

The background of the slide features a stylized world map in a light blue color, centered in the upper half. Below the map, the lower half of the slide shows a dark blue ocean with gentle ripples. The overall color palette is monochromatic, using various shades of blue. The text is prominently displayed in the center, overlapping the map and the ocean.

第四章 基带信号的传输与检测

本章内容

§ 4.1 基带信号波形和频谱

§ 4.2 高斯噪声干扰下二进制信号检测

§ 4.3 无码间串扰(ISI)基带传输

§ 4.4 相关编码(部分响应系统)

§ 4.5 时域均衡

§ 4.6 眼图

§ 4.7 扰码和解扰

附录1: 基带信号功率谱公式推导

§ 4.1 基带(Baseband)信号波形和频谱

- 经过PCM或编码后的信号就是数字基带信号，不使用载波调制和解调装置而直接传输数字基带信号的系统称为数字基带传输系统。
- 基带信号是代码的电表示形式。在实际的基带传输系统中，并不是所有代码的电波形都能在信道中传输，例如含有直流或低频成分的信号，因为同步信号不便于提取，经过信道后可能会造成信号的严重畸变，因此要把信号码元变换为适于信道传输的传输码。

❖ 基带信号选取准则

- 避免直流分量：实现系统的交流耦合；
- 便于恢复定时信息：从接收信号中恢复出时钟信号；
- 良好的检错能力：有些码型变换本身就具备错误数据的检测能力；
- 便于压缩带宽：多电平码（类似于高阶调制）能够提高带宽的利用率；
- 实现差分编码；
- 优异的抗噪声性能：不同码型的抗噪性能不同。

❖ 基带信号波形

➤ NRZ (不归零码)

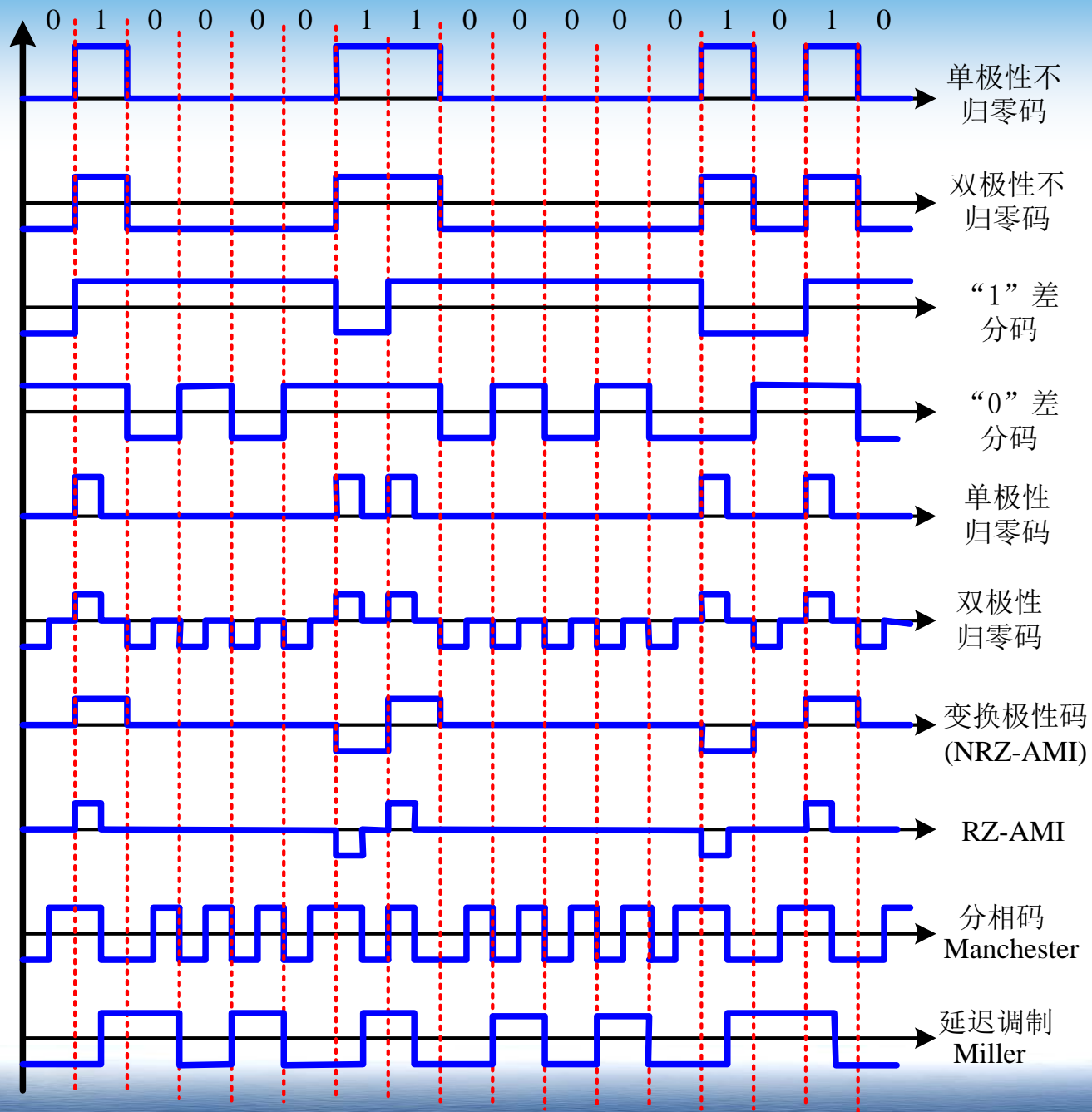
- **NRZ-L**: “1”对应正电平, “0”对应零电平(单极性)或负电平(双极性);
- **NRZ-M**(“1”差分码): 用电平的跳变表示“1”;
- **NRZ-S**(“0”差分码): 用电平的跳变表示“0”;

➤ RZ (归零码)

- **Unipolar RZ**: “1”, 发送一个宽度小于码元持续时间的归零脉冲, “0”仍为零电平;
- **Bipolar RZ**: “1”和“0”分别对应正负脉冲, 而且要归零;
- **RZ-AMI**: “0”——零电平, “1”用极性交替的正负归零电平表示

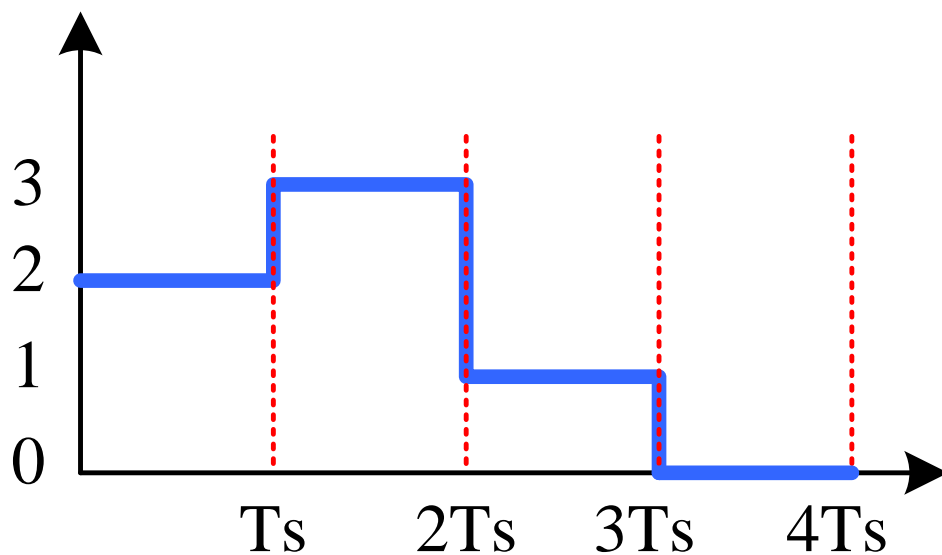
➤ Manchester coding (Bi- ϕ -L): “1”用正负脉冲、“0”用负正脉冲表示

➤ Delay Modulation (Miller): “1”用码元持续时间中心点出现跳变表示, “0”分两种情况, 单个的“0”, 在码元持续时间内不出现电平跳变, 连续的“0”, 在两个0码的边界处出现电平跳变。



❖ M-level Pulse ($M = 2^k$)

- 其实就是多进制调制，即用一个码元符号来表示多个二进制码元，其目的是在码元速率一定时可提高数据传输速率，从而提高了系统的频谱利用率。



❖ M进制PAM脉冲

➤ M种电平， $M=2^k$ ，每个脉冲包含k比特

➤ 脉冲周期： T_s

➤ 码速率(波形速率)： $R_s=1/T_s=1/(kT_b)=R_b/k$

☑ 传输相同比特率数据，用M电平脉冲比用2电平脉冲可
减小传输带宽

☑ 代价：增大M电平脉冲能量

➤ 平均信号能量

$$E = \frac{d^2}{12}(M^2 - 1) = \frac{d^2}{12}(4^k - 1)$$

➤ 每增加1bit，而保持电平间隔d不变，则信号能量

$$E_{(k+1)} = 4E_{(k)} + \frac{d^2}{4} \quad \text{增加为4倍，即6dB/bit}$$

❖ 二进制脉冲序列功率谱

- $g_1(t) \longrightarrow 1$, 出现概率为 P
- $g_2(t) \longrightarrow 0$, 出现概率为 $1-P$

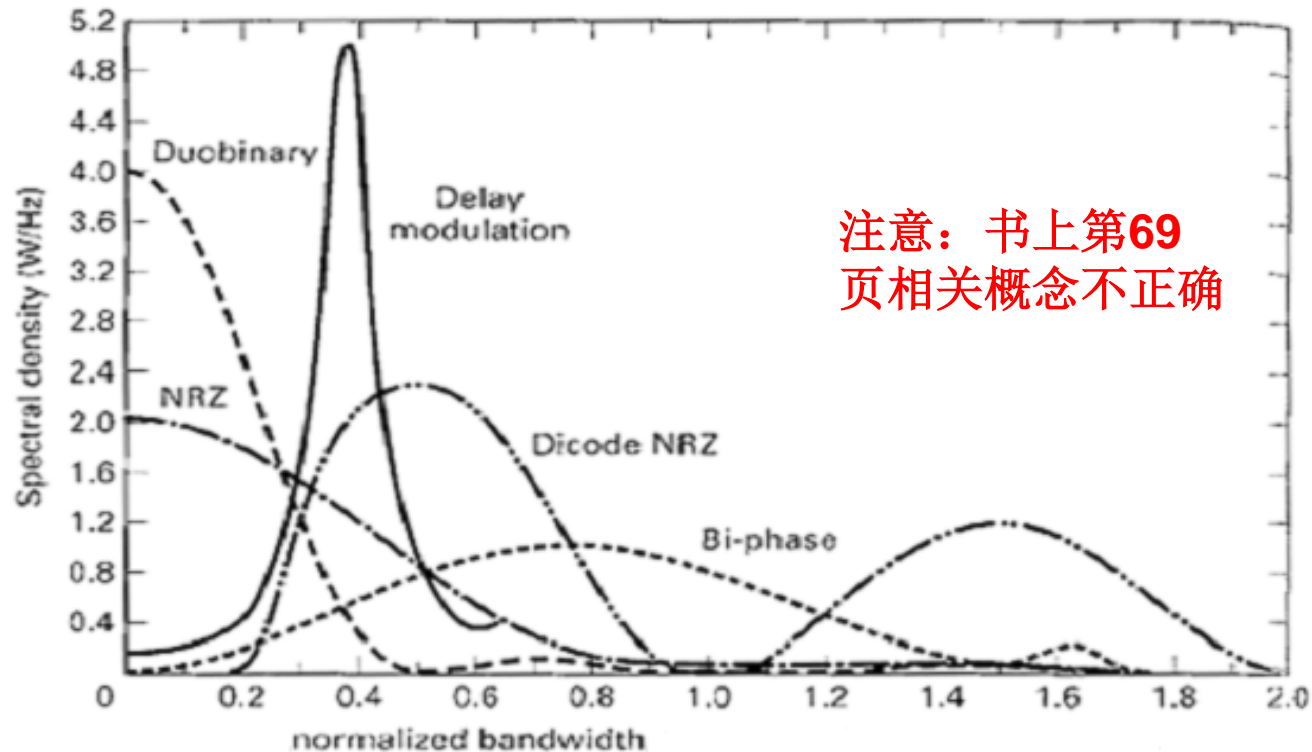
则功率谱为

$$P_x(f) = f_s \cdot P(1-P) |G_1(f) - G_2(f)|^2 \\ + f_s^2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |PG_1(nf_s) + (1-P)G_2(nf_s)|^2 \delta(f - nf_s)$$

- 式中第一项为连续谱，决定脉冲信号带宽
- 第二项为离散谱，可能存在，则有利于提取码同步信息；也可能不存在。

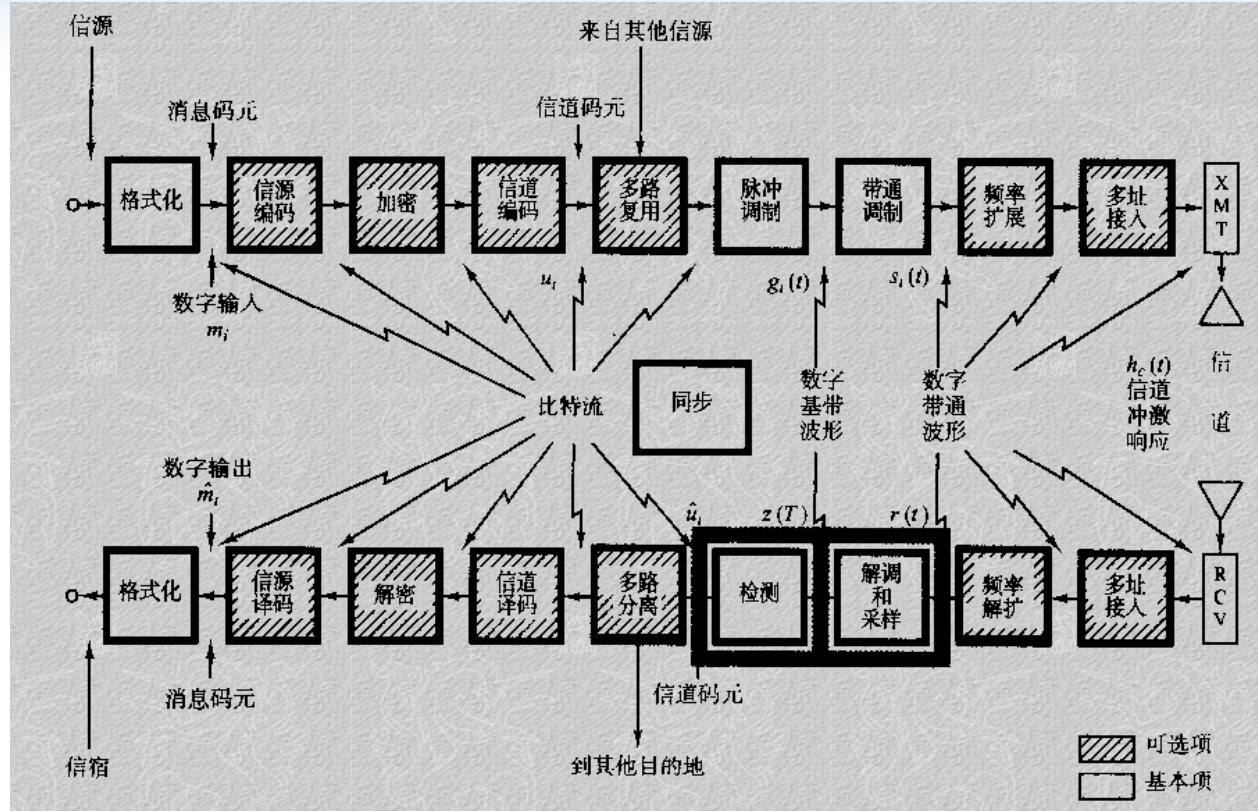
具体的推导过程见后面的附录。

❖ 基带信号频谱



- ❖ 横坐标是归一化带宽 $WT=W/R_s$ ，单位为赫兹/(脉冲/s)或赫兹/(码元/s)，这是带宽的一种相对测量，描述了传输带宽如何有效用于每个波形，即单位码元速率所需的带宽。如果发送1symbol/s需要不到1Hz，认为带宽有效，超过1Hz，效率较低。
- ❖ 频谱利用率是 R/W ，单位为bps/Hz，即单位带宽能够传输的信息速率。

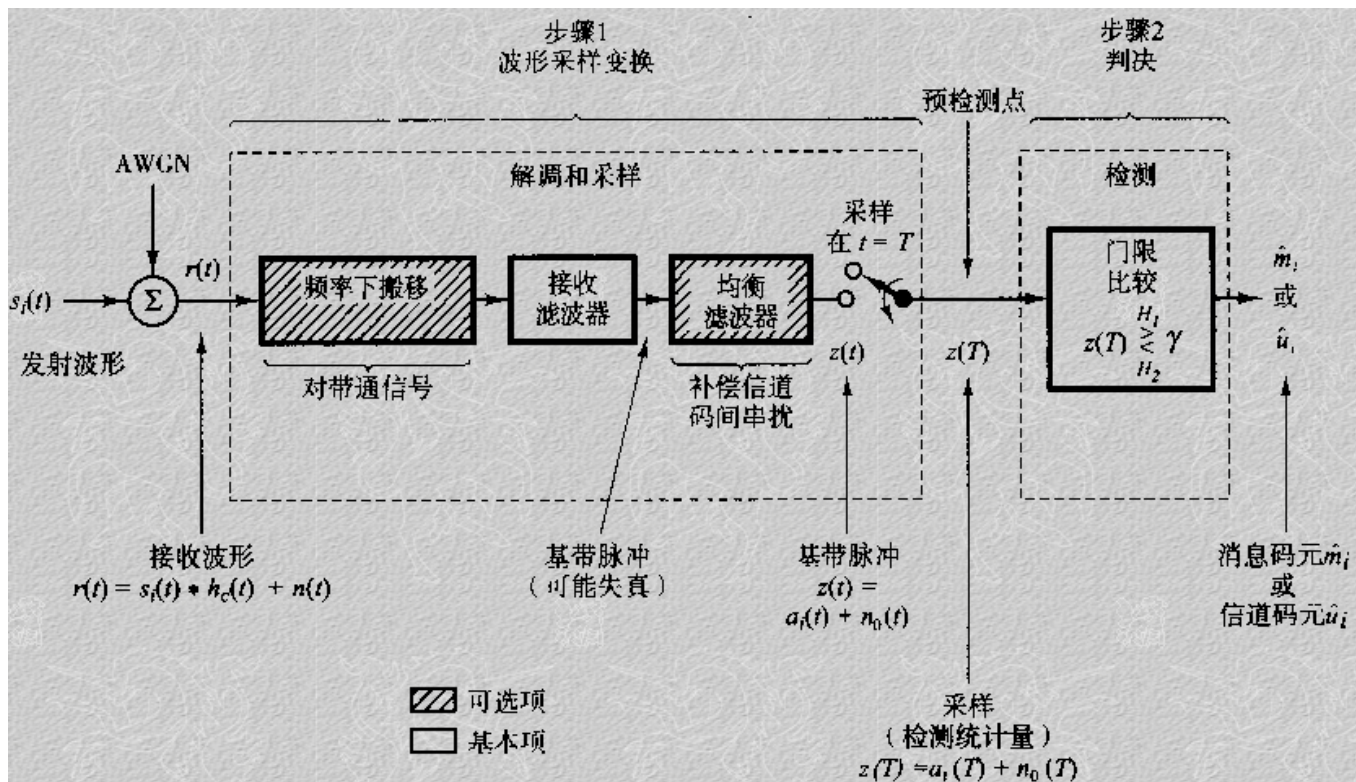
§ 4.2 高斯噪声干扰下二进制信号检测



- ❖ 基带信号传输中的接收波形已是脉冲形式，为什么还需要解调器来恢复脉冲波形呢？原因是到达的基带波形不是理想脉冲（每个码元只占据自己的码元间隔）。由于发送端滤波器和信道的原因，接收脉冲序列存在着码间串扰（ISI）从而产生拖尾信号，不利于采样检测。解调器（接收滤波器）的目的是消除码间串扰，恢复具有大信噪比（SNR）的基带信号。

§ 4.2 高斯噪声干扰下二进制信号检测

❖ 数字解调和检测（书中P83）



由于传输信道的不理想，接收序列存在码间干扰，不适于直接采样判决，需要用均衡器消除码间干扰，而接收滤波器的作用是在无码间干扰的情况下，恢复出具有最大SNR的基带脉冲，实际上，均衡滤波器可同时实现这两个功能。

解调指基带脉冲波形的恢复；检测指采样判决的过程；

- 在二进制信道中，定义在码元(symbol)间隔(0,T)上的发送信号可以表示为：

$$s_i(t) = \begin{cases} s_1(t) & 0 \leq t \leq T, \text{ "1"} \\ s_2(t) & 0 \leq t \leq T, \text{ "0"} \end{cases}$$

设信道冲激响应为 $h_c(t)$ ，噪声为 $n(t)$ ，则接收信号 $r(t)$ 为

$$r(t) = s_i(t) * h_c(t) + n(t)$$

- 在理想信道中，即 $h_c(t)$ 是冲激函数 $h_c(t) = \delta(t)$ 时，接收信号为

$$r(t) = s_i(t) + n(t) \quad i = 1, 2, \quad 0 \leq t \leq T$$

- 经过载波解调和接收滤波与均衡，得到接收基带波形

$$z(t) = a_i(t) + n_o(t), \quad i = 1, 2, \quad 0 \leq t \leq T$$

- 在 $t=T$ 时刻采样，得到检测统计量 $z(T) = a_i(T) + n_o(T)$, $i = 1, 2$

- $z(T)$ 与接收信号的能量成正比
- $a_i(T)$ 是信号分量

➤ $z(T)$ 的条件概率密度函数(似然函数):

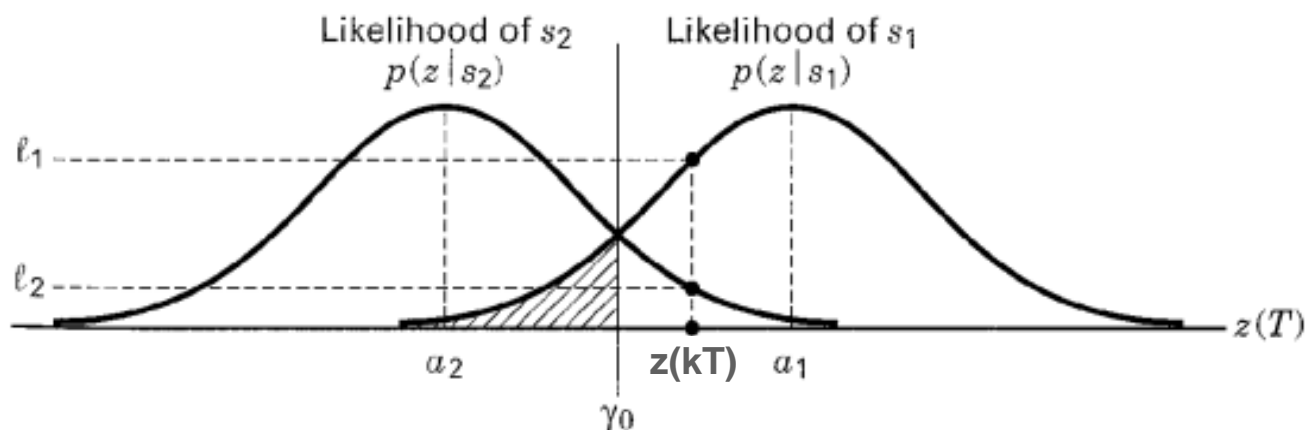
$$p(z | s_i) = \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{z - a_i}{\sigma_0}\right)^2\right], \quad i = 1, 2, \quad a_i \text{ 是 } z(T) \text{ 的均值}$$

➤ 判决输出 ($\gamma_0 = (a_1 + a_2)/2$ 为最佳判决门限, 有最小差错率)

■ 如果 $p(z | s_1) > p(z | s_2)$

即 $z(T) > \gamma_0$

则判为波形 s_1 , 反之则判为 s_2 (最大似然检测)



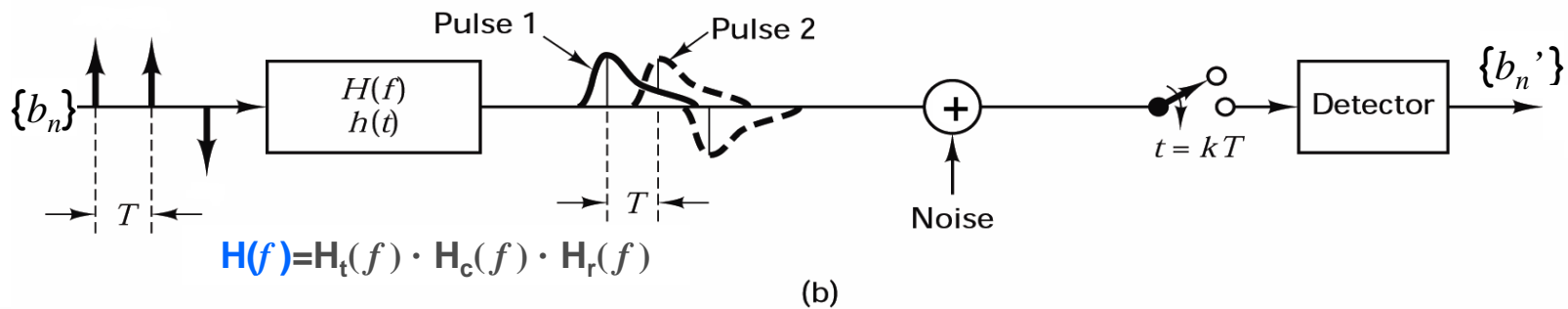
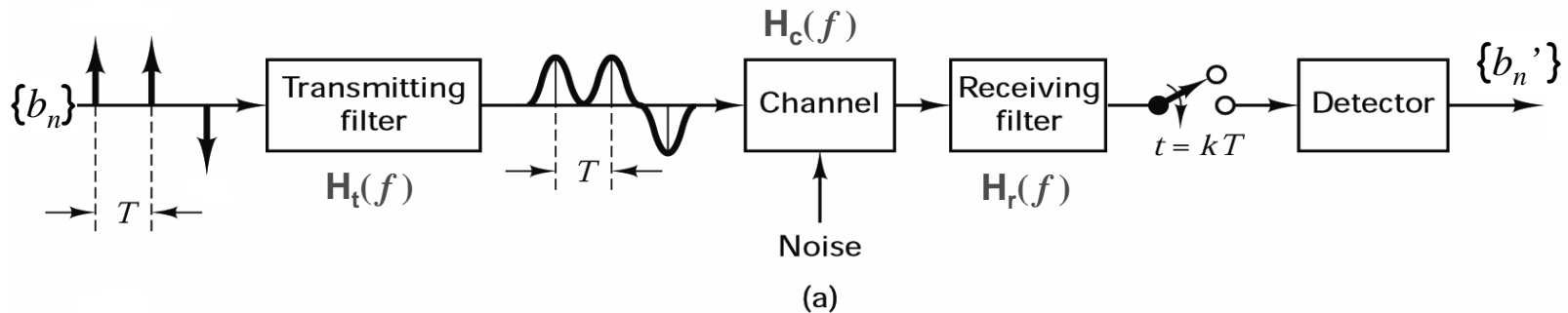
可能造成错误检测的两个原因

➤ 码间串扰 (ISI: InterSymbol Interference)

- 实际系统非理想传递函数引起码元波形“拖尾”

➤ 噪声

- 采样时刻加性噪声干扰(或+或-)



- 输入二进制码序列 $\{b_n\}$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \delta(t - nT)$$

- 发送滤波器 $H_T(f)$ 形成发送脉冲波形:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H_t(f) e^{j2\pi ft} df$$

- 发送脉冲波形序列

$$s(t) = \sum_n b_n g(t - nT)$$

- 传输信道: $H_c(f)$, $n(t)$, $n_0/2$

- 接收滤波器 $H_r(f)$: 抑制加性噪声 $n(t)$ 干扰; 参与接收波形 $h(t)$ 形成

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} H_t(f) H_c(f) H_r(f) e^{j2\pi ft} df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} H(f) e^{j2\pi ft} df \end{aligned}$$

$$H(f) = H_t(f) \cdot H_c(f) \cdot H_r(f) \quad \text{—总传输特性}$$

- 接收波形序列

$$z(t) = \sum_n b_n h(t - nT) + n_o(t)$$

- 采样时刻 kT 输出

$$z(kT) = b_k h(0) + \sum_{n \neq k} b_n h[(k - n)T] + n_o(kT)$$

式中:

- $b_k h(0)$ → 当前脉冲抽样值
- $\sum_{n \neq k} b_n h[(k-n)T]$ → 其它脉冲波形拖尾对当前脉冲的干扰, 称为码间串扰 (ISI)
- $n_o(kT)$ → 抽样时刻加性噪声干扰值

➤ 码间串扰(ISI)和加性噪声干扰将影响对接收信号的正确判决检测

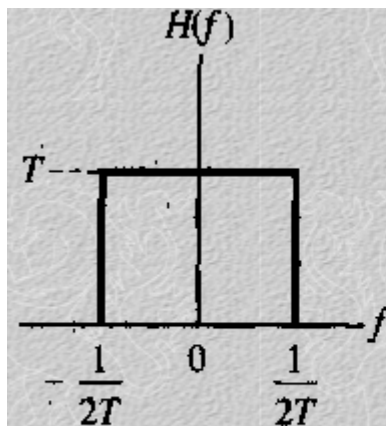
问题:

- 如何减小加性噪声干扰的影响?
- 如何消除码间串扰(ISI)?

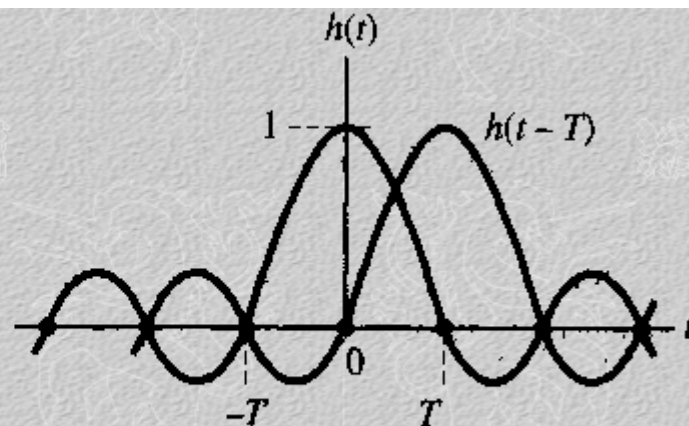


最小Nyquist带宽

- ❖ Nyquist证明：要使码元速率为 R_s baud的信号不存在码间干扰，理论上所需的最小系统带宽为 $R_s/2$ Hz。最小系统带宽成立的条件是系统传输函数 $H(f)$ 是如下的矩形函数， $h(t)=\text{sinc}(t/T)$ ，称为理想Nyquist脉冲。无码间干扰时频带利用率最大为2baud/Hz。而我们通常所用的频带利用率单位是bps/Hz，该定理没有给出最大bps/Hz，因为与M进制有关。

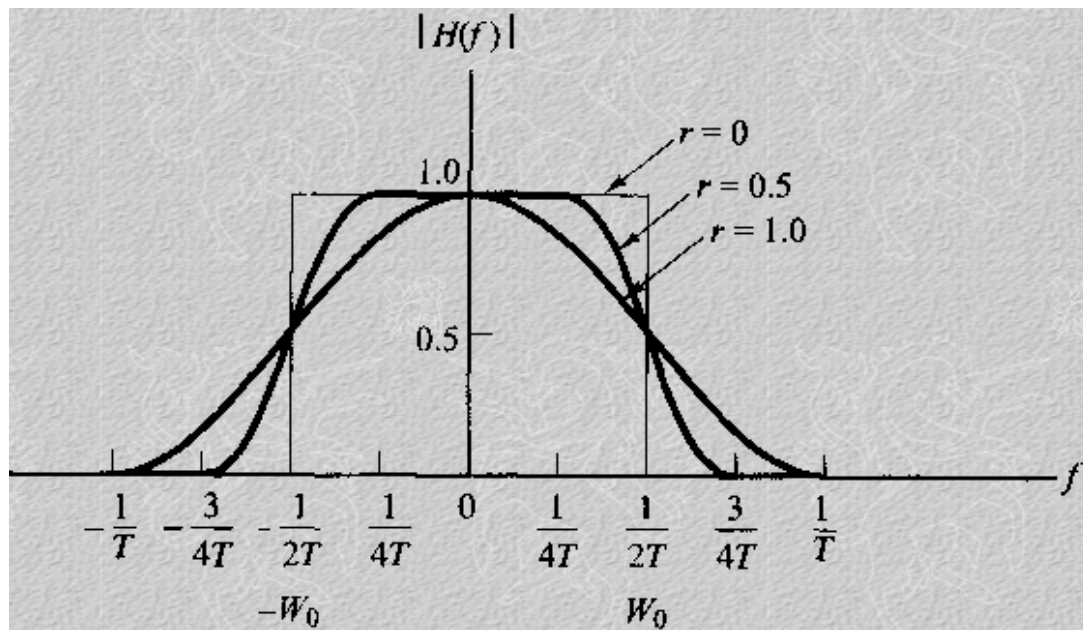


(a) 矩形系统传输函数



(b) 接收脉冲波形 $h(t) = \text{sinc}(t/T)$

- ❖ 但理想Nyquist脉冲 $h(t)=\text{sinc}(t/T)$ 物理上不可实现（时间无穷，频谱非常陡峭），一般会使用升余弦滤波器进行脉冲整形，使得系统传输函数如图所示：



- ❖ 其中 $W_0=1/2T$ 是最小Nyquist带宽， W 是绝对带宽， $W-W_0$ 是超量带宽，滚降因子 $r=(W-W_0)/W_0$ 。此时，系统所需带宽和码元速率 R_s 的关系式为： $W=(1+r) \cdot R_s/2$ 。频带利用率为 $\eta=R_s/W=2/(1+r)$ baud/Hz。

❖ 关于信道带宽的设计问题

- 在模拟基带信号传输系统中，要求传输信号的波形不失真或者失真很小，为此，要求信道带宽大于或等于信号的最高频率成分。
- 数字基带信号传输时要求的是无码间串扰，波形的失真不但是容许的，而且容许有很大的失真。只要没有码间串扰（或很小）以及噪声足够小，抽样判决时不发生错误判决，就可通过码元再生电路恢复出需要的波形；

❖ 例1：理想低通型信道的截止频率为3000Hz，当传输以下二电平信号时求信号的频带利用率和最高信息速率。

(1) 理想低通信号；

(2) $r=0.4$ 的升余弦滚降信号；

解：(1) 理想低通信号的频带利用率为2bps/Hz。

取信号的带宽为信道的带宽，由频带利用率的定义可求出最高信息传输速率为： $R_b=R_s=W*\eta=2*3000=6\text{kbps}$

(2) 升余弦滚降信号的频带利用率为 $\eta=2/(1+r)=1.43\text{bps/Hz}$

取信号的带宽为信道的带宽，可得最高信息传输速率为：

$$R_b=R_s=W*\eta=1.43*3000=4.29\text{kbps}$$

- ❖ 例2: 假设数据传输速率 $R=2.4\text{kbps}$, 系统传输特性是100%超量带宽 (即 $r=1$) 的升余弦频谱, 求四进制PAM脉冲序列的基带传输最小带宽。

解: 码元速率 $R_s=R/\log_2 M=1200\text{ baud}$

可得最小带宽 $W=(1+r)\cdot R_s/2=1200\text{Hz}$

- ❖ 例3: 比较模拟电话信道 (一般 3kHz) 和数字电话信道的带宽。音频信号在数字信道中传输时, 必须先转换为PCM比特流, 采样速率为 8000 symbol/s 的A/D, 采样点的量化电平数为256。接收信号无码间干扰。

解: 每个采样值都被量化为256个电平之一, 可看作256进制的调制。实现无码间干扰传输下的系统带宽必须满足 $W\geq R_s/2$, 其中等号仅在理想Nyquist滤波时才成立。因为数字电话采用二进制PCM波形, 每个采样值都被编码为 $\log_2 256=8$ 位, 则系统带宽需满足 $W_{\text{PCM}}\geq 8\cdot R_s/2=32\text{kHz}$ 。

3kHz的模拟语音信道约需4kHz的带宽, 包括了相邻信道间的隔离带宽。

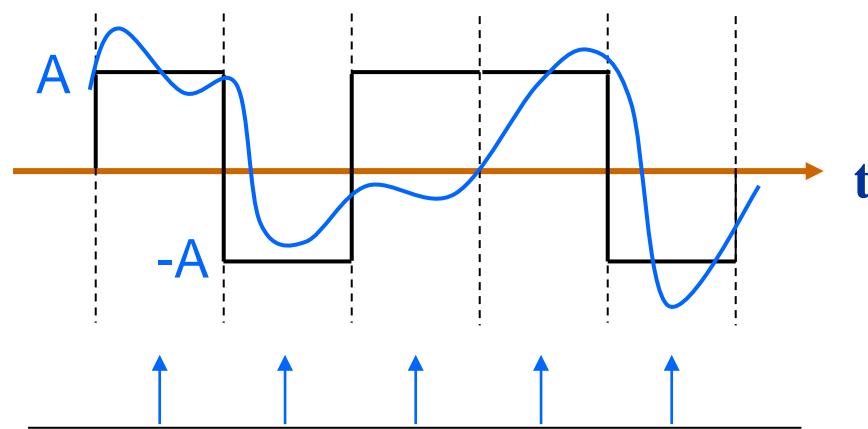
高斯噪声干扰时的差错概率

❖ 设二进制码元波形为双极性矩形脉冲，幅度为 $\pm A$ ，当高斯噪声干扰幅度超过 $\mp A$ 时，就造成错误判决。

■ 发送码序列 $\{b_n\}$

1 0 1 1 0

■ 发送/接收波形



■ 最佳判决门限 $\gamma_0 = 0$

■ 抽样时刻 $kT + t_0$

■ 接收码序列 $\{b_n'\}$

1 0 0 1 0

❖ 二进制码元差错概率

- 发送 $s_1(t)$ 即**1**时，如果信道噪声 $n(t)$ 使接收端采样时刻输出 $z(kT) < \gamma_0$ ，则将**误判**为 $s_2(t)$ 即**0**，其概率 $P(e/s_1)$ 为

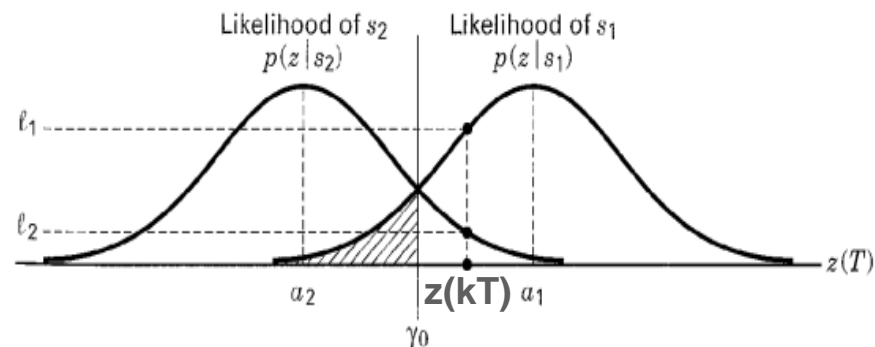
$$P(e | s_1) = \int_{-\infty}^{\gamma_0} p(z | s_1) dz$$

- 发送 $s_2(t)$ 即**0**时，如果信道噪声 $n(t)$ 使接收端采样时刻输出 $z(kT) > \gamma_0$ ，则将**误判**为 $s_1(t)$ 即**1**，其概率 $P(e/s_2)$ 为

$$P(e | s_2) = \int_{\gamma_0}^{\infty} p(z | s_2) dz$$

则总差错率(误码率)为

$$\begin{aligned} P_B &= P(e | s_1)P(s_1) + P(e | s_2)P(s_2) \\ &= [P(e | s_1) + P(e | s_2)] / 2 \\ &= P(e | s_1) = P(e | s_2) \end{aligned}$$



($P(s_1)=P(s_2)=1/2$ 分别为发送 $s_1(t)$ 和 $s_2(t)$ 的先验概率)

➤ 计算 $P(e/s_1)$ 或 $P(e/s_2)$ 即可得到差错率 P_B :

$$\begin{aligned} P_B &= P(e | s_2) = \int_{\gamma_0}^{\infty} p(z | s_2) dz \\ &= \int_{\gamma_0}^{\infty} \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{z - a_2}{\sigma_0} \right)^2 \right] dz \\ &= \int_{u=\frac{a_1 - a_2}{2\sigma_0}}^{u=\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{u^2}{2} \right) du && (\text{令 } u = (z - a_2) / \sigma_0) \\ &= Q \left(\frac{a_1 - a_2}{2\sigma_0} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{a_1 - a_2}{2\sqrt{2}\sigma_0} \right) && (Q(x) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right)) \end{aligned}$$

➤ 式中 $Q(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} \exp \left(-\frac{u^2}{2} \right) du$ 称为Q函数(为降函数)。



如何使 P_B 最小?



① 选择最佳判决门限: $\gamma_0 = (a_1 + a_2) / 2$

② 使Q(x)参变量最大: $(a_1 - a_2) / 2\sigma_0$ 最大化

➤ 使 $P_B = Q\left(\frac{a_1 - a_2}{2\sigma_0}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{a_1 - a_2}{2\sqrt{2}\sigma_0}\right)$ 最小，即要使 $\frac{a_1 - a_2}{\sigma_0}$ 最大，亦即采样时刻差值信号输出信噪比 $\left(\frac{S}{N}\right)_{kT} = \frac{(a_1 - a_2)^2}{\sigma_0^2}$ 最大。



问题：什么样的滤波器能对已知输入信号有最大输出信噪比？ — 匹配滤波器 (Matched Filter)

- 匹配滤波器(MF)：其频率传输特性与输入信号 $s(t)$ 频谱特性共轭匹配，即

$$H(f) = kS^*(f)e^{-j2\pi fT} = kS(-f)e^{-j2\pi fT}$$

■ 冲激响应 $h(t) = ks(T - t), \quad 0 \leq t \leq T$

- 输出信号：

$$\begin{aligned} z(t) &= s(t) * h(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t - \tau)h(\tau)d\tau = kR_s(t - T) \end{aligned}$$

- T 时刻有最大输出信噪比(二进制时 E 即 E_b)

$$\max \left(\frac{S}{N} \right)_T = \frac{2E}{N_0} = \frac{2E_b}{N_0}, \quad E = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df$$

书中第95页有证明

(为输入信号能量)

- 由于噪声的均值为0，所以噪声的方差就等于噪声的平均功率，即

$$\sigma^2 = \text{var}[n(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{N_0}{2} \right) dt = \infty$$

- 但经过滤波后，噪声的方差就是有限的，为

$$\sigma^2 = N_0 / 2$$

P792. 附录C有证明

- 信噪比，就是信号的平均功率和噪声平均功率的比值，但在数字通信系统中，常用归一化信噪比 E_b/N_0 作为性能指标， $E_b=S \cdot T_b$ 为每比特能量， S 为信号功率， T_b 为每比特持续时间， $N_0=N/W$ 为噪声的功率谱密度，有：

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{ST_b}{N/W} = \frac{S/R_b}{N/W} = \frac{S}{N} \cdot \frac{W}{R_b}$$

因此，它是**S/N**的归一化带宽和比特率形式，无量纲。

- 用S/N无法对数字信号进行描述，如在给定差错概率，数字信号所需的S/N为20，对二进制来说，每个波形只有1个比特，即每比特所需的S/N为20；若信号是1024进制的，每个波形包含10个比特，则每比特所需的S/N为2；这就是为什么选择比特级上的参数 E_b/N_0 作为性能指标的原因。

- MF的相关实现

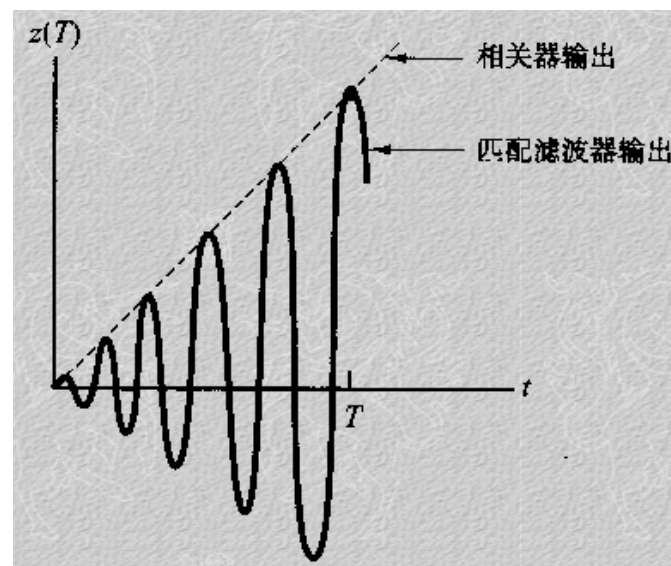
设MF的输入信号为 $r(t)$ ，则输出可表示为

$$\begin{aligned} z(t) &= r(t) * h(t) = \int_0^t r(\tau)h(t-\tau)d\tau \\ &= k \int_0^t r(\tau)s[(T-(t-\tau))]d\tau \end{aligned}$$

- 当 $t = T$ 时: $z(T) = k \int_0^T r(\tau)s(\tau)d\tau$ — 即相关接收

- MF与相关器比较
(如输入 $\sin(x)$ 信号):

MF滤波器的数学运算是卷积，即信号与滤波器的冲激响应做卷积，而冲激响应是信号的翻转，因此卷积就相当于信号与其自身的相关，但注意：两者的输出只在 $t=T$ 时才相等。



➤ 最佳接收差错性能

- 接收滤波器与输入信号差值 $[s_1(t)-s_2(t)]$ 信号匹配
- $t=kT$ 时刻输出信噪比为

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{kT} = \frac{(a_1 - a_2)^2}{\sigma_0^2} \underline{\underline{(\text{MF})}} \frac{2E_d}{N_0}$$

- 式中 $E_d = \int_0^T [s_1(t) - s_2(t)]^2 dt$ 是输入信号差值能量

- 则最佳接收差错概率

$$P_B = Q\left(\frac{a_1 - a_2}{2\sigma_0}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_d}{2N_0}}\right)$$

- 对于二进制波形，比特能量

$$E_{b1} = \int_0^T s_1^2(t) dt, \quad E_{b2} = \int_0^T s_2^2(t) dt, \quad E_b = \frac{E_{b1} + E_{b2}}{2}$$

- 定义信号 $s_1(t)$ 和 $s_2(t)$ 的互相关系数

$$\rho = \frac{1}{E_b} \int_0^T s_1(t)s_2(t)dt = \cos \theta$$

式中 θ 为信号矢量 s_1 和 s_2 的夹角

- 则 E_d 可表示为:

$$E_d = 2E_b(1 - \rho)$$

- 最佳接收差错概率

$$P_B = Q\left(\sqrt{\frac{E_b(1-\rho)}{N_0}}\right) \quad \text{— 决定于比特能量和信号相关性}$$

- ✓ 当 $\rho = -1$ 时, 信号反向($A, -A$), 称作对极信号
- ✓ 当 $\rho = 0$ 时, 信号不相关($A, 0$), 称作正交信号
- ✓ 当 $\rho = 1$ 时, 信号完全相关(A, A), 无法检测, 不能传输信号

书中第100页图3.10中, 除保留(b)中斜边的根号2之外, 其余的根号2都去掉。

❖ 二进制信号误比特率

➤ 单极性信号A, 0: ($\rho=0$)

- 采样器输出 $z(kT)$ 的信号分量:

$$a_1(kT) = E\{z(kT) | s_1\} = E\left\{\int_0^T A^2 + An_o(t)dt\right\} = A^2T$$

$$a_2(kT) = 0$$

- 最佳判决门限:

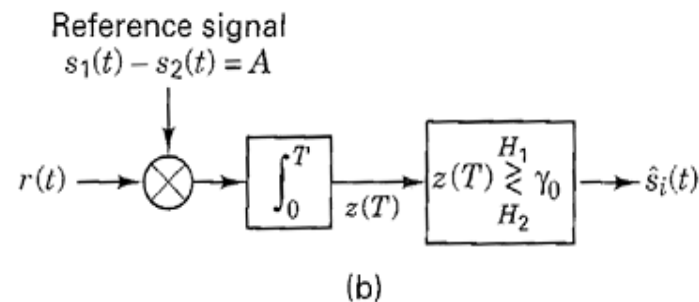
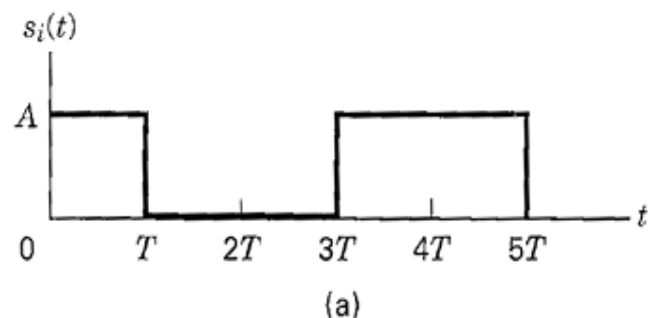
$$\gamma_0 = (a_1 + a_2) / 2 = A^2T / 2$$

- 差值信号能量: $E_d = A^2T$

- 输出信号的误比特率为

$$P_B = Q\left(\sqrt{\frac{E_d}{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{A^2T}{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

式中 $E_b = A^2T / 2$ 为平均比特能量



➤ 双极性信号 $A, -A$: ($\rho = -1$)

- 采样器输出 $z(kT)$:

$$z(kT) = z_1(kT) - z_2(kT)$$

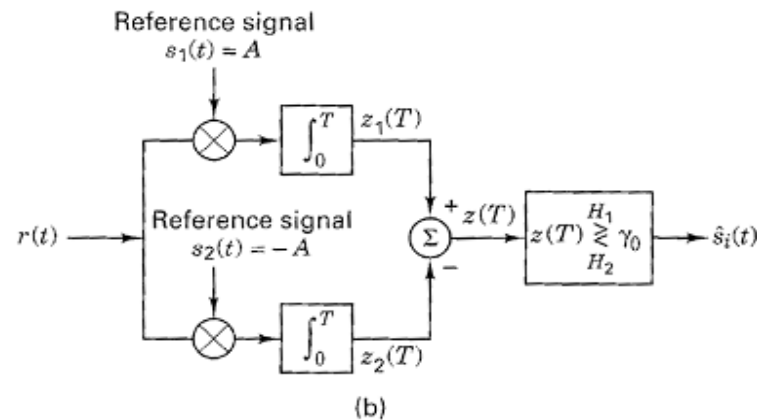
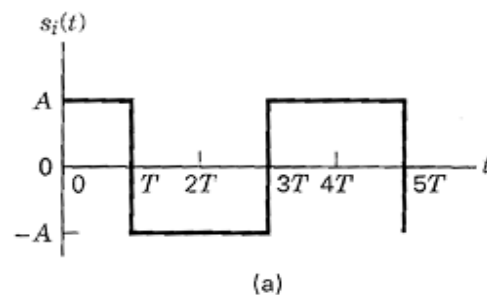
- 最佳判决门限: $\gamma_0 = 0$

- 差值信号能量 $E_d = (2A)^2 T = 4A^2 T$

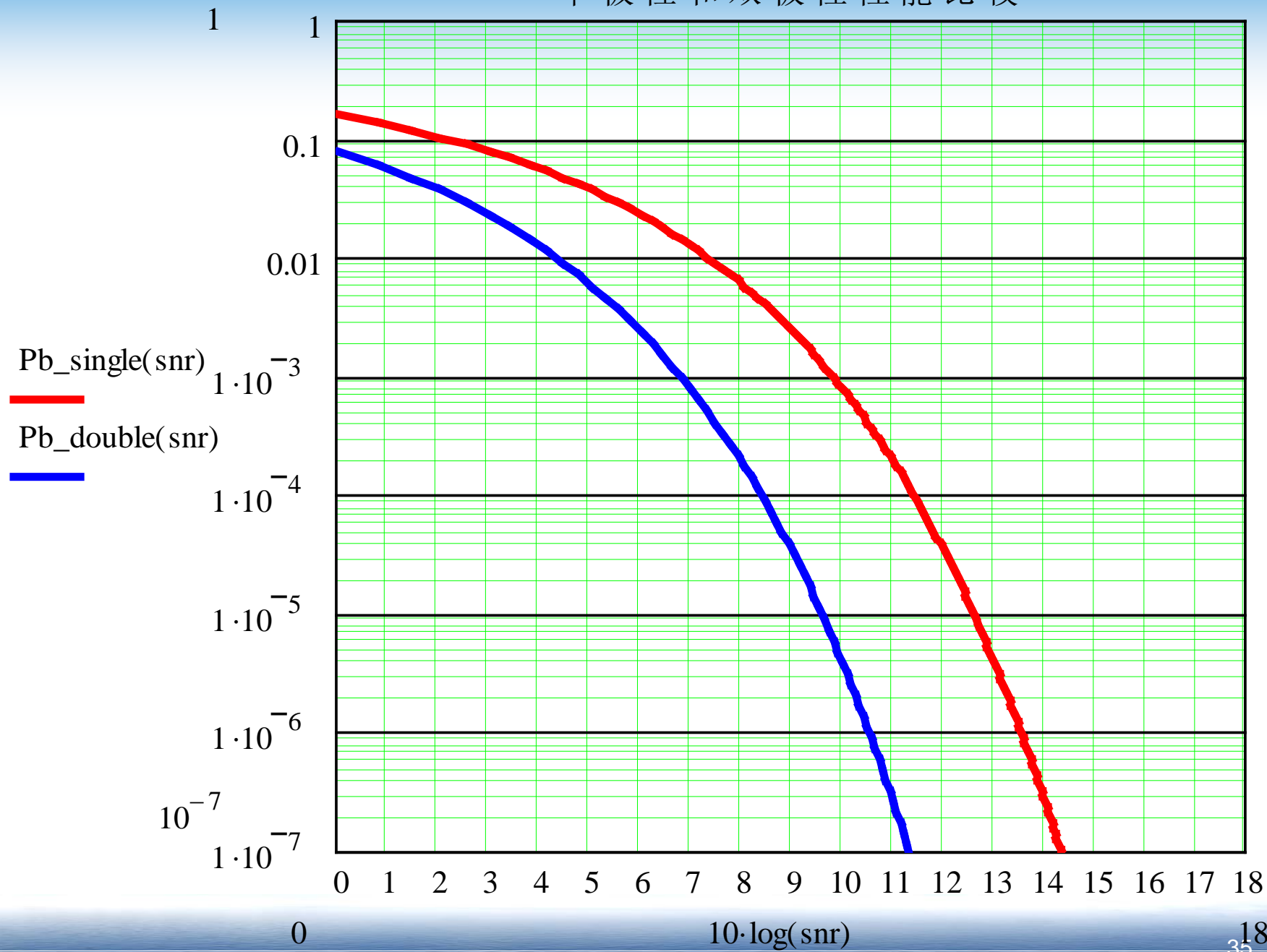
- 输出信号误比特率为

$$P_B = Q\left(\sqrt{\frac{E_d}{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2A^2 T}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) \quad \text{—比单极性信号有3dB改善}$$

其中 $E_b = A^2 T$



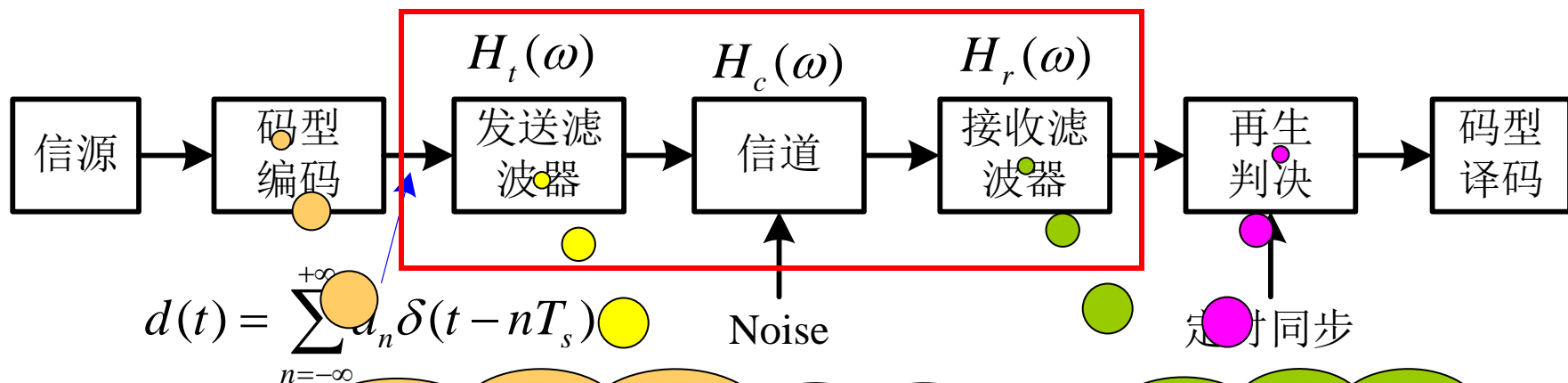
单极性和双极性性能比较



§ 4.3 无码间串扰(ISI)的基带传输

4.3.1 数字基带传输系统的基本组成

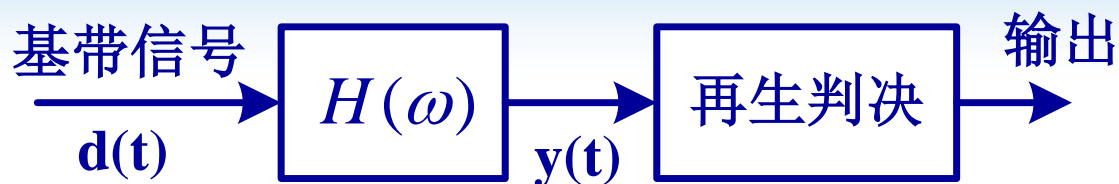
其基本结构由脉冲形成器、发送滤波器、信道、接收滤波器、抽样判决器及码元再生器组成。



码型编码的作用是将信源变换成适于信道传输的码型，并提供同步定时信息；

再生判决是在规定的时刻进行抽样，并对抽样值进行判决；

➤ 如果对上述进行简化，可得：



$$H(\omega) = H_t(\omega)H_c(\omega)H_r(\omega) \Leftrightarrow h(t)$$

假设输入信号为：

$$d(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \delta(t - nT_s)$$

则：

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n h(t - nT_s) + n_R(t)$$

其中 $n_R(t)$ 是加性噪声通过接收filter后的输出噪声。

- 在 $t=jT_s+t_0$ 时刻对 $y(t)$ 进行抽样， t_0 是传输时延

$$\begin{aligned}
 y(jT_s + t_0) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n h(jT_s + t_0 - nT_s) + n_R(jT_s + t_0) \\
 &= a_j h(t_0) + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq j}}^{+\infty} a_n h[(j-n)T_s + t_0] + n_R(jT_s + t_0)
 \end{aligned}$$

- 由于码间干扰和噪声的存在，可能会使判决差错，为了消除码间干扰，就要使：

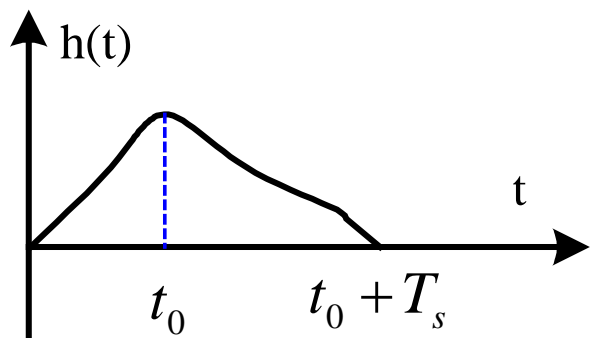
第 j 个接收波形的抽样值，是确定 a_j 信息的依据。

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq j}}^{+\infty} a_n h[(j-n)T_s + t_0] = 0$$

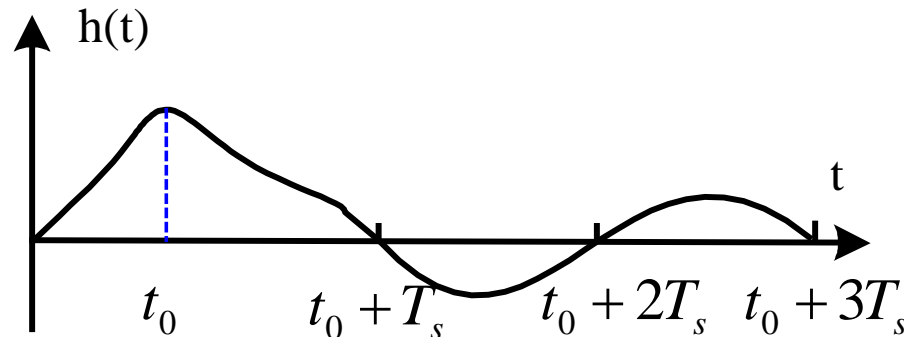
码间干扰值

- 但 a_n 是随机变换的，要想通过各项互相抵消使码间串扰为零是不行的。

➤ 从码间串扰各项的影响来说，当然前一码元的影响最大，因此最好让前一个码元的波形在到达后一个码元抽样判决时刻已经衰减到0，如下图（a）所示的波形，但这样的波形也不容易实现，因此比较合理的是采用如图（b）这种波形，虽然到达 t_0+T_s 以前并没有衰减到0，但可以让它在 t_0+T_s ， t_0+2T_s 等后面码元取样判决时刻正好为0，这也是消除码间串扰的物理意义。



(a)



(b)

- 但考虑到实际应用时，定时判决时刻不一定非常准确，如果象上图（b）那样， $h(t)$ 尾巴拖得太长，当定时不准时，任一个码元都要对后面好几个码元产生串扰，因此除了要求 $h[(j-n)T_s + t_0] = 0$ 外，还要求 $h(t)$ 适当衰减快一些，即尾巴不要拖得太长。
- 根据以上讨论，我们可知无码间干扰的基带传输系统应满足：

$$h[(j-n)T_s + t_0] = \begin{cases} \text{常数} & n = j \\ 0 & n \neq j \end{cases}$$

↓ $j-n = n'$ ，然后再用来代替

$$h(nT_s + t_0) = \begin{cases} \text{常数} & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

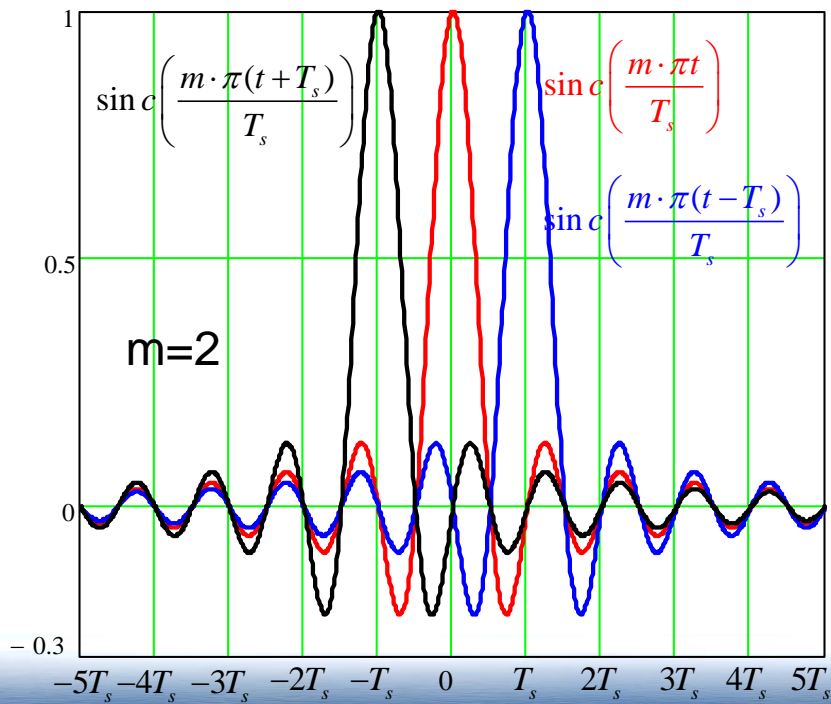
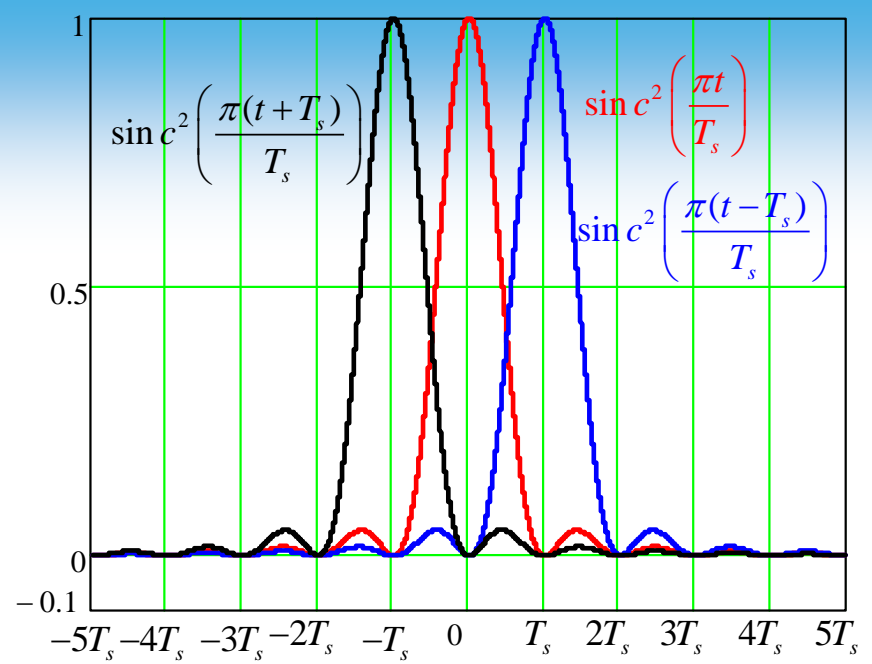
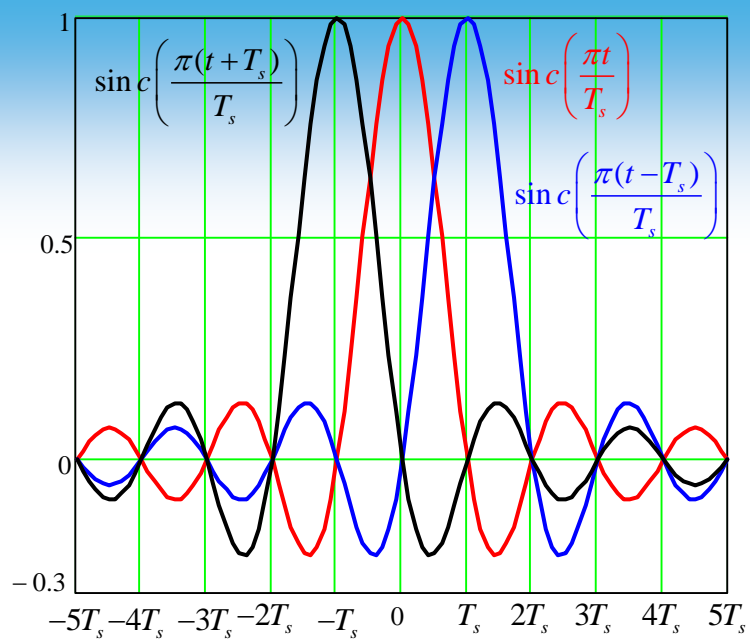
- t_0 是一个时延常数，为了方便起见，假设 $t_0=0$ ，这样无码间串扰的条件为：

$$h(nT_s) = \begin{cases} \text{常数} & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

- 能满足这个要求的 $h(t)$ 可以找到很多，比较熟悉的有：

$$h(t) = Sa\left(\frac{\pi t}{T_s}\right) \quad h(t) = Sa^2\left(\frac{\pi t}{T_s}\right)$$

$$h(t) = Sa\left(\frac{m\pi t}{T_s}\right)$$



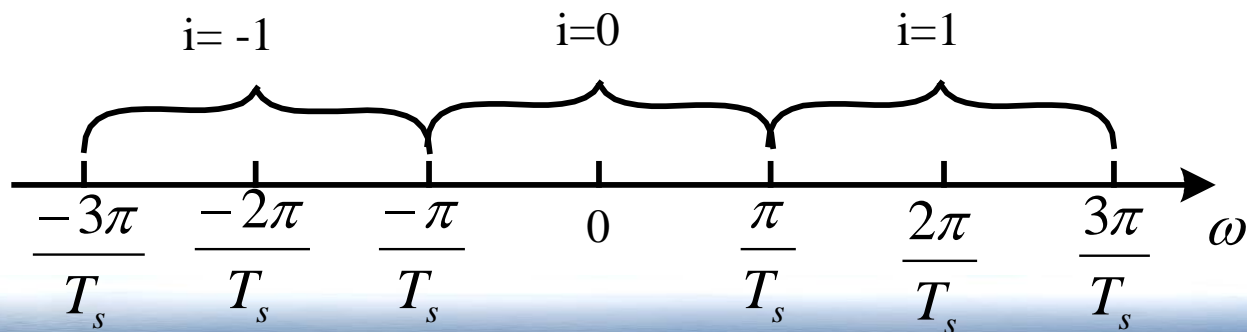
4.3.2 无码间串扰传输特性的数学分析

➤ $h(nT_s)$ 的表示式

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

把 $t = nT_s$ 代入得:
$$h(nT_s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega) e^{j\omega nT_s} d\omega$$

这个式子可以改写为分段积分的形式，即把 ω 轴分成间隔为 $2\pi/T_s$ 的很多小段，如下图所示，每段的范围由 $(2i-1)\pi/T_s$ 到 $(2i+1)\pi/T_s$ ， i 为任意整数。图中由 $-\pi/T_s$ 到 π/T_s 这一段相当 $i = 0$ 的小段，而由 π/T_s 到 $3\pi/T_s$ 这一段相当于 $i = 1$ 的小段。



这样上式可以改写为分段积分形式如下：

$$h(nT_s) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \int_{\frac{(2i-1)\pi}{T_s}}^{\frac{(2i+1)\pi}{T_s}} H(\omega) e^{j\omega nT_s} d\omega$$

作变量代换，令 $\omega' = \omega - \frac{2\pi i}{T_s}$ ，有：

$$\begin{aligned} h(nT_s) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \int_{-\frac{\pi}{T_s}}^{\frac{\pi}{T_s}} H\left(\omega' + \frac{2\pi i}{T_s}\right) e^{j\left(\omega' + \frac{2\pi i}{T_s}\right)nT_s} d\omega' \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \int_{-\frac{\pi}{T_s}}^{\frac{\pi}{T_s}} H\left(\omega' + \frac{2\pi i}{T_s}\right) e^{j\omega' nT_s} d\omega' \end{aligned}$$

当上式的和为一致收敛时，可以把求和与积分的次序互换，并把换回 ω ，由此得：

$$h(nT_s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T_s}}^{\frac{\pi}{T_s}} \left[\sum_{i=-\infty}^{+\infty} H\left(\omega + \frac{2\pi i}{T_s}\right) \right] e^{j\omega nT_s} d\omega \quad \left| \omega \right| \leq \frac{\pi}{T_s}$$

➤ $\sum_{i=-\infty}^{+\infty} H(\omega + \frac{2\pi i}{T_s}) \quad |\omega| \leq \frac{\pi}{T_s}$ 的物理意义

按 $\omega = \pm(2n-1)\pi/T_s$ (n 为正整数) 的各值将 $H(\omega)$ 切成宽为 $2\pi/T_s$ 的若干段, 然后将各段移至 $(-\pi/T_s \sim \pi/T_s)$ 的中心位置叠加, 我们把它简称为“切段叠加”。

$$H_{eq}(\omega) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} H(\omega + \frac{2\pi i}{T_s}) \quad |\omega| \leq \frac{\pi}{T_s}$$

$H_{eq}(\omega)$ 就是等效传输函数。

➤ 无码间串扰对 $H_{eq}(\omega)$ 的要求

如果 $H_{eq}(\omega) = A$ (常数), 则

$$\begin{aligned} h(nT_s) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T_s}^{\pi/T_s} A e^{j\omega n T_s} d\omega \\ &= \frac{A \sin n\pi}{T_s \cdot n\pi} = \frac{A}{T_s} Sa(n\pi) = \begin{cases} A/T_s & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

正好满足了无码间串扰对 $h(t)$ 的要求，因此

$$H_{eq}(\omega) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} H\left(\omega + \frac{2\pi i}{T_s}\right) = \text{常数} \quad \left| \omega \right| \leq \frac{\pi}{T_s}$$

就是无码间串扰的条件，即 $H_{eq}(\omega)$ 相当于一个 $\left| \omega \right| \leq \pi / T_s$ 的理想低通滤波器时，满足了无码间串扰的传输条件。这就是Nyquist第一准则。

➤ 几种常见的无码间串扰的传输特性

| 名称和传输特性 $H(f)$ | 冲激响应 $h(t)$ | 带宽 $B(\text{Hz})$ |
|--|--|--|
| <p>A graph showing a rectangular frequency response $H(f)$. The vertical axis is labeled $H(f)$ and has a tick mark at T_s. The horizontal axis is labeled f and has tick marks at $-\frac{1}{2T_s}$, 0, and $\frac{1}{2T_s}$. The response is a constant value T_s between $f = -\frac{1}{2T_s}$ and $f = \frac{1}{2T_s}$, and zero elsewhere.</p> | $\text{Sinc}\left(\frac{\pi t}{T_s}\right)$ | $B = \frac{1}{2T_s} = \frac{R_s}{2}$ |
| <p>蓝线表示 $\alpha = 0.5$ 红线表示 $\alpha = 1$</p> <p>A graph showing two raised cosine frequency response curves, $H(f)$, plotted against f. The vertical axis is labeled $H(f)$ and has a tick mark at T_s. The horizontal axis is labeled f and has tick marks at $-\frac{(1+\alpha)}{2T_s}$, $-\frac{1}{2T_s}$, 0, $\frac{1}{2T_s}$, and $\frac{(1+\alpha)}{2T_s}$. A blue curve represents $\alpha = 0.5$ and a red curve represents $\alpha = 1$. Both curves are symmetric about $f = 0$ and peak at $H(f) = T_s$ when $f = 0$. The red curve ($\alpha = 1$) is wider than the blue curve ($\alpha = 0.5$).</p> | $\text{Sinc}\left(\frac{\pi t}{T_s}\right) \cdot \frac{\cos\left(\frac{\pi \alpha t}{T_s}\right)}{1 - \left(\frac{2\alpha t}{T_s}\right)^2}$ | $B = \frac{1+\alpha}{2T_s} = \frac{1+\alpha}{2} R_s$ |

§ 4.4 相关编码(部分响应系统)

问题：如何既能保持最高频带利用率 $2 B_d/Hz$ ，
又能使时域波形 $h(t)$ 比 $sinc(t)$ 拖尾衰减快？

❖ 部分响应波形(Partial Response Coding)

- 由若干相隔 T_s 的 $sinc(x)$ 波形相加，拖尾衰减加快
- 受控ISI，接收端可以消除
- 带宽效率 η 保持 $2 B_d/Hz$
- 常用部分响应波形—第 I 类和第IV 类

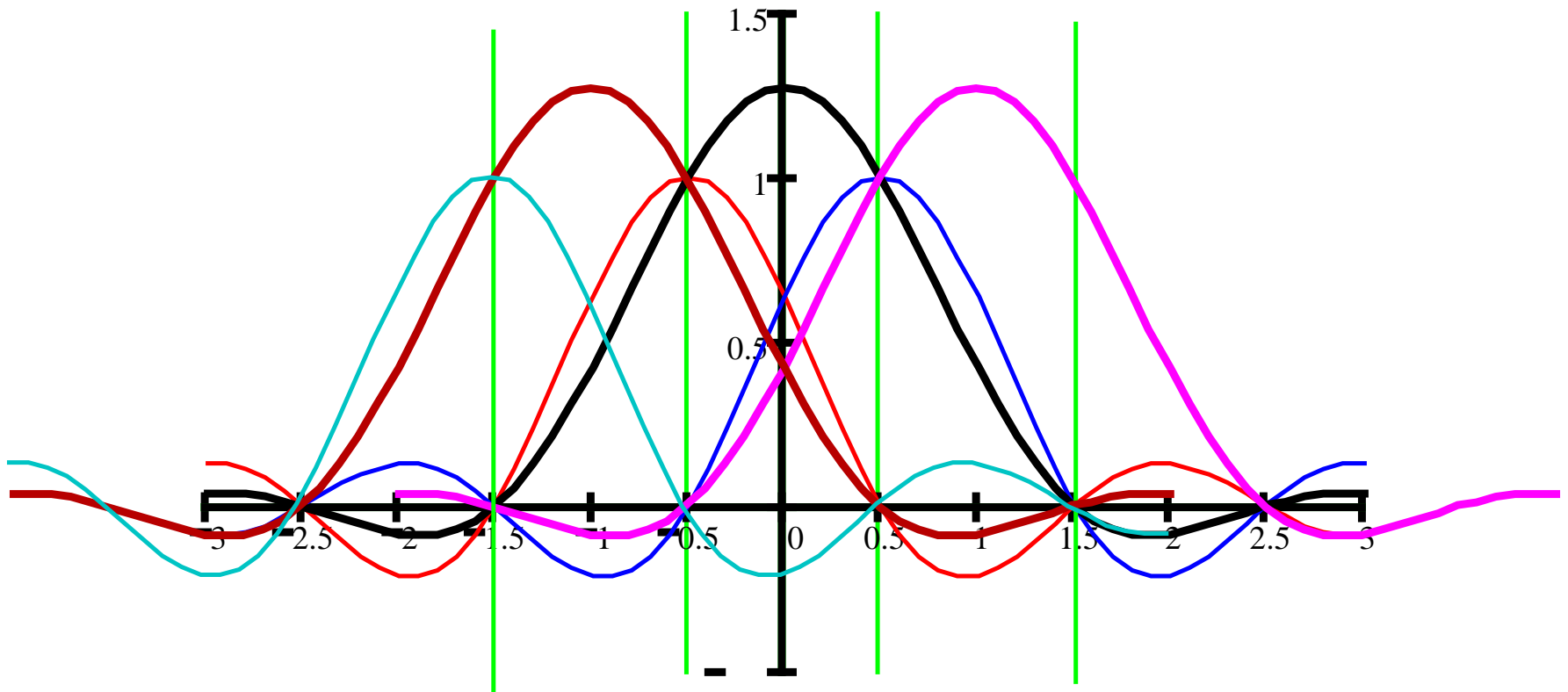
4.4.1 第I类部分响应波形

- **部分响应波形**是具有持续1bit以上，具有一定长度码间串扰的波形。对相邻码元的取样时刻产生同极性串扰的波形，称为**第I类部分响应波形**。
- 如果我们用两个相隔一位码元间隔T的sinc(x)的合成波形来代替sinc(x)，则合成波的数学表达式为：

$$\begin{aligned} S(t) &= \text{sinc} \left[\frac{\pi}{T} \left(t + \frac{T}{2} \right) \right] + \text{sinc} \left[\frac{\pi}{T} \left(t - \frac{T}{2} \right) \right] \\ &= \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\cos(\pi t / T)}{1 - 4t^2 / T^2} \end{aligned}$$

我们可知，当 $t=0$ ， $\pm T/2$ ， $kT/2$ ($k=\pm 3$ 、 $\pm 5\dots$)时， $S(0)=4/\pi$ ， $S(\pm T/2)=1$ ， $S(kT/2)=0$ ($k=\pm 3$ 、 $\pm 5\dots$)

- 由此看出：第一， $S(t)$ 的尾巴幅度随 t 按 $1/t^2$ 变化，收敛快；第二，若用 $S(t)$ 作为传送波形，且传送码元间隔为 T ，则在抽样时刻上仅发生发送码元与其前后一个码元相互干扰，而与其他码元不发生干扰。



➤ 合成后的波形振荡衰减加快了，主要是因为相距一个码元间隔的sinc(x)波形的拖尾正负相反而相互抵消，使得合成波形拖尾迅速衰减。

➤ 合成波形的频谱为：
$$S(\omega) = \begin{cases} T(e^{-j\omega T/2} + e^{j\omega T/2}) & |\omega| \leq \pi/T \\ 0 & |\omega| > \pi/T \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 2T \cos(\omega T/2) & |\omega| \leq \pi/T \\ 0 & |\omega| > \pi/T \end{cases}$$

➤ 由图可见，S(t)的频谱限制在 $\pm\pi/T$ 之内，而且呈余弦型。这种缓变的滚降过渡特性与陡峭衰减的理想低通特性有明显的不同。这时的传输带宽为：

$$W = \frac{1}{2\pi} \frac{\pi}{T} = \frac{1}{2T}$$

频带利用率为：
$$\eta = \frac{R_s}{W} = \frac{1/T}{1/2T} = 2Bd / \text{Hz}$$

- 如果用 $S(t)$ 作为传输信号的波形，在抽样时刻上，发送码元的样值将受到前一个发送码元的串扰，而不受其他码元的串扰。 $S(t)$ 的形成过程可分为两步，首先形成相邻码元的串扰，然后再经过相应的网络形成所需的波形。通过有控制地引入串扰，使原先互相独立的码元变成了相关码元，这种串扰所对应的运算称为相关编码。将二进制信元码用双极性二元码表示，即将1、0信号用1、-1信号表示，相关编码的规则为：

$$c_n = a_n + a_{n-1}$$

- 这样 c_n 的取值可能为+2、0、-2三种电平，由于存在这种固定幅度的串扰，使部分响应信号序列中出现新的抽样值，通常称之为“伪电平”。

➤ $\{a_n\}$ 到 $\{c_n\}$ 的形成过程如下：

| | | | | | | | | | | | | |
|-------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 二进制码元 | | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| a_n | +1 | +1 | -1 | +1 | +1 | -1 | -1 | -1 | +1 | -1 | +1 | +1 |
| $c_n=a_n+a_{n-1}$ | | +2 | 0 | 0 | +2 | 0 | -2 | -2 | 0 | 0 | 0 | +2 |

➤ 在接收端，经再生判决得到 \hat{c}_n ，再用反变换得到 a_n 的估计值 \hat{a}_n ，即 $\hat{a}_n = \hat{c}_n - \hat{a}_{n-1}$ ，其中 \hat{a}_{n-1} 是前一码元的估计值，然后不断递推，但这种运算会带来严重的差错扩散问题。

➤ 仍以上面的例子来说明差错扩散的过程:

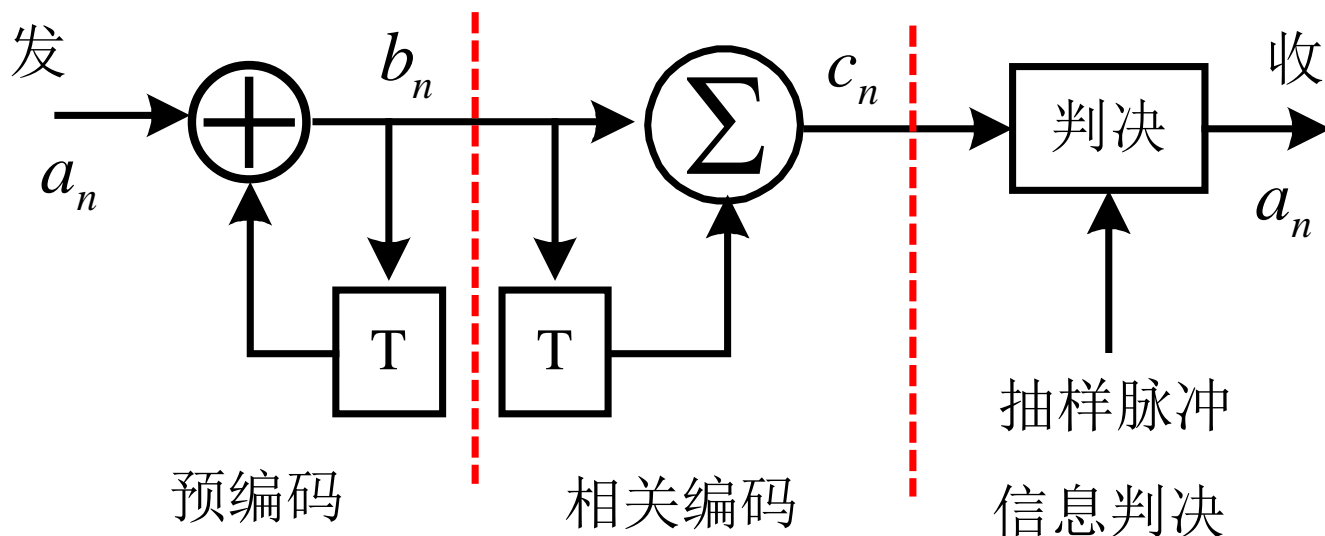
| | | | | | | | | | | | | |
|-----------------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 二进制码元 | | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| a_n | +1 | +1 | -1 | +1 | +1 | -1 | -1 | -1 | +1 | -1 | +1 | +1 |
| $c_n = a_n + a_{n-1}$ | | +2 | 0 | 0 | +2 | 0 | -2 | -2 | 0 | 0 | 0 | +2 |
| \hat{c}_n | | +2 | 0 | 0 | 0 | 0 | -2 | -2 | 0 | 0 | 0 | +2 |
| $\hat{a}_n = c_n - a_{n-1}$ | +1 | +1 | -1 | +1 | -1 | +1 | -3 | +1 | -1 | +1 | -1 | +3 |

➤ 由上述过程可知, 自 $\{\hat{c}_n\}$ 出现错误之后, 接收端恢复出来的 $\{\hat{a}_n\}$ 全部是错误的。此外, 在接收端恢复 $\{\hat{a}_n\}$ 时还必须有正确的起始值+1, 否则也不可能得到正确的 $\{\hat{a}_n\}$ 序列。

- 为了解决差错扩散问题，可在发送端相关编码之前进行预编码。设单极性二元码用 a_n 表示，预编码的规则为 $a_n = b_n \oplus b_{n-1}$ ，即 $b_n = a_n \oplus b_{n-1}$ 。

其中 \oplus 表示模2加，将 b_n 用双极性二元码表示，然后再按以下规则进行相关编码： $c_n = b_n + b_{n-1}$

- 通常把 a_n 变成 b_n 的过程叫“预编码”，而把处理 $c_n = b_n + b_{n-1}$ 称为“相关编码”。



| | | | | | | | | | | | | |
|----------------------------|---|---|----|---|----|----|----|----|---|----|---|---|
| 二进制码元 a_n | | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| $b_n = a_n \oplus b_{n-1}$ | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $c_n = b_n + b_{n-1}$ | | 0 | +2 | 0 | 0 | +2 | +2 | +2 | 0 | -2 | 0 | 0 |
| \hat{c}_n | | 0 | +2 | 0 | +2 | +2 | +2 | +2 | 0 | -2 | 0 | 0 |
| \hat{a}_n | | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |

➤ 判决的原则是：
$$\hat{c}_n = \begin{cases} \pm 2 & \text{判0} \\ 0 & \text{判1} \end{cases}$$

➤ 这个例子说明 \hat{c}_n 产生的错误只影响本时刻 \hat{a}_n 的值，差错不会向后蔓延，这是因为预编码已经解除了码间的相关性。

4.4.2 部分响应波形的一般表示式

- 部分响应波形的一般形式可以是N个Sinc(x)函数的和，其表达式为：

$$S(t) = r_0 \operatorname{sinc} \left[\frac{\pi}{T} (t - T/2) \right] + r_1 \operatorname{sinc} \left[\frac{\pi}{T} (t + T/2) \right] + \dots + r_N \operatorname{sinc} \left[\frac{\pi}{T} \left(t + \frac{2N-1}{2} T \right) \right]$$

其中加权系数 r_0 、 $r_1 \dots r_N$ 为整数。其频谱函数为：

$$S(\omega) = \begin{cases} T \sum_{k=0}^N r_k e^{-j\omega T(2k-1)/2} & |\omega| \leq \frac{\pi}{T} \\ 0 & |\omega| > \frac{\pi}{T} \end{cases}$$

- 根据加权系数的不同，合成信号具有不同的波形和频谱特性，分别命名为第I、II、III、IV、V类部分响应信号。

- 同样为了避免“差错传播”，可在发送端进行编码

$$a_n = r_0 b_n + r_1 b_{n-1} + \dots + r_N b_{n-N} \quad (\text{按模}L\text{相加})$$

这里假设 a_n 为 L 进制的序列， b_n 为预编码后得到的新序列。

- 将预编码后的序列 b_n 进行相关编码，则有：

$$c_n = r_0 b_n + r_1 b_{n-1} + \dots + r_N b_{n-N} \quad (\text{算术加})$$

这样 $a_n = c_n \pmod{L}$

§ 4.5 时域均衡

- 各种传输系统传输的信号，一般由一些不同频率的分量组成，若不同频率分量经传输后有相同的输入输出幅度比和相同的时延（各分量间的相位仍保持原有的关系），则信号波形经传输后不产生畸变。但实际信道的衰耗随频率的变化而变化，因而信号产生畸变。采用均衡技术调整接收信号各频率成分的幅度和相位（相当于调整时延），就能使信道具有良好的传输特性。
- 在基带系统中插入一种可调或不可调的滤波器，用来减小码间干扰的影响，这种对系统传递函数 $H(\omega)$ 的幅频和相频起补偿作用的滤波器通称为均衡器。如果补偿是在时域进行的，称为时域均衡。如果补偿是在频域进行的，称为频域均衡。

对系统中的线性失真进行校正的过程称为均衡。

❖ 线性失真包括以下两个方面：

- 振幅频率失真(衰减失真): $|H(\omega)| \sim \omega$
- 相位失真(群延迟失真): $\tau(\omega) = d\phi(\omega) / d\omega$

对传输数字信号来说，这些失真的主要危害是引起波形的畸变，从而产生码间干扰。

❖ 频域均衡

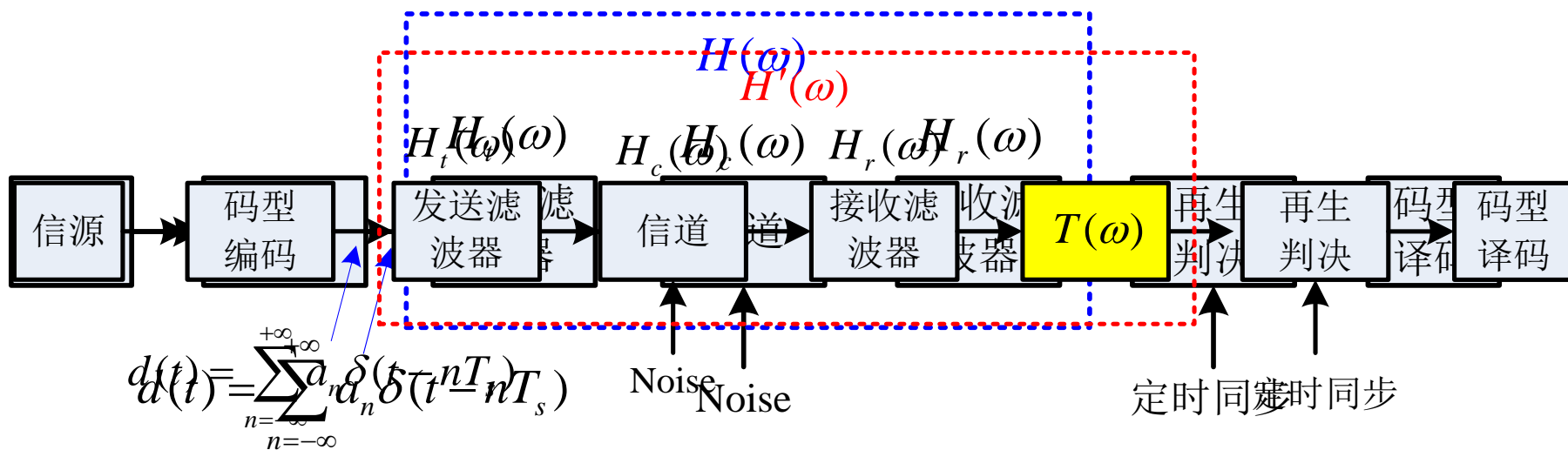
- 目的：实现无失真传输。
- 方法：有理函数均衡和升余弦波均衡

❖ 时域均衡

- 目的：不是为了获得平坦的幅频特性和群延迟特性，主要目的是消除判决时刻的码间干扰。
- 方法：时域均衡通常是利用具有可变增益的多抽头横向滤波器来实现。

4.5.1 时域均衡的基本原理

- 时域均衡的原理是将均衡器输入端（即接收滤波器输出端）抽样时刻上有码间干扰的响应波形变换成抽样时刻上无码间干扰的响应波形。
- 数字基带信号的传输模型，如下图所示



其总传输函数可写为： $H(\omega) = H_t(\omega)H_c(\omega)H_r(\omega)$

➤ 当 $H(\omega)$ 不满足无码间串扰条件时，即：

$$H_{eq}(\omega) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} H\left(\omega + \frac{2\pi i}{T_s}\right) = \text{常数} \quad \left| \omega \right| \leq \frac{\pi}{T_s}$$

就可能存在码间串扰。

➤ 现在我们证明，如果在接收滤波器 $H_r(\omega)$ 后面插入一个称之为横向滤波器的可调滤波器，其冲激响应为：

$$h_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \delta(t - nT_s)$$

则理论上就可以消除抽样时刻上的码间串扰，其中系数 C_n 完全依赖于 $H(\omega)$ 。

➤ 证明：设插入滤波器的频率特性为 $T(\omega)$ ，则当 $T(\omega)H(\omega)=H'(\omega)$ 满足无码间串扰的条件，即：

$$H'_{eq}(\omega) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} H'(\omega + \frac{2\pi i}{T_s}) = \text{常数或 } T_s \quad |\omega| \leq \frac{\pi}{T_s}$$

这个包括 $T(\omega)$ 在内的 $H'(\omega)$ 将可消除码间串扰。

现在我们假设 $\sum_{i=-\infty}^{+\infty} H'(\omega + \frac{2\pi i}{T_s})$ 是一个常数 (T_s)，然后

反推出 $T(\omega)$ 的时域函数。

$$\sum_i H'(\omega + \frac{2i\pi}{T_s}) = \sum_i H(\omega + \frac{2i\pi}{T_s})T(\omega + \frac{2i\pi}{T_s})$$

- 如果要满足无码间串扰的条件， $T(\omega)$ 必须是一个周期为 $2\pi/T_s$ 的周期函数，且在 $(-\pi/T_s, \pi/T_s)$ 内有：

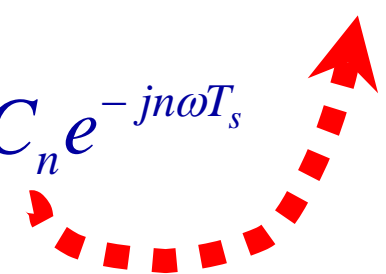
$$T(\omega) = \frac{T_s}{\sum_i H(\omega + \frac{2\pi i}{T_s})} \quad |\omega| \leq \frac{\pi}{T_s}$$

这样 $\sum_i H'(\omega + \frac{2\pi i}{T_s}) = T_s \quad |\omega| \leq \frac{\pi}{T_s}$

既然是一个周期为 $2\pi/T_s$ 的周期函数，可用傅立叶级数表示，即

$$T(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{-jn\omega T_s}$$

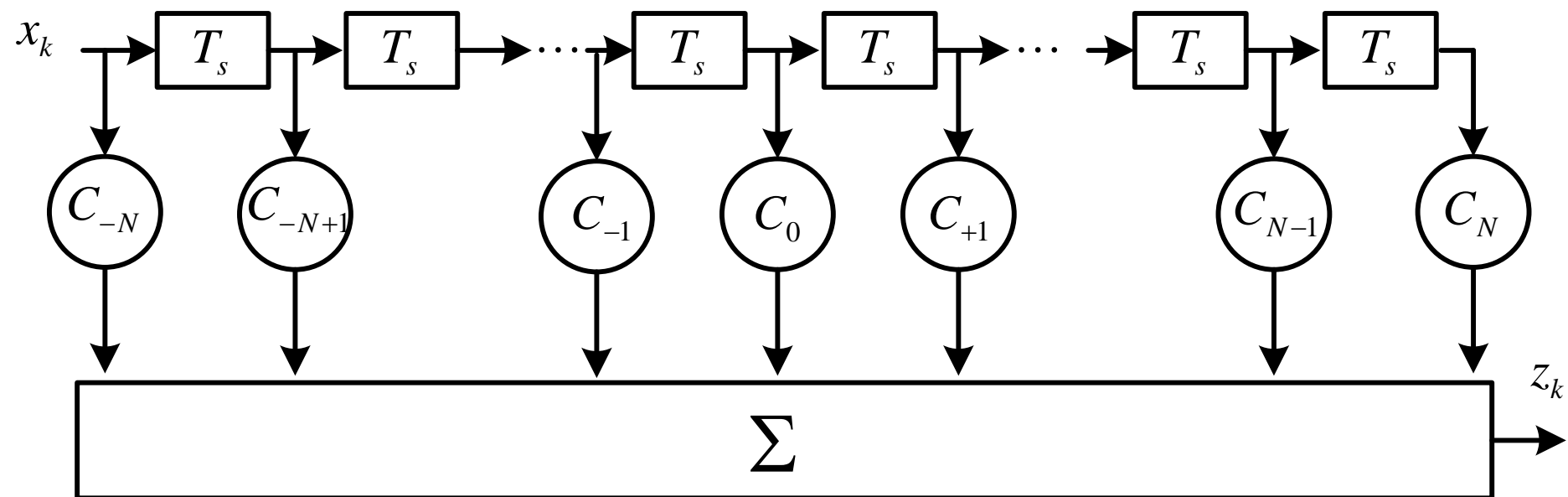
$$C_n = \frac{T_s}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T_s}}^{\frac{\pi}{T_s}} T(\omega) e^{jn\omega T_s} d\omega$$

$$= \frac{T_s}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T_s}}^{\frac{\pi}{T_s}} \frac{T_s}{\sum_i H(\omega + \frac{2\pi i}{T_s})} e^{jn\omega T_s} d\omega$$


➤ 对 $T(\omega)$ 进行傅氏反变换，则可求出其单位冲击响应为：

$$h_T(t) = F^{-1}[T(\omega)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \delta(t - nT_s)$$

➤ 横向滤波器恰好具有上述的冲击响应，其结构如下图所示：



由于横向滤波器的均衡原理是建立在响应波形上的，因此把这种均衡称为时域均衡。

- 由于横向滤波器的特性完全取决于各抽头系数，不同的 C_i 值将得出不同的 $h_T(t)$ 或 $T(\omega)$ ，因此只要将各抽头系数设计成可调的，就可为随时修改系统的时间响应提供了可能的条件。
- 如果采用无限长的横向滤波器，就能做到（至少在理论上）消除码间干扰的影响。然而抽头无限多是不可能的，而且如果每一系数 C_i 调整的不够准确，则收益也会受到制约。
- 假设输入波形的抽样值序列为 $\{x_k\}$ ，输出波形的抽样值序列为 $\{z_k\}$ ，可得到：

$$z_k = \sum_{i=-N}^N C_i x_{k-i} \quad k = -2N, \dots, 0, \dots, +2N$$

➤ 表示成矩阵形式，令：

$$Z^T = [z_{-2N} \quad \dots \quad z_0 \quad \dots \quad z_{+2N}]$$

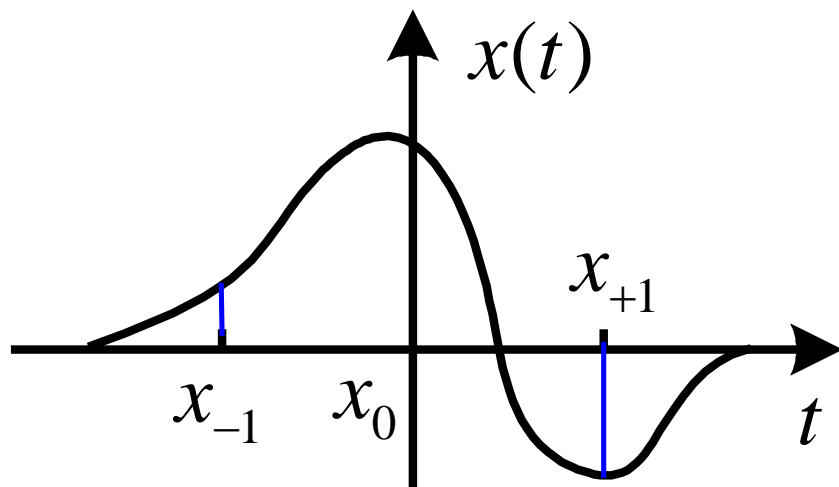
$$C^T = [C_{-N} \quad \dots \quad C_0 \quad \dots \quad C_{+N}]$$

$$X = \begin{bmatrix} x_{-N} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_{-N+1} & x_{-N} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_N & x_{N-1} & x_{N-2} & \dots & x_{-N+1} & x_{-N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_N & x_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x_N \end{bmatrix}$$

则有： $Z = X C$

- 例：已知均衡前的系统冲激响应如下图所示， $x_{-1}=1/4$ ， $x_0=1$ ， $x_1=-1/2$ 。假设均衡器采用三抽头横向滤波器，抽头系数为 $C_{-1}=-1/4$ ， $C_0=1$ ， $C_1=1/2$ 。由公式：

$$Z = XC = (-1/16, 0, 5/4, 0, -1/4)$$



➤ 均衡器的均衡效果可以用峰值畸变准则和均方畸变准则来衡量。

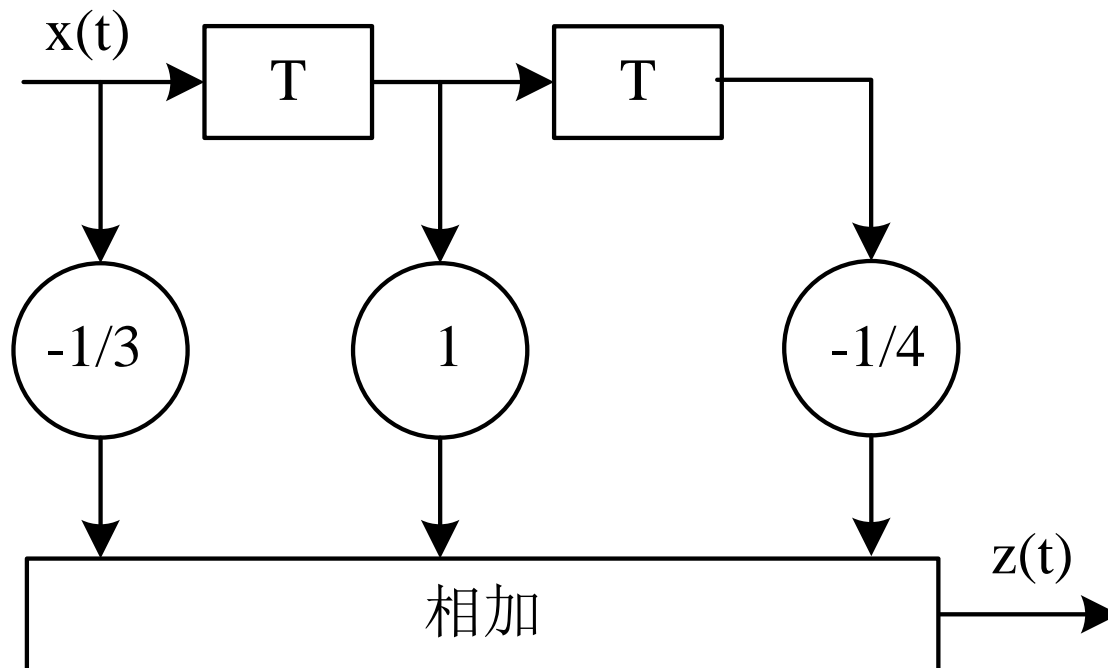
➤ 峰值畸变准则定义为：

$$D = \frac{1}{z_0} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} |z_k|$$

➤ 均方畸变准则定义为：

$$e^2 = \frac{1}{z_0^2} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} z_k^2$$

- 例：设有一个三抽头的时域均衡器，如下图所示， $x(t)$ 在各抽样点的值依次为 $x_{-2}=1/8$ ， $x_{-1}=1/3$ ， $x_0=1$ ， $x_{+1}=1/4$ ， $x_{+2}=1/16$ （在其他抽样点均为零），试求输入波形 $x(t)$ 的峰值畸变值和输出波形 $z(t)$ 的峰值畸变值。



➤ 解：输入波形 $x(t)$ 的峰值畸变值为：

$$D_x = \frac{1}{x_0} \sum_{\substack{k=-2 \\ k \neq 0}}^{+2} |x_k|$$
$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{37}{48}$$

由公式 $z_k = \sum_{i=-N}^N C_i x_{k-i} \quad k = -2N, \dots, 0, \dots, +2N$

我们可得：

$$z_{-3} = C_{-1} x_{-2} = -\frac{1}{3} \times \frac{1}{8} = -\frac{1}{24}$$

$$z_{-2} = C_{-1} x_{-1} + C_0 x_{-2} = -\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{8} = -\frac{1}{72}$$

依次类推，我们可得：

$$z_{-1} = -\frac{1}{32} \quad z_0 = \frac{5}{6} \quad z_1 = -\frac{1}{48} \quad z_2 = 0 \quad z_3 = -\frac{1}{64}$$

其他 z_k 的值为零。

输出样值序列的峰值畸变值为：

$$\begin{aligned} D_z &= \frac{1}{z_0} \sum_{\substack{k=-2 \\ k \neq 0}}^{+2} |z_k| \\ &= \frac{6}{5} \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{72} + \frac{1}{32} + \frac{1}{48} + 0 + \frac{1}{64} \right) = \frac{7}{480} \end{aligned}$$

■ 如何用迫零法求抽头系数

- 用矩阵形式表示为: $\mathbf{Z}=\mathbf{X}\mathbf{C}$

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} z(-2N) \\ \vdots \\ z(0) \\ \vdots \\ z(2N) \end{bmatrix} \quad (4N+1), \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{-N} \\ \vdots \\ c_0 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix} \quad (2N+1)$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x(-N) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x(-N+1) & x(-N) & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x(N) & x(N-1) & x(N-2) & \cdots & x(-N+1) & x(-N) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x(N) & x(N-1) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x(N) \end{bmatrix} \quad (4N+1)(2N+1)$$

▪ 迫零法(Zero-Forcing) (ZFE)

- 截去矩阵 \mathbf{X} 的前后各 N 行变为 $(2N+1)$ 阶方阵
- 选择抽头系数 $\{C_i\}$ 的加权, 使均衡器的输出信号在期望输出脉冲两侧的各 N 个采样值(ISI)为零:

$$z_k = \sum_{i=-N}^N c_i x_{k-i} = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N \end{cases}$$

例子：三抽头迫零均衡器，设接收失真信号的一组样值 $x(k)$ 为：0.0, 0.2, 0.9, -0.3, 0.1

求 $\{C_{-1}, C_0, C_1\}$ ，使 $z_{-1}=0$ ， $z_0=1.0$ ， $z_1=0$

解：由 $Z=XC$ ，即

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.2 & 0 \\ -0.3 & 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & -0.3 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{-1} \\ c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} c_{-1} \\ c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2140 \\ 0.9631 \\ 0.3448 \end{bmatrix}$$

由求得的系数 $\{C_i\}$ 可得出 $z(k)$ 序列值为

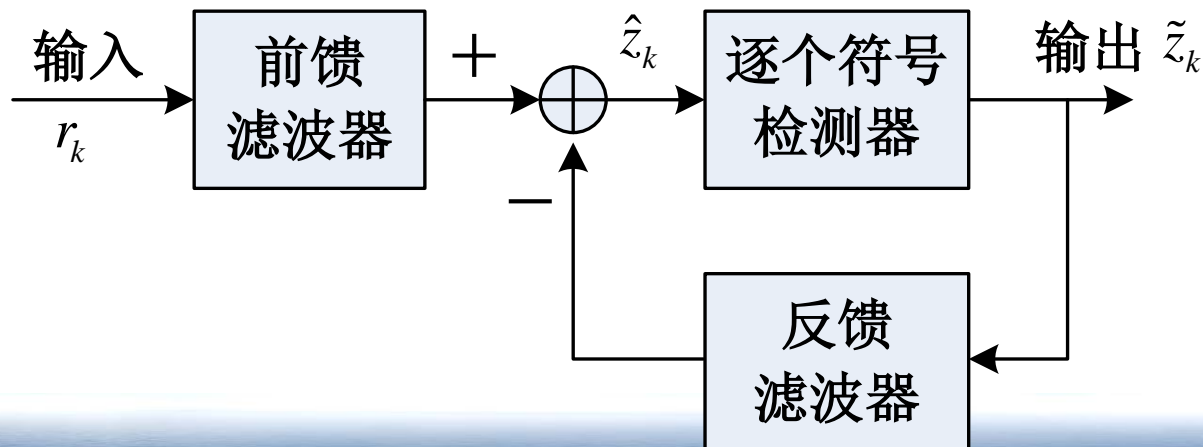
0.0000, -0.0428, 0.0000,

1.0000,

0.0000, -0.0071, 0.0345

均衡后ISI幅度总和为： $\Sigma|z(k)|=0.0844$

- ❖ 4.5.2 判决反馈均衡器 (Decision Feedback Equalizer)
- ❖ 用先前码元的判决结果来消除当前码元的码间串扰（非线性均衡器）。
- ❖ 判决反馈均衡器是由两个滤波器组成：一个是前馈滤波器，另一个是反馈滤波器。前馈滤波器的作用与线性均衡器一样，反馈滤波器则是将前面已检测符号的判决输出作为它的输入，该反馈滤波器的作用是从过去已检测的符号来估计当前正检测符号的码间干扰，然后将它与前馈滤波器输出相减，从而减少了当前输出符号的码间干扰。



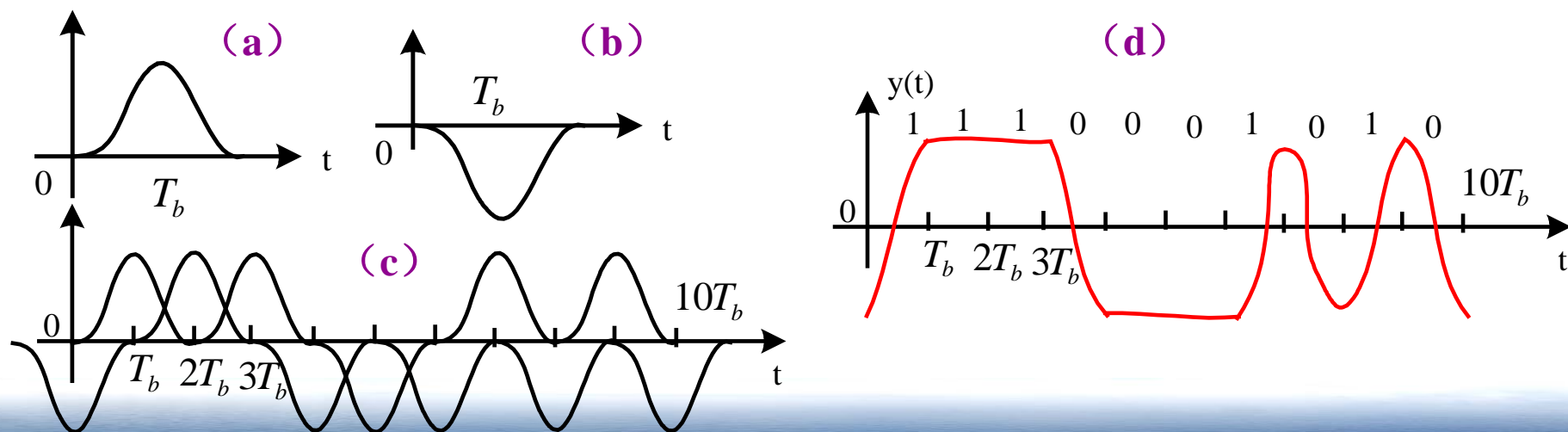
§ 4.6 眼图

- 眼图是用示波器对抽样判决输入信号进行观测的连续时间波形，是数字通信中的一种测量方法。从眼图中，我们可以估计出系统的性能（如码间串扰和噪声的大小）。

4.6.1 眼图的基本原理

➤ 无噪声、无码间串扰时的眼图

假设它是双极性升余弦脉冲波形，即在 0 到 T_b 间的“1”码经过信道传输后在接收滤波器输出一个正的升余弦脉冲波形，如(a)所示，而“0”码对应一个负的升余弦脉冲，如(b)所示。假设我们在 $10T_b$ 时间内共收到二进制代码1110001010，把各个码元产生的波形分别画出可得(c)所示的波形，(d)就是它们的合成信号。从 $y(t)$ 的波形来看，收到连1码时，有一个持续时间为 τ 的正电平，而收到连0码时有一个持续时间的负电平，当“1”、“0”交替时不会出现持续的正负电平，从图中容易算出 $\tau=(k-1)T_b$ ，其中 k 是连码的数目。



- 如果把图 (d) 所示的 $y(t)$ 的波形加到示波器的垂直轴，而水平扫描的周期与 T_b 相等，则可以得到下图 (a) 所示的波形。

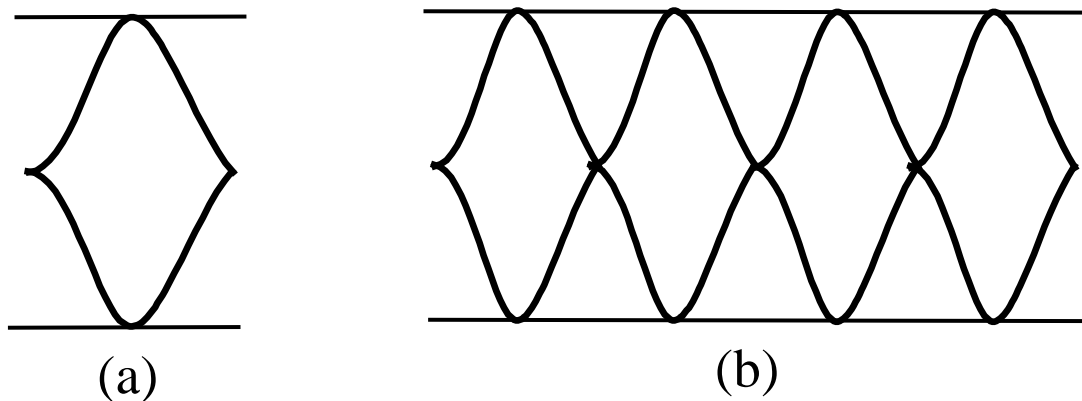
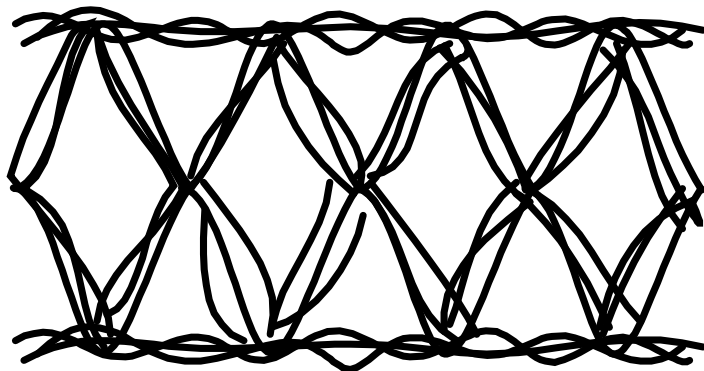


图 (a) 中的上面的水平线是由连1码引起的持续正电平产生的，下面的水平线是由连0码引起的持续负电平产生的。中间部分由1、0交替码产生。若水平扫描周期为 nT_b ，就可以得到并排的 n 只眼睛。

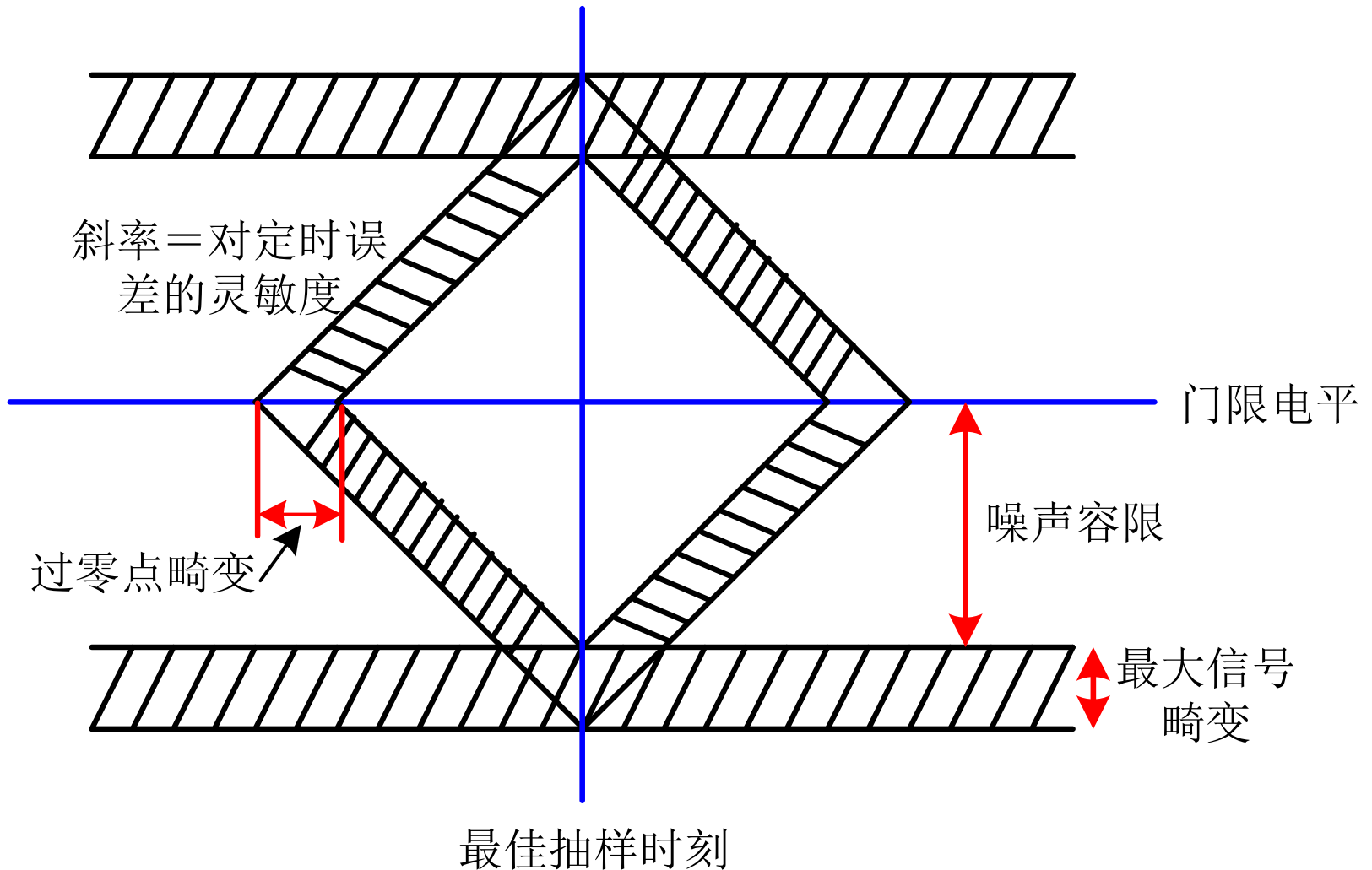
➤ 有噪声和码间串扰的眼图



我们可以看出，原来清晰端正的细线变成了比较模糊的带状线，噪声越大，线条越宽，越模糊，码间串扰越大，眼图越不端正。

eye_demo.mdl

➤ 4.6.2 眼图的简化模型



➤ 结论

- ❖ 最佳抽样时刻应是“眼睛”张开最大的时刻；
- ❖ 对定时误差的灵敏度，由斜边斜率决定，斜率越大，对定时误差越灵敏；
- ❖ 图的阴影区的垂直高度表示最大信号畸变；
- ❖ 图中央的横轴位置应对应判决门限电平；
- ❖ 在抽样时刻，上下两阴影区的间隔距离之半为噪声容限，如果噪声瞬时值超过这个容限，则就可能发生错误判决。
- ❖ 对于从信号过零点取平均来得到定时信息的接收系统，眼图倾斜分支与横轴相交的区域的大小，表示零点位置的变动范围，这个变动范围的大小对提取定时信息有重要的影响。

§ 4.7 扰码和解扰

- 在设计数字通信系统时，通常假设信源序列是随机序列，而实际信源发出的序列不一定满足这个条件，特别是出现长0串时，给接收端提取定时信号带来一定困难。为了解决这个问题，除了前面讲到的码型编码方法外，也常用m序列对信源序列进行“随机化”处理，变为伪随机序列，这种随机化的处理就是扰码。在接收端可以用同样的m序列进行解扰，得到原始信源序列。
- 可以预先确定并且可以重复实现的序列，称为**确定序列**；既不能预先确定又不能重复实现的序列称为**随机序列**；具有随机特性，貌似随机序列的确定序列称为**伪随机序列**；

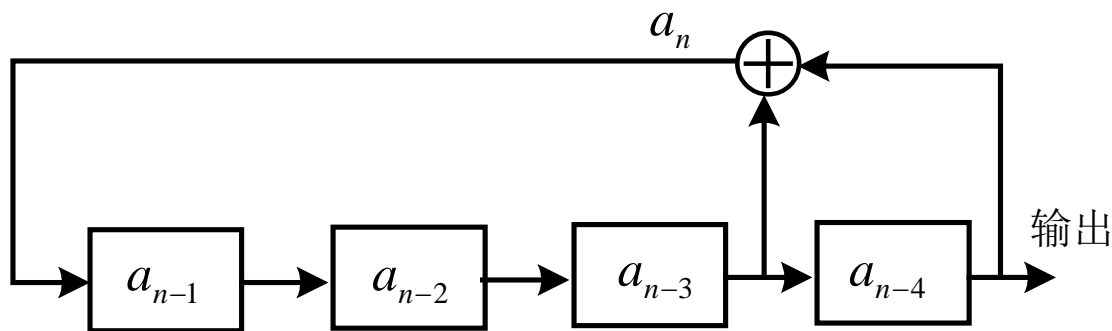
➤ 4.7.1 m序列的产生

m序列是**最长线性反馈移位寄存器序列**的简称，从其名称我们可以得知，它首先是带线性反馈的移位寄存器产生的序列，并且具有最长的周期。

- 如果反馈逻辑线路只用模2和构成，则称为线性反馈移位寄存器；如果反馈线路中包含“与”、“或”等运算，则称为非线性反馈移位寄存器。
- 带线性反馈逻辑的移位寄存器设定初始状态后，在时钟触发下，每次移位后各级寄存器状态会发生变化。

➤ 例如一个4级移位寄存器，如下图所示，其反馈逻辑为：

$$a_n = a_{n-3} \oplus a_{n-4}$$



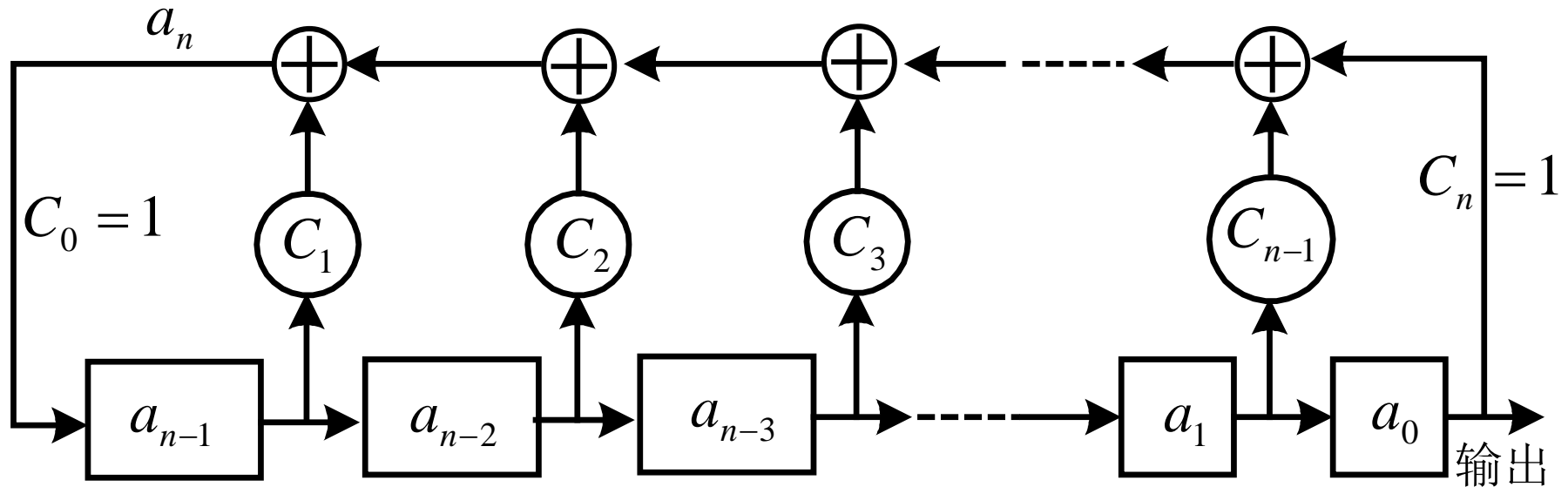
➤ 即第三级和第四级输出的模2和运算结果反馈到第一级中，假设4级移位寄存器的初始状态为0001，在输入时钟下，我们就可得到一个输出序列。

```
fbconnection=[0 0 1 1];
mseq=m_sequence(fbconnection)
```

| 时钟 | a_{n-1} | a_{n-2} | a_{n-3} | a_{n-4} | 反馈值 $a_n = a_{n-3} \oplus a_{n-4}$ |
|----|-----------|-----------|-----------|-----------|------------------------------------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 4 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 5 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 7 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 8 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 9 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 10 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 11 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 12 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 13 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 14 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 15 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |

- 我们知道， $n=4$ 的移位寄存器有16种不同的状态，上述序列中除全0态外，其他15种状态都在一个周期里都出现一次，这也是最长周期序列的由来。
- 不同的线性反馈逻辑、不同的初始状态，得出的输出序列周期不同。

- n级线性反馈移位寄存器如下图所示， c_i 表示连线状况，反馈式为：



$$a_n = C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} + \dots + C_n a_0 = \sum_{i=1}^n C_i a_{n-i}$$

将 a_n 也加到和式中，可得到：

$$\sum_{i=0}^n C_i a_{n-i} = 0 \quad , \quad \text{其中 } C_0 = 1$$

➤ 定义一个与上式相对应的多项式：
$$F(x) = \sum_{i=0}^n C_i x^i$$

其中 x 的幂次表示元素相应的位置。这个式子就称为线性反馈移位寄存器的特征多项式。该多项式 $F(x)$ 能产生 m 序列必须满足以下三个条件：

- $F(x)$ 是不可约的，即不能再分解因式；
- $F(x)$ 可整除 x^p+1 ， $p=2^n-1$ ， n 是移位寄存器级数；
- $F(x)$ 不能整除 x^q+1 ， $q < p$ ；

满足这三个条件的多项式也称为本原多项式。

- 前面的例子中， $n=4$ ，因此其特征多项式应能整除 $x^{15}+1$ ，对 $x^{15}+1$ 进行因式分解，有：

$$x^{15}+1=(x^4+x+1)(x^4+x^3+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^2+x+1)(x+1)$$

以上共得到5个不可约因式，其中有3个4阶的，而 $x^4+x^3+x^2+x+1$ 可整除 x^5+1 ，故不是本原多项式，只有 x^4+x+1 和 x^4+x^3+1 是本原多项式。

- 本原多项式可用一个八进制数来表示，如 $n=4$ ，本原多项式系数为23。

$$\begin{array}{cc} & 2 & & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

$$c_0 \ c_1 \ \quad c_2 \ c_3 \ c_4 \quad F_1(x)=c_0x^0+c_1x^1+c_2x^2+c_3x^3+c_4x^4=1+x^3+x^4$$

$$c_4 \ c_3 \ \quad c_2 \ c_1 \ c_0 \quad F_2(x)=c_0x^0+c_1x^1+c_2x^2+c_3x^3+c_4x^4=1+x+x^4$$

➤ 部分本原多项式系数

| n | 本原多项式系数的八进制表示 | |
|-----------|----------------------|-------------|
| 2 | ————— | 7 |
| 3 | ————— | 13 |
| 4 | ————— | 23 |
| 5 | ————— | 45 |
| 6 | ————— | 103 |
| 7 | ————— | 211 |
| 8 | ————— | 435 |
| 9 | ————— | 1021 |
| 10 | ————— | 2011 |

4.7.2 m序列的性质

- 由n级移位寄存器产生的m序列，其周期为 2^n-1 ；
- 除全0状态外，n级移位寄存器可能出现的不同状态都会在m序列的一个周期内出现一次，因此0、1码出现的概率大致相同，1码比0码多一个；
- 在一个序列中连续出现的相同码称为一个游程，连码的个数称为游程长度。m序列中共有 2^{n-1} 个游程，其中长度为1的游程占 $1/2$ ，长度为2的游程占 $1/4$ ，长度为k的游程占 $1/2^k$ ，最长的游程是n个连1码，次长的游程是n-1个连0码；

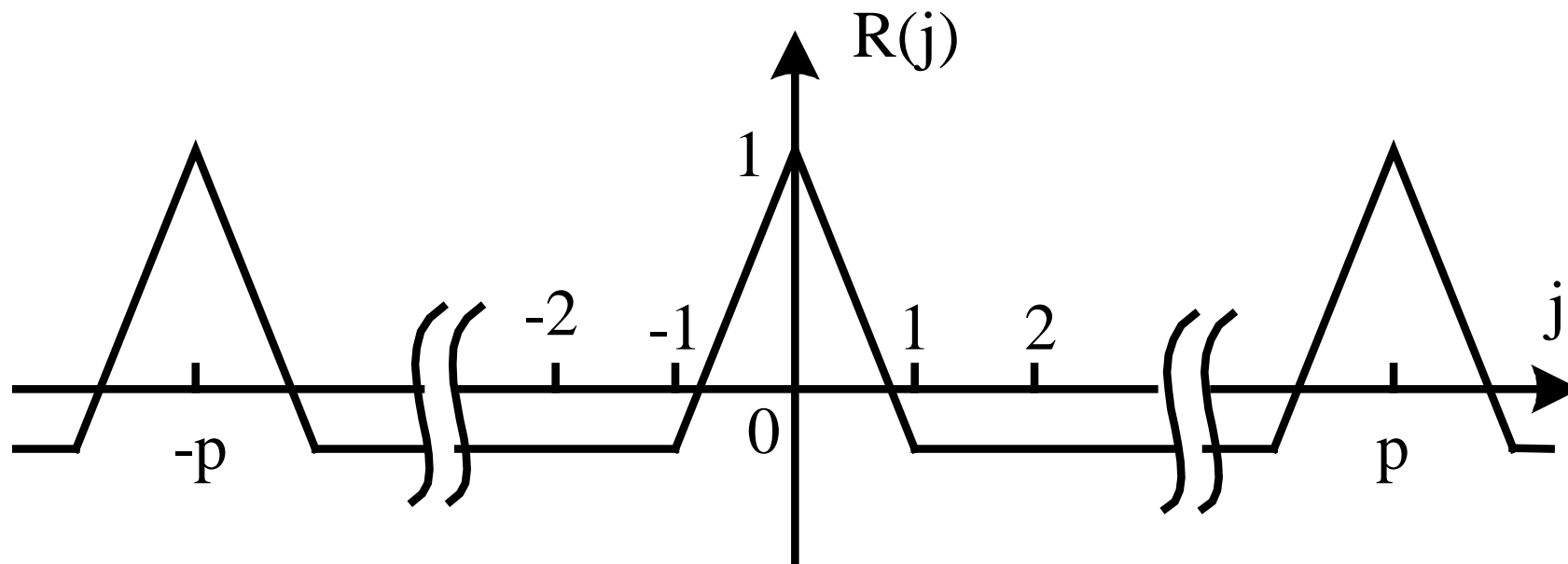
➤ **m**序列的自相关函数只有两个值。周期为**p**的**m**序列的自相关函数定义为：

$$R(j) = \frac{A - D}{A + D}$$

其中**A**和**D**分别是**m**序列与其**j**次移位的序列在一个周期中对应元素相同和不相同的数目。可以证明：一个周期为**p**的**m**序列与其任意次移位后的序列进行模2相加，其结果仍是一个周期为**p**的**m**序列，所以对应元素相同和不同的数目就是移位相加后**m**序列中**0**、**1**的数目。由于在一个周期中**0**比**1**少一个，因此有：

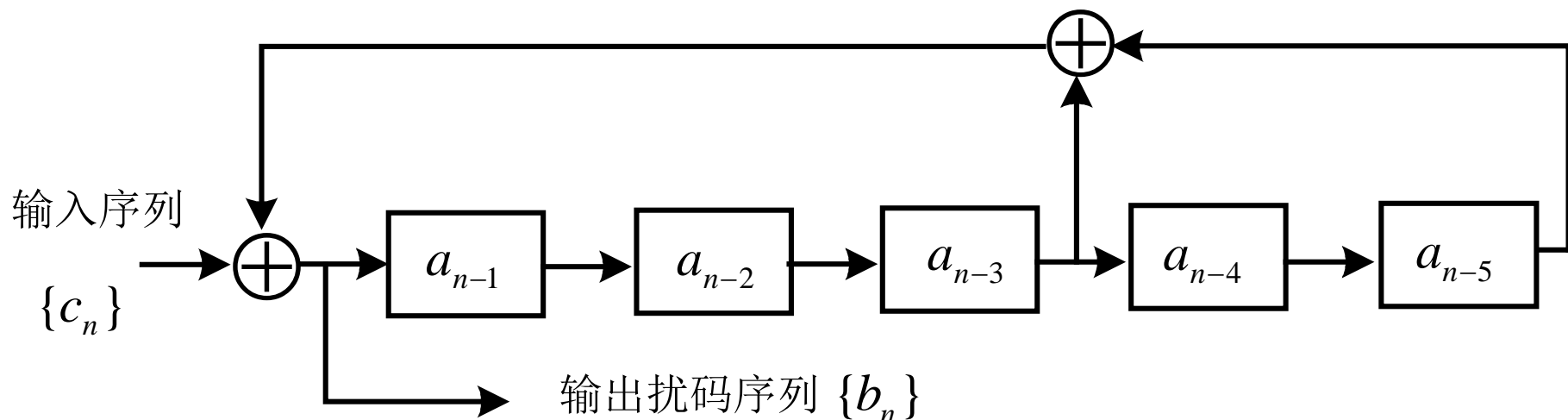
$$A - D = \begin{cases} -1 & j \neq 0 \\ p & j = 0 \end{cases} \quad R(j) = \begin{cases} 1 & j = 0 \\ -1/p & j = \pm 1, \dots, \pm(p-1) \end{cases}$$

➤ 其图形为:



4.7.3 扰码和解扰原理

- 扰码原理是以线性反馈移位寄存器理论为基础的。我们以一个五级线性反馈移位寄存器为例，在反馈逻辑输出与第一级寄存器之间引入一个模2加电路，输入序列作为一个模2加的输入，反馈逻辑值作为另一个输入，其扰码器电路如下图所示。

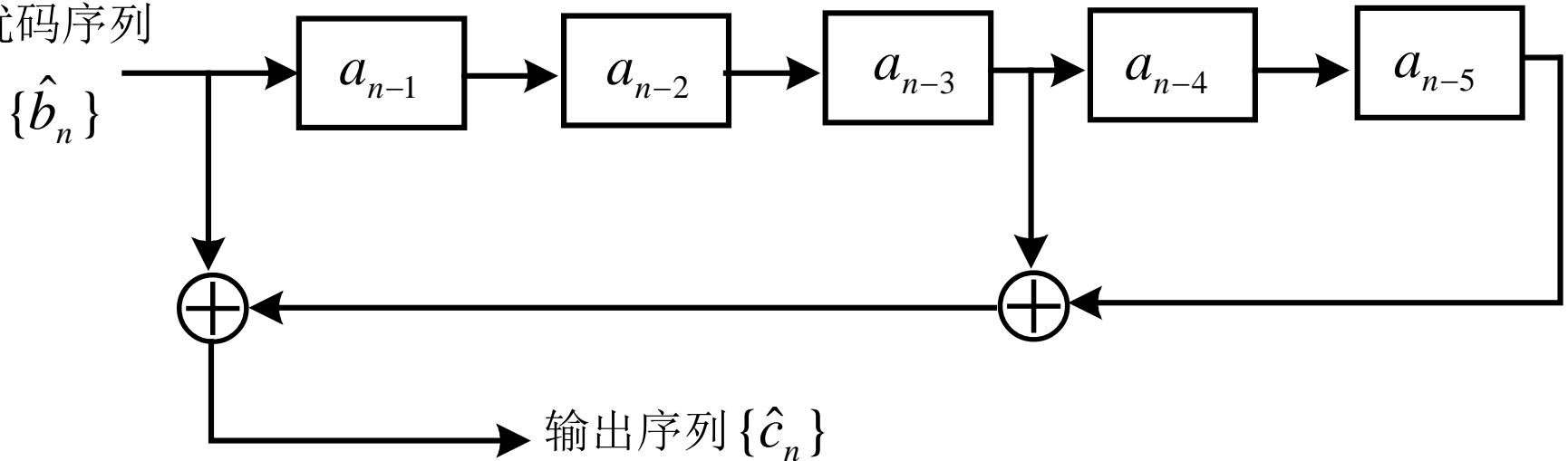


- 在上面的框图中，假设输入序列 c_n 是周期为6的序列 **000111000111**，移位寄存器的初始状态除 $a_{n-5}=1$ 外均为零，则通过计算，我们可得到输出序列 b_n 为：**100010010001101001....**，周期是**186**，由此可知，输入周期性序列经扰码器后变为周期较长的伪随机序列。

- 若输入序列 $\{c_n\}$ 是信源序列，扰码电路输出序列为 $\{b_n\}$ ， b_n 可表示为： $b_n = c_n \oplus a_{n-3} \oplus a_{n-5}$
- 解扰器中，输出序列 $\{\hat{c}_n\}$ 可表示为：

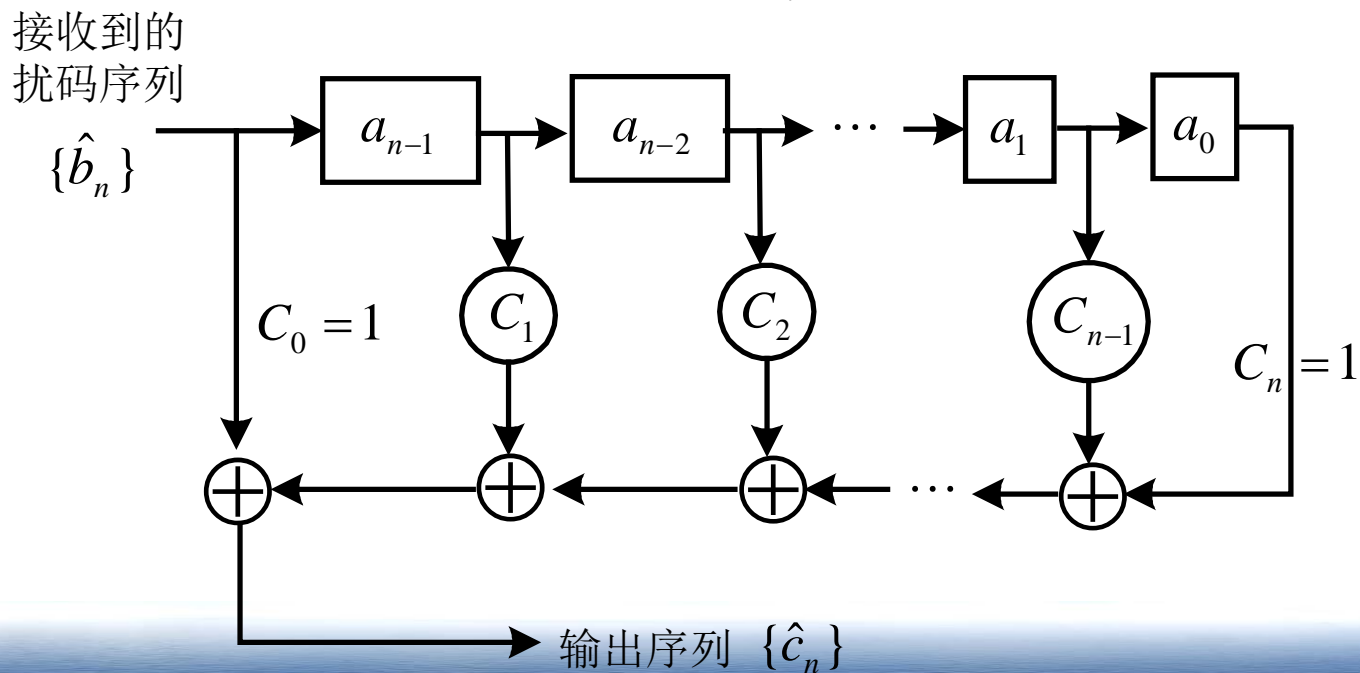
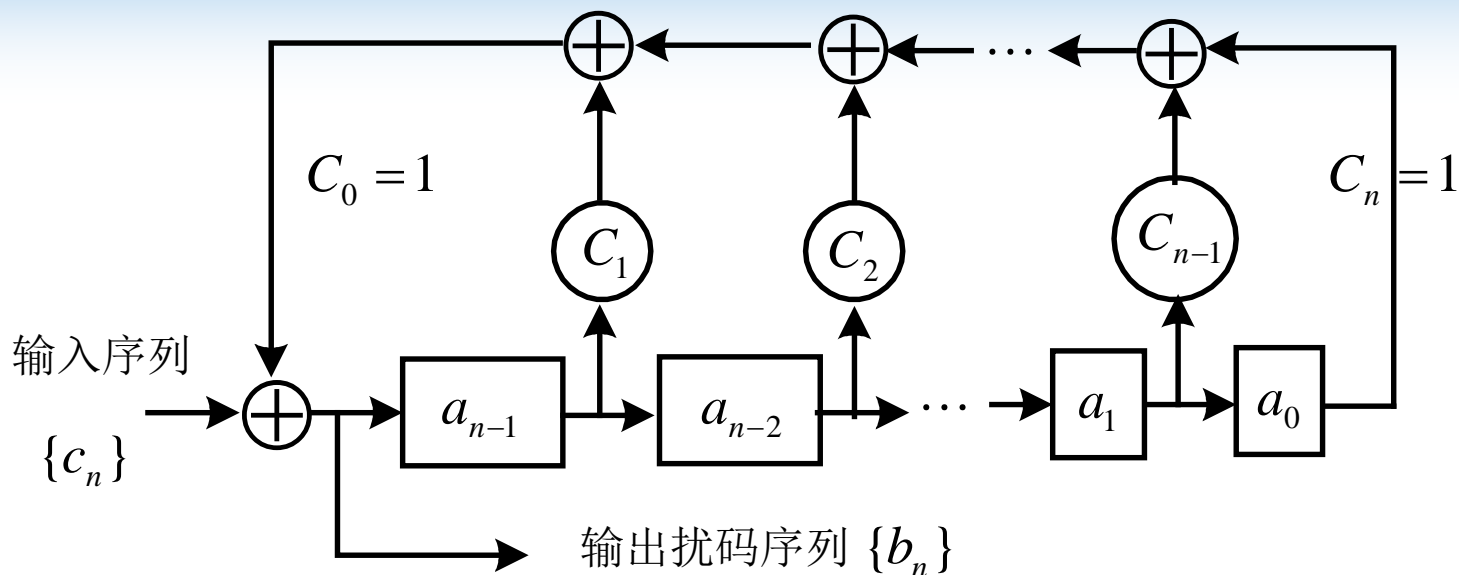
$$\hat{c}_n = \hat{b}_n \oplus a_{n-3} \oplus a_{n-5}$$

接收到的
扰码序列



如果信道状况良好，则 $\hat{b}_n = b_n$ ，这样可得 $\hat{c}_n = c_n$ 。

➤ 扰码器和解扰器的一般形式



- 由于扰码器能使任何输入序列变为伪随机序列，因此在基带传输系统中作为码型变换使用时，能限制连0码的个数。
- 采用扰码方法的主要缺点是对系统的误码性能有影响。在传输扰码序列过程中产生的单个误码会在接收端解扰器的输出端产生多个误码。误码增值是由反馈逻辑引入的，反馈系数越多，差错扩散也越多。

概念例题

❖ **例1:** 什么是码间干扰？它是如何产生的？对通信质量有什么影响？

答：它是因信道频率特性不理想引起波形畸变，从而导致实际抽样判决值是本码元脉冲波形的值与其他所有脉冲波形拖尾的叠加，并在接收端造成判决困难的现象，码间干扰值一般是一个随机变量。

造成码间干扰的原因很多，实际上，只要传输信道的频带是有限的，就会造成一定的码间干扰。码间干扰主要是由于发送滤波器至接收滤波器的传输特性不理想造成的，即对应的冲激响应在原点的抽样时刻上取值不为零而产生的。

码间干扰对通信质量的影响主要是引起码元误判，增加误码率。

❖ 例2: 为消除码间干扰, 基带传输系统的传输函数应满足什么条件?

答: 基带传输系统的传输函数应满足

$$H_{eq}(\omega) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} H\left(\omega + \frac{2\pi i}{T_s}\right) = \text{常数} \quad \left| \omega \right| \leq \frac{\pi}{T_s}$$

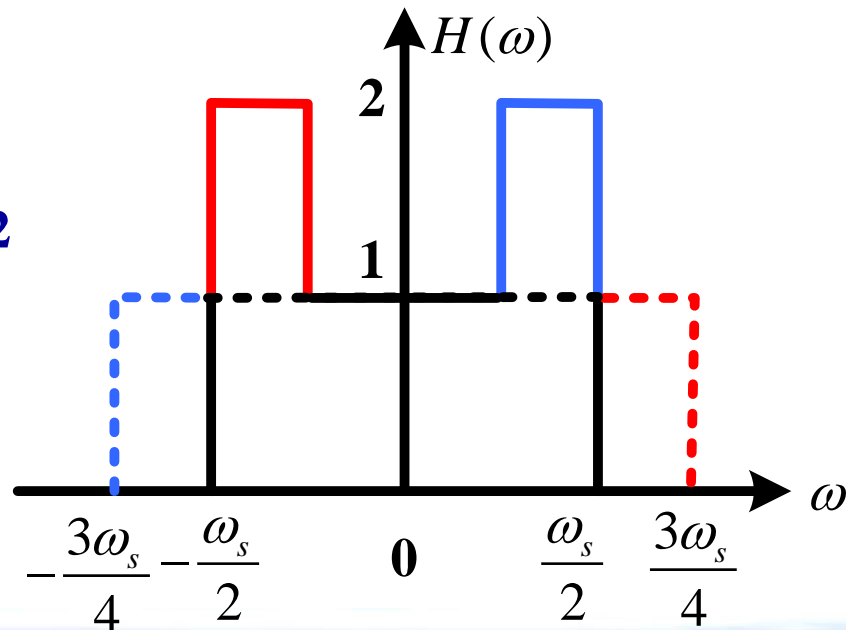
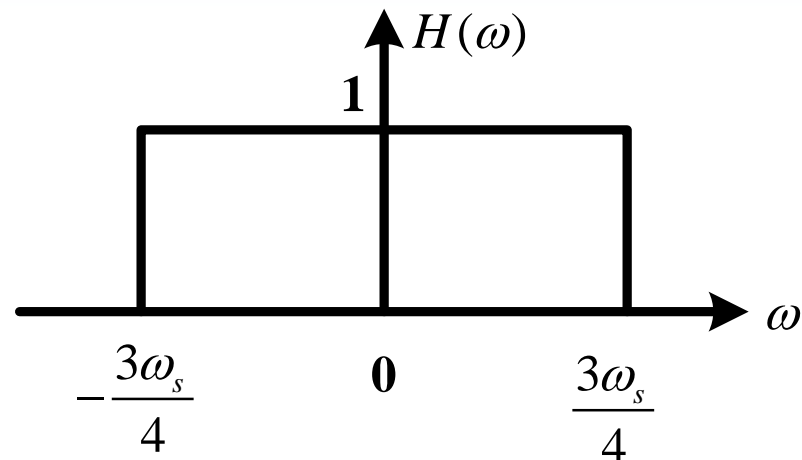
式中 $\sum_{i=-\infty}^{+\infty} H\left(\omega + \frac{2\pi i}{T_s}\right)$ 是 $H(\omega)$ 移位 $\frac{2\pi i}{T_s}$, ($i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

再相加而成。

❖ 例3: 某数字基带信号的码元间隔为 T_s , 传送它的基带传输系统的传递函数 $H(\omega)$ 如下图所示, 问此时有无码间干扰? 为什么?

答: 该系统有码间干扰。

由于数字基带信号的码间间隔为 T_s , 要保证无码间干扰则基带传输系统的传递函数 $H(\omega)$ 移位 $2\pi \cdot i/T_s = i \omega_s$ 再相加后 (即 $H_{eq}(\omega)$) 在 $[-\omega_s/2, \omega_s/2]$ 上应为常数。对于上图所示的 $H(\omega)$ 移位相加后为如下图所示, 很显然它在 $[-\omega_s/2, \omega_s/2]$ 上不是常数, 故存在码间干扰。



❖ 例4：什么是部分响应波形？

答：Nyquist第二准则指出：有控制地在某些码元的抽样时刻引入码间干扰，而在其他码元的抽样时刻无码间干扰，则能使频带利用率达到理论最大值，同时又降低了对系统定时的要求，通常把这种波形称为部分响应波形。

❖ 例5：什么是最佳判决门限电平？

答：使系统总误码率最小的判决门限电平为最佳门限电平。如在二进制传输中，当 $P(1)=P(0)=0.5$ 时，对于传送单极性基带波形的最佳判决门限电平是 $A/2$ ，双极性时是 0 。

❖ 例6：什么是频域均衡？什么是时域均衡？横向滤波器为什么能够实现时域均衡？

答：在基带系统中插入一种可调（也可不调）的滤波器，用来减小码间干扰的影响，这种起补偿作用的滤波器统称为均衡器。

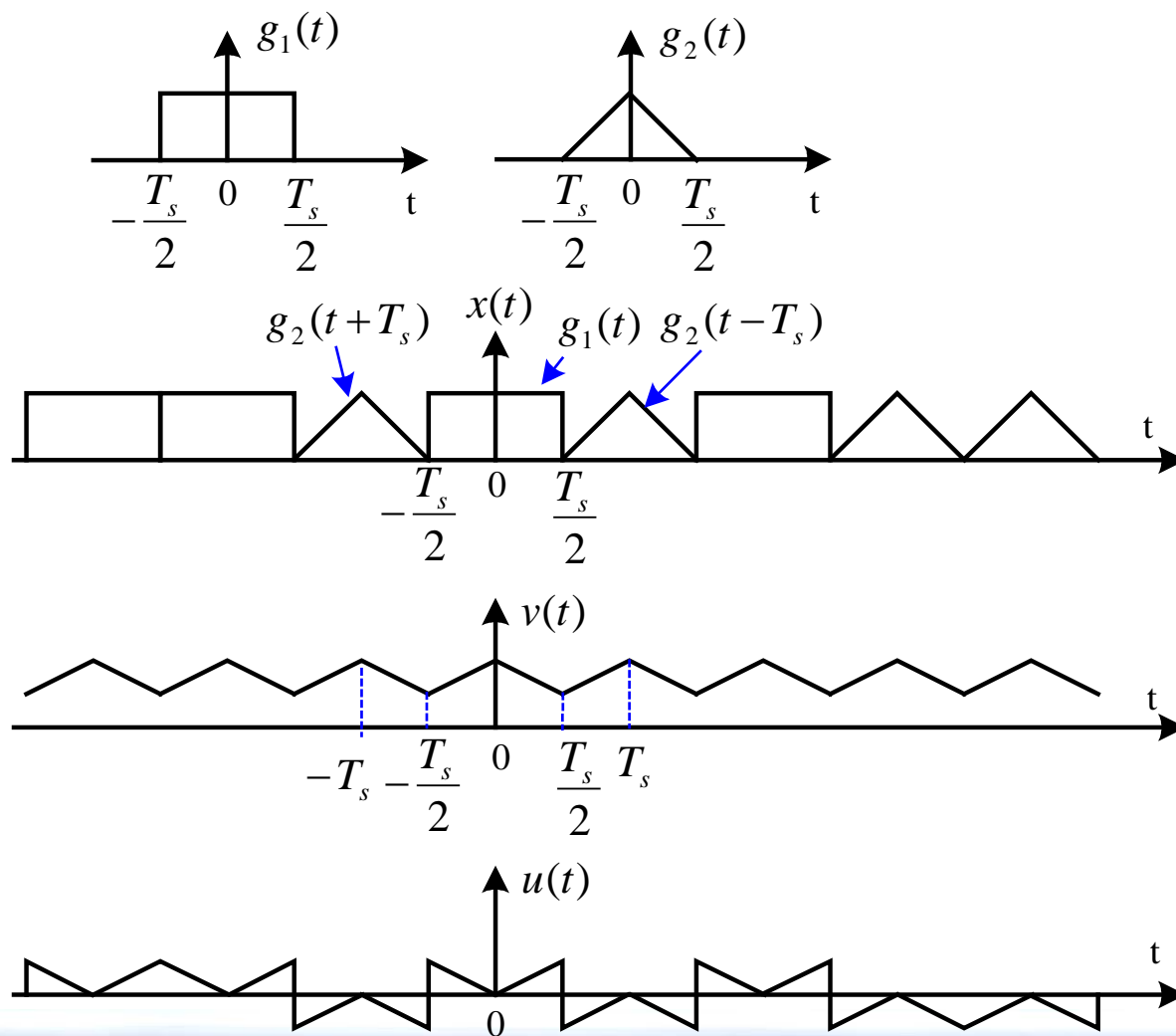
频域均衡利用可调滤波器的频率特性去补偿基带系统的频率特性，使包括可调滤波器在内的基带系统的总特性满足实际性能的要求。

时域均衡将均衡器输入端（接收滤波器的输出端）抽样时刻上有码间干扰的响应波形变换成抽样时刻上无码间干扰的响应波形。

横向滤波器是由无限多的按横向排列的延迟单元及抽头系数组成的网络，其特性完全取决于各抽头系数，如果各抽头系数是可调的，则可随时根据实际情况修改系统的时间响应并使之变成抽样时刻上无码间干扰的响应波形，从而能实现时域均衡。

❖ 附录1：基带信号功率谱公式的推导

- 一般地，我们假设二进制随机序列1码的基本波形为 $g_1(t)$ ，0码的基本波形为 $g_2(t)$



- 在前后码元统计独立的情况下，设 $g_1(t)$ 出现的概率为 P ，则 $g_2(t)$ 出现的概率为 $1-P$ ，则该随机过程可表示为：

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_n(t)$$

其中：

$$g_n(t) = \begin{cases} g_1(t - nT_s) & \text{以概率} P \text{出现} \\ g_2(t - nT_s) & \text{以概率} 1-P \text{出现} \end{cases}$$

对于任意的随机信号 $x(t)$ ，都可以将其分解为两部分：一部分为稳态分量 $v(t)$ ，另一部分为随机变化的分量 $u(t)$ ，即：
 $x(t) = v(t) + u(t)$ 。

先分别求出这两个分量的功率谱，然后就可求出 $x(t)$ 的功率谱。

- $v(t)$ 是周期性分量，是 $x(t)$ 的数学期望或统计平均分量。由于“1”、“0”码出现的概率分别为 P 和 $(1-P)$ ，因此在每一个码元间隔内“1”码平均出现 P ，“0”码平均出现 $(1-P)$ ，如在 $-T_s/2$ 到 $+T_s/2$ 这个码元间隔内，平均起来将出现 $Pg_1(t)$ 和 $(1-P)g_2(t)$ ，因此这个间隔的稳态项为 $Pg_1(t)+(1-P)g_2(t)$ ，在别的码元间隔内情况也一样，因此 $v(t)$ 的表达式可写为：

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [Pg_1(t - nT_s) + (1 - P)g_2(t - nT_s)]$$

➤ $v(t)$ 是一个以码元宽度 T_s 为周期的周期函数，可用傅立叶级数展开，有：

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} v_n e^{jn\omega_s t}$$

其中 $\omega_s = 2\pi / T_s$ ， v_n 是指数形式傅立叶级数的系数。

$$v_n = \frac{1}{T_s} \int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} v(t) e^{-jn\omega_s t} dt$$

由于 $v(t)$ 在 $-T_s/2$ 到 $+T_s/2$ 这个码元间隔内只有 $Pg_1(t)+(1-P)g_2(t)$ ，所以

$$v_n = \frac{1}{T_s} \int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} [Pg_1(t) + (1-P)g_2(t)] e^{-jn\omega_s t} dt$$

- 由于 $Pg_1(t) + (1-P)g_2(t)$ 只存在于 $-T_s/2$ 到 $+T_s/2$ 这个码元间隔内，因此上式的积分限从 $(-\infty, +\infty)$ 和从 $(-T_s/2, +T_s/2)$ 是一样的，因此

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{1}{T_s} \int_{-\infty}^{+\infty} [Pg_1(t) + (1-P)g_2(t)] e^{-jn\omega_s t} dt \\ &= \frac{1}{T_s} [PG_1(nf_s) + (1-P)G_2(nf_s)] \end{aligned}$$

- 再根据周期信号功率谱密度与 v_n 的关系式，可求得 $v(t)$ 的功率谱：

$$\begin{aligned} P_v(f) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |v_n|^2 \delta(f - nf_s) \\ &= f_s^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |PG_1(nf_s) + (1-P)G_2(nf_s)|^2 \delta(f - nf_s) \end{aligned}$$

➤ 交变分量 $u(t)$ 是 $x(t)$ 与 $v(t)$ 的差， $u(t)=x(t)-v(t)$ 是一个随机函数，如上图所示。

➤ 在某一码元间隔内 $u(t)$ 可能出现两种波形，一种是当 $x(t)$ 在此码元间隔内出现的是 $g_1(t)$ （出现的概率为 P ），此时（以 $-T_s/2$ 到 $+T_s/2$ 这个码元间隔为例）

$$\begin{aligned}u(t) &= g_1(t) - v(t) = g_1(t) - [Pg_1(t) + (1-P)g_2(t)] \\ &= (1-P)[g_1(t) - g_2(t)] \quad \text{以概率 } P \text{ 出现}\end{aligned}$$

另一种是当 $x(t)$ 在此码元间隔内出现的是 $g_2(t)$ ，出现的概率为 $(1-P)$ ，此时（也以 $-T_s/2$ 到 $+T_s/2$ 这个码元间隔为例）

$$\begin{aligned}u(t) &= g_2(t) - v(t) = g_2(t) - [Pg_1(t) + (1-P)g_2(t)] \\ &= -P[g_1(t) - g_2(t)] \quad \text{以概率 } (1-P) \text{ 出现}\end{aligned}$$

➤ 写成普遍式为：
$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n(t)$$

其中 $u_n(t) = \begin{cases} (1-P)[g_1(t-nT_s) - g_2(t-nT_s)] & \text{以概率 } P \text{ 出现} \\ -P[g_1(t-nT_s) - g_2(t-nT_s)] & \text{以概率 } 1-P \text{ 出现} \end{cases}$

或者写成：
$$u_n(t) = a_n [g_1(t-nT_s) - g_2(t-nT_s)]$$

其中：
$$a_n = \begin{cases} 1-P & \text{以概率 } P \text{ 出现} \\ -P & \text{以概率 } (1-P) \text{ 出现} \end{cases}$$

- 求它的功率谱密度 $P_u(f)$ 时要采用截短函数的方法和求统计平均的方法。

$$P_u(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E[|U_T(f)|^2]}{T}$$

其中T是对u(t)进行任意截取的时间间隔，E是取统计平均的符号， $U_T(f)$ 是u(t)中截取的那一段截短信号 $u_T(t)$ 的频谱函数。

$$u_T(t) = \sum_{n=-N}^N u_n(t)$$

$$U_T(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_T(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

$$= \sum_{n=-N}^{+N} a_n \int_{-\infty}^{+\infty} [g_1(t - nT_s) - g_2(t - nT_s)] e^{-j2\pi ft} dt$$

$$= \sum_{n=-N}^{+N} a_n e^{-jn2\pi fT_s} [G_1(f) - G_2(f)]$$

式中:

$$G_1(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

$$G_2(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_2(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

$$|U_T(f)|^2 = U_T(f) U_T^*(f)$$

$$= \sum_{m=-N}^{+N} \sum_{n=-N}^{+N} a_m a_n e^{j(n-m)2\pi fT_s} \cdot [G_1(f) - G_2(f)][G_1^*(f) - G_2^*(f)]$$

其统计平均值:

$$E[|U_T(f)|^2]$$

$$= \sum_{m=-N}^{+N} \sum_{n=-N}^{+N} E(a_m a_n) e^{j(n-m)2\pi fT_s} \cdot [G_1(f) - G_2(f)][G_1^*(f) - G_2^*(f)]$$

当 $m=n$ 时, $a_m a_n = a_m^2 = \begin{cases} (1-P)^2 & \text{以概率}P\text{出现} \\ P^2 & \text{以概率}(1-P)\text{出现} \end{cases}$

所以 $E[a_m a_n] = P^2 (1-P)^2 + (1-P)^2 P^2 + 2P(1-P)(P-1)P = 0$

$$E[|U_T(f)|^2] = (2N+1)P(1-P) |G_1(f) - G_2(f)|^2$$

$$\begin{aligned} P_u(f) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E[|U_T(f)|^2]}{T} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{(2N+1)P(1-P) |G_1(f) - G_2(f)|^2}{(2N+1)T_s} \\ &= f_s \cdot P(1-P) |G_1(f) - G_2(f)|^2 \end{aligned}$$

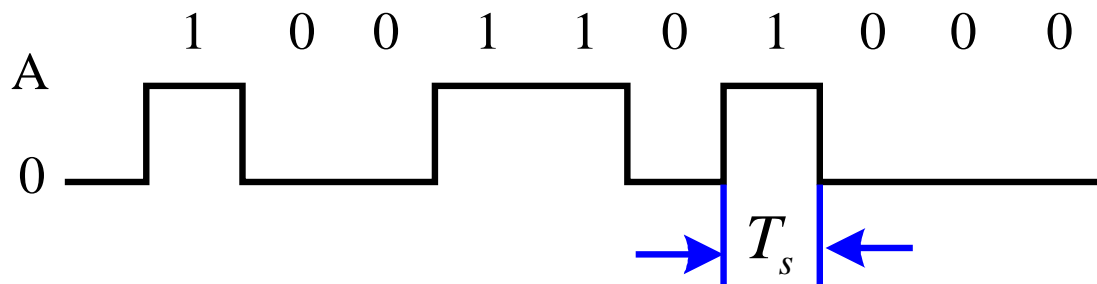
由于 $\mathbf{x}(t)=\mathbf{v}(t)+\mathbf{u}(t)$, 由此可得 $\mathbf{x}(t)$ 的双边功率谱密度:

$$\begin{aligned} P_x(f) &= P_v(f) + P_u(f) \\ &= f_s^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |PG_1(nf_s) + (1-P)G_2(nf_s)|^2 \delta(f - nf_s) + f_s \cdot P(1-P) |G_1(f) - G_2(f)|^2 \end{aligned}$$

➤ $P_x(f)$ 公式中各符号的意义

- $f_s=1/T_s$ ，码元重复频率。
- P 是“1”码出现的概率， $(1-P)$ 是“0”码出现的概率，如果等概，则 $P=0.5$ ；
- $G_1(f)$ 和 $G_2(f)$ 分别为“1”码和“0”码的基本波形 $g_1(t)$ 和 $g_2(t)$ 的频谱函数，而 $G_1(nf_s)$ 和 $G_2(nf_s)$ 是当 $f=nf_s$ 时 $g_1(t)$ 和 $g_2(t)$ 的频谱函数， n 是正整数， nf_s 是 f_s 的各次谐波。

➤ 例1 求0, 1等概的单极性不归零码的功率谱。已知单个1码的波形是幅度为 A 的矩形脉冲，时域波形如下图所示。



解：二元码的表达式为

$$g_n(t) = \begin{cases} g_1(t - nT_s) & \text{以概率} P \text{出现} \\ g_2(t - nT_s) & \text{以概率} 1 - P \text{出现} \end{cases}$$

设单个1码的波形为 $g_1(t)$ ，单个0码的波形为 $g_2(t)$ 。由条件知 $g_2(t) = 0$ ，所以 $G_2(f) = 0$ ，而 $g_1(t)$ 为矩形脉冲。设 $g(t)$ 为幅度为1的矩形脉冲，则：

$$g_1(t) = Ag(t)$$

$$G_1(f) = AG(f)$$

代入表达式，可得功率谱表达式

$$P(f) = \frac{f_s}{4} |AG(f)|^2 + \frac{f_s^2}{4} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |AG(nf_s)|^2 \delta(f - nf_s)$$

➤ 离散谱是否存在，取决于频谱函数 $G(f)$ 在 $f = nf_s$ 的取值。 $G(f)$ 的表达式为：

$$G(f) = \frac{1}{f_s} \text{Sa}\left(\frac{\pi f}{f_s}\right)$$

当 $f = nf_s$ 时， $G(nf_s)$ 有以下几种取值情况：

- (1) $n=0$ 时， $G(nf_s) = T_s \text{Sa}(0)$ ，因此离散谱中有直流分量；
- (2) n 是不为零的整数时， $G(nf_s) = T_s \text{Sa}(n) = 0$ ，离散谱均为零；

$$P(f) = \frac{A^2}{4f_s} \text{Sa}^2\left(\frac{\pi f}{f_s}\right) + \frac{A^2}{4} \delta(f)$$



作业

❖ P125~126.

- 3.1(a)、(b)、(c)、(d)
- 3.4
- 3.5
- 3.7
- 3.8
- 3.9
- 3.10
- 3.18