

# 量子混沌：

---

王文阁

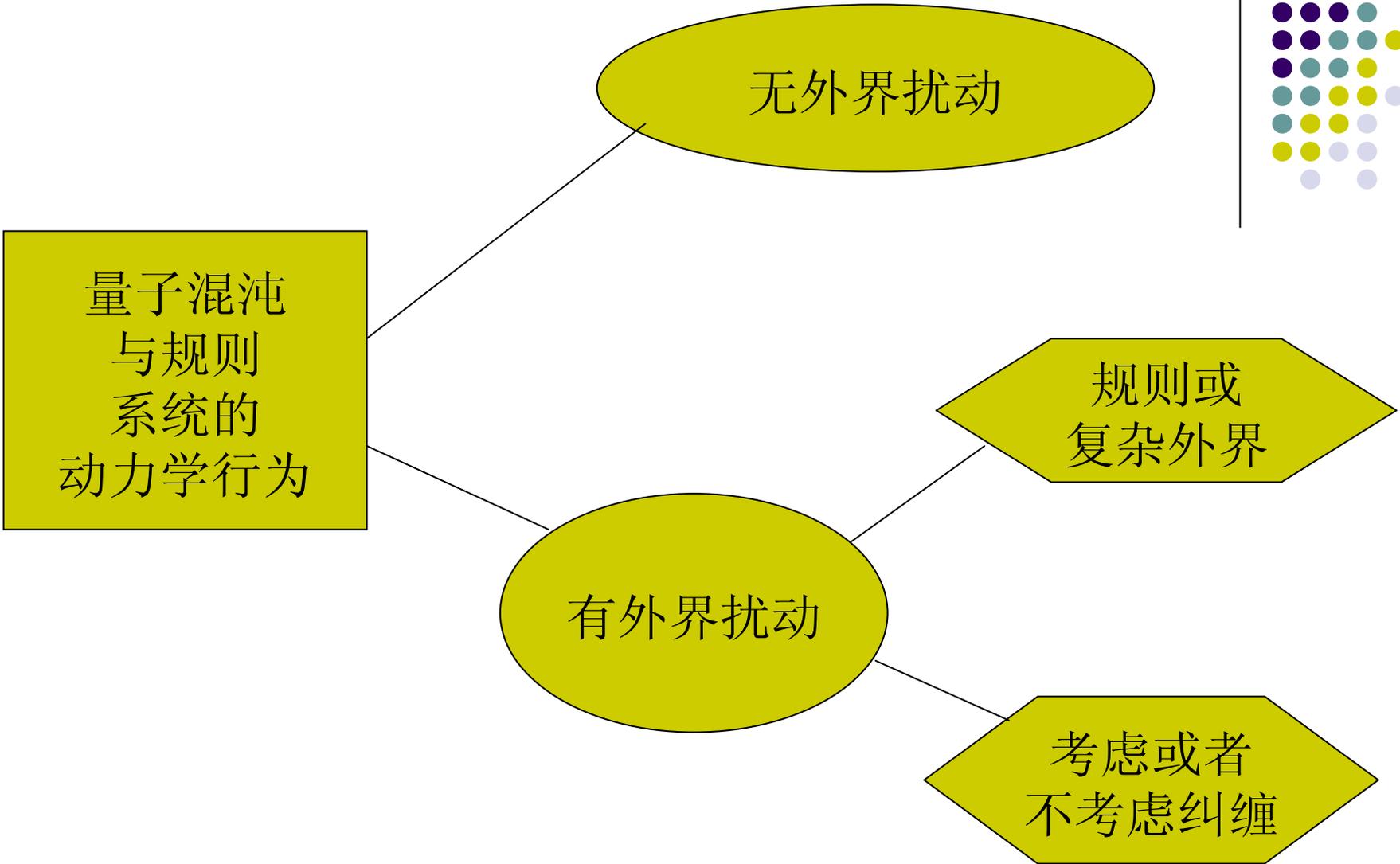
## 内容概要

1. “量子混沌”概论
2. 量子运动在弱扰动下的稳定性
3. 推广的扰动论

# 我们小组主要研究领域与兴趣



- 退相干, preferred (pointer) states。
- 小量子系统的统计性质, 统计力学基础。
- 玻色-爱因斯坦凝聚体, 光格中的超冷原子。
- 量子力学基础, 测量问题。
- 量子系统在小扰动下的稳定性问题 (“量子混沌”) 。





# 一. 量子混沌领域——概论

- (1) 问题所在
- (2) 能谱的统计性质
- (3) 波函数的统计性质
- (4) 经典轨道与疤痕
- (5) 动力学局域化

# 1 问题的提出



研究发现，在适当条件下，经典哈密顿系统会拥有混沌运动，即具有对初值敏感性（指数发散）的运动。

量子系统会有混沌运动吗？

由于 **Schrödinger** 方程是准周期的，

$$U(t)=\exp(-iHt/\hbar)$$

在长时间情况下，经典式的混沌运动一般不会出现。



更确切的问题是：

经典混沌运动会有一些量子表现？

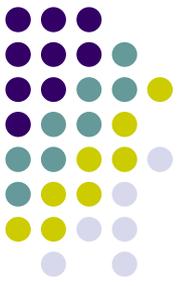
## 2 能谱

$$\rho(E) = \sum_n \delta(E - E_n)$$

可以被分解为平均行为与涨落

其平均行为，即平均能级密度，在规则与混沌系统中，无本质区别。





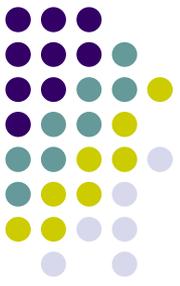
能谱的统计行为，在经典规则与混沌的情况下，有重要区别。

研究方法：

(1) **unfolding**，将不同系统的平均行为统一起来，使得平均能及间距为 1。

(2) 研究能级的涨落行为。

例如，近邻能级间距的统计分布 $P(s)$ :  $P(s)ds$  为近邻能级间距在 $s$ 与 $s+ds$ 之间的几率。



## 规则系统——泊松分布:

(自由度数大于**1**, 能级数趋于无穷)

$$P(s) = e^{-s},$$

The reason is that the spectrum here can generally be regarded as combination of unrelated series of numbers, which gives Poisson distribution.



## 经典下有混沌运动的系统:

Bohigas et al (1984) 数值地发现经典为混沌的系统的  $P(s)$  分布与无规矩阵理论的预言一致。

### 无规矩阵理论 (Random matrix theory) :

Consider an ensemble of matrices with given distribution of the elements, e.g., some type of Gaussian distribution, under suitable conditions imposed by symmetry.

For Gaussian orthogonal ensemble (with time reversal symmetry), it is approximately

$$p_W(s) = (\pi s/2) \exp(-\pi s^2/4)$$



$P(s)$  分布在可积与混沌系统中的主要区别在于  $s=0$  附近的区域, 即有无能级排斥(level repulsion).

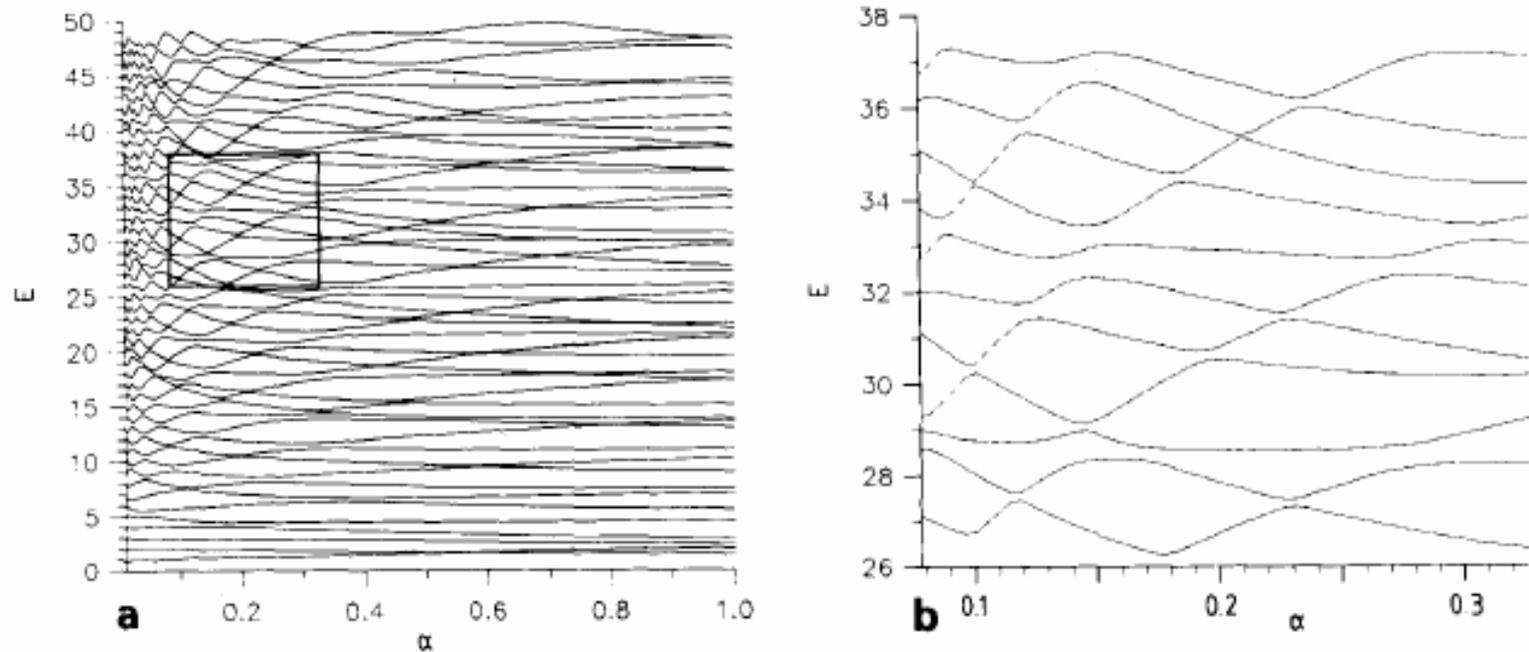


Fig. 4. (a) The lowest 48 eigenvalues for the quantized Hamiltonian (2.1.41) with  $\gamma = 3$ . For every value of  $\alpha$ , the spectrum has been unfolded to one of mean spacing 1. As shown in the magnification (b), almost all crossings or close encounters between eigenvalues are avoided.

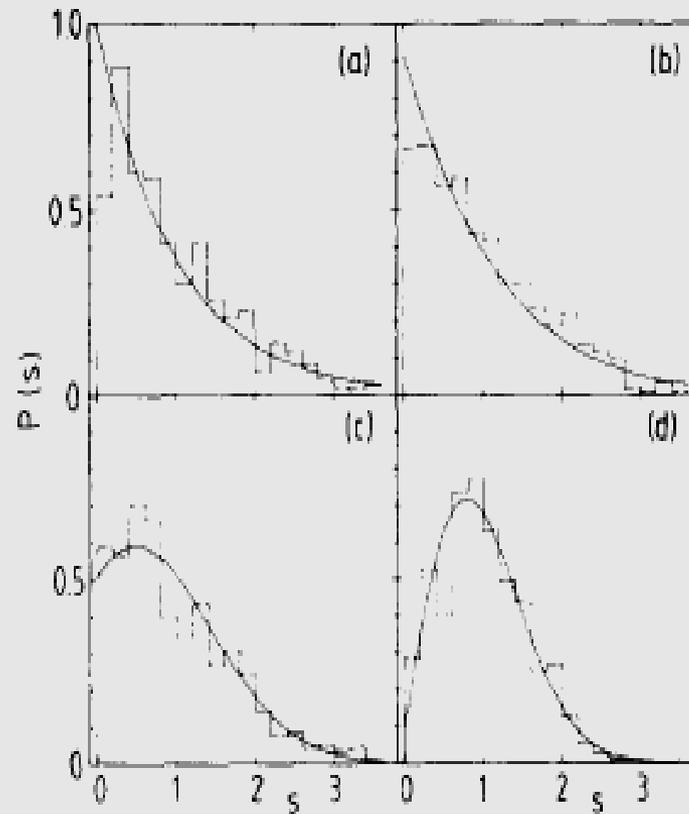
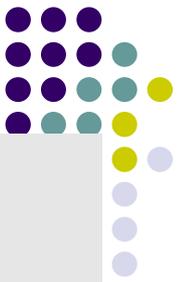
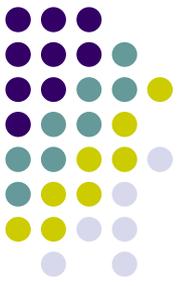


Fig. 5. Nearest neighbour spacing distribution for the Hamiltonian (2.141) in the symmetric subspace  $A_1$ . Parameters are the same as in fig. 1. The  $\rho$ -values estimated from Poincaré sections and the spectral statistics are (a)  $\rho = 1.0$ , (b)  $\rho = 0.6$ , (c)  $\rho = 0.2$  and (d)  $\rho = 0.0$ .



## 无规矩阵理论适用性的半经典推导

Instead of  $P(s)$ , it is easier to study the so-called **form factor**, which is the Fourier transform of the two point correlation of the oscillatory part of the density of states.

Berry (1985) --the agreement of the zero order.

Sieber and Richter (2001) – first order

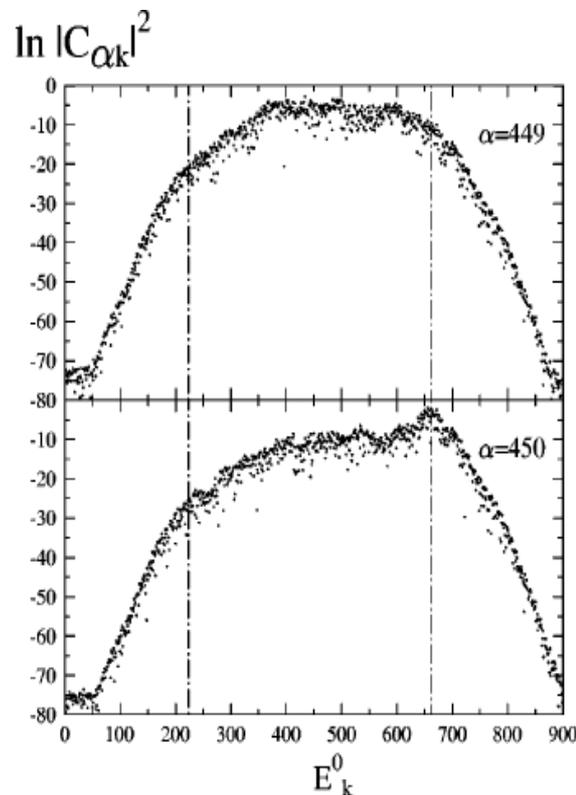
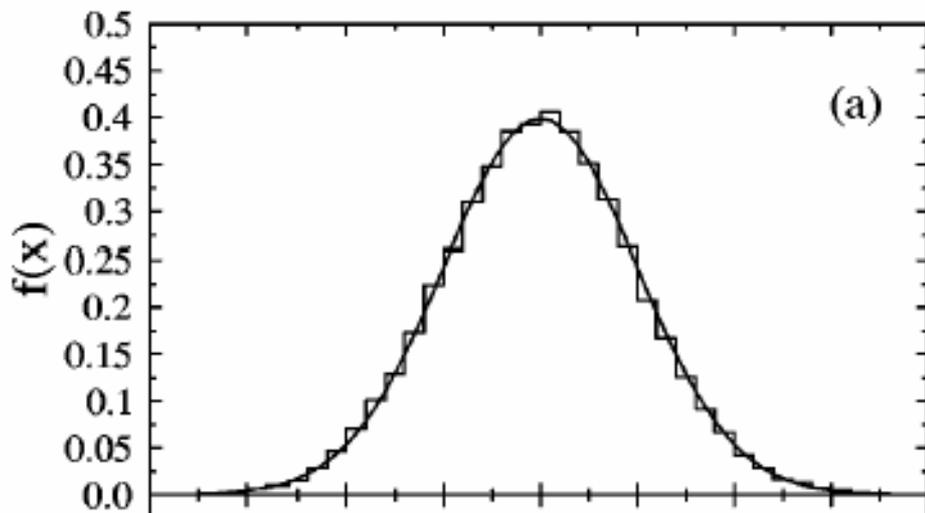
Haake's group (2003-2004) – second and higher orders.

$$K(\tau) = \left\langle \int \frac{d\epsilon}{\bar{\rho}(E)} e^{\frac{i}{\hbar} \epsilon \tau T_H} \rho_{\text{osc}}\left(E + \frac{\epsilon}{2}\right) \rho_{\text{osc}}\left(E - \frac{\epsilon}{2}\right) \right\rangle$$

### 3 波函数在可积基矢上的统计性质



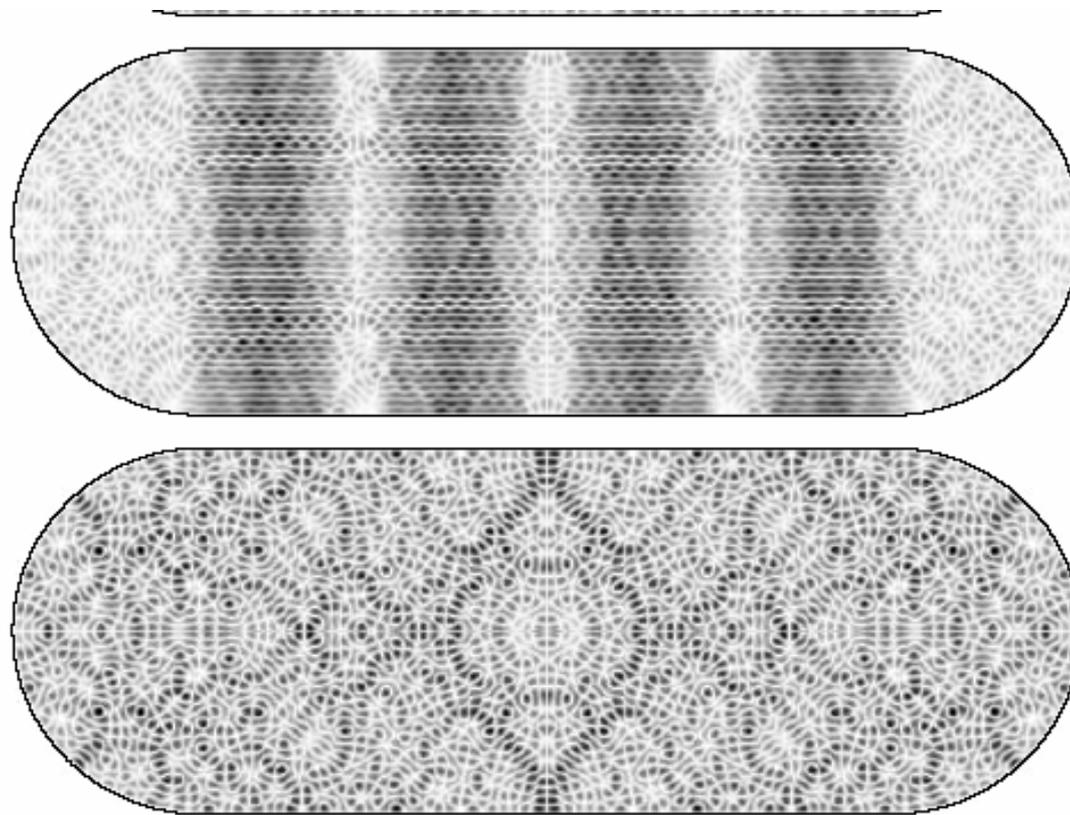
对于有时间反演对称性的系统，无规矩阵理论预言高斯分布。但是，由于波函数的长尾部的关系，该预言只在少数系统中得到证实。

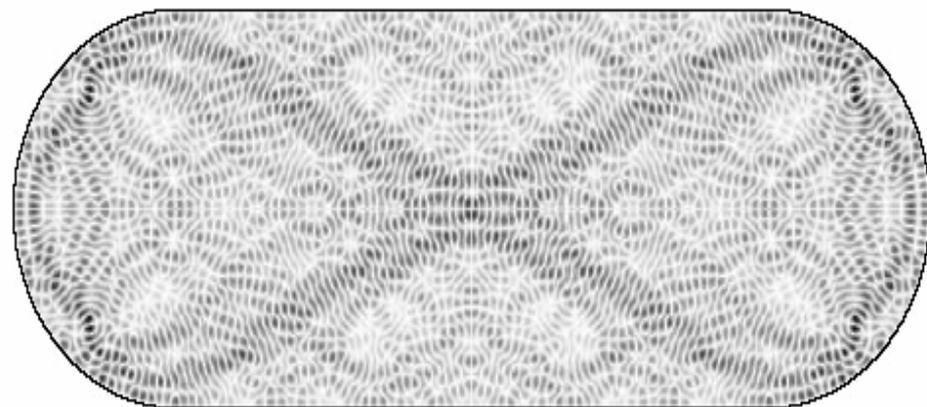
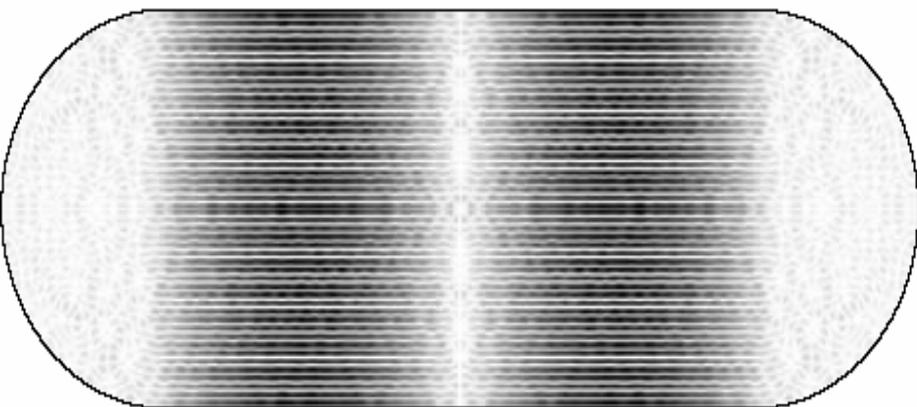
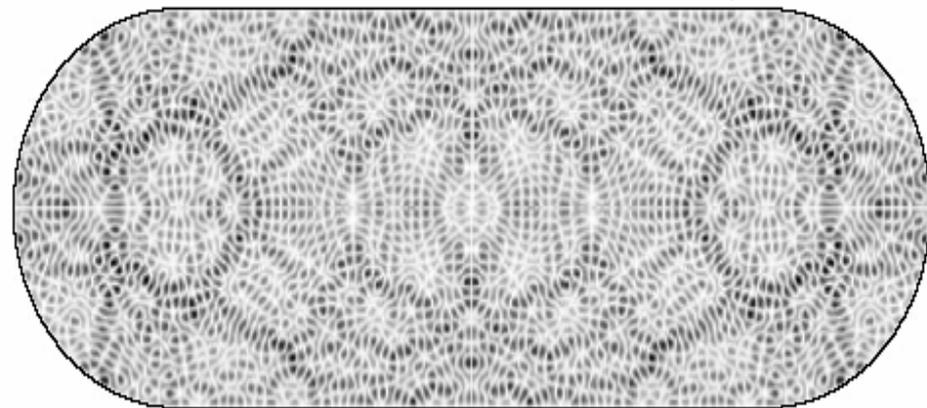
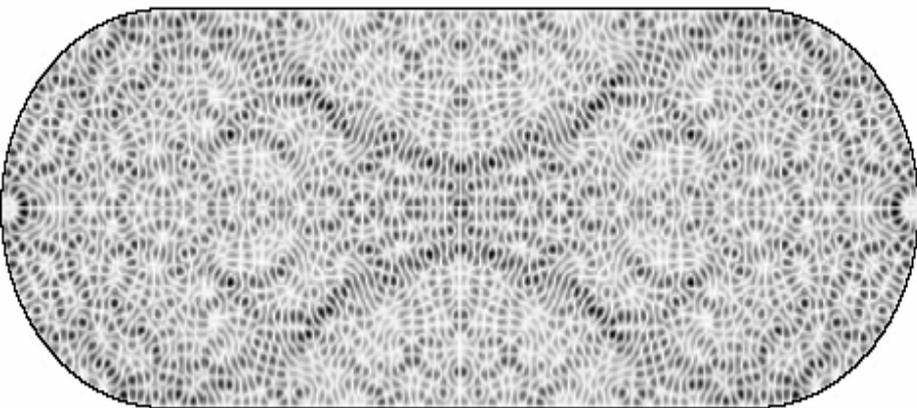


## 4 经典周期轨道与疤痕



台球桌 (billiard) 模型





## 5 动力学局域化



The kicked rotator model: In the classical case with infinite domain of momentum, classical diffusion makes the energy increase monotonically.

While in the quantum case, there is suppression of the classical diffusion of energy.

This is called **dynamical localization**, emphasizing its difference from Anderson localization in a random system.

Mathematical relation of the two localizations has been found.

A quantum system follows the classical dynamics only within a short time, usually of the scale of Ehrenfest time.

## 二.量子混沌领域——近期的一些进展



- 量子系统在小扰动下的稳定性问题  
——量子Loschmidt回波（保真度）之衰减行为。

主要研究手段——半经典方法，利用量子混沌领域中多年积累的成果。

Wang and Li, Phys. Rev. E **66**, 056208 (2002).

Wang, Casati, and Li, Phys. Rev. E **69**, 025201(R) (2004).

Wang, Casati, Li, and Prosen, Phys. Rev. E **71**, 037202 (2005).

Wang and Li, Phys. Rev. E **71**, 066203 (2005).

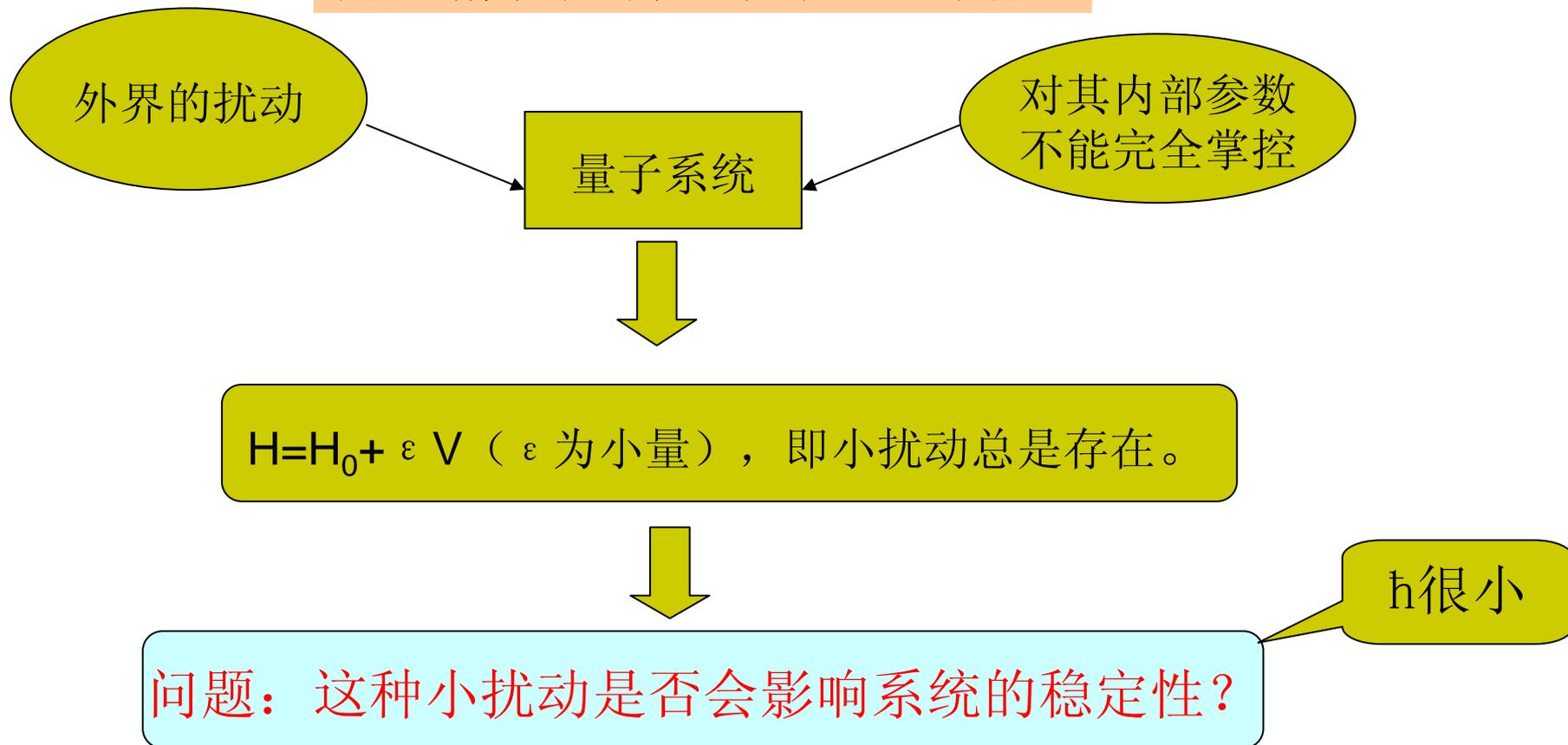
Wang, Casati, and Li, Phys. Rev. E **75**, 016201 (2007).

# 问题背景之一

——需要稳定量子控制的领域，如量子信息及  
**BEC**等

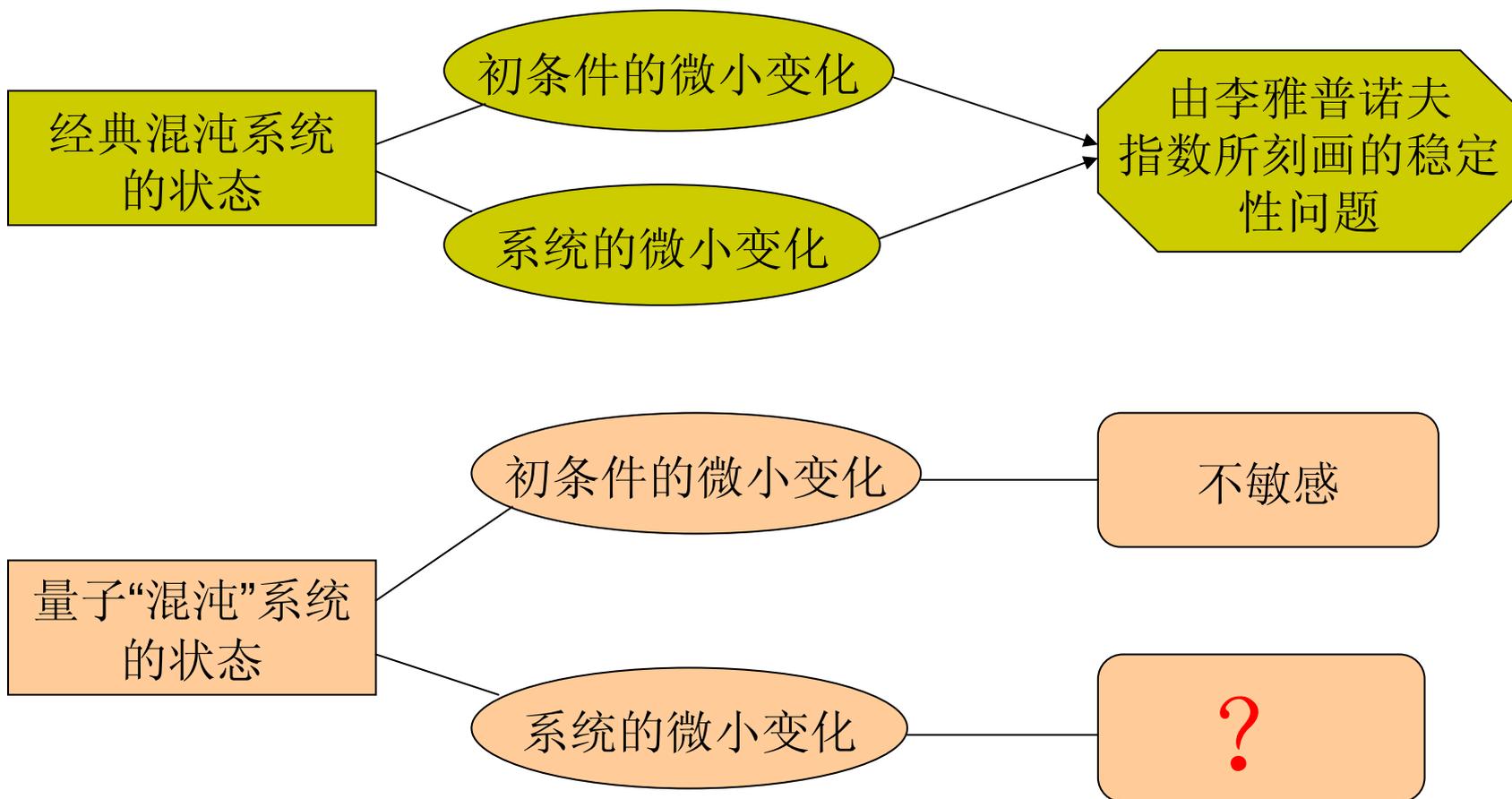
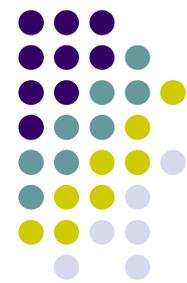


需要精确控制量子系统的演化



# 问题背景之二

## ——量子混沌领域



# 小扰动所导致的稳定性问题的定量描述



量子**Loschmidt**回波(Loschmidt echo)

$$M(t) = |m(t)|^2$$

$$m(t) = \langle \Psi_0 | \exp(iHt/\hbar) \exp(-iH_0t/\hbar) | \Psi_0 \rangle.$$

$$H = H_0 + \varepsilon V \quad (\varepsilon \text{ 为小量})$$

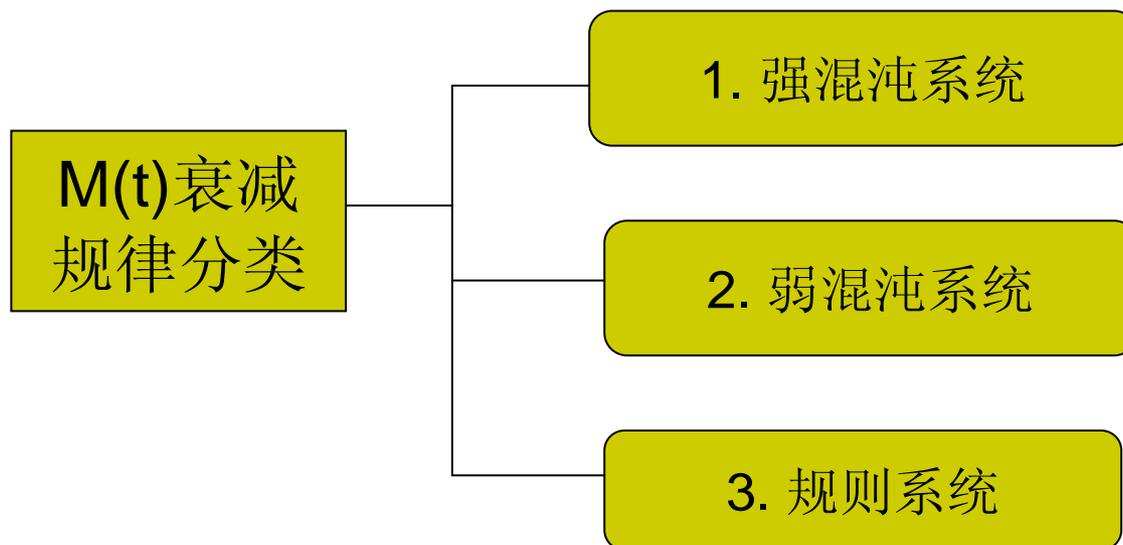
它是量子信息领域中**保真度(Fidelity)**这一概念的一个特例。

**物理意义**：同一个初态，由略微不同的哈密顿量所给出的演化结果的重叠。



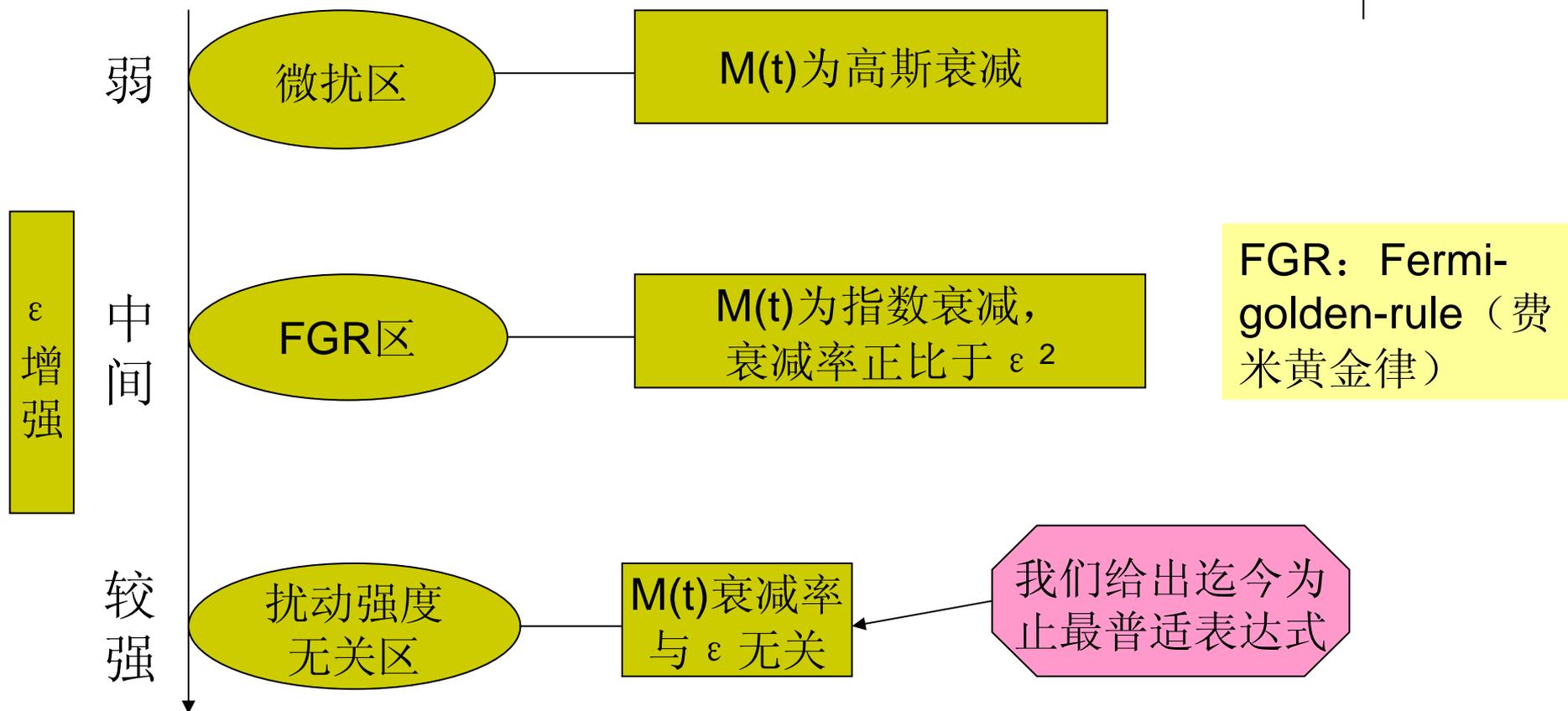
# 要研究的问题

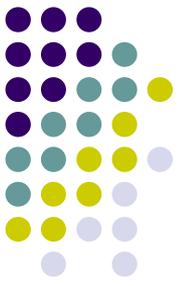
具体而言，要研究的问题是：  
对于有经典对应的量子系统， $M(t)$ 在以下情形中，在不同扰动强度以及时间尺度下的衰减行为的表达式。





# 1. 对于强混沌系统之 $M(t)$ 衰减的研究现状





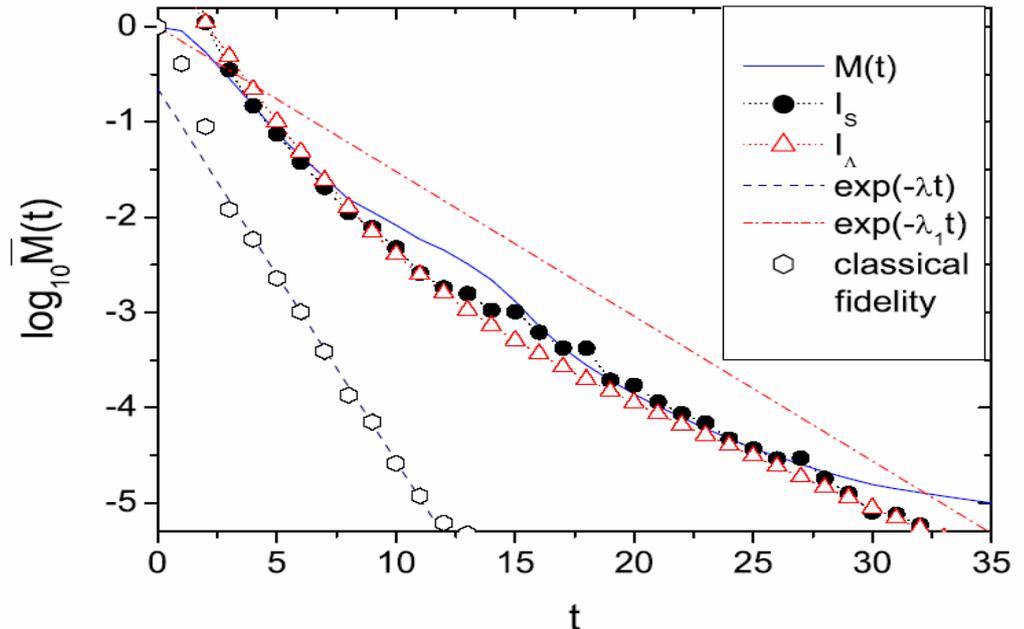
# 较强扰动情况下， $M(t)$ 衰减公式

$$\overline{M}(t) \propto I_{\Lambda}(t) = e^{-\Lambda(t)t}, \text{ with } \Lambda(t) = -\frac{1}{t} \ln \left| \frac{\delta x(t)}{\delta x(0)} \right|^{-1}.$$

Wang, *et al*, Phys. Rev. E **71**, 037202 (2005).

当有限时间李雅普诺夫指数为常数时， $\Lambda(t) = \lambda$ ，为李雅普诺夫衰减 $\exp(-\lambda t)$ 。  
Jalabert, Pastawski, Phys. Rev. Lett. **86**, 2490 (2001)

Silvestrov, Tworzydło, and Beenakker 给出  $\exp(-\lambda_1 t)$  衰减  
Phy. Rev. E **67**, 025204(R) (2003),





## 2. 弱混沌系统之 $M(t)$ 衰减

我们证实半经典方法仍然适用，尽管无规矩阵理论已经不适用。

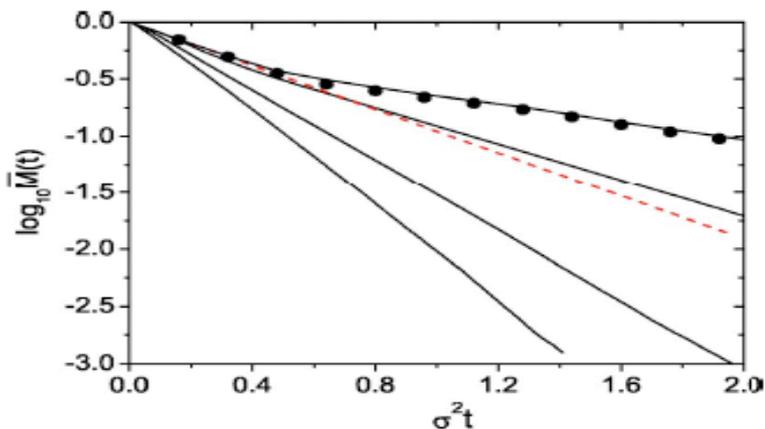


FIG. 1. Fidelity  $\overline{M}(t)$  as a function of  $\sigma^2 t$  for  $K_0=0.4$ ,  $\epsilon \approx 7.67 \times 10^{-5}$ , and  $N=N_0, 2N_0, 4N_0, 8N_0$  (from bottom to top) where  $N_0=4096$ . ( $\sigma=0.05, 0.1, 0.2, 0.4$ ). The FGR decay  $\approx e^{-2.2\sigma^2 t}$  is shown by the dashed line. Full circles represent the semiclassical values  $\overline{M}_a(t)$  at  $\sigma=0.4$ , computed with expression (7). The numerically computed semiclassical values  $\overline{M}_f(t)$  turn out to be negligible so that  $\overline{M}(t)$  is well approximated by  $\overline{M}_a(t)$ , as clearly seen from the figure at  $\sigma=0.4$ . Averages were performed over 400 initial point sources, with  $\theta_0$  taken randomly in the interval  $[0, 2\pi)$ . (The same decaying behaviors are observed for initial Gaussian wave packets.)

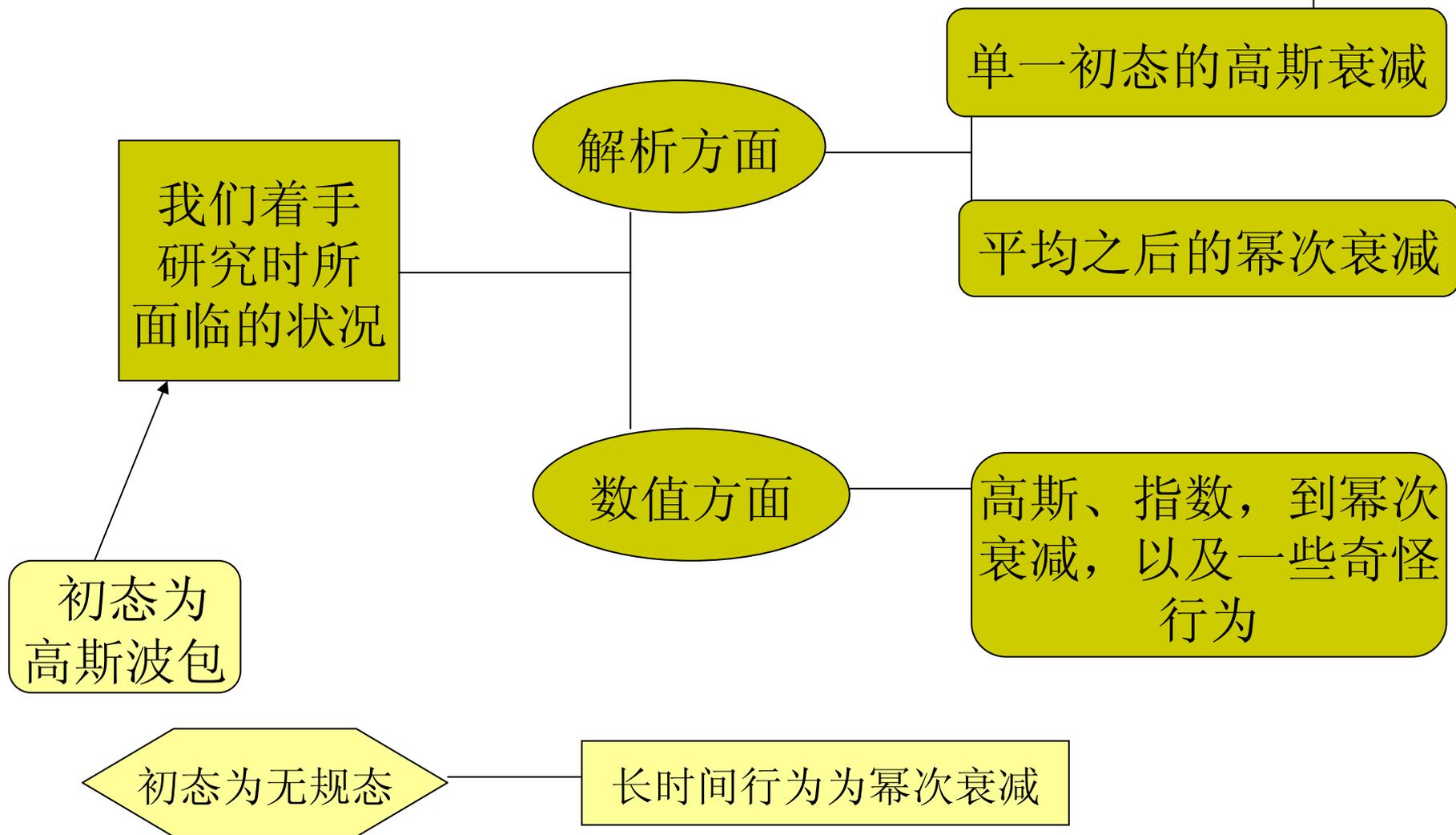
$$M(t) \sim \exp[-2D(\epsilon/\hbar)^\alpha].$$

$\alpha$  的值由其所对应的经典系统的行为决定， $\alpha=1$  解释数值实验结果。

$\alpha=2$  为FGR衰减



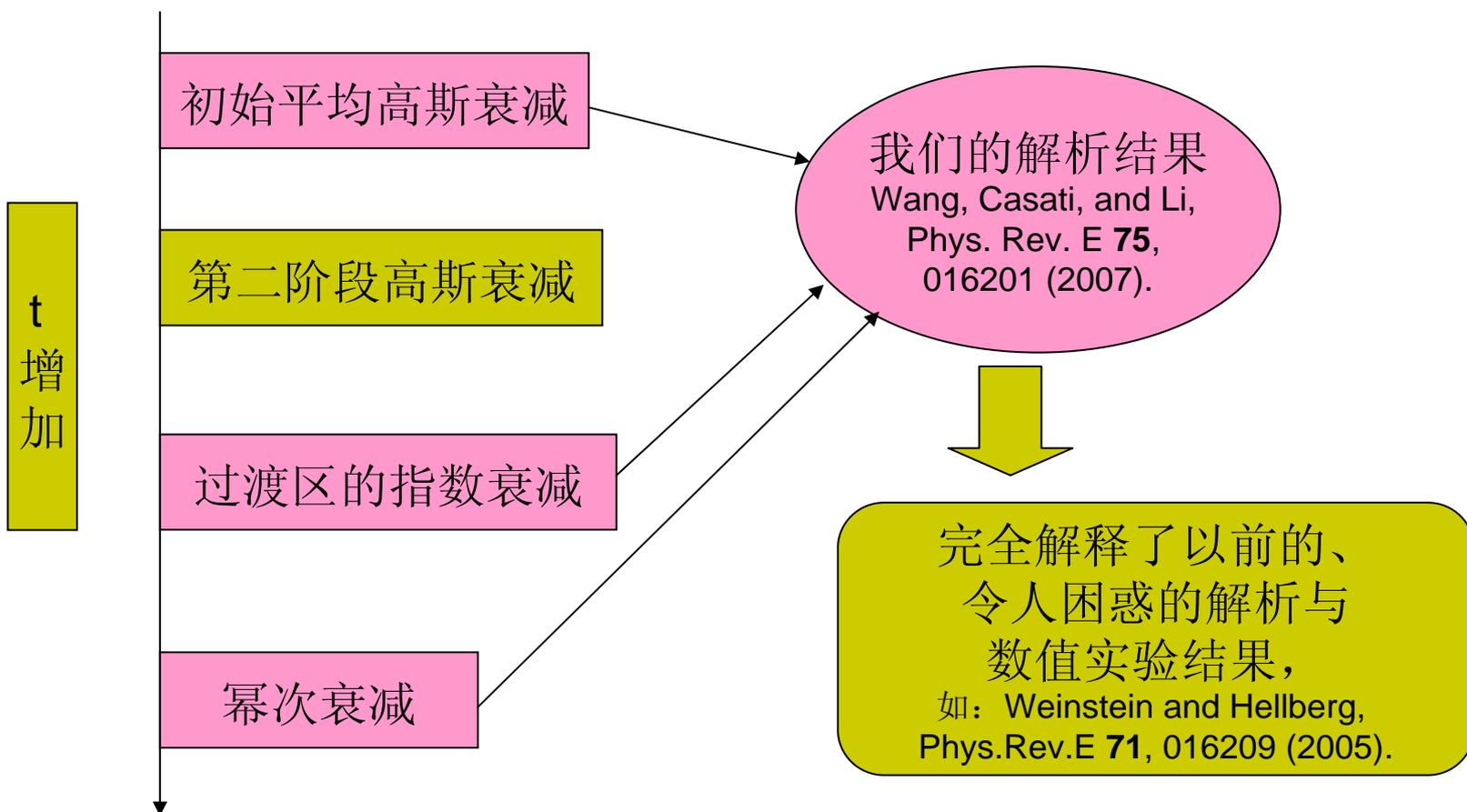
### 3. 规则系统中 $M(t)$ 的衰减





# 规则系统中 $M(t)$ 衰减之研究现状

单一初始态为窄的高斯波包，一般扰动势



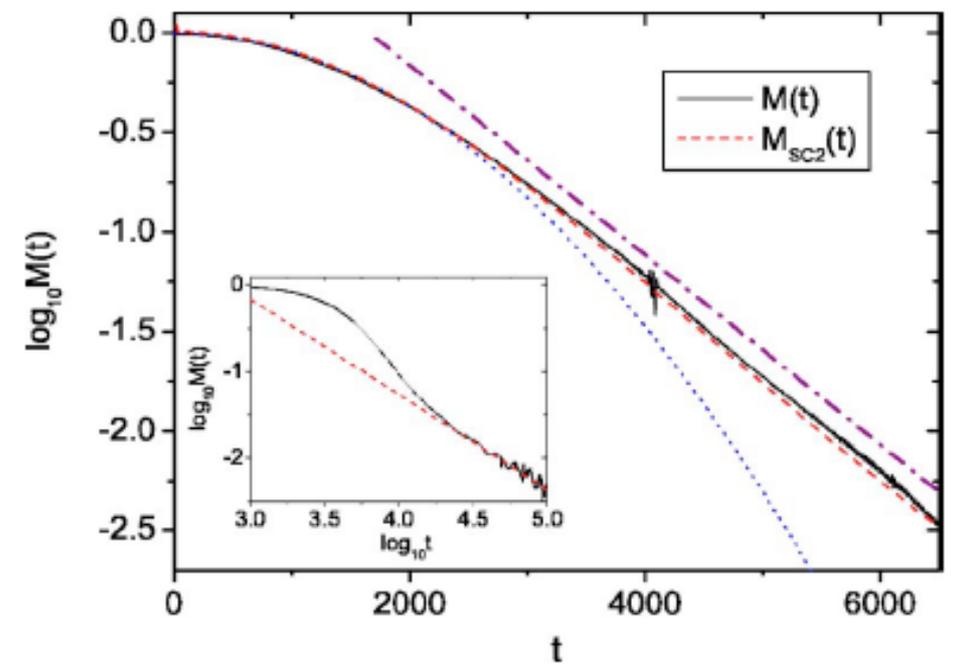
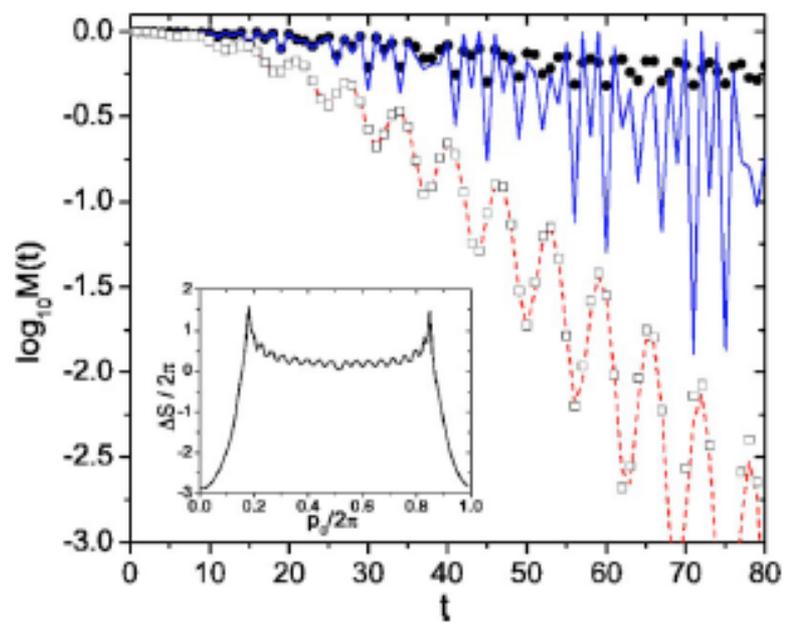


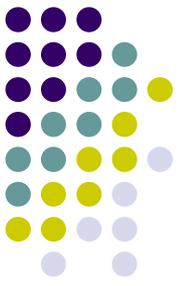
# 规则系统之 $M(t)$ 衰减

$$M_{sc1}(t) \approx \exp\left[-\frac{1}{2}(\sigma w_p \tilde{k}_p)^2\right]$$

$$k_p \approx (U'_I + U_\theta)t.$$

$$M_{sc2}(t) \approx \frac{2c}{\sqrt{4 + (w_p^2 \sigma \tilde{U}''_I t)^2}} \exp\left[\frac{-2(w_p \sigma \tilde{U}'_I t)^2}{4 + (w_p^2 \sigma \tilde{U}''_I t)^2}\right]$$





## 三.推广的布里渊—维格纳扰动论，及其在混沌或混合型系统中的应用

Wang, Izrailev, and Casati, Phys. Rev. E **57**, 323 (1998).

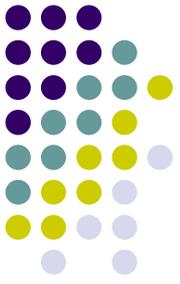
Wen-ge Wang, Phys. Rev. E **61**, 952 (2000).

Wen-ge Wang, Phys. Rev. E **63**, 036215 (2001).

Wen-ge Wang, Phys. Lett. A **291**, 249 (2001).

Wen-ge Wang, Phys. Rev. E **65**, 036219 (2002).

Wen-ge Wang, Phys. Rev. E **65**, 066207 (2002). 等等



# 背景

考虑未扰动系统 $H_0$ 与被扰动系统 $H(\lambda)$ ,

$$H = H_0 + \lambda V。$$

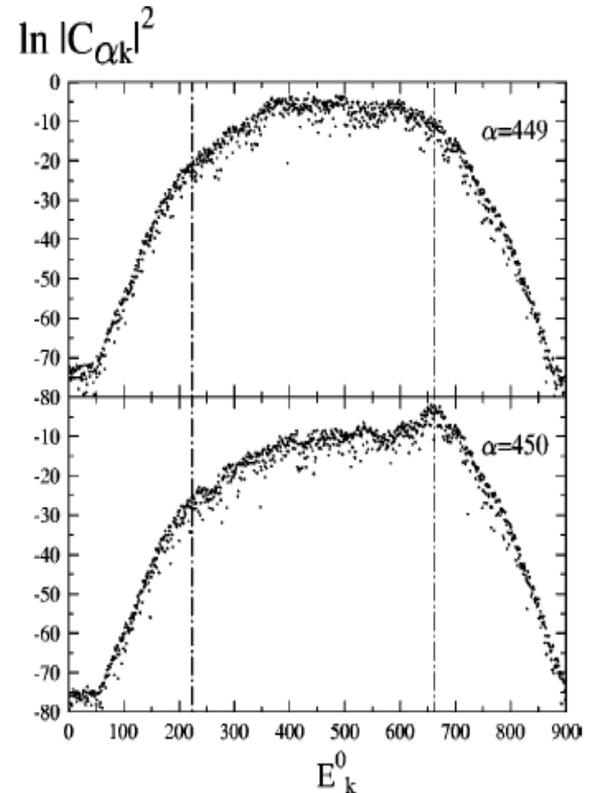
系统 $H(\lambda)$ 与 $H_0$ 的本征态分别记为 $|\alpha\rangle$ 和 $|k\rangle$ ，  
其展开系数记为

$$C_{\alpha k} = \langle k | \alpha \rangle$$

$$H(\lambda)|\alpha\rangle = E_{\alpha}(\lambda)|\alpha\rangle, \quad H_0|k\rangle = E_k^0|k\rangle,$$

当初已知，即使在强扰动情况下，

当 $E_k^0$ 足够远离 $E_{\alpha}(\lambda)$ 时，可以用微扰  
论研究 $C_{\alpha k}$ 。





# 问题及解决方法

**问题：**对于微扰论在这种情况下的适用性，其定量判据是什么？

解决方法：

对于一个态 $|\alpha\rangle$ ，将基矢 $|k\rangle$ 的集合分为两部分，分别对应投影算子

$$P_{S_\alpha} = \sum_{|k\rangle \in S_\alpha} |k\rangle\langle k|, \quad Q_{S_\alpha}^- = \sum_{|k\rangle \in S_\alpha} |k\rangle\langle k| = 1 - P_{S_\alpha}.$$

于是，态 $|\alpha\rangle$ 被分为两部分，

$$|\alpha_s\rangle \equiv P_{S_\alpha} |\alpha\rangle \quad \text{and} \quad |\alpha_s^-\rangle \equiv Q_{S_\alpha}^- |\alpha\rangle$$



## 推广的扰动论的基本结果

当以下条件被满足时，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \alpha | (T_{\alpha}^{\dagger})^n T_{\alpha}^n | \alpha \rangle = 0 \quad \leftarrow \quad T_{\alpha} = \frac{1}{E_{\alpha} - H_0} Q S_{\alpha}^{-1} \lambda V$$

判据

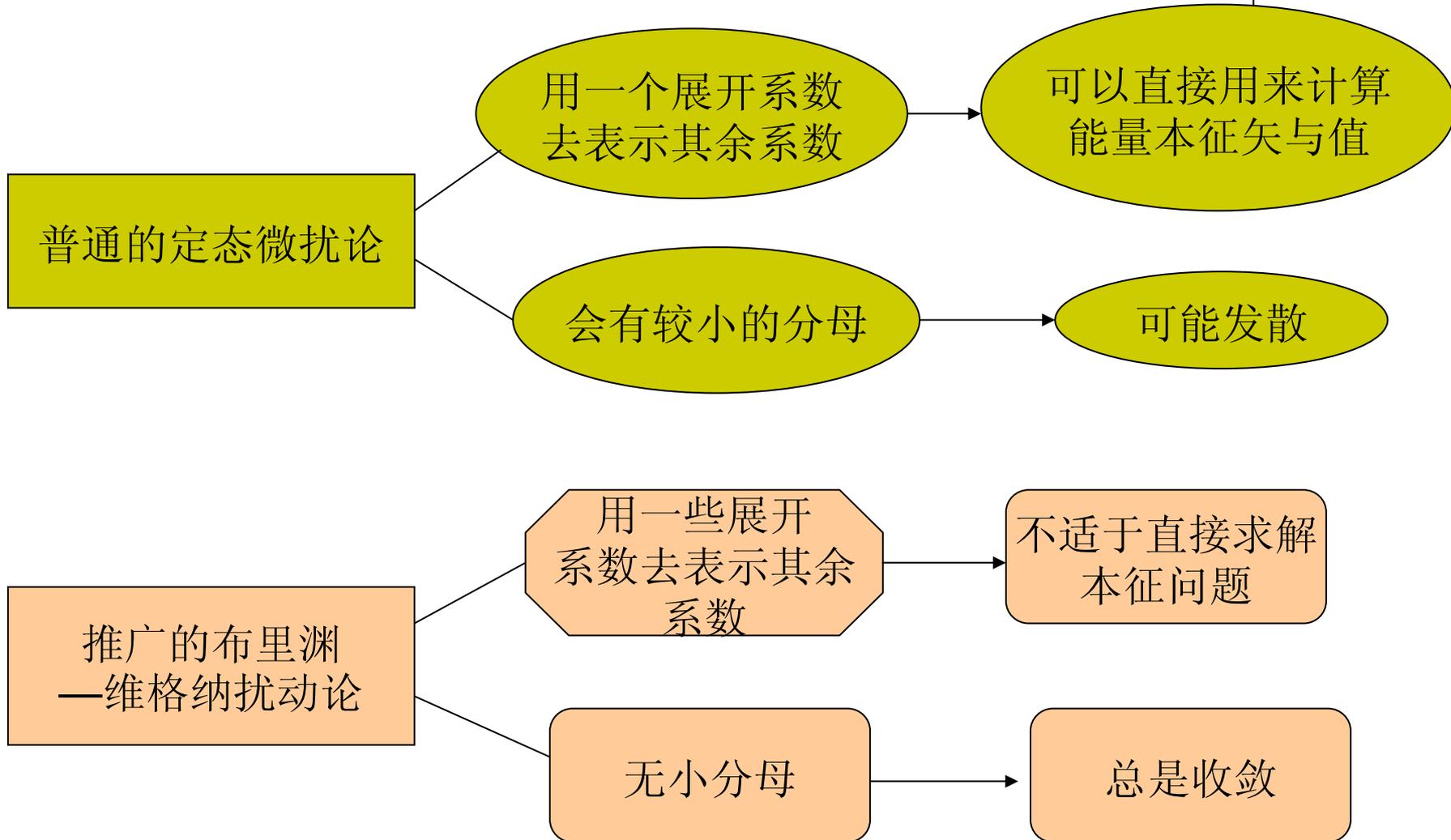
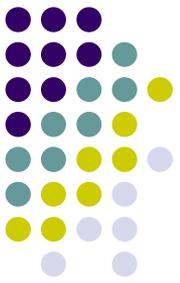
能量本征态  $|\alpha\rangle$  的一部分可以被展开为收敛的扰动级数

$$|\alpha_s\rangle = T_{\alpha} |\alpha_s\rangle + T_{\alpha}^2 |\alpha_s\rangle + \dots + T_{\alpha}^n |\alpha_s\rangle + \dots$$

我们称该部分为  $|\alpha\rangle$  的微扰部分，最小的另一部分称为非微扰部分。

布里渊—维格纳扰动论：非微扰部分只含有一个基矢。

# 与普通微扰论的比较



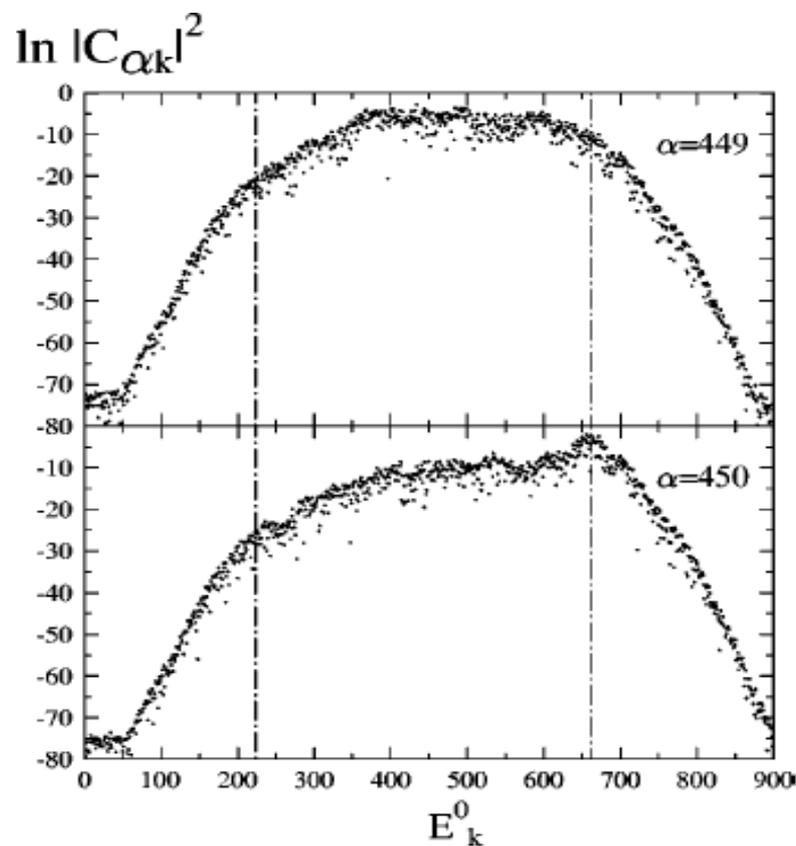
# 推广的扰动论的用途与意义

## ——研究能量本征函数的结构



能量本征函数的微扰与非微扰部分有着定性的区别。

- 非微扰部分的性质：  
引入重整化的哈密顿量，研究并解释了一些模型中出现的动力学局域化等现象。



# 能量本征函数的非微扰部分:



- 对非微扰部分的统计研究。对于混沌系统，数值上发现其统计性质与无规矩阵理论的预言相一致。

## Lipkin模型

能量本征函数之非微扰部分分量的统计分布（实线为无规矩阵理论的预言）。

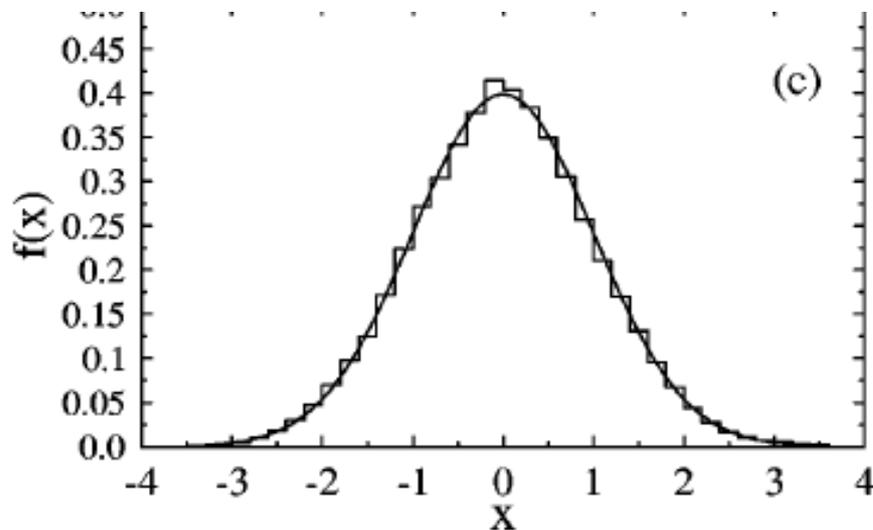
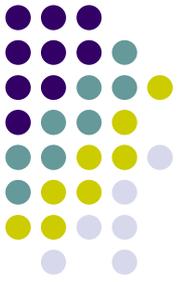


FIG. 2. (a) The histogram of the distribution of components in the nonperturbative parts of eigenfunctions whose relative localiza-



谢谢！