

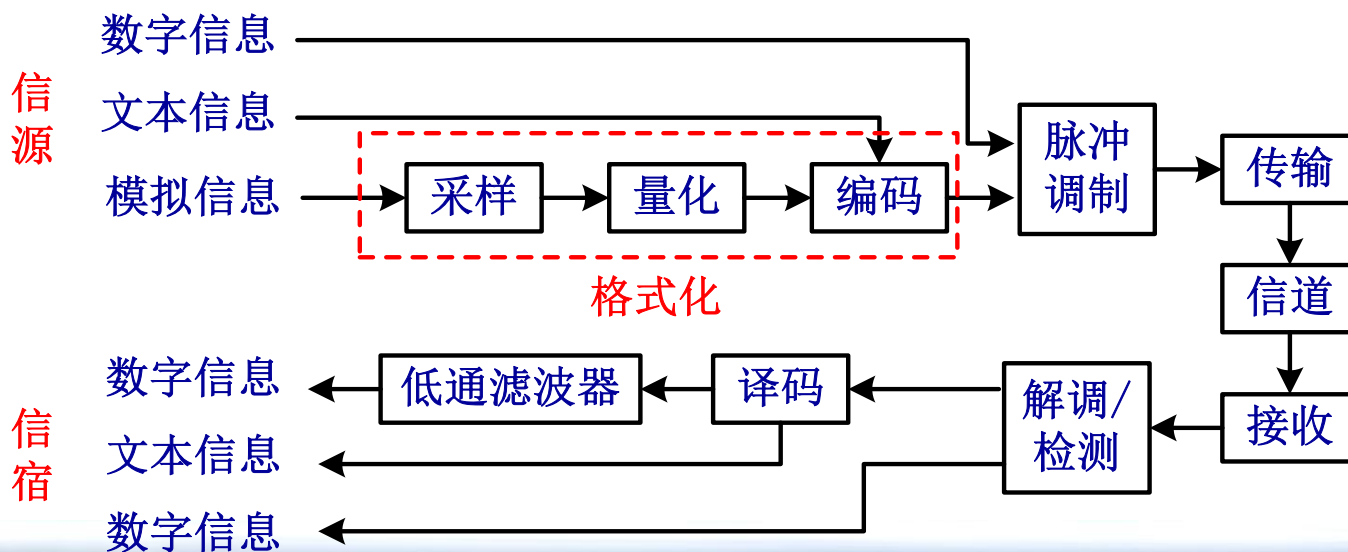
The background of the slide features a light blue sky with soft, white clouds on the right side, transitioning into a dark blue ocean with gentle ripples at the bottom. A faint, semi-transparent silhouette of a world map is centered in the upper half of the image. The title text is prominently displayed in the center.

第三章 信源编码

本章内容

- ❖ 抽样和量化(Sampling and Quantizing)
- ❖ 脉冲编码调制(PCM)
- ❖ 增量调制(ΔM)
- ❖ 差分脉冲编码调制(DPCM/ADPCM)
- ❖ 数字数据的信源编码
- ❖ 书中第2章（格式化和基带调制）和第13章（信源编码）的内容

- ❖ 格式化的目的是将源信息进行适当变换，以便进行后端的数字处理，可以认为是信源编码的前端处理或预处理过程。



❖ 模拟信号 $x(t)$ \rightarrow 数字信号 $g(t)$ ，即模数转换(A/D)

➤ 信源编码: A/D + Data Compression

□ 信源编码分类:

波形编码 { 全频带编码 (PCM、ADPCM)
子带编码 (SB-ADPCM)
矢量量化 (VQ)

参数编码 线性预测编码 (LPC)

混合编码 { 多脉冲激励线性预测编码 (MP-LPC)
低延迟码本激励线性预测编码 (LD-CELP)
共轭结构代数码本激励线性预测编码 (CS-ACELP)
... ..

§ 3.1 采样和量化

❖ 采样定理

(1) 低通信号抽样：对模拟低通信号 $x(t)$ ， $0 \sim f_m$ ，则抽样频率 $f_s = 1/T_s$ 应满足： $f_s \geq 2f_m$

$x(t)$ 频谱为：

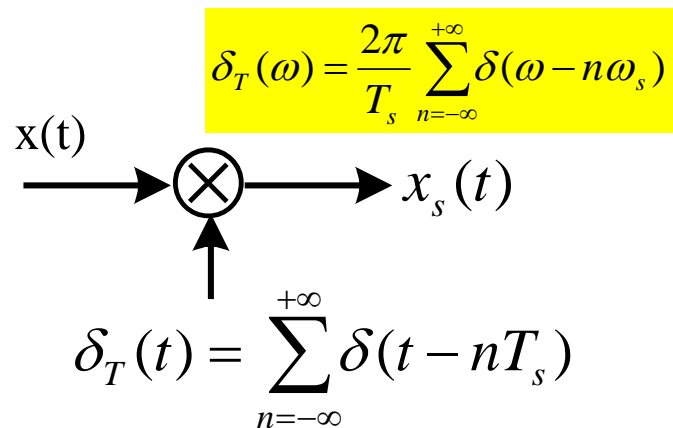
$$x(t) \leftrightarrow X(\omega), \quad |\omega| \leq 2\pi f_m$$

➤ 理想抽样(冲激脉冲抽样)信号及其频谱：

$$x_s(t) = x(t) \cdot \delta_T(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

$$X_s(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - n\omega_s)$$

$T_s \leq 1/2f_m$ 为抽样间隔



注意：抽样速率与码元速率不是一回事，因为一个抽样值在编码时可能编好几位码。

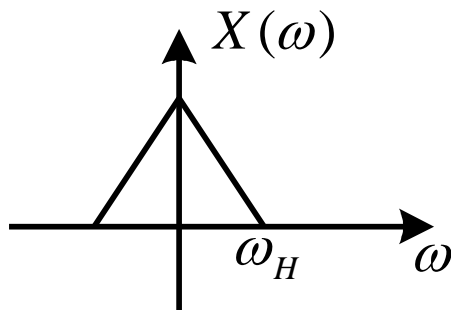
❖ 值得注意的是

$$X_s(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(\omega - n\omega_s)$$
$$= \frac{1}{T_s} X(\omega) + \frac{1}{T_s} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} X(\omega - n\omega_s)$$

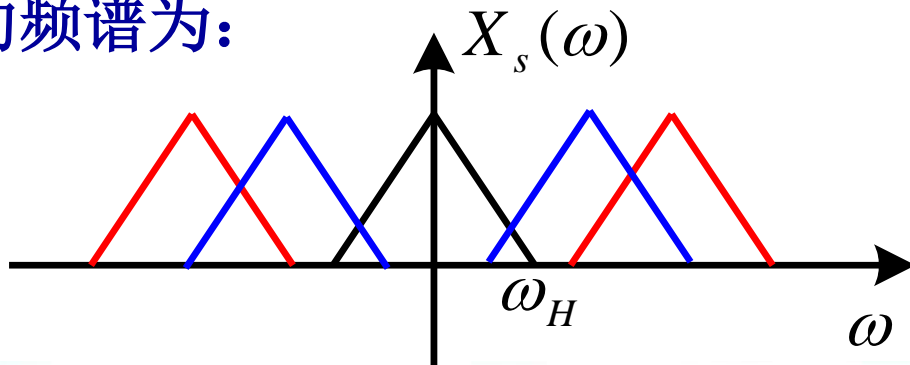
有用信号

无用信号

❖ 假设 $X(\omega)$ 为:



❖ 则抽样后的频谱为:



example

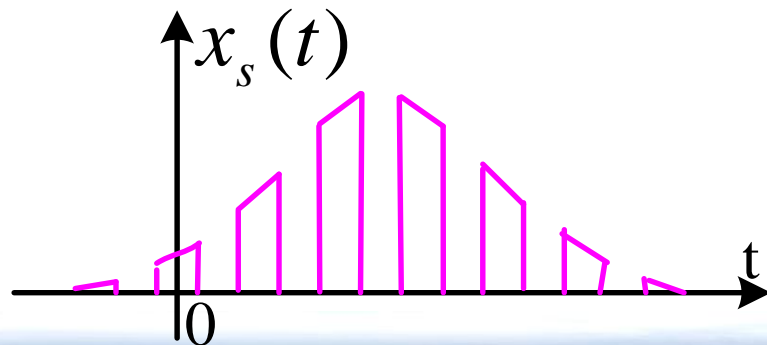
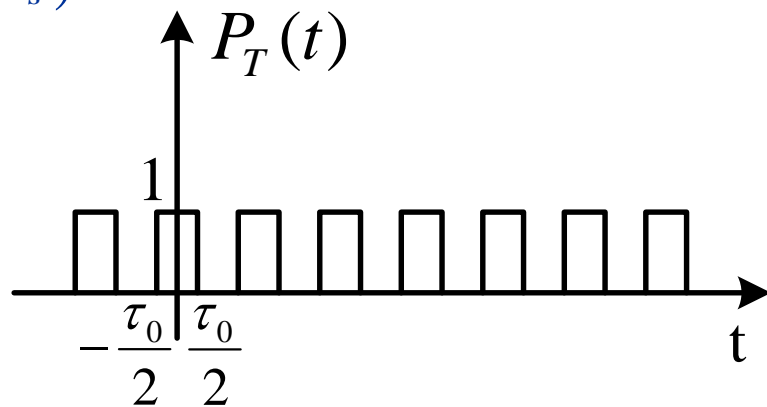
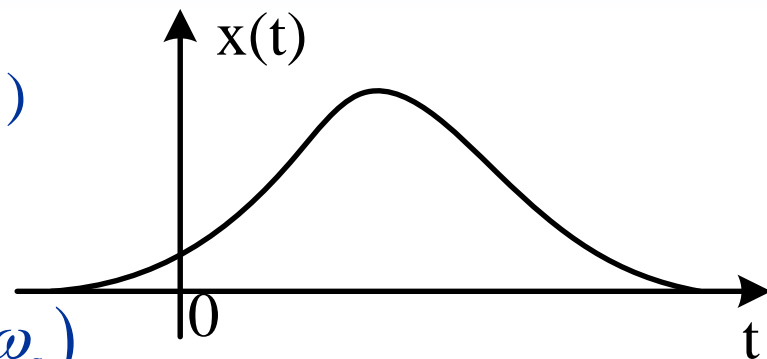
➤ 自然抽样(曲顶脉冲抽样)信号频谱:

$$x_s(t) = x(t) \cdot p_T(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} p(t - nT_s)$$

$$X_s(\omega) = \frac{\tau_0}{T_s} \sum_n Sa\left(\frac{n\omega_s \tau_0}{2}\right) X(\omega - n\omega_s)$$

$$P(\omega) = \frac{2\pi\tau_0}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Sa\left(\frac{n\omega_s \tau_0}{2}\right) \delta(\omega - n\omega_s)$$

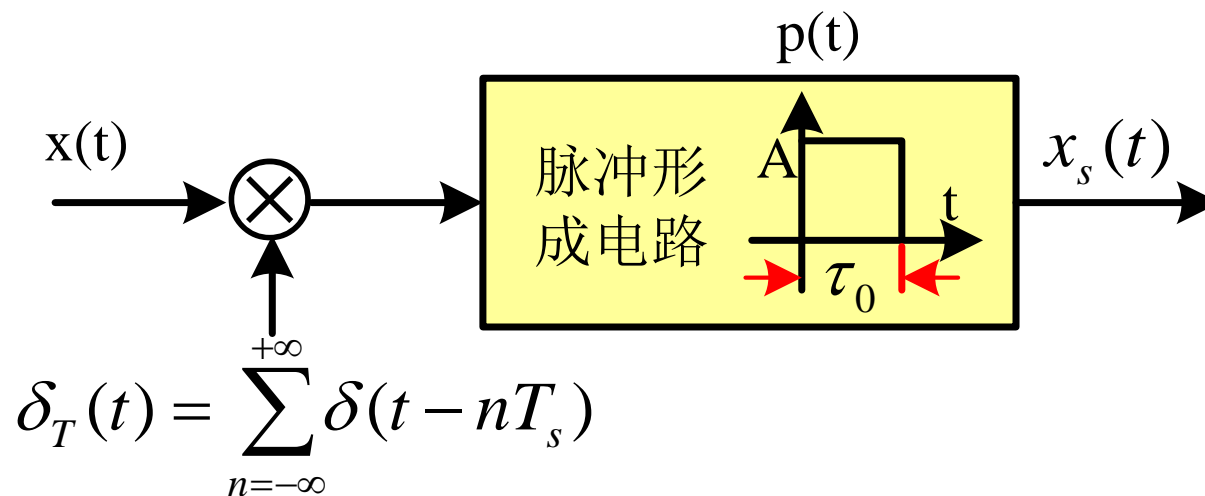
$$X_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} [X(\omega) * P(\omega)]$$



❖ 瞬时抽样(平顶脉冲抽样)信号频谱:

$$x_s(t) = [x(t) \cdot \delta_T(t)] * p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s) p(t - nT_s)$$

$$X_s(\omega) = \frac{A\tau_0}{T_s} \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau_0}{2}\right) \sum_n X(\omega - n\omega_s)$$



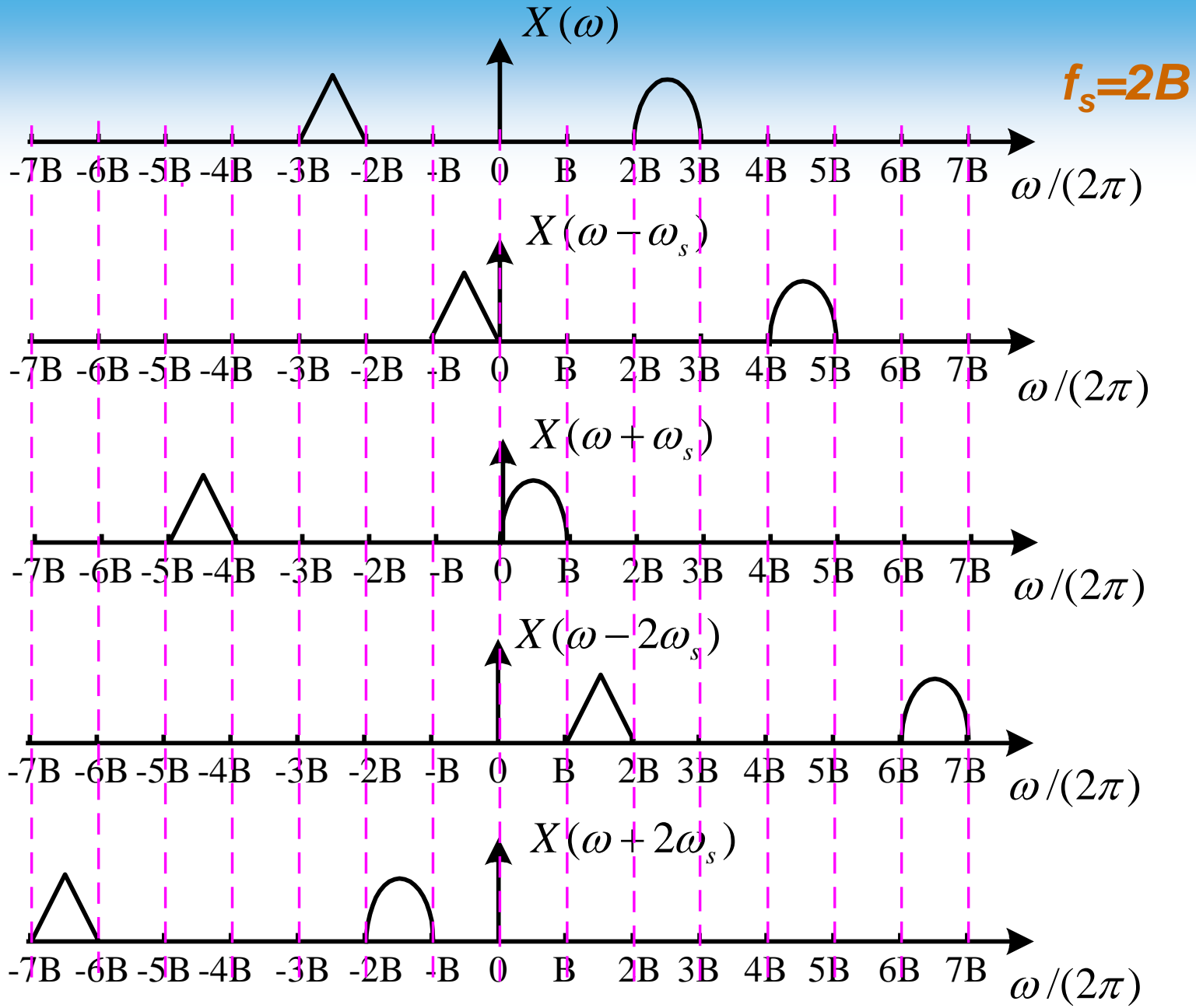
注意：由于平顶抽样的每一项频谱都受 $P(\omega)$ 的加权，所以解调时需要在低通滤波器之前加一个 $1/P(\omega)$ 的修正网络，这样经过滤波器后就可无失真的恢复出 $X(\omega)$ 。

(2) 带通信号抽样：对于模拟带通信号 $x(t)$ ， $f_L \sim f_H$ ，则抽样频率 f_s 应满足：

$$f_s = 2(f_H - f_L) \left(1 + \frac{M}{N} \right) = 2B \left(1 + \frac{M}{N} \right)$$

其中 $B = f_H - f_L$ 为信号的带宽， $N = \left\lfloor \frac{f_H}{B} \right\rfloor$ ， $M = \frac{f_H}{B} - N$
由此可知， $0 \leq M < 1$

- ❖ 在 $f_H = NB$ 的情况下，以 $f_s = 2B$ 的抽样速率对信号进行抽样，抽样后信号各段频谱之间不会发生混叠，而不必象低通信号那样需要 $f_s = 2f_H$ 的抽样速率。
- ❖ 如果 $f_H = NB + MB$ ，这时抽样速率要满足前面的式子才能使得抽样后信号的各段频谱不会发生混叠。



Quantization(量化)

❖ 均匀量化

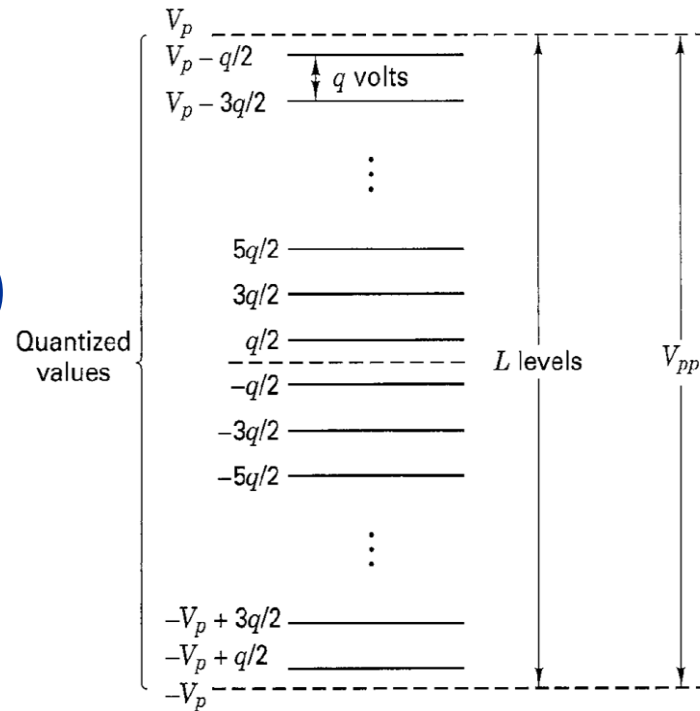
➤ 量化级 $L = 2^n$ ，量阶 $q = \frac{2V_p}{L}$ ， V_p 是最大量化电平， n 是量化电平bit数。

➤ 样本序列 $x(nT_s)$ ，简记为 $x(n)$

➤ 量化样本序列 $\hat{x}(nT_s)$ ，简记为 $\hat{x}(n)$

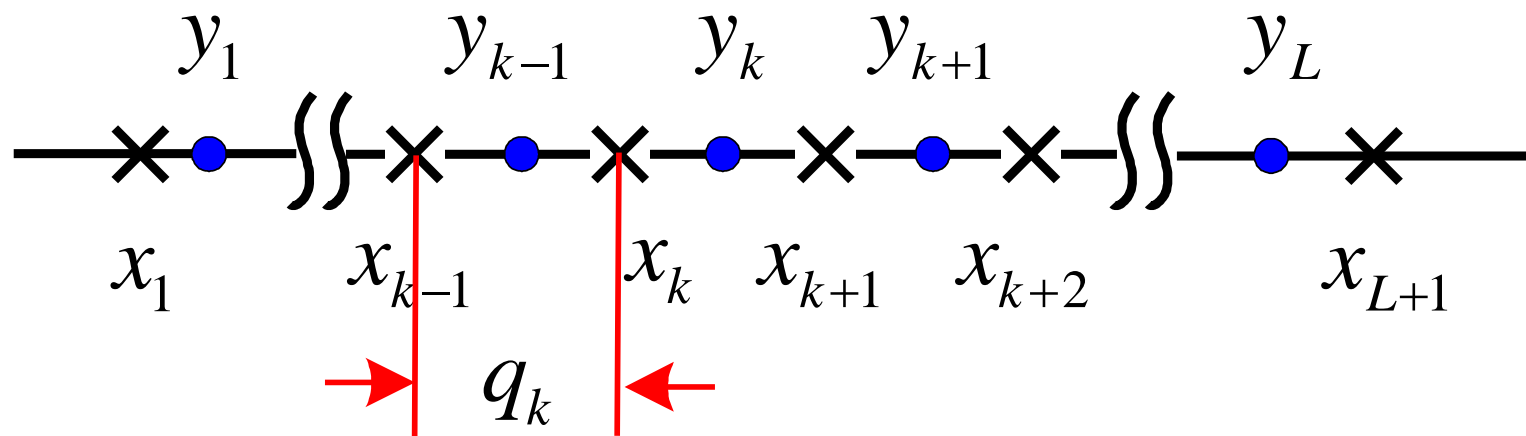
➤ 量化误差： $e(n) = x(n) - \hat{x}(n)$

$$|e| \leq \frac{q}{2}$$



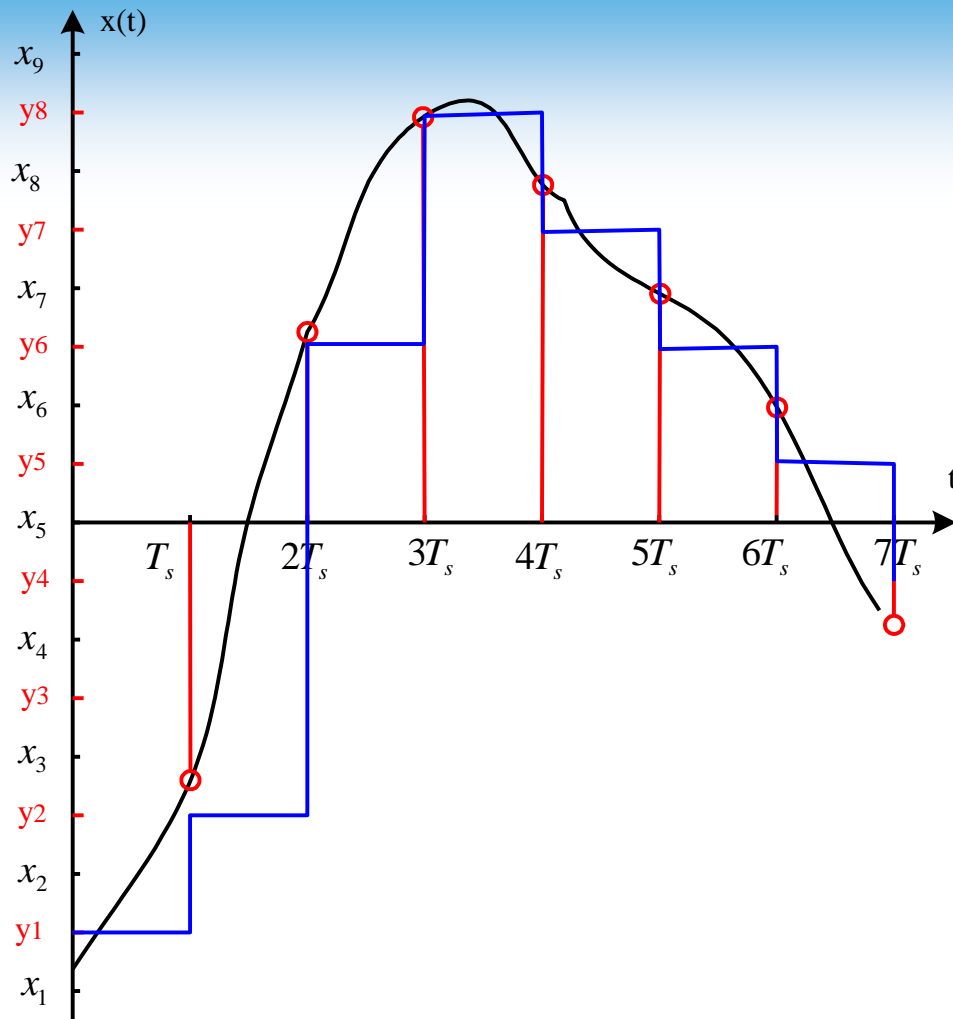
- 量化的准则：当输入信号幅度 x 落在 x_k 与 x_{k+1} 之间时，量化器输出电平为 y_k ，用公式表示为：

$$y = Q(x) = Q\{x_k < x \leq x_{k+1}\} = y_k \quad k = 1, 2, \dots, L$$



- x_k 称为分层电平，相邻分层电平间的距离称为量化间隔

$$q_k = x_{k+1} - x_k$$



- ❖ 从图中我们可以看出，量化后的值与原始抽样值之间存在着误差，这种误差称为量化误差 e ，定义为： $e=x-Q(x)$ 。由于这种误差的影响相当于干扰或噪声，故又称之为量化噪声。

➤ 第k个量化间隔中量化误差均方值记作

$$\overline{e_k^2} = \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x - y_k)^2 p_k(x) dx = \frac{1}{12} q_k^3 p_k, \quad y_k = \frac{1}{2} (x_k + x_{k+1})$$

➤ 量化噪声平均功率 $N_q = \sum_{k=1}^L \overline{e_k^2} = \sum_{k=1}^L \frac{1}{12} q^3 p_k = \frac{1}{12} q^2 = \frac{V_p^2}{3L^2}$

➤ 注：假设x在整个信号空间内是均匀分布的， $p_k(x)$ 在数值上等于 $1/Lq$ 。

➤ 信号峰值功率为 $S_m = V_p^2$

➤ 最大量化信噪比： $\frac{S_m}{N_q} = 3L^2$

用dB值表示： $10 \lg \frac{S_m}{N_q} = 10 \lg 3L^2 = 6.02n + 4.77$

✓ 每增加1 bit长度，提高 6dB

❖ 非均匀量化

基本思路：非均匀量化是根据信号的不同区间来确定量化间隔的。对信号取值较小的区间，其量化间隔也小，反之，量化间隔就大，这样使平均SNR增加。

非均匀量化的实现方法是将取样值通过压缩器压缩后再进行均匀量化，压缩器的特性是将大信号进行压缩，对小信号进行放大。接收时要对信号进行扩张，以恢复原始信号的相对关系。

压扩特性

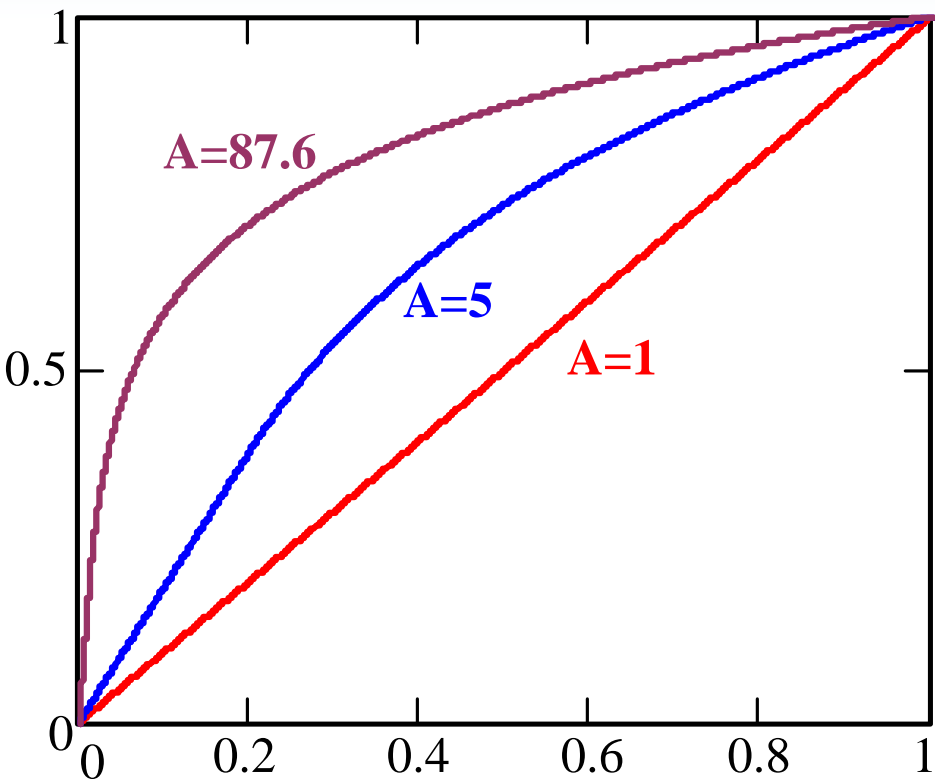
❖ *A-Law* compression characteristics (Europe, China)

$$y = \begin{cases} y_{\max} \frac{A(|x|/x_{\max})}{1 + \ln A} \operatorname{sgn} x & 0 < \frac{|x|}{x_{\max}} \leq \frac{1}{A} \\ y_{\max} \frac{1 + \ln [A(|x|/x_{\max})]}{1 + \ln A} \operatorname{sgn} x & \frac{1}{A} < \frac{|x|}{x_{\max}} \leq 1 \end{cases} \quad A = 87.6$$

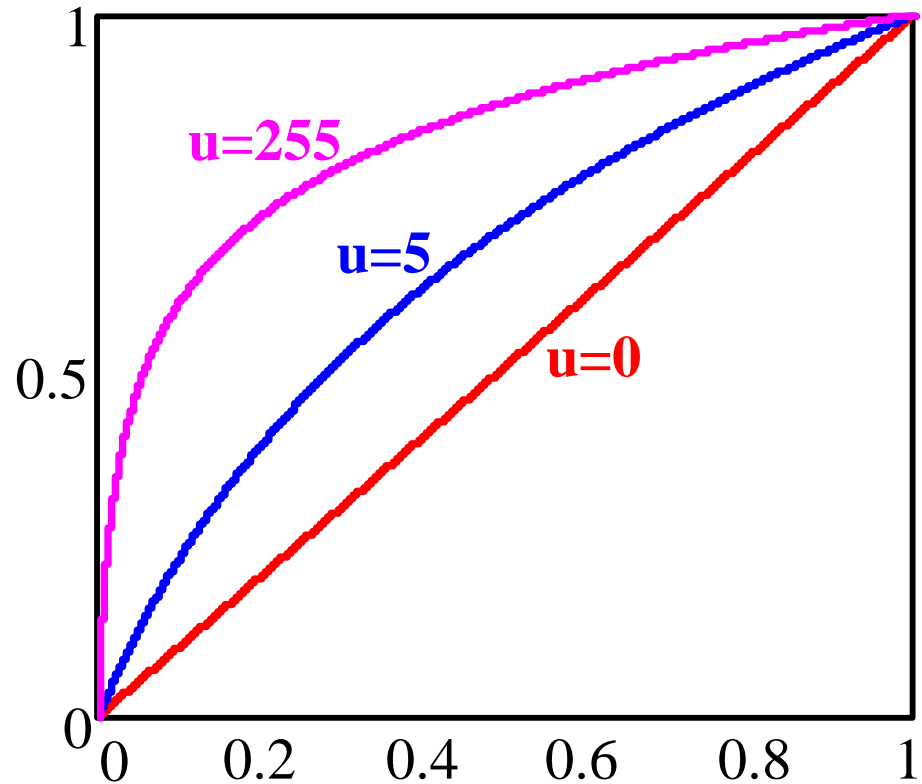
❖ *μ-Law* compression characteristics (North America)

$$y = y_{\max} \frac{\ln [1 + \mu(|x|/x_{\max})]}{\ln(1 + \mu)} \operatorname{sgn} x \quad \text{where } \operatorname{sgn} x = \begin{cases} +1 & \text{for } x \geq 0 \\ -1 & \text{for } x < 0 \end{cases}$$

$$\mu = 255$$



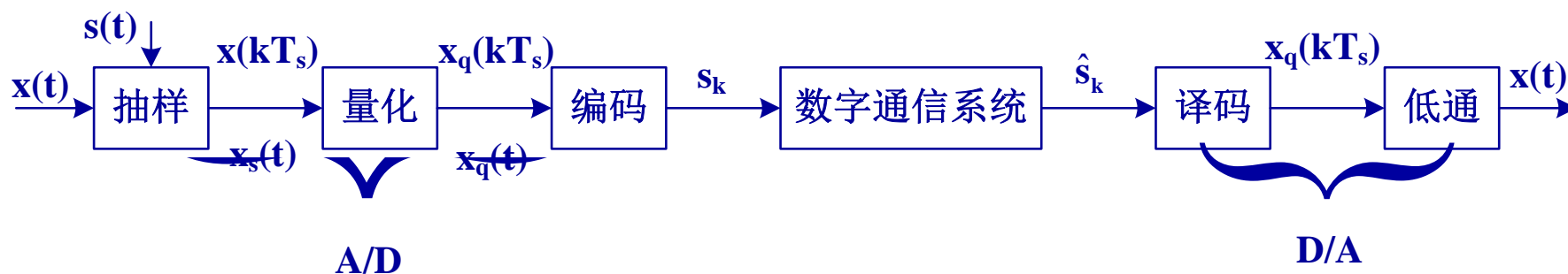
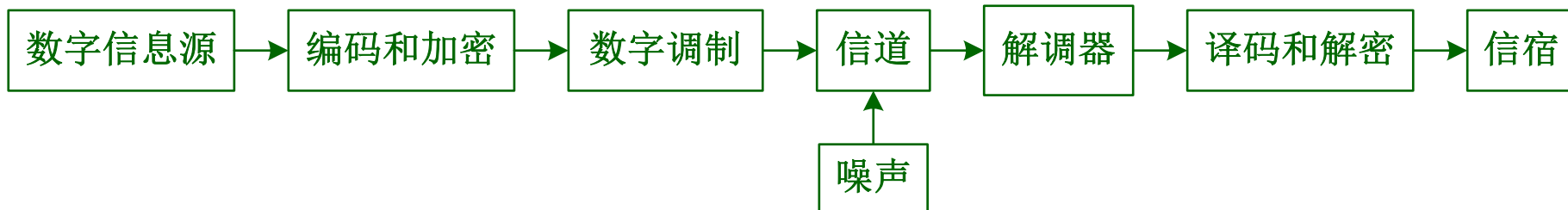
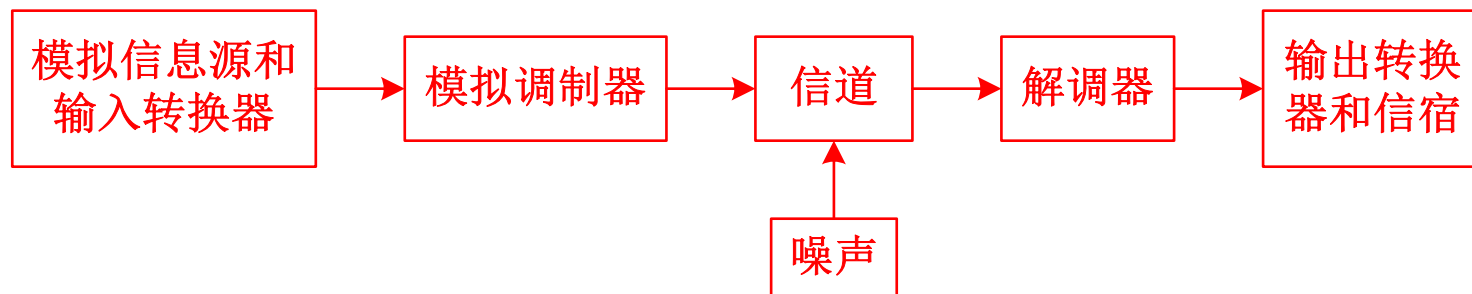
(a) **A-law**



(b) **μ -law**

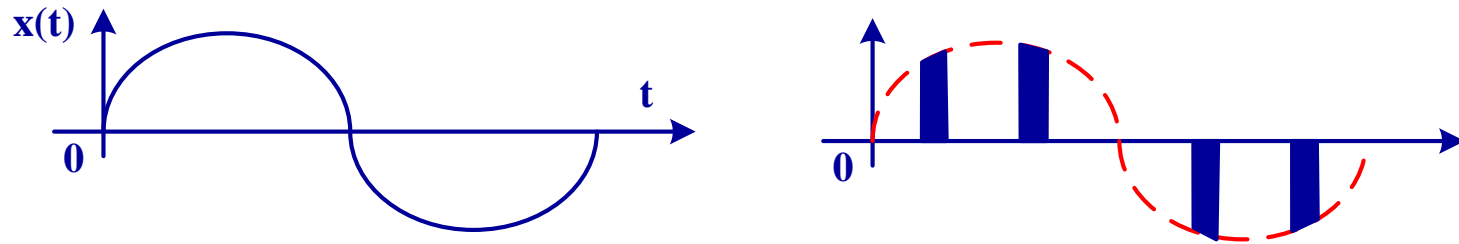
脉冲编码调制 (PCM)

❖ 模拟通信系统、数字通信系统、模拟信号数字传输系统



PCM与PAM的区别

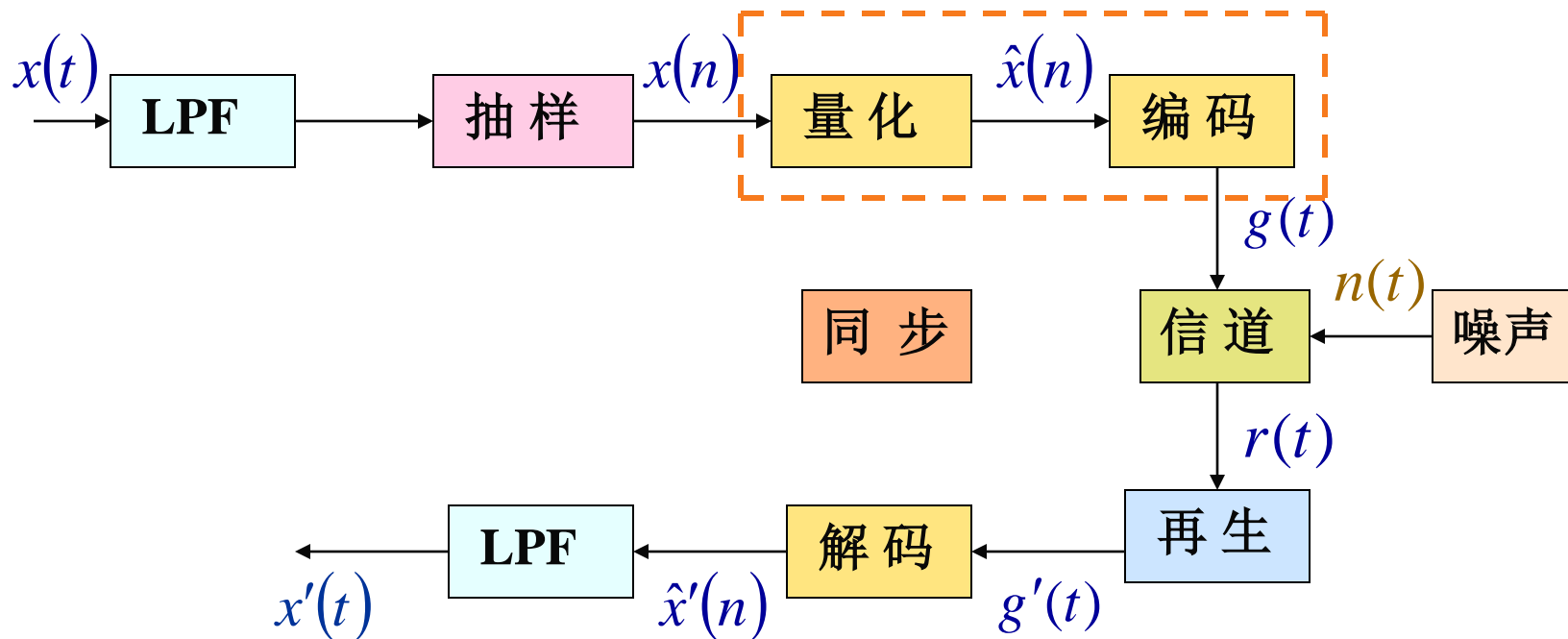
- ❖ **PAM**是脉冲调制中最常用的一种调制方式，是把模拟信号变为一系列在时间上离散的窄脉冲，这些窄脉冲的幅值随模拟信号瞬时值的变化而变化，因此从**PAM**信号的幅度来看仍然是连续的，仍属模拟信号的范畴。



- ❖ **PCM**在时间离散上与**PAM**相同，但**PCM**通过量化把脉冲幅度也离散了，而经过编码又把时间上和幅度上均已离散了的信号进一步变为二进制（或多进制）的代码，即变成了数字信号。

§ 3.2 Pulse Code Modulation(PCM)

❖ PCM 原理框图



❖ 发送端:

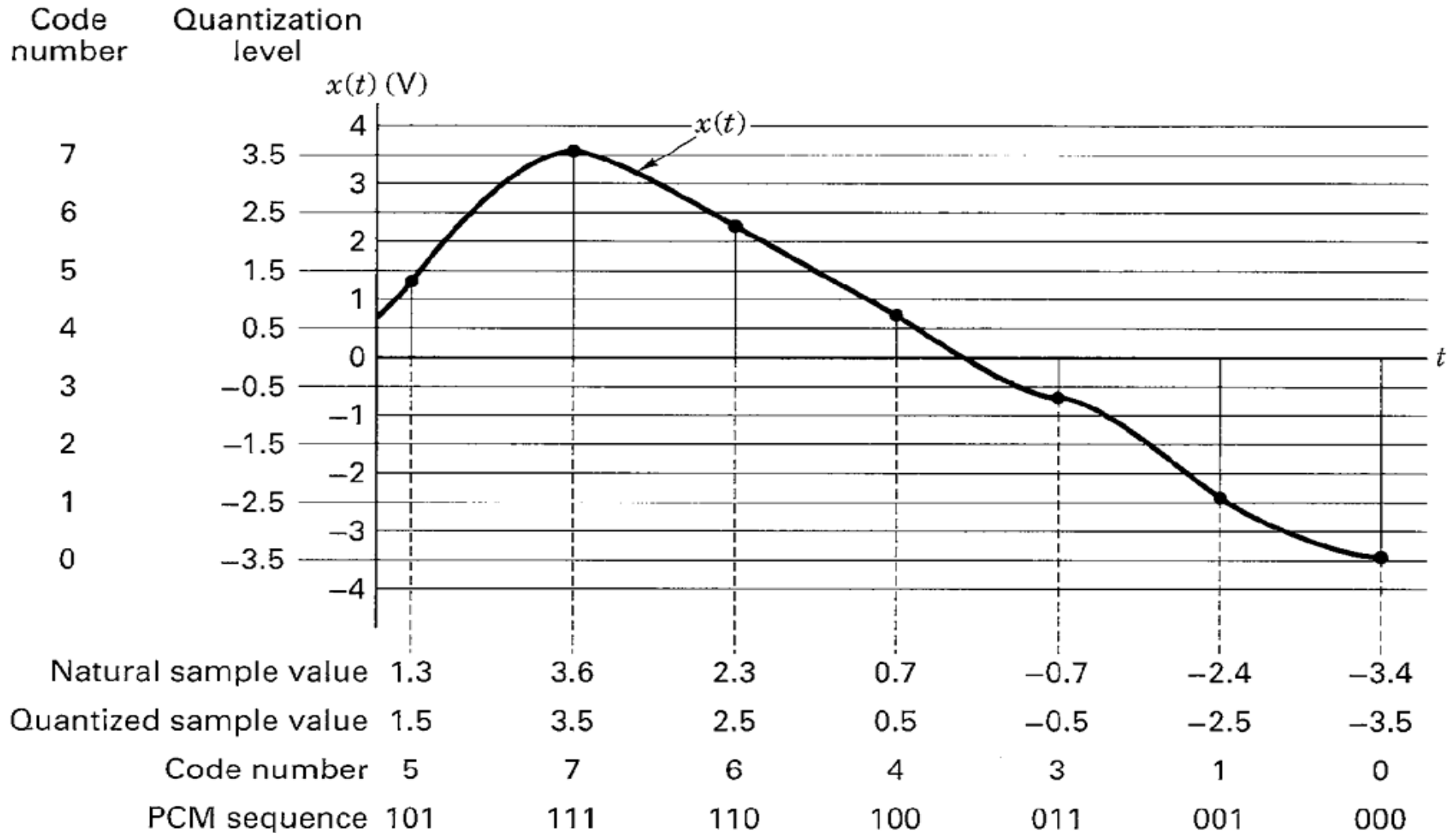
- LPF(低通滤波): $x(t)$, $0 \sim f_m$
- 抽样(Sampling): $f_s \geq 2f_m$
- 量化(Quantizing): $L = 2^n$, 量阶 q
- 编码(Encoding): 码长 n bit

❖ 实际中量化与编码是同时进行的

❖ 接收端:

- 再生(Regenerating): 由 $r(t) = g(t) + n(t) \rightarrow g'(t)$
- 解码(Decoding): 恢复量化样值 $\hat{x}'(n)$
- 重建 (Reconstruction)滤波: 恢复模拟信号 $x'(t)$

❖ PCM抽样和量化编码



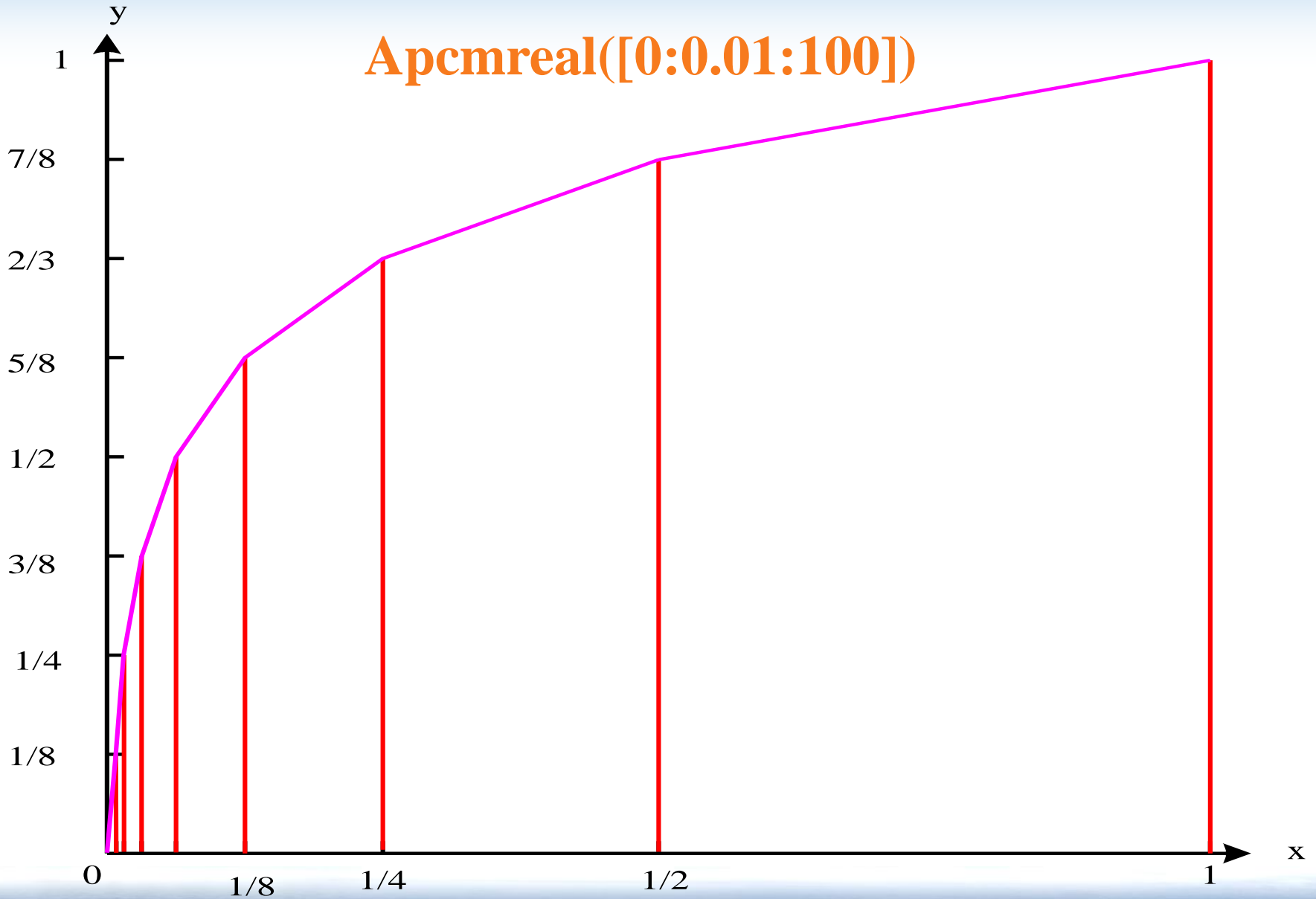
Natural samples, quantized sample value, and PCM

A律13折线压缩编码

- 用数字电路产生7种不同斜率的8段折线
- $x(t)$ 幅度归一化为0 → 1，从右向左依次按1/2分段，共分8段
- $y(t)$ 幅度归一化为0 → 1，均匀分成8段
- 连接 x 、 y 各分段起始交点即得到8段7种不同斜率的折线，构成近似的 *A-law* 压缩特性。包括0 → -1 负值时，共13段折线。

❖ *A-Law 87.6* piecewise steps

Apcmreal([0:0.01:100])



- ❖ x轴表示输入信号，y轴表示输出信号。
- ❖ X轴（0,1）分8段：1/2、1/4、1/8、1/16、1/32、1/64、1/128，然后每一段再均分16等分，这样x轴的最小单位是 $1/(128*16)=1/2048=q$ 。
- ❖ y轴（0,1）均分8段，每段再均分16等分，这样输出的最小单位是 $1/(8*16)=1/128$ ，可用7个比特来表示（ $2^7=128$ ）。考虑到（-1,0），这样输出就有256个量化输出量级，用8位二进制码进行表示。

❖ *A-Law* 非均匀量化7种量阶：

x 的8段各自均匀分为16个量化级，各段量化间隔记为 $\Delta V_1, \Delta V_2, \dots, \Delta V_8$ ，它们的大小以 q 为单位分别是：

$\Delta V_1 = \frac{1}{128 \cdot 16} = \frac{1}{2^{11}} = q,$	斜率 $\frac{1/8}{1/128} = 16$
$\Delta V_2 = \frac{1}{128 \cdot 16} = \frac{1}{2^{11}} = q,$	斜率 $\frac{1/8}{1/128} = 16$
$\Delta V_3 = \frac{1}{64 \cdot 16} = \frac{1}{2^{10}} = 2q,$	斜率 $\frac{1/8}{1/64} = 8$
.....
$\Delta V_8 = \frac{1}{2 \cdot 16} = \frac{1}{2^5} = 64q,$	斜率 $\frac{1/8}{1/2} = 1/4$

- 最小量阶 $\Delta V_1 = q = 1/2^{11}$
- 最大量阶 $\Delta V_8 = 64q$

$$M_1 \quad M_2 M_3 M_4 \quad M_5 M_6 M_7 M_8$$

极性码

段落码

段内码

- ❖ 极性码表示信号的正负极性，1为正，0为负；
- ❖ 段落码表示落在哪一段；
- ❖ 段内码表示每一段中的16个量化级；

A律13折线幅度码与其对应电平

段落号 _q	电平范围 (q)	段落码 _q			段落码对应的起始电平 ₁ (q)	量化间隔 (q)	段内码对应的电平 (q)			
		M_2	M_3	M_4			M_5	M_6	M_7	M_8
8	1024~2048	1	1	1	1024	64	512	256	128	64
7	512~1024	1	1	0	512	32	256	128	64	32
6	256~512	1	0	1	256	16	128	64	32	16
5	128~256	1	0	0	128	8	64	32	16	8
4	64~128	0	1	1	64	4	32	16	8	4
3	32~64	0	1	0	32	2	16	8	4	2
2	16~32	0	0	1	16	1	8	4	2	1
1	0~16	0	0	0	0	1	8	4	2	1

举例： $x=+1230q$

- ❖ (1) 首先， $M1=1$ 因为它是正的；
- ❖ (2) 分析段落码
 - 首先和输入信号8个段落的一半处即 $2048*1/16=128q$ 进行比较，如果大，就为1，否则就为0。因为 $1230q>128q$ ，所以 $M2=1$ ，说明在上四段中。
 - 然后再和 $2048*1/4=512q$ 进行比较，因为 $1230q>512q$ ，所以 $M3=1$ ，说明在上两段中。
 - 然后再和 $2048*1/2=1024q$ 进行比较，因为 $1230q>1024q$ ，所以 $M4=1$ ，说明在（ $1/2\sim 1$ ）段内。

它在第8段，段落码是111。

(3) 分析段内码

- ❖ 首先和 $2048 \times 3/4 = 1536q$ 进行比较，小， $M5=0$ ，说明在 $(1/2 \sim 3/4)$ 。
- ❖ 再和 $2048 \times 5/8 = 1280q$ 进行比较，小， $M6=0$ ，说明在 $(1/2 \sim 5/8)$ 。
- ❖ 再和 $2048 \times 9/16 = 1152q$ 进行比较，大， $M7=1$ ，说明在 $(9/16 \sim 5/8)$ 。
- ❖ 最后和 $2048 \times 19/32 = 1216q$ 进行比较，大， $M8=1$ ，说明在 $(19/32 \sim 5/8)$

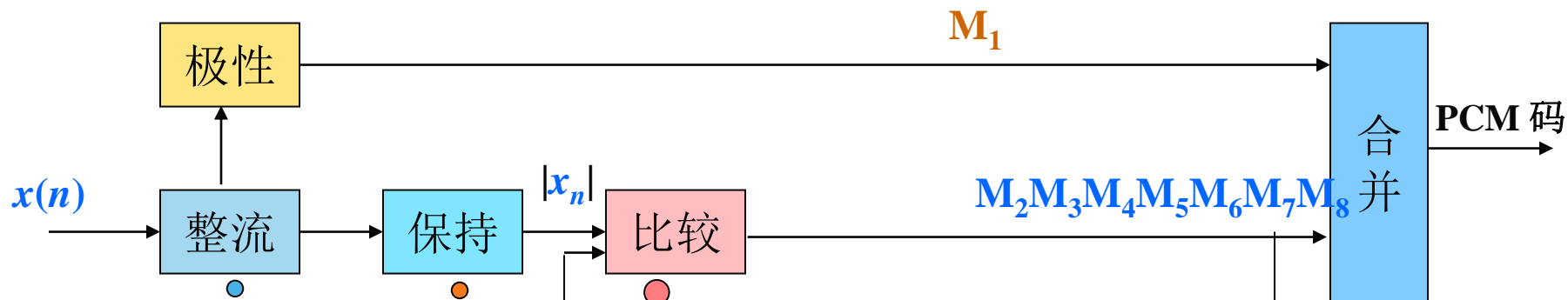
段内码是0011。

最后的编码输出是11110011，量化电平是1216q，量化误差是 $1230 - 1216 = 14q$ 。

更简单的方法

- ❖ (1) $+1230q$, so $M_1=1$;
- ❖ (2) $(1230)_{10}=(10011001110)_2$
- ❖ (3) 在11位二进制码中, 最开始为零的个数设为 k , 则 $k=0$;
- ❖ (4) $7-k=7$, 变为二进制为**111**, 此为段落码
- ❖ (5) 在11位二进制码中, 第一个1是初始值, 抛弃, 取随后的四位即为段内码:**0011**
- ❖ (6) **1 111 0011**, OK!

❖ *A-Law* PCM 编码原理框图



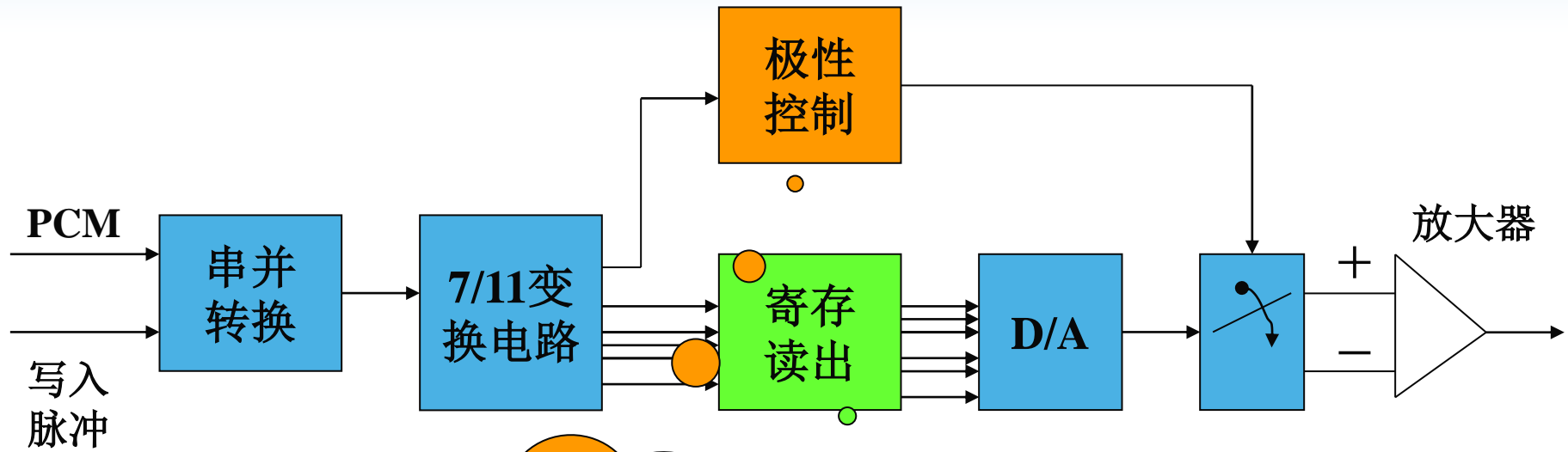
用来判别输入
样值
极性

比较器通过
行比较
样值
由于
对抽样
所需的
标准值由本地译码电
路提供。

7位非线性编码相当于11
位线性编码（完成非线
性和线性的变换）。

用来寄存二进制代码。
除第一次比较外，其余
各次比较都要依据前面
的结果来确定标准值。

译码电路



用来恢复译码后的脉冲极性。

把寄存的信号在一定时刻并行输出到D/A中的译码逻辑电路上，产生译码输出。

PCM的抗噪声性能

- ❖ 在信道噪声为高斯噪声的情况下，可以认为码字中码元出现误码是随机的且彼此独立的。假设PCM信号的码字，由n位码字构成，当码元的误码率为 P_e ，且 $P_e \ll 1$ 时，在n位码中有i位差错的概率为：

$$P_i(n) = C_n^i P_e^i (1 - P_e)^{n-i} \approx C_n^i P_e^i$$

- ❖ 当i=1时，有： $P_1(n) \approx C_n^1 P_e = nP_e$
- ❖ 当i=2时，有： $P_2(n) \approx C_n^2 P_e^2 = n(n-1)P_e^2 / 2$

- ❖ 依次类推，由于 $P_e \ll 1$ ，发生多于1位差错的概率确实远小于发生1位差错的概率，所以可以认为码字的差错率近似等于 nP_e 。
- ❖ 码字中各位码的权重不同，差错的影响也就不同。为了简化分析，设码字为自然二进制码，由最低位到最高位的加权数为 $2^0, 2^1, \dots, 2^{n-1}$ ，量化级之间的间隔为 q ，则第 i 位码元对应的量化值为 $2^{i-1}q$ ，如果第 i 位码元发生了误码，其误差为 $\pm 2^{i-1}q$ 。

- ❖ 前面已经假定每一码元出现错误的可能性都相同，且码元数 n 与量化电平 L 的关系为 $L=2^n$ 。在一个码字中如有一个码元发生错误，则码元所造成的均方误差为：

$$\sigma_e^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2^{i-1} q)^2 = \frac{q^2}{n} \sum_{i=1}^n (2^{i-1})^2 = \frac{4^n - 1}{3n} q^2 = \frac{L^2 - 1}{3n} q^2$$

- ❖ 由于码字差错率为 nP_e ，所以平均误码噪声功率为：

$$N_e = \sigma_e^2 \cdot nP_e = (L^2 - 1)q^2 P_e / 3$$

- ❖ 这样对于解码后的重建信号来说，其误差除了来源于量化噪声，还来源于信道误码噪声。所以在接收端噪声总功率 N 是两者平均功率之和，即

$$N = N_q + N_e = q^2 / 12 + (L^2 - 1)P_e q^2 / 3$$

- ❖ 假设输入信号为均匀分布，则满载时输入信号功率为：

$$S = \int_{-V}^{+V} x^2 p(x) dx = \int_{-V}^{+V} x^2 \left(\frac{1}{2V} \right) dx = \frac{V^2}{3}$$

❖ 由前面可知，量化间隔 $q=2V/L$ ，所以信号功率为：

$$S = \frac{L^2 q^2}{12}$$

❖ 由此可得总信噪比SNR为：

$$\begin{aligned} SNR &= \frac{S}{N} = \frac{L^2 q^2 / 12}{q^2 / 12 + (L^2 - 1) P_e q^2 / 3} \\ &= \frac{L^2}{1 + 4(L^2 - 1) P_e} \end{aligned}$$

Bits per PCM Word and Bits per Symbol

- ❖ 每个模拟样值被转换成一个由一组比特组成的PCM码字，码字长度取决于对样值进行量化时的量化电平数 L ，而量化电平数取决于用来确定电平所需的比特数 l ，即 $L=2^l$ 。
- ❖ 问题：应为每个模拟样值分配几个比特位呢？这取决于允许的量化失真程度 p ！
- ❖ 量化失真引起的误差 $|e|$ 与模拟电压峰峰值 V_{pp} 之间的关系为 $|e| \leq pV_{pp}$ ；由于量化误差不超过量化间隔 q 的一半，有： $|e|_{\max} = q/2 = V_{pp}/2(L-1) \approx V_{pp}/2L \leq pV_{pp}$ ，可得：
$$l \geq \log_2(1/2p)$$
- ❖ 注意：此式中表示一个PCM码字所需的比特数 l 与表示 M 进制的码元所需的 k 个数据位是不同的。

❖ 例：一个模拟信号的最大频率 $f_m=3\text{kHz}$ ，经 $M=16$ 进制PAM系统传输，设量化失真不超过模拟信号峰峰值的 $\pm 1\%$ 。

(a) 将该模拟波形数字化时，每个样值或PCM码字最少为几个比特？

(b) 采样速率最小为多少？相应的比特传输速率=？

(c) PAM脉冲或码元的传输速率=？

(d) 如果包括滤波在内的传输带宽为 12kHz ，求系统的带宽利用率。

注意：分清楚满足失真要求的量化电平数及多电平PAM脉冲的16个电平。

解：

(a) $l \geq \log_2(1/2p) = \log_2 50 \approx 5.6$

So, 每个样值需要6bit;

(b) 最小采样速率 $f_s=2f_m=6\text{kHz}$ ，一个样值量化为6bit，so 比特传输速率

$R=l f_s=36\text{kbps}$;

(c) 由多电平脉冲 $M=2^k=16$ 可知，一个码元包含4bit，码元速率 $R_s=R/k=9\text{k}$

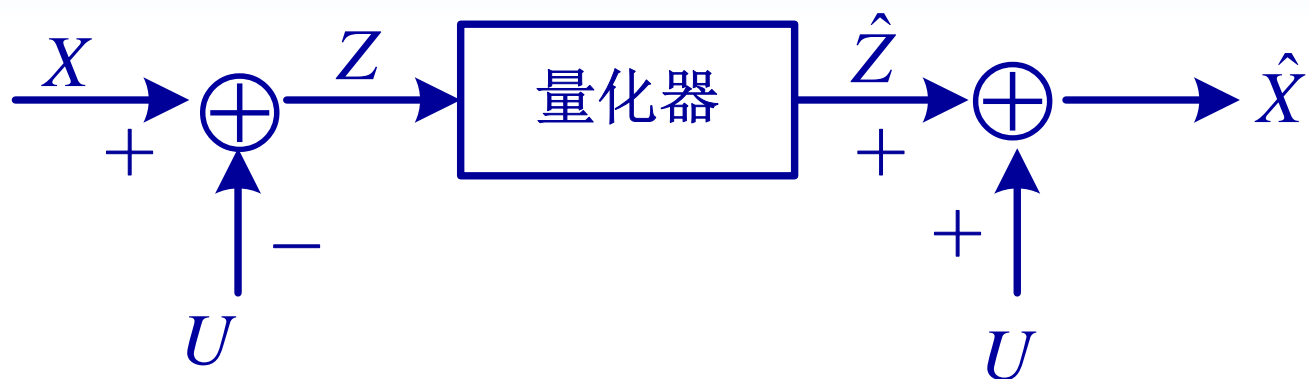
baud;

(d) 带宽利用率= $R/W=36\text{kbps}/12\text{kHz}=3\text{bps/Hz}$

§ 3.3 自适应差分脉码调制 (ADPCM)

- ❖ ADPCM是在差分脉码调制 (DPCM) 的基础上发展起来的。DPCM的原理基于模拟信号的相关性。语音信号和图像信号经抽样后得到了样值序列，经分析可知，当前时刻的样值与前面相邻的若干时刻的样值之间有明显的关联。这样，可以根据前些时刻的样值来预测当前时刻的样值。预测值和实际值之差为差值。大量的统计结果表明，信号本身的功率比差值的功率要大很多。如果只传送这些差值来代替原始信号，那么码组所需的位数就可以显著减少。差分脉码调制就是利用样值之间的关联进行高效率波形编码的一种典型方法。

❖ 差分量化的基本框图为

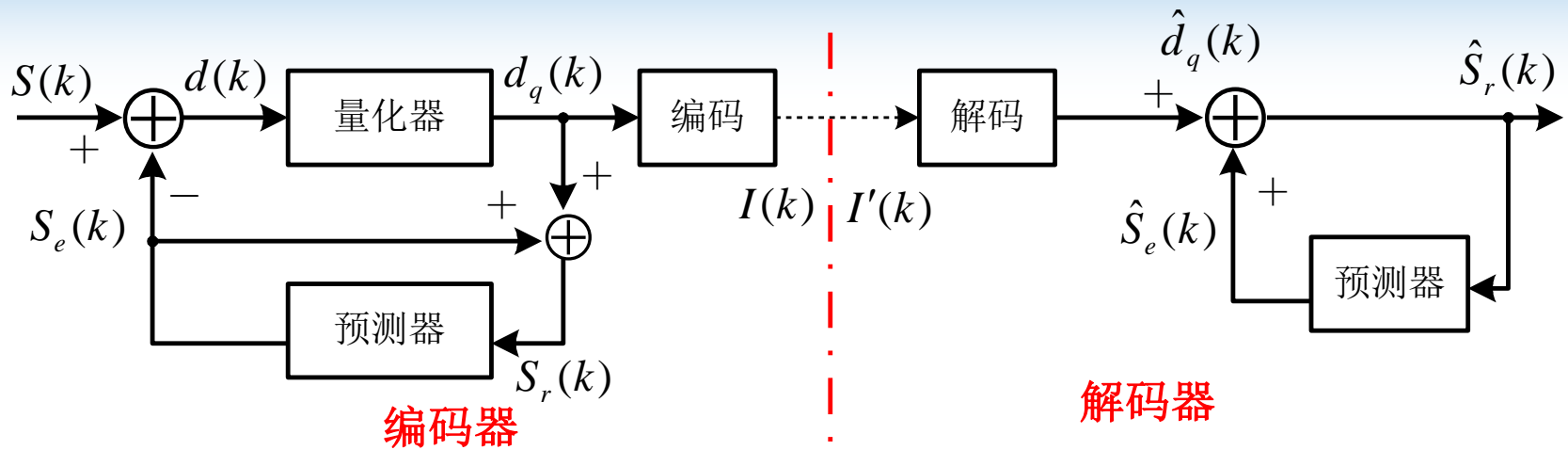


❖ 这样我们就可得到

$$E\left[\left(X - \hat{X}\right)^2\right] = E\left[\left(Z - \hat{Z}\right)^2\right]$$

- ❖ 根据这个公式我们就想，如果我们能造出一个信号，使得 $U \approx X$ ，我们就能降低 Z 的方差，从而降低全局的信号变形（受损）程度。

❖ 下图给出了DPCM系统的原理框图



- ❖ 图中输入信号为 $S(k)$ ，接收端重建信号为 $\hat{S}_r(k)$ ， $d(k)$ 是输入信号与预测信号 $S_e(k)$ 的差值， $d_q(k)$ 是量化后的差值， $I(k)$ 是 $d_q(k)$ 信号经编码后输出的数字编码信号。编码器中的预测器与解码器中的预测器完全相同，因此，如果信道良好，解码器输出的重建信号 $\hat{S}_r(k)$ 与编码器的 $S_r(k)$ 完全相同。

P635页，图13.20中有错误，量化器后的所有符号上面加一个波浪号。

- ❖ 根据上图，我们可写出差值 $d(k)$ 和重建信号 $S_r(k)$ 的表达式为：

$$d(k) = S(k) - S_e(k)$$

$$S_r(k) = S_e(k) + d_q(k)$$

- ❖ **DPCM**的总量化误差 $e(k)$ 定义为输入信号 $S(k)$ 与解码器输出的重建信号之差，即

$$\begin{aligned} e(k) &= S(k) - S_r(k) \\ &= [d(k) + S_e(k)] - [S_e(k) + d_q(k)] \\ &= d(k) - d_q(k) \end{aligned}$$

- ❖ 由上式我们可知，总量化误差只和差值信号的量化误差有关，因此系统总的量化SNR定义为：

$$SNR = \frac{E[S^2(k)]}{E[e^2(k)]} = \frac{E[S^2(k)]}{E[d^2(k)]} \cdot \frac{E[d^2(k)]}{E[e^2(k)]} = G_p \cdot SNR_q$$

- ❖ 其中 G_p 是预测增益，可以理解为DPCM系统相当于PCM系统而言的信噪比增益，定义为：

$$G_p = \frac{E[S^2(k)]}{E[d^2(k)]}$$

❖ SNR_q 是把差值序列作为信号时的量化信噪比，定义为：

$$SNR_q = \frac{E[d^2(k)]}{E[e^2(k)]}$$

❖ 如果能够选择合理的预测规律，差值功率 $E[d^2(k)]$ 就能远小于样值功率 $E[s^2(k)]$ ，这样 G_p 就会大于1，使系统获得增益。对DPCM系统的研究就是围绕着如何使 G_p 和 SNR_q 这两个参数取最大值而逐步完善起来的，并最终形成自适应差值脉码调制（ADPCM）系统。

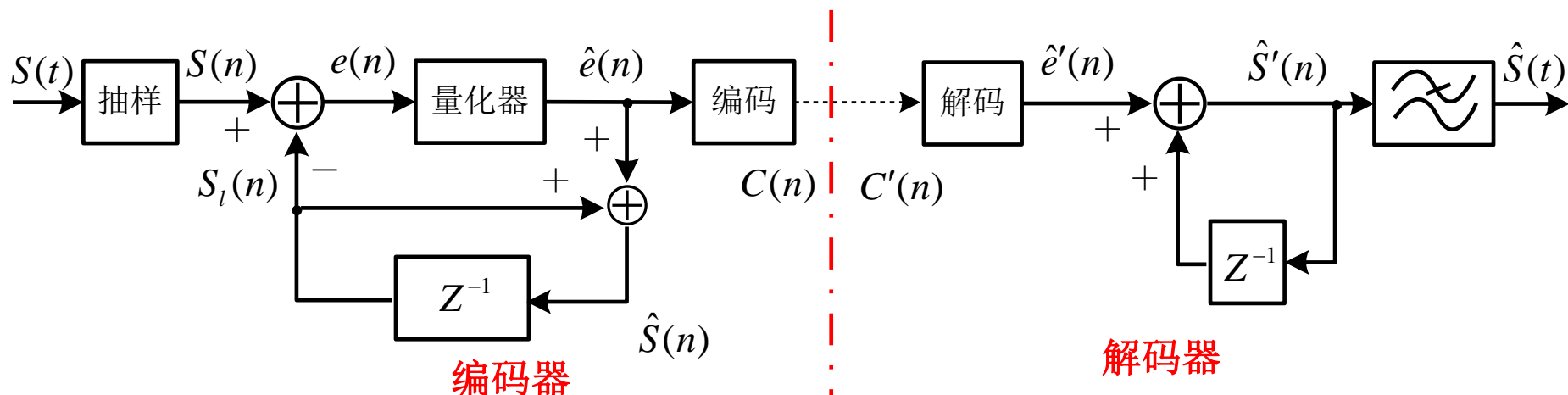
自适应可包括自适应预测或自适应量化，也可以两者均包括。自适应量化指量化器的量化间隔能随信号的瞬时值变化作自适应调整。自适应预测指预测器的预测系数能随信号瞬时变化作自适应调整。

§ 3.4 增量调制 (ΔM)

- ❖ 增量调制是在PCM的基础上发展起来的另一种模拟信号数字传输的方法，可以看成是PCM的一个特例。它们都是用二进制代码来表示模拟信号的，但与PCM不同的是， ΔM 是将模拟信号变换成仅由一位二进制码组成的数字信号序列，来表示相邻抽样值的相对大小，反映出模拟信号的变化规律。

3.4.1 简单增量调制

❖ 增量调制原理框图如下图所示



❖ 当取样频率远大于Nyquist频率时，样值之间的相关程度增强。原始模拟信号 $S(t)$ 采样后第 n 时刻的样值为 $S(n)$ ， $S_l(n)$ 表示第 n 时刻的预测值，有： $S_l(n) = \hat{S}(n-1)$

- ❖ 其中 $\hat{S}(n)$ 是 $S(n)$ 在第 n 时刻的重建样值。为了和接收端的重建信号相区别， $\hat{S}(n)$ 称为本地重建信号。输入样值和预测值之差为差值信号 $e(n)$ ，有：

$$\begin{aligned} e(n) &= S(n) - S_l(n) \\ &= S(n) - \hat{S}(n-1) \end{aligned}$$

- ❖ 量化器对差值信号 $e(n)$ 进行量化，量化器输出 $\hat{e}(n)$ 只有两个电平： $+\Delta$ 或 $-\Delta$ 。编码器将 $+\Delta$ 编为 1 码，即 $C(n)=1$ ；将 $-\Delta$ 编为 0 码，即 $C(n)=0$ 。 Δ 称为 ΔM 的量化间隔。

❖ 在接收端，由接收到的码 $C'(n)$ 解出差值信号量化值 $\hat{e}'(n)$ ，

即：
$$C'(n) = 1, \quad \hat{e}'(n) = +\Delta$$

$$C'(n) = 0, \quad \hat{e}'(n) = -\Delta$$

❖ 经过延迟和相加电路后，输出重建信号 $\hat{S}'(n)$ ，为：

$$\hat{S}'(n) = \hat{e}'(n) + \hat{S}'(n-1)$$

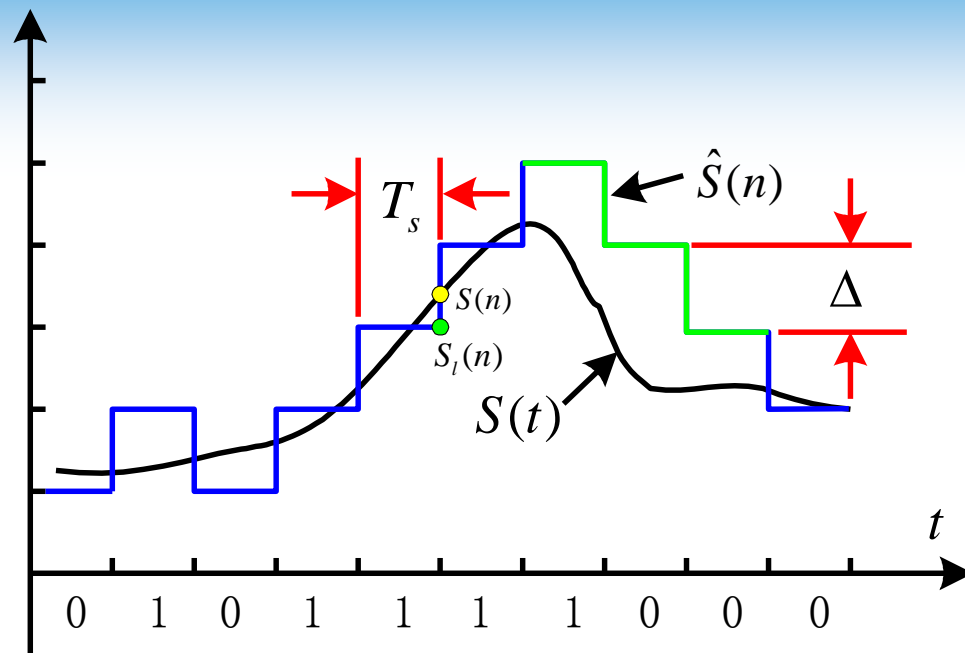
❖ 如果传输信道无误码，则接收端的重建信号 $\hat{S}'(n)$ 和本地重建信号 $\hat{S}(n)$ 应该相等，即：

$$\hat{S}'(n) = \hat{S}(n)$$

❖ 输出重建信号经过低通滤波器后就得到了原始模拟信号的估计。

举例

- ❖ 从数学意义上来说，增量调制系统实质上是用一个阶梯波 $\hat{S}(n)$ 最佳逼近连续波 $S(t)$ 。



- 从物理意义上来说，该系统实质上是一个时间离散的负反馈跟踪系统，每隔 T_s 间隔调整一次，使预测信号 $S_l(n)$ 的上升和下降始终跟踪输入信号 $S(t)$ 的斜率，使差值信号 $e(n)$ 的方差最小，经过编码形成数字信号，用以传送 $S(t)$ 的斜率信息。

- ❖ 当 $S(t)$ 变化的斜率太大时，预测信号 $S_l(n)$ 将跟不上信号的变化，使差值信号 $e(n)$ 明显增大，这种现象称为斜率过载现象，如图中绿线所表示的那样。为避免过载，应满足条件：

$$\left| \frac{dS(t)}{dt} \right| \leq \frac{\Delta}{T_s}$$

example

- ❖ 如果输入信号为正弦信号，即 $S(t) = A \sin \omega t$

正弦信号的斜率为： $\frac{dS(t)}{dt} = A\omega \cos \omega t$

根据不过载条件，我们可求出正弦信号的临界振幅为：

$$A\omega \leq \frac{\Delta}{T_s} = \Delta \cdot f_s \Rightarrow A_{\max} = \frac{\Delta \cdot f_s}{\omega}$$

3.4.2 ΔM 的抗噪声性能

- ❖ 在不过载情况下，差值信号 $|e(n)| \leq \Delta$ ，假定 $e(n)$ 在 $(-\Delta, +\Delta)$ 之间均匀分布，则 ΔM 的量化噪声平均功率为：

$$\sigma_q^2 = \int_{-\Delta}^{+\Delta} e^2 p(e) de = \frac{\Delta^2}{3}$$

- ❖ 考虑到 $e(n)$ 序列的最小间隔为 T_s ，可近似认为上式的量化噪声功率谱在 $(0, f_s)$ 频带内均匀分布，即功率谱密度近似表示

为
$$P(f) \approx \frac{\sigma_q^2}{f_s} = \frac{\Delta^2}{3f_s}$$

❖ 若接收端低通滤波器的带宽为 f_B ，则经过低通滤波器后输出的量化噪声功率为：

$$\sigma_q^2 \approx \frac{\Delta^2 f_B}{3f_s}$$

❖ 在临界过载时，正弦信号的功率可表示为：

$$S_{\max} = \frac{A_{\max}^2}{2} = \frac{\Delta^2 f_s^2}{8\pi^2 f^2}$$

从此式我们可知，
抽样频率每提高一倍，
量化信噪比提高9dB。

由此我们可得到最大量化信噪比为：

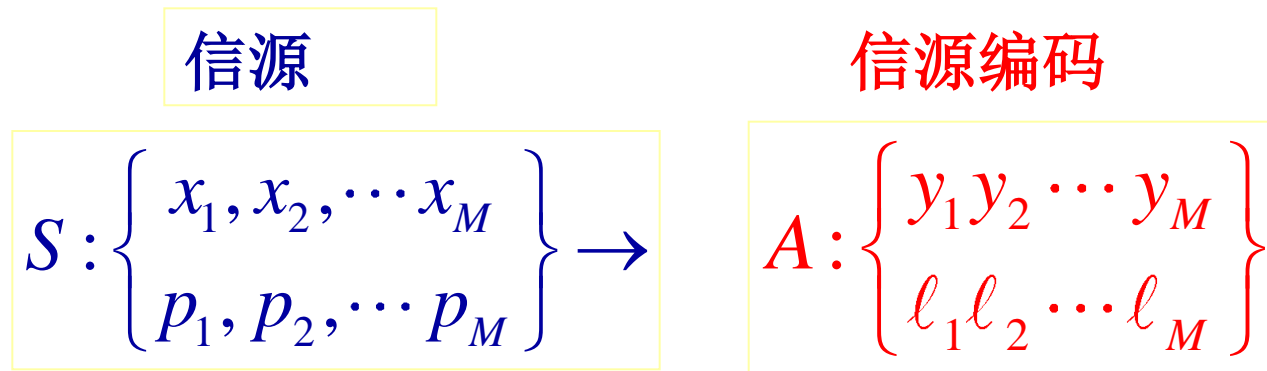
$$SNR_{\max} = \frac{S_{\max}}{\sigma_q^2} \approx 0.038 \frac{f_s^3}{f^2 f_B}$$

写出dB形式为：

$$[SNR]_{\max} \text{ dB} \approx 30\lg f_s - 20\lg f - 10\lg f_B - 14$$

§ 3.5 数字数据的信源编码

- ❖ 目的：选择一个有效二进制表示方法，降低数据源冗余度。



平均码长 $L = \sum_{i=1}^M p_i l_i$

使 L 最小的编码是最好的信源编码

定长编码和变长编码

- ❖ 假设一个离散无记忆信源每t秒输出一个符号，每个符号都是从有限符号集合 x_i , $i=1,2,\dots,L$ 以概率 $p(x_i)$ 出现，则符号 x_i 的自信息量为 $I(x_i) = -\log_2 p(x_i)$ ，单位bit。

该信源的熵（平均信息量）为

$$H(x) = -\sum_{j=1}^L p(x_j) \log_2 p(x_j) \leq \log_2 L$$

当所有符号等概率出现时，上述等号成立。这说明平均每个信源符号的比特数是 $H(x)$ ，因而信源输出速率为 $H(x)/t$ bps。

- ❖ 现在我们用比特表示英文26个字母，由于 $2^5=32>26$ ，因此每个字母可以唯一地用5bit来表示，这就是**定长编码（FLC）**的一个例子。

- ❖ 假设一个离散信源发出的符号是从一个有限集合 x_i , $i=1,2,\dots,L$ 中选取的。当 L 是2的幂时, 编码需要的bit数为 $R=\log_2 L$; 而当 L 不是2的幂时, 有 $R = \lceil \log_2 L \rceil$
- ❖ 但我们知道, 信源符合经常不等概率出现, 如字母s、t、e出现的概率就比q、z等出现的概率大, 这时有效的方法是采用变长编码 (VLC), 即用较少的bit数来表示经常用到的字母, 用较多的bit数表示不经常用到的字母。

字母	概率	字母	概率	字母	概率
空格	0.2	S	0.052	Y,W	0.012
E	0.105	H	0.047	G	0.011
T	0.072	D	0.035	B	0.0105
O	0.0654	L	0.029	V	0.008
A	0.063	C	0.023	K	0.003
N	0.059	F,U	0.0225	X	0.002
I	0.055	M	0.021	J,Q,Z	0.001
R	0.054	P	0.0175		

例：假设在我们的词汇表中只有A~H八个字母，对这个字母集合的**定长编码**为

字母	码字	字母	码字
A	000	E	100
B	001	F	101
C	010	G	110
D	011	H	111

对同样字母集合的**变长编码**可以为

字母	码字	字母	码字
A	00	E	101
B	010	F	110
C	011	G	1110
D	100	H	1111

假设我们要对一系列字母“A BAD CAB”进行编码，则对前面这个句子的定长和变长为

定长编码	000 001 000 011 010 000 001	总bit数=21
变长编码	00 010 00 100 011 00 010	总bit数=18

用变长编码用了较少的bit数！！

- 我们对8个字母进行另外一种变长编码

字母	码字	字母	码字
A	0	E	10
B	1	F	11
C	00	G	000
D	01	H	111

这第二种变长编码在字母的表示方面表现出更高的效率

变长编码1	00 010 00 100 011 00 010	总bit数=18
变长编码2	0 1001 0001	总bit数=9

- ❖ 但第二种变长编码有一个问题：考虑到0 1001 0001是用来表示“A BAD CAB”的，但我们可以将这些bit重新分组为[0] [10] [0] [1] [0] [0] [01]，这样它就被翻译成“A EAB AAD”或者[0][1][0][0][1][0][0][0][1]，又变成“A BAAB AAAB”很显然，译码的唯一性有问题！因为码字的长度是变化的，我们不知道哪里是一个符号的结束，哪里是下一个符号的开始。
- ❖ 第一种变长编码不存在这个问题，因为它没有一个码字构成另一个码字的前缀，一旦检测到一个bit序列对应码字种的某一个，我们就做译码判决，这种码称为即时可解码，没有译码延迟。

无前缀码(Prefix free code)是一种没有一个码字构成另一个码字前缀的码，这种码又称为**即时可解码**。

- ❖ 我们现在设计一种系统方法来构造唯一可译的变长码，使其在每个信源字母平均所占的bit数方面是高效的。设信源的输出符号都来自于一个有限符号集合 x_i , $i=1,2,\dots,L$, 其出现的概率为 $p(x_i)$, $i=1,2,\dots,L$, 每个信源字母平均所占用的bit数为

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^L n(x_i) p(x_i)$$

其中 $n(x_i)$ 是符号 x_i 所对应码字的长度。

Kraft不等式

❖ 构成二元即时可解码的充分必要条件是满足

$$\sum_{i=1}^L 2^{-n_i} \leq 1.$$



Kraft不等式!!

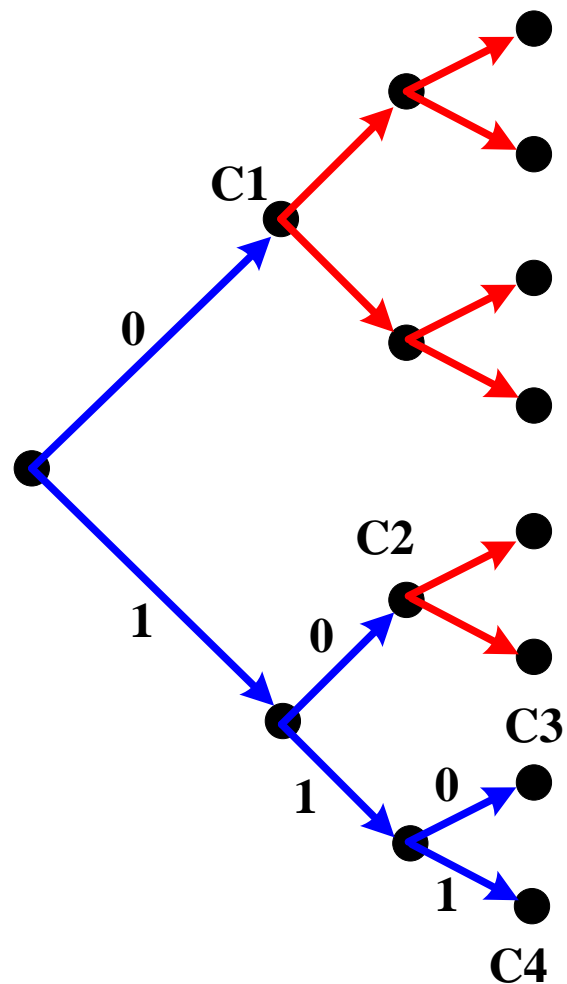
其中 $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_L$ 是各码字的长度。

例：用二叉树构造无前缀码

- ❖ 用0标记上面的分支，用1标记下面的分支，我们得到C1=0，但必须放弃所有C1节点所产生的子节点，因为无前缀码要求任何码字都不能是其他码字的前缀。
- ❖ 因此，我们得到四个码字{0,10,110,111}，从构造过程我们知道这是一个无前缀码；

$$\sum_{i=1}^L 2^{-n_i} = 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-3} = 1$$

满足Kraft不等式！



3.5.1 霍夫曼(Huffman)编码

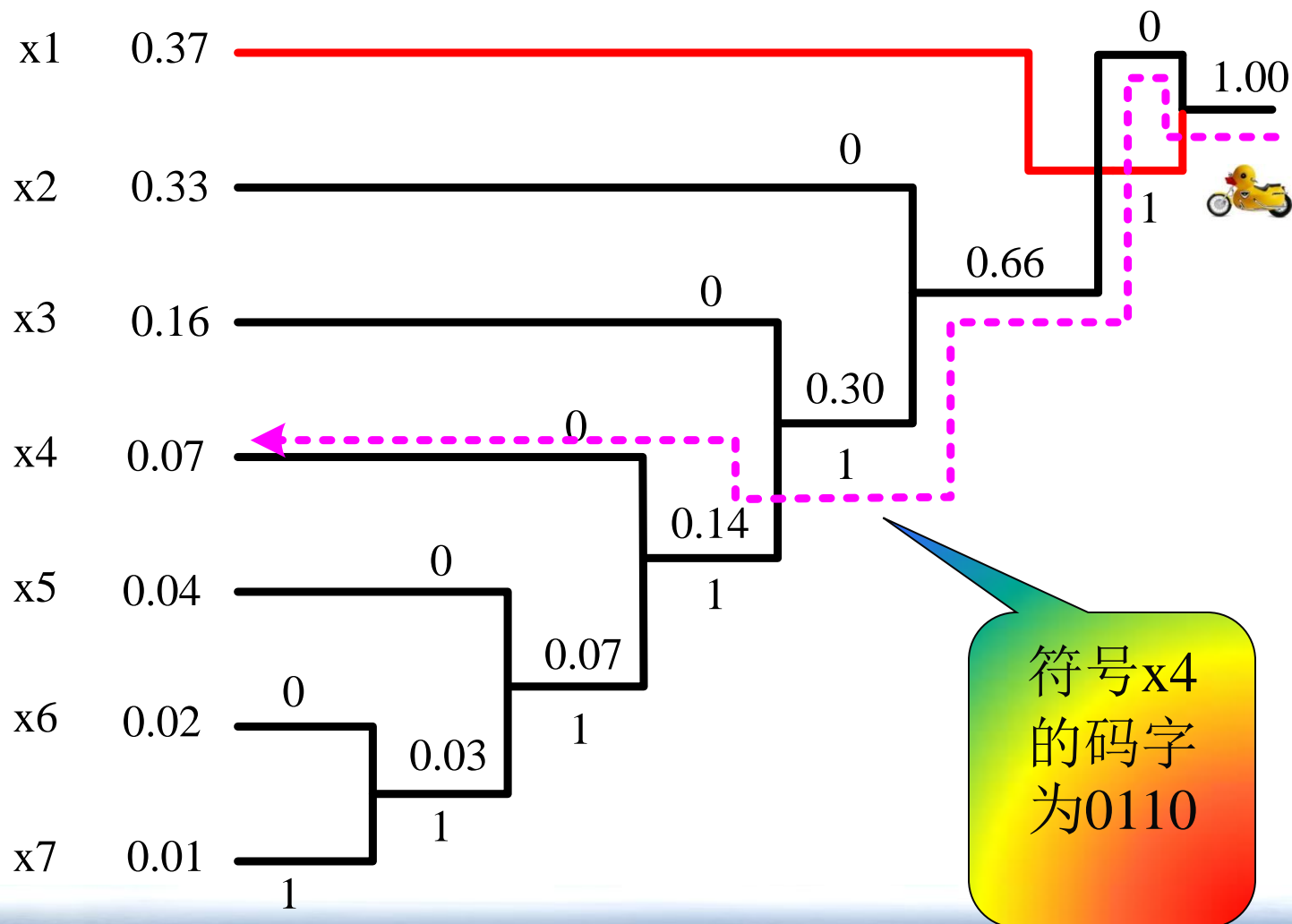
Huffman编码：无前缀的可变长编码，对给定的输入信源能获得最短的平均码长。

- 1) 按M个信源符号出现概率的大小排列

$$p(x_1) \geq p(x_2) \geq p(x_3) \geq \cdots \geq p(x_M)$$

- 2) 对两个最小出现概率的信源符号给予码字“0”或“1”，然后将它们的出现概率加起来，作为代替原来两个信源符号的新符号的概率
- 3) 再重排这 (M-1) 个信源符号出现概率的大小
- 4) 对其中两个最小出现概率的信源符号给予码字“0”或“1”，重复上述过程，直到仅仅剩下两个符号按出现概率给予码字“0”或“1”为止
- 5) 整理排列各信源符号给予的“0”或“1”码字，得到相应的编码；

例:考虑有7个符号 $x_i, i=1,2,\dots,7$,它们的概率分布为 $p_1=0.37, p_2=0.33, p_3=0.16, p_4=0.07, p_5=0.04, p_6=0.02, p_7=0.01$ 的离散无记忆信源。



符号	概率	码字
x_1	0.37	1
x_2	0.33	00
x_3	0.16	010
x_4	0.07	0110
x_5	0.04	01110
x_6	0.02	011110
x_7	0.01	011111

该信源的熵为

$$H(X) = -\sum_{i=1}^7 p_i \log_2 p_i = 2.1152(\text{bit})$$

平均码字长度

$$\begin{aligned}\bar{R} &= \sum_{i=1}^7 n(x_i) p(x_i) \\ &= 1 \times 0.37 + 2 \times 0.33 + 3 \times 0.16 + 4 \times 0.07 \\ &\quad + 5 \times 0.04 + 6 \times 0.02 + 6 \times 0.01 \\ &= 2.1700(\text{bit})\end{aligned}$$

该码的效率为 $\eta = 2.1152 / 2.17 = 0.9747$

Huffman.m

信源编码定理2

- ❖ 在上述例子中，编码是通过一个个符号来完成的。一种更有效的方法是一次给一组**B**个符号进行编码，在此情况下，信源编码定理的界变为：

$$BH(X) \leq \bar{R}_B < BH(X) + 1$$

- ❖ 其中**B**-符号组的熵为**BH(X)**，而 \bar{R}_B 是每个**B**-符号组的平均bit数，我们将上式重写为：

$$H(X) \leq \bar{R}_B / B < H(X) + 1 / B$$

- ❖ 其中 $\bar{R}_B / B \equiv \bar{R}$ 是每个信源符号的平均bit数，因此只要选取充分大的组**B**，就可以使 \bar{R} 任意接近**H(x)**。

例:

符号	概率	码字
x_1	0.40	1
x_2	0.35	00
x_3	0.25	01

信源的熵为 $H(X) = -\sum_{i=1}^3 p_i \log_2 p_i = 1.5589(\text{bit})$

每个符号的平均bit数为 $\bar{R} = \sum_{i=1}^3 n(x_i) p(x_i)$
 $= 1 \times 0.40 + 2 \times 0.35 + 2 \times 0.25$
 $= 1.6(\text{bit})$

该码的效率为 $\eta = 1.5589 / 1.60 = 0.9743$

现在把符号每两个分一组，再重新应用Huffman编码算法，符号对的概率按递减次序排列，如下表

符号对	概率	码字
x_1x_1	0.1600	000
x_1x_2	0.1400	010
x_2x_1	0.1400	011
x_2x_2	0.1225	100
x_1x_3	0.1000	101
x_3x_1	0.1000	110
x_2x_3	0.0875	111
x_3x_2	0.0875	0010
x_3x_3	0.0625	0011

对这个码，其熵为

$$2H(X) = -\sum_{i=1}^9 p_i \log_2 p_i = 3.1177(\text{bit})$$

$$\Rightarrow H(X) = 1.5589(\text{bit})$$

信源的熵没有
改变！！

每个组（符号对）的平均bit数为

$$\bar{R}_B = \sum_{i=1}^9 n(x_i) p(x_i) = 3.15(\text{bit})$$

$$\Rightarrow \bar{R} = 1.575(\text{bit})$$

该码的效率为 $\eta = 1.5589 / 1.575 = 0.9898$

编码效率提高！！

3.5.2 Lempel-Ziv算法

- ❖ **Huffman**编码需要符号的概率，并且编码器和译码器都知道码树结构，这在实际生活中很难做到。另外，**Huffman**编码对离散无记忆信源，也就是当前符号的出现不会影响到后续符号的出现概率时是最优的，但对有记忆信源就不是最佳选择了。如许多字母成对或成组出现：“t-h”、“i-n-g”等。如果用字母间的统计相关性和字母的出现概率统筹考虑应该会更有效，这就是**Lempel**和**Ziv**在1977年提出的方案，该算法不需要信源的统计特性，是一种**变长到定长信源编码算法**。

基本思想

- ❖ Lempel-Ziv算法迭代性地构造一个变长码字的分析序列，这些变长码字构成一个码字典。
- ❖ 该码假定存在一个由字符序列已编码段组成的码字典。数据的编码如下进行，即在码字典中寻找与需编码序列中下一段码相匹配的码。当找到匹配时，编码按照以下思路进行：因为接收器已存有这个码段，因此无需重发，只需要辨认地址以重新取回该码段。如果没有找到匹配码段，则根据码段序列的参考位置，向序列添加下一个码元，以构造码字典的新码字。编码开始时，使用一个空码字典，所以第一个码字是与先前码字无关的。在码字典结构中，递归地形成地址的游程序列和该地址上的码元段。已编码数据由形式为<字典地址，下一个数据字符>的2码字包构成，码字典中的每个新数据字符条目的构造形式是字符地址后接下一个字符的数据包。

我们通过举例来更好地理解Lempel-Ziv算法。

例:需编码的字符序列为[a b a a b a b b b b b b a b b b b]

对序列进行分析，变成一些变长的短语

a , b , aa , ba , bb , bbb, bba, bbbb

已编码包: (0,a), (0,b), (1,a), (2,a), (2,b), (5,b), (5,a), (6,b)

字典位置: 1 2 3 4 5 6 7 8

编码序列: 000a,000b,001a,010a,010b, 101b, 101a, 110b

初始包(0,a)显示了一个零地址，这是因为在码字典中还没有任何条目。在这个包中，字符a是数据序列中的第一个字符，被分配到字典位置1。下一个包(0,b)包含了码字典中没有的第二个数据字符b（因此地址部分是0），b被分配到字典位置2。包(1,a)表示对aa进行编码，通过对第一个a调出字典位置1，然后在后面添加下一个字符a得到的，字符aa被分配到字典位置3，依此类推。

只有长序列才可能获得编码增益，而短序列不行。

作业 (P.78~79)

2.3 用 $M=32$ 的多电平PAM波形在2秒内传输由文字与数字组成的100个字符的消息，每个字符都由7位数据位加1位检错位组成。

(a) 计算比特传输速率与码元速率；(b) 分别对16电平PAM、8电平PAM、4电平PAM和PCM（二进制）波形重复计算 (a)。

2.5 对某模拟信号以Nyquist频率 $1/T_s$ 进行采样，并用 L 个电平对样值进行量化，然后将所得数字信号在某信道中传输。

(a) 试证明传输的二进制编码信号的比特周期 T 必须满足 $T \leq T_s / (\log_2 L)$ 。

(b) 等号何时成立？

2.8 某音频信号的频谱在300Hz到3300Hz之间，对其进行采样以生成PCM信号，采样速率为每秒8000个样值，假设输出端所需的峰值信号功率与平均量化噪声功率的比值为30dB。

(a) 均匀量化最少需要几个电平？每个样值最少需要几个比特？

(b) 计算检测该PCM信号所需的系统带宽（由信号频谱的主瓣确定）。

2.9 对波形 $x(t) = 10\cos(1000t + \pi/3) + 20\cos(2000t + \pi/6)$ 进行均匀采样以便数字传输。

(a) 为能完全重建改信号，求各个采样点间的最大时间间隔。

(b) 要重建1小时的波形，需要存储多少样值？

2.14 某模拟波形最高频率为 $f_m = 4000\text{Hz}$ ，用16电平PAM系统传输，量化失真不超过模拟波形电压峰峰值的 $\pm 1\%$ 。

(a) 该PAM传输系统中，每个样值或PCM码字最少需要几个比特？(b) 求最低采样速率及相应的比特速率；(c) 求16进制PAM系统的码元传输速率。

13.1

13.3 (a) (b)

13.14

补充:

- 1、一个信源集合包含8个符号，其概率为 $p_1=1/128$, $p_2=1/16$, $p_3=1/2$, $p_4=1/64$,
 $p_5=1/4$, $p_6=1/128$, $p_7=1/32$, $p_8=1/8$,
 - (a) 计算该信源的熵。
 - (b) 对该信源进行Huffman编码，并计算平均码字长度及编码效率。
- 2、运用Lempel-Ziv算法对数据序列100个1进行编码。
- 3、抽样值为 $+720q$ ，进行PCM编码；