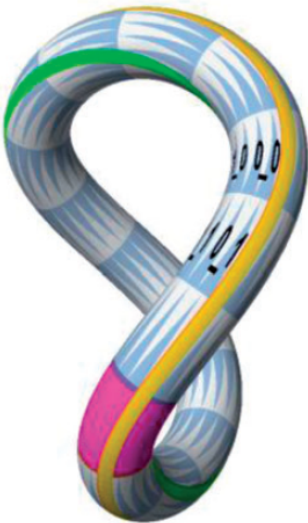
## $\Phi = \Phi_0$ 时圆环里电子的一个 line bundle

C. H. Séquin, “*Topological tori as abstract art*”, Journal of Mathematics and the Arts **6**, 191–209, (2012)



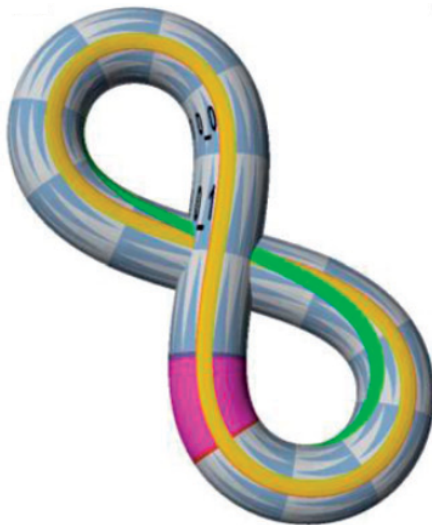
## $\Phi = \Phi_0$ 时圆环里电子的一个 line bundle

C. H. Séquin, “*Topological tori as abstract art*”, Journal of Mathematics and the Arts **6**, 191–209, (2012)



## $\Phi = \Phi_0$ 时圆环里电子的一个 line bundle

C. H. Séquin, “*Topological tori as abstract art*”, Journal of Mathematics and the Arts **6**, 191–209, (2012)



# 电磁势的角色

Electromagnetic potentials are not unique  $\Rightarrow$  Electromagnetic potentials have no physics significance  $\Rightarrow$  Only fields  $\mathbf{E}$  and  $\mathbf{H}$  can be observed, when they both vanish, there cannot be any electromagnetic effects on a charged particle.

## ● O. Heaviside

“ $\mathbf{A}$  and its scalar potential parasite  $\phi$  sometimes causing great mathematical complexity and indistinctiveness; and it is, for practical reasons, best to murder the whole lot, or, at any rate, merely employ them as subsidiary functions  $\dots$  Thus  $\phi$  and  $\mathbf{A}$  are murdered, so to speak, with a great gain in definiteness and conciseness.”

## ● Whittaker

“As the potentials do not possess any physical significance, it is desirable to remove them from the equations. This was done afterwards by Maxwell himself, who in 1868 proposed to base the electromagnetic theory of light solely on the equations  $\nabla \times \mathbf{H} = 4\pi\mathbf{S}$ ,  $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}$  together with the equations which define  $\mathbf{S}$  in terms of  $\mathbf{E}$ , and  $\mathbf{B}$  in terms of  $\mathbf{H}$ .”

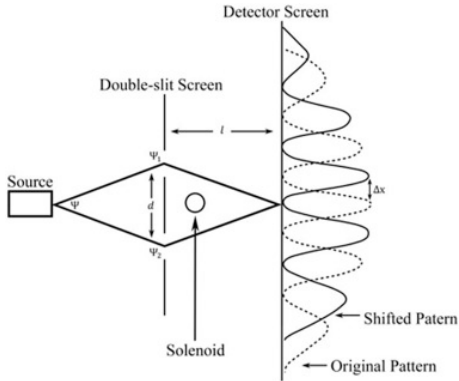
# 电磁场几何相位的观测：AB effect

W. Ehrenberg and R. E. Siday, "The Refractive Index in Electron Optics and the Principles of Dynamics", Proceedings of the Physical Society. Series B. **62**, 8 (1949); Y. Aharonov and D. Bohm, "Significance of electromagnetic potentials in quantum theory", Phys. Rev. **115**, 485 (1959).

- 电子的双缝干涉条纹
- 线圈外无电磁场  $\Rightarrow$  经典  
角度线圈是否通电流对  
干涉条纹无影响
- 通电流之后磁通不为零  
 $\Rightarrow$  不同路径相位差 (几  
何相位)  $\Rightarrow$  干涉条纹移动

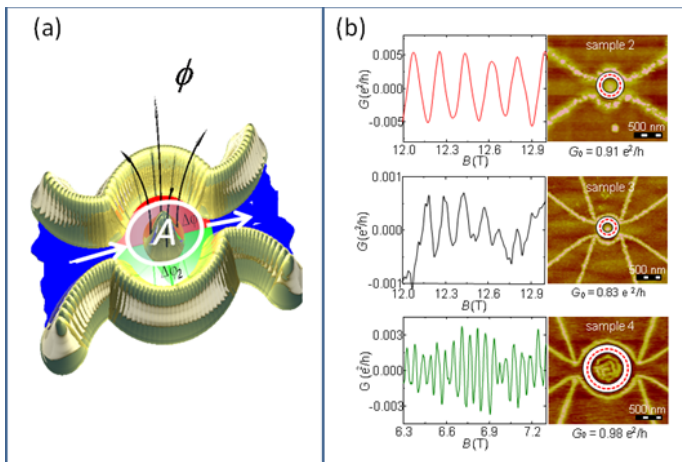
$$\Delta\varphi = \gamma(C) = 2\pi\Phi/\Phi_0$$

$$\Delta x = \frac{\lambda l}{d} \frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{\lambda l}{d} \frac{\Phi}{\Phi_0}$$



# 凝聚态体系中 AB Phase 的观测：纳米环里的电导震荡

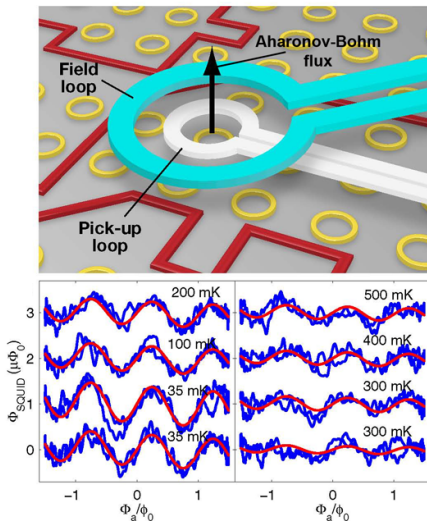
[Giesbers et al, “Correlation-induced single-flux-quantum penetration in quantum rings”, Nat. Phys. **6**, 173 (2010)]



$$\begin{aligned}
 G/G_0 &= |t_1 e^{i\gamma_1} + t_2 e^{i\gamma_2}|^2 = |t_1|^2 + 2|t_2|^2 + 2|t_1 t_2| \cos[\theta_{12} + (\gamma_2 - \gamma_1)] \\
 &= T_1 + T_2 + 2\sqrt{T_1 T_2} \cos[\theta_{12} + 2\pi\Phi/\Phi_0]
 \end{aligned}$$

# 纳米环里的持续电流

M. Büttiker, Y. Imry and R. Landauer, “Josephson behavior in small normal one-dimensional rings”, Phys. Lett. A **96**, 365 (1983); H. Bluhm et al, “Persistent Currents in Normal Metal Rings”, PRL **102**, 136802 (2009)



## 纳米环里的持续电流

- 有时间反演不变的体系中，热力学平衡态下不可能存在电流
- 加上磁场之后破坏时间反演不变，可能存在平衡电流

半径为  $R$  的纳米环，中心有磁通  $\Phi$ ：

$$\mathbf{A} = \Phi/(2\pi R)\hat{e}_\phi \qquad \Phi = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

$$\mathcal{H} = \frac{(-i\hbar\nabla + e\mathbf{A})^2}{2m^*} = \frac{\hbar^2}{2m^*} \left[ \frac{-i\partial_\phi}{R} + \frac{e\Phi}{R\hbar} \right]^2 = \frac{\hbar^2}{2m^*R^2} \left( -i\partial_\phi + \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2$$

$$\Psi_l(\phi) = e^{il\phi} \qquad E_l\Psi_l = \mathcal{H}\Psi_l = \frac{\hbar^2}{2m^*R^2} (l + \Phi/\Phi_0)^2$$

$$\mathbf{I}_l = I_l\hat{e}_\phi = -\frac{e}{m^*} \langle \Psi_l | \mathbf{p} + e\mathbf{A} | \Psi_l \rangle = -\frac{\partial E_l(A)}{\partial \mathbf{A}} = 2\pi R \frac{\partial E_l}{\partial \Phi} \hat{e}_\phi$$
$$\propto (l + \Phi/\Phi_0)\hat{e}_\phi$$

# 纳米环里的持续电流

$$E_l \propto (l + \Phi/\Phi_0)^2$$

$$I_l \propto (l + \Phi/\Phi_0)$$

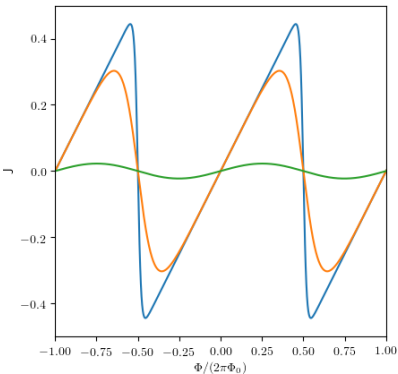
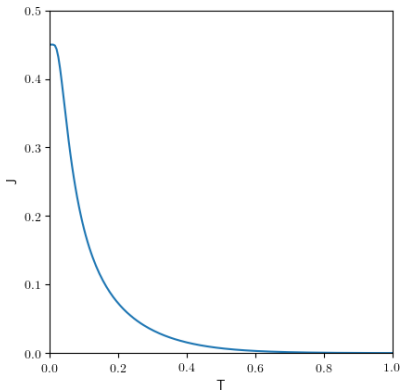
$$I = \frac{1}{Z} \sum_l I_l e^{-\beta E_l}$$

● 无磁场:  $\Phi = 0$

$$E_l = E_{-l}, I_l = -I_{-l}, I = 0$$

● 有磁场:  $\Phi \neq 0$

$$E_l \neq E_{-l}, I_l \neq -I_{-l}, I \neq 0$$



## 持续电流的周期性

$$\mathcal{H}[\Phi] = \frac{\hbar^2}{2m^*R^2}[-i\partial_\phi + \Phi/\Phi_0]^2$$

$$\Psi_l(\Phi, \phi) = e^{il\phi} \quad E_l(\Phi) = \frac{\hbar^2}{2m^*R^2}(l + \Phi/\Phi_0)^2$$

规范变换  $\chi(\phi) = n\phi$ ,

$$\Psi'_l(\Phi, \phi) = \Psi_l(\phi)e^{in\phi} = e^{i(l+n)\phi}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}'[\Phi] &= e^{in\phi}\mathcal{H}[\Phi]e^{-in\phi} = \frac{\hbar^2}{2m^*R^2}[-i\partial_\phi - n + \Phi/\Phi_0]^2 \\ &= \frac{\hbar^2}{2m^*R^2}[-i\partial_\phi + (\Phi - n\Phi_0)/\Phi_0]^2 \\ &= \mathcal{H}[\Phi - n\Phi_0]\end{aligned}$$

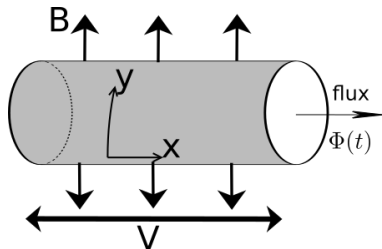
$$\Psi'_l(\Phi, \phi) = \Psi_{l+n}(\Phi - n\Phi_0, \phi) \quad E'_l(\Phi) = E_{l+n}(\Phi - n\Phi_0)$$

$\Phi + n\Phi_0 \rightarrow \Phi$  把所有的量子数为  $l$  的态变成量子数为  $l + n$  的态,  
但是系统的本征态/本征能量/平衡物理量没有任何变化。

$\Rightarrow$  平衡电流随磁通周期变化

# Laughlin's gedankenexperiment: 量子 Hall 效应的规范不变解释

$$\begin{aligned}\hat{e}_r &\rightarrow \hat{z} & \hat{e}_\phi &\rightarrow \hat{y} \\ y &= R\phi & L_y &= 2\pi R \\ k_y &= 2\pi l/L_y & \mathbf{A} &= (Bx + \Phi/L_y)\hat{e}_\phi \\ &\Rightarrow \mathbf{B} = B\hat{z} + Bx/R\hat{x} \rightarrow 0 \text{ if } R \rightarrow \infty\end{aligned}$$



$$\mathcal{H}[\Phi] = \frac{p_x^2}{2m^*} + \frac{[p_y + eBx + h\Phi/(L_y\Phi_0)]^2}{2m^*} + V_{imp}(x, y)$$

$$\rightarrow e^{i2\pi\Delta\Phi y/(L_y\Phi_0)} \mathcal{H} e^{-i2\pi\Delta\Phi y/(L_y\Phi_0)}$$

$$\Delta\Phi = n\Phi_0$$

$$\rightarrow \frac{p_x^2}{2m^*} + \frac{[p_y + eBx + h(\Phi - \Delta\Phi)/(L_y\Phi_0)]^2}{2m^*} + V_{imp}(x, y) = \mathcal{H}[\Phi - \Delta\Phi]$$

• 对于每一个 Landau 能级，不考虑杂质

• Landau 规范下，波函数在  $y$  方向扩展  $k_y = 2l\pi/L_y$ ， $x$  方向局域于  $x_0(k_y) = -k_y\hbar/(eB)$ 。

•  $\Phi(t)$  改变  $\Phi_0$  后，量子数  $l$  改变 1  $\Rightarrow k_y$  改变  $2\pi/L_y$   
 $\Rightarrow x$  方向的中心移动  $-\hbar/(eBL_y)$

$\Rightarrow$  考虑  $x$  方向的边界，有一个电子从右边跑到左边

Charge  
pumping

# Laughlin's gedankenexperiment: 量子 Hall 效应的规范不变解释

- 没有杂质时，对于每一个被占据的 Landau 能级， $\Phi(t)$  改变  $\Phi_0$  后，有一个电子从样品的一边被 pump 到另一边
- 整个系统能量发生变化，能量改变量的计算

$$\begin{aligned}\Delta E &= \sum_n \sum_{k_y} \Delta E_n(k_y) = \sum_n \sum_{k_y} \frac{-\hbar \Delta k_y E}{B} \\ &= \sum_{n=1}^{\nu} \frac{-\hbar \Delta k_y E}{B} \frac{L_x}{\Delta k_y \hbar / (eB)} = \nu e E L_x = \nu e V\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}k_y \text{ 个数} \\ &= \text{Landau 简并度} \\ &= \frac{L_x}{\Delta k_y \hbar / eB}\end{aligned}$$

- 整个系统能量改变的简单算法  
有  $\nu$  个电子从样品一头跑到另一头，每个电子能量改变  $eV$ ，  
总能量改变  $\nu eV$
- y 方向电流

$$I_y = \frac{\Delta E}{\Delta \Phi} = \frac{\nu e V}{\hbar / e} = \nu \frac{e^2}{h} V$$

$$R_{xy} = R_K / \nu$$

🔊 Hall 电导 / 电阻量子化

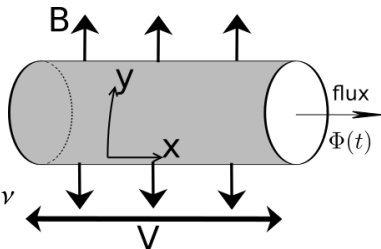
# Laughlin's gedankenexperiment: 量子 Hall 效应的规范不变解释

- 有杂质时，无法计算本征态，本征能量。但是通过作规范变换， $\Phi(t)$  改变  $\Phi_0$  后，同样可以得出类似的结论：填充因子为  $\nu$  时，有  $\nu$  个电子从样品的一边被 pump 到另一边。
- ⇒ 系统能量改变  $\nu eV$
- ⇒ 电流  $I_y = \nu(e^2/h)V$
- 🔗 只要  $\sigma_{xx} = 0$  (填满一个 Landau 能级里所有扩展态时)，必然有  $R_{xy} = R_K/\nu$
- 🔗 Hall 电导 / 电阻量子化

# Laughlin's gedankenexperiment: 量子 Hall 效应的规范不变解释

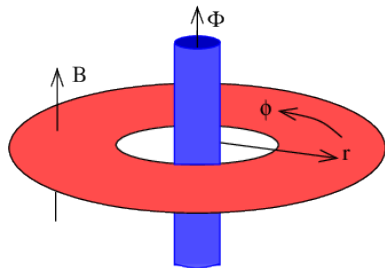
Fine prints

- 只要  $\sigma_{xx} = 0$  , 必然有  $R_{xy} = R_K/\nu$
- 计算过程中利用了:  
有  $\nu$  个电子  $x = 0 \rightarrow x = L_x \Rightarrow I_x \neq 0$   
这是否意味着  $\sigma_{xx} \neq 0$ ?
- $E_y = \partial_t A_y = \partial_t [Bx + \Phi(t)/L_y] = \partial_t \Phi(t)/L_y \neq 0$   
 $\rightarrow I_x = \sigma_{xy} E_y \neq 0$



## Corbino disk/Corbino ring

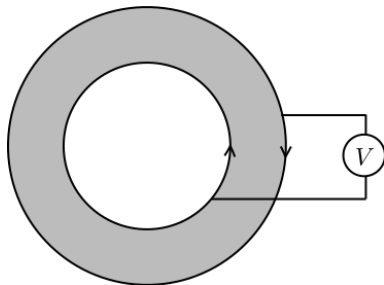
另外两种常见的 Hall 效应装置



垂直方向磁通改变

$\Rightarrow$  环内电场  $\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A} \parallel \hat{e}_\phi$

$\Rightarrow$  径向电流



径向电压 / 场  $\mathbf{E} \parallel \hat{r}_r$

$\Rightarrow$  环内电流  $\mathbf{J} \parallel \hat{e}_\phi$