- 第二章作业

  1. 证明一价正负离子等间距排列组成的一维晶格的马德隆常数为 $\alpha = 2ln2$。

- 第三章作业

  1. 平衡时 N 个质量为 m 的原子在一条线上等间距的排列。考虑最近邻和次近邻原子的相互作用，在谐振子近似下，最近邻原子之间的力常数为 β_1，次近邻原子之间的力常数为 β_2。求此系统中晶格振动的色散关系。
  2. 讨论 N 个原胞的一维双原子链（相邻原子间距为 a），其 2N 个格波解在 M = m 时与一维单原子链的结果一一对应。
  3. 考虑一双原子链的晶格振动，链上最近邻原子间的力常数交错地等于 β_1 和 β_2，$\beta_1 \gg \beta_2$。令两种原子的质量相等，并且最近邻的间距是 a/2，试求在 $q = 0$ 和 $q = \pi/a$ 处的 $\omega(q)$ 值。并粗略画出色散关系。本题模拟双原子分子晶体，如 H2。
  4. 已知一维单原子链，其中第 j 个格波，在第 n 个格点引起的位移 u_{nj} 为 $u_{nj} = a_j \sin(\omega_j t + naq_j + \delta_j)$，其中 δ_j 为任意位相因子。并已知在较高温度下每个格波的平均能量为 $k_B T$，具体计算每个原子的平方平均位移。
  5. 求当晶体里有一个波矢为 $\boldsymbol{q}$ 格波时晶体的总动量。
  6. 考虑一个全同原子组成的平面方格子，平衡时最近邻原子间距为 a。用 u_{lm} 记第 l 行第 m 列的原子垂直于格平面的位移，设每个原子质量为 M，最近邻原子的力常数为 β，试：

     (a) 证明运动方程为：

     $$M\frac{d^2 u_{lm}}{dt^2} = \beta[(u_{l+1,m} + u_{l-1,m} - 2u_{lm}) + (u_{l,m+1} + u_{l,m-1} - 2u_{lm})]$$

     (b) 假设运动方程的解具有平面波形式

     $$u_{lm}(t) = u_0 e^{i(k_x la + k_y ma - \omega t)}$$

     证明此解满足运动方程，并且色散关系为

     $$\omega^2 = \frac{2\beta}{M}(2 - \cos k_x a - \cos k_y a)$$

(c) 证明独立解存在的 $\boldsymbol{k}=(k_x,k_y)$ 空间区域是一个边长为 $2\pi/a$ 的正方形，这就是平方格子的第一布里渊区。画出 $\boldsymbol{k}=(k_x,0)$ 和 $\boldsymbol{k}=(0,k_y)$ 时的 ω 对 $\boldsymbol{k}$ 的关系曲线。

(d) 请写出长波极限（基 $k=|\boldsymbol{k}|$ 很小时）下的色散关系，并计算出长波极限下格波态密度。

(e) 在第一布里渊区中画出一些等 ω 线，其中包括通过点 $\boldsymbol{k}=(\pi/a,0)$ 的，并请标出 ω 的极大点、极小点。

(f) 利用上体大体画出格波态密度。

(g) 利用 Debye 近似，求具有 N 个原子的这种二维晶格的晶格热容。并写出高温和低温极限。

7. 钻石的结构如图所示，其 Bravais 格子是面心立方结构，每个惯用晶胞里有八个碳原子，晶格常数 $a=3.57\text{Å}$，声速 $v_s=1.4\times10^4\text{m/s}$。求钻石的 Debye 温度，以及室温以下摩尔热容随温度的变化关系。