第九章 Polar码

本章内容

- Polar码简介
- 信道极化
- Polar码的编码
- Polar码的译码

Polar码简介

- Polar码是由土耳其Bilkent大学教授Erdal Arikan于2007年基于信道极化理论提出的一种线性信道编码方法，该码字是唯一能够从理论上达到香农限的编码方法，并具有较低的编译码复杂度，当码长为N时，复杂度为O(NlogN)。Polar码的核心思想就是信道极化理论，不同的信道对应的极化方法也有区别。

- **Polar**码的理论基础就是信道极化，它包括信道合并和信道分解两部分。当合并信道的数目趋于无穷大时，则会出现极化现象：一部分信道将趋于无噪信道，另外一部分则趋于全噪信道，这种现象就是信道极化。无噪信道的传输速率会达到信道容量**I(W)**，而全噪信道的传输速率趋于**0**。**Polar**码的编码策略正是应用了这种现象的特性，利用无噪信道传输用户的有用信息，全噪信道传输约定的信息或者不传信息。
- 基于信道极化理论提出的极化码，是第一类被证明在码长无限长时、采用逐次消除译码算法可严格达到二元对称信道容量的信道编码方案。

- 二进制离散无记忆信道（**BDMC**）有两个主要的信道参数：信道容量和**Bhattacharyya**参数。

- 给定一个**BDMC**信道**W**：**X→Y**，**X**和**Y**为输入和输出，令**P(Y|X)**为信道转移概率，其中**X**∈**{0,1}**。对于信道**W**，信道容量**I(W)**和**Bhattacharyya**参数**Z(W)**（简记为**Z**参数）分别为：

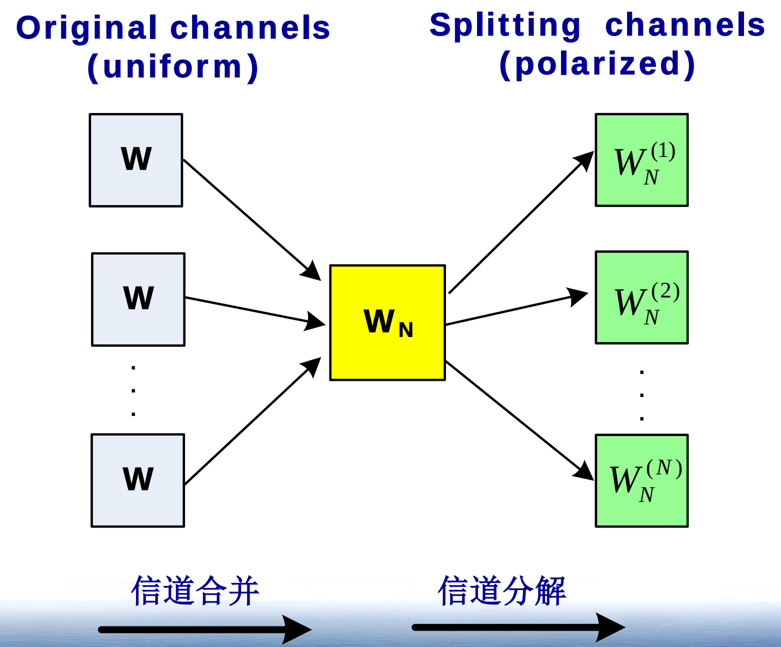
$$I(W)=\sum_{y\in Y}\sum_{x\in X}\frac{1}{2}P(y|x)\log\frac{P(y|x)}{\frac{1}{2}P(y|0)+\frac{1}{2}P(y|1)}$$

$$Z(W)=\sum_{y\in Y}\sqrt{P(y|0)P(y|1)}$$

- 这两个参数分别用于速率和可靠性的衡量。**I(W)**是等概信源通过信道**W**可靠传输的最高速率。巴氏参数**Z(W)**是信道使用一次最大似然判决错误概率的上限。**I(W)**和**Z(W)**的取值范围都为**[0,1]**，当**I(W)≈1**时，**Z(W)=0**；**Z(W)≈1**时，**I(W)=0**。

信道极化过程

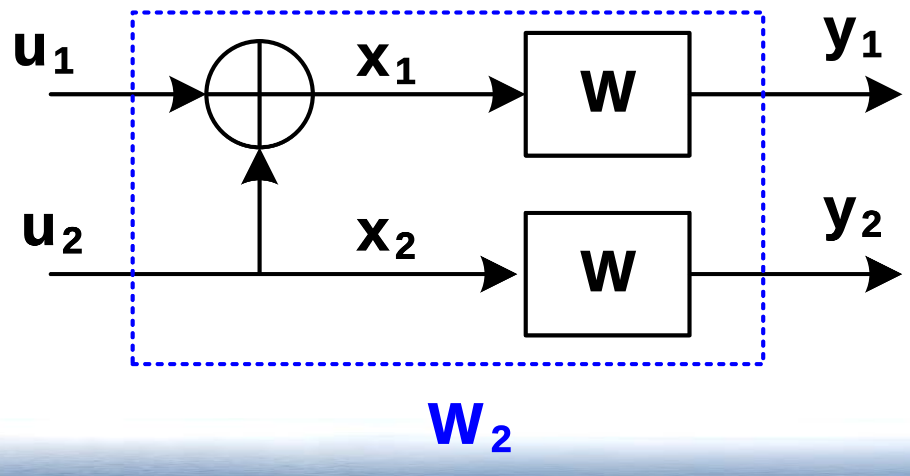
- 信道极化过程包括信道合并和信道分解。将N个BDMC信道W通过线性变换合并成W_N，然后再将W_N拆分为相关的信道 $\{W_N^{(i)}:1\le i\le N\}$，就是信道极化现象的具体实现过程。信道极化是当信道容量I(W)在N趋于无穷时，一部分的信道容量接近1，而另一部分的信道容量趋于0，这样可以在完美信道上发送信息比特，在噪声信道上发送休眠比特（一般为0）。



N既是信息序列的长度，也是编码序列的长度。

极化码的编码

- 信道合并是对N个独立的二进制离散信道W使用递归方式生成信道W_N：$X^N \rightarrow Y^N$，其中$N=2^n$，$n\geq 0$。递归从第0级(n=0)开始，这一级只有一个W，定义$W_1=W$。递归的第1级(n=1)是合并两个独立的W_1，得到W_2：$X^2 \rightarrow Y^2$，W_2的转移概率为:
- $W_2(y_1,y_2|u_1,u_2)=W(y_1|u_1\oplus u_2)W(y_2|u_2)$



$x_1=u_1\oplus u_2$，$x_2=u_2$

$$[x_1,x_2]=[u_1,u_2]\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

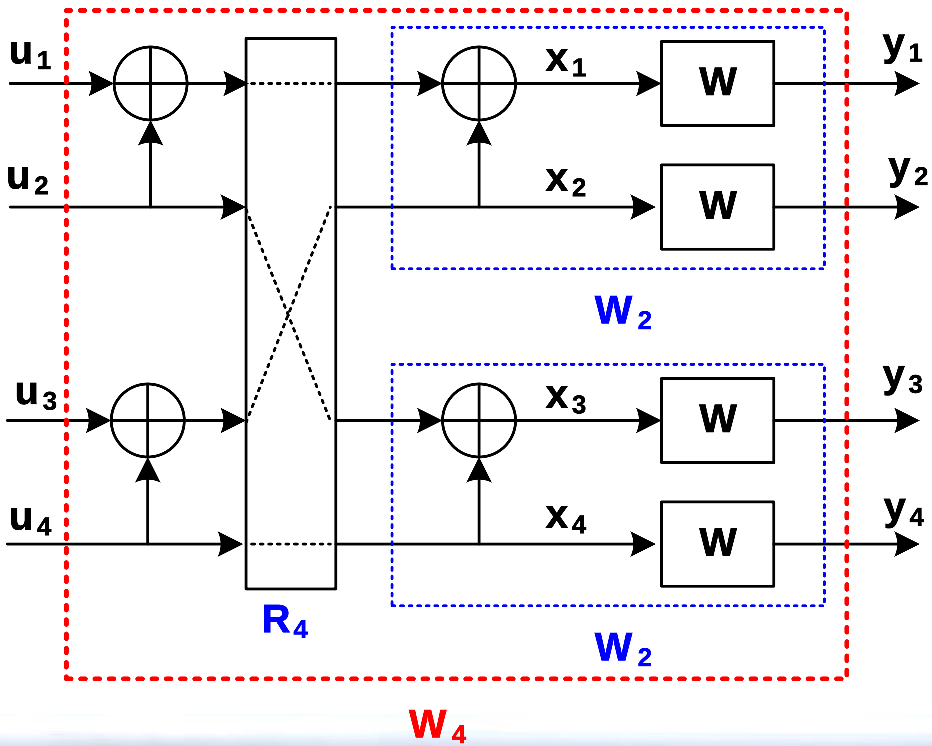
$$=[u_1,u_2]G_2$$

❖ n=2时有 W_4： $x^4 \rightarrow y^4$，这时它是由两个n=1的 W_2： $x^2 \rightarrow y^2$信道复合而成，转移概率为

$$W_4\left(y_1^4 \mid u_1^4\right)=W_2\left(y_1^2 \mid u_1 \oplus u_2, u_3 \oplus u_4\right) W_2\left(y_3^4 \mid u_2, u_4\right)$$

$$=W\left(y_1 \mid u_1 \oplus u_2 \oplus u_3 \oplus u_4\right) W\left(y_2 \mid u_3 \oplus u_4\right) W\left(y_3 \mid u_2 \oplus u_4\right) W\left(y_4 \mid u_4\right)$$

$$=W^4\left(y_1^4 \mid u_1^4 G_4\right)$$



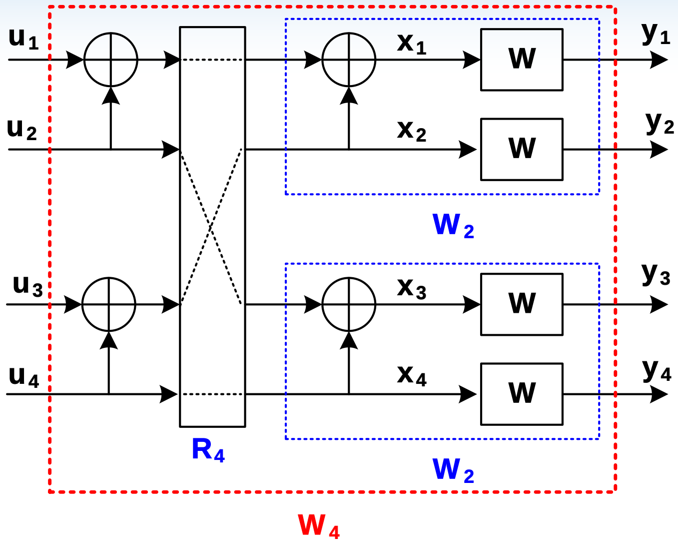
$$[x_1, x_2, x_3, x_4]=[u_1, u_2, u_3, u_4]\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

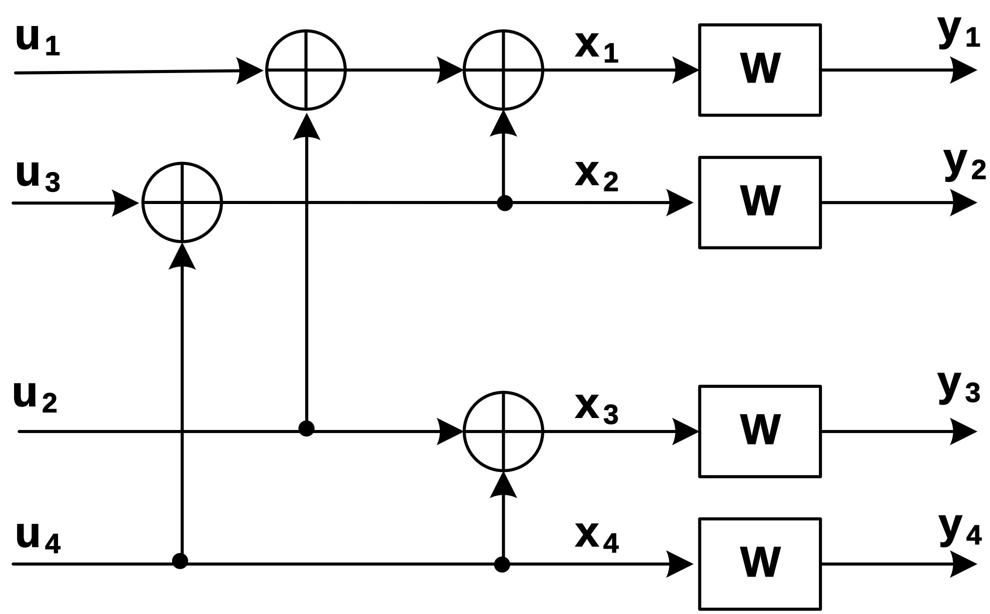
$$=[u_1, u_2, u_3, u_4] G_4$$

$$W^N\left(y_1^N \mid x_1^N\right)=\prod_{i=1}^N W\left(y_i \mid x_i\right)$$

$$W_N\left(y_1^N \mid x_1^N\right)=W^N\left(y_1^N \mid u_1^N G_N\right)$$

如果把线拉直，则为下图所示

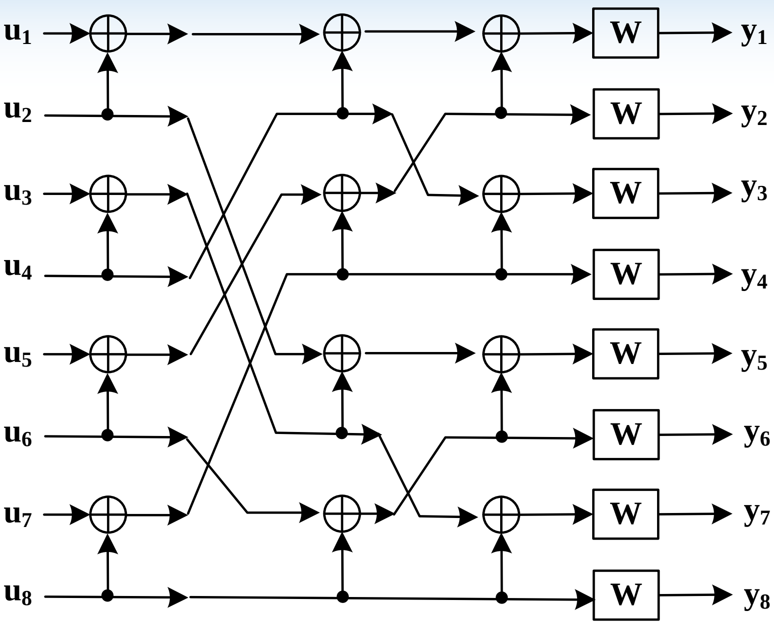




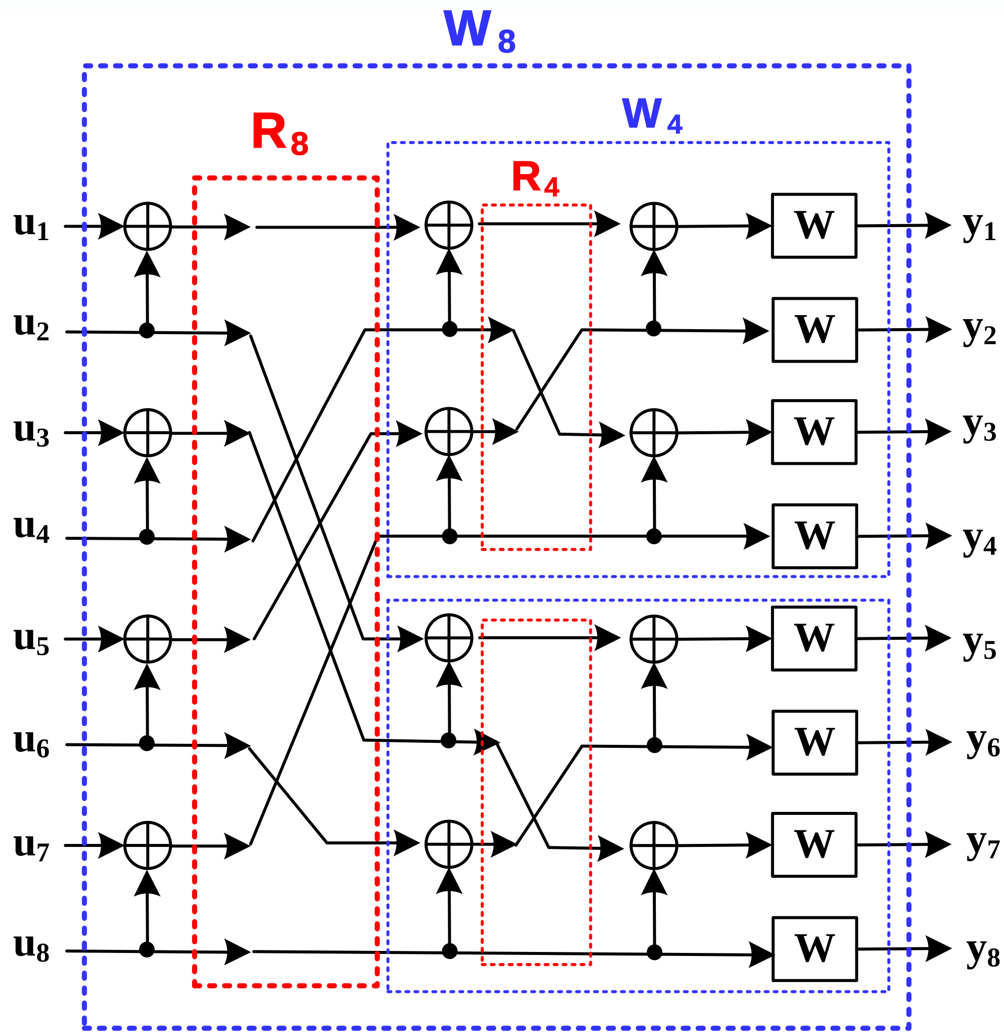
$$G_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{u}G_4$$

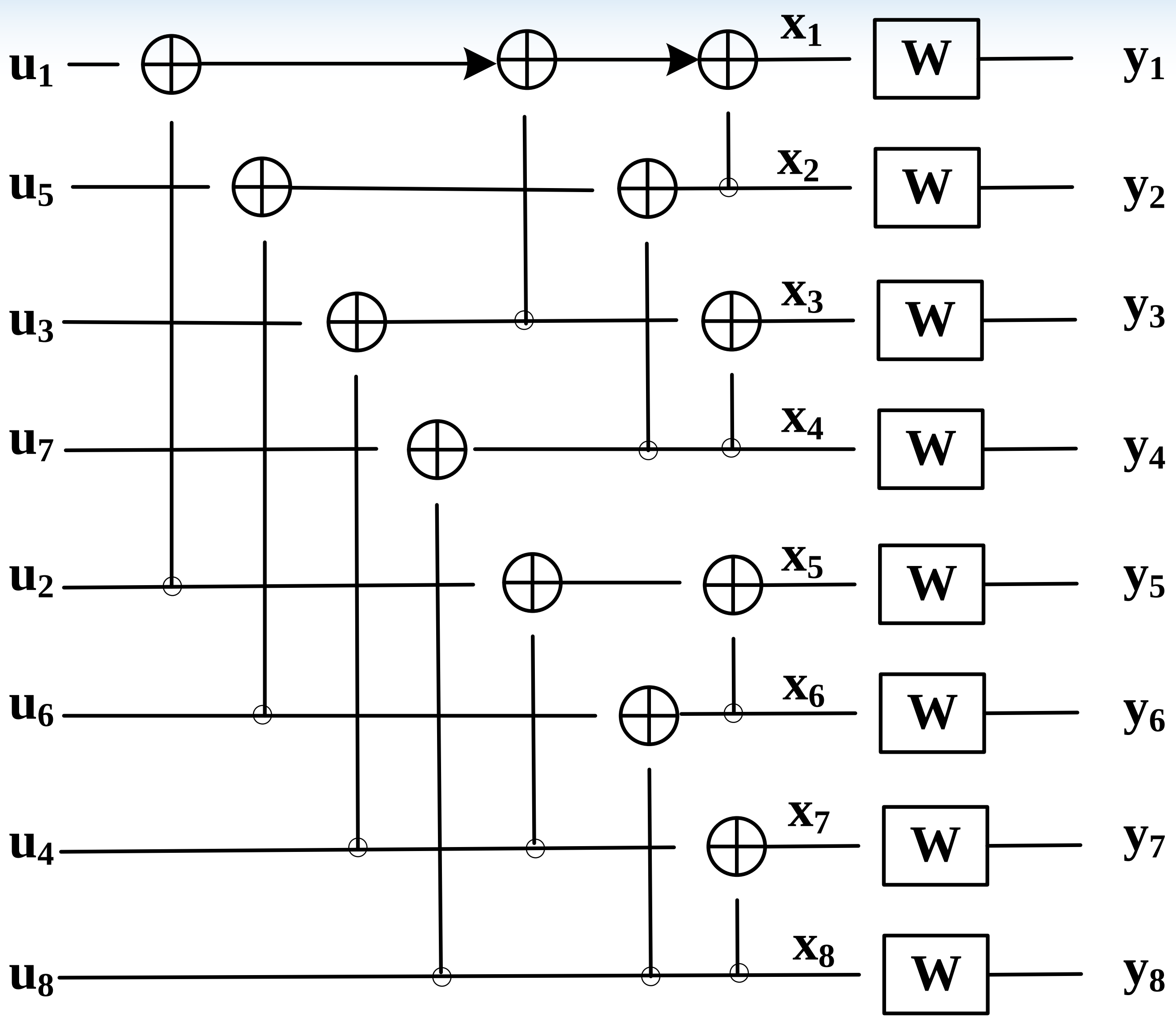
❖ W_8



$$G_8 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



❖ 把线拉直后为：



$$\mathbf{x} = \mathbf{u}G_8$$

❖ 推广到一般情况，信道转移概率为：

$$W_N\left(y_1^N \mid x_1^N\right)=W^N\left(y_1^N \mid u_1^N G_N\right)$$

所以极化编码器的递归构造为：$G_N = B_N F^{\otimes n}$

其中 $B_N = R_N\left(I_2 \otimes B_{N/2}\right)$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

说明： $N = 2^n$ $B_2 = I_2$

$$F^{\otimes 2} = F \otimes F$$

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1N}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2N}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1}B & a_{N2}B & \cdots & a_{NN}B \end{bmatrix}$$

B_N是一个比特翻转向量

R_N是一个排列运算，即实现将奇数位放在前面，偶数位放在后面。$[1\ 3\ 2\ 4] = [1\ 2\ 3\ 4]R_4$

$$R_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

❖ **例题：** $G_N = B_N F^{\otimes n} \qquad B_N = R_N\left(I_2 \otimes B_{N/2}\right)$

$$G_2 = B_2 F^{\otimes 1} = I_2 F = F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G_4 = B_4 F^{\otimes 2}$$

$$F^{\otimes 2} = F \otimes F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_4 = R_4\left(I_2 \otimes B_{4/2}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

❖ 编码矩阵的规律

$$G_N = \begin{bmatrix} G_{\frac{N}{2}Z} \\ G_{\frac{N}{2}R} \end{bmatrix} \qquad G_N = G_N^{-1} \qquad G_N \cdot G_N^{-1} = I_N$$

其中 $G_{\frac{N}{2}Z}$ 是在 $G_{\frac{N}{2}}$ 的每个元素后添加**0**，而 $G_{\frac{N}{2}R}$ 是对 $G_{\frac{N}{2}}$ 的每个元素重复。

❖ 例如：

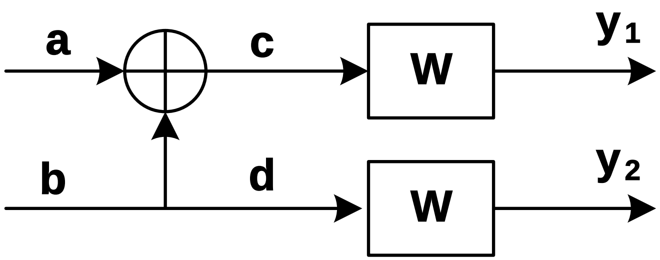
$$G_4 = \begin{bmatrix} G_{2Z} \\ G_{2R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G_{2Z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

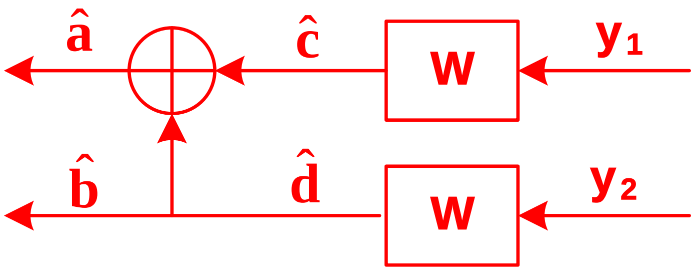
$$G_{2R} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

极化码的译码

- 极化码的编码器最小单元如图（a）所示，它所对应的译码器最小单元如图（b）所示。



（a）



（b）

- $\hat{c}$ 和 $\hat{d}$ 是估计的编码比特，译码过程就是利用估计的编码比特恢复出原始发送的信息比特 $\hat{a}$ 和 $\hat{b}$ 。W可看作是信道输入输出之间的概率矩阵。

$$\hat{a}=\hat{c}+\hat{d} \qquad \hat{b}=\hat{d}$$

$$\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{c} + \hat{\mathbf{d}} \qquad \hat{\mathbf{b}} = \mathbf{d}$$

- 如果 $\hat{\mathbf{c}} = 0, \hat{\mathbf{d}} = 0$ 或 $\hat{\mathbf{c}} = 1, \hat{\mathbf{d}} = 1$，则 $\hat{\mathbf{a}} = 0$ ，即

$$P(\hat{\mathbf{a}} = 0) = P(\mathbf{c} = 0) P\left(\hat{\mathbf{d}} = 0\right) + P(\mathbf{c} = 1) P\left(\mathbf{d} = 1\right)$$

- 如果 $\hat{\mathbf{c}} = 0, \hat{\mathbf{d}} = 1$ 或 $\hat{\mathbf{c}} = 1, \hat{\mathbf{d}} = 0$，则 $\hat{\mathbf{a}} = 1$ ，即

$$P(\hat{\mathbf{a}} = 1) = P(\mathbf{c} = 0) P\left(\hat{\mathbf{d}} = 1\right) + P(\mathbf{c} = 1) P\left(\mathbf{d} = 0\right)$$

- $\hat{\mathbf{a}}$ 的似然比为:

$$LR(\hat{\mathbf{a}}) = \frac{P(\hat{\mathbf{a}} = 0)}{P(\hat{\mathbf{a}} = 1)} = \frac{P(\hat{\mathbf{c}} = 0) P\left(\hat{\mathbf{d}} = 0\right) + P(\mathbf{c} = 1) P\left(\mathbf{d} = 1\right)}{P(\hat{\mathbf{c}} = 0) P\left(\hat{\mathbf{d}} = 1\right) + P(\mathbf{c} = 1) P\left(\mathbf{d} = 0\right)}$$

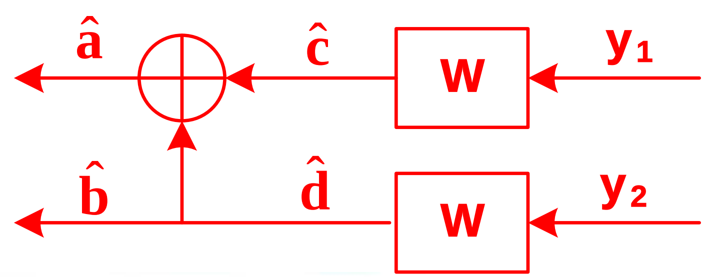
- 分子分母同时除以 $P(\hat{\mathbf{c}} = 1) P\left(\hat{\mathbf{d}} = 1\right)$

$$LR(\hat{\mathbf{a}})=\frac{P(\hat{\mathbf{a}}=0)}{P(\hat{\mathbf{a}}=1)}=\frac{\dfrac{P(\hat{\mathbf{c}}=0)P(\hat{\mathbf{d}}=0)+P(\mathbf{c}=1)P(\mathbf{d}=1)}{P(\hat{\mathbf{c}}=1)P(\hat{\mathbf{d}}=1)}}{\dfrac{P(\hat{\mathbf{c}}=0)P(\hat{\mathbf{d}}=1)+P(\mathbf{c}=1)P(\mathbf{d}=0)}{P(\hat{\mathbf{c}}=1)P(\hat{\mathbf{d}}=1)}}$$

$$=\frac{1+LR(\hat{\mathbf{c}})LR(\hat{\mathbf{d}})}{LR(\hat{\mathbf{c}})+LR(\hat{\mathbf{d}})}$$

>1，判为0

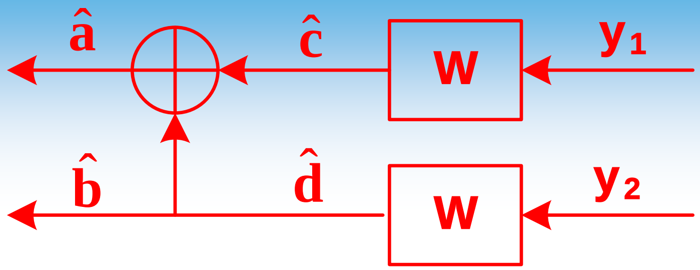
- 这样就可计算出 $\hat{\mathbf{a}}$ 。如果想计算 $\hat{\mathbf{b}}$ ，则从下图可知，$\hat{\mathbf{b}}$ 的值与 $\hat{\mathbf{a}}$ 和 $\hat{\mathbf{c}}$ 都有关系。



$$\hat{\mathbf{a}}=\hat{\mathbf{c}}+\hat{\mathbf{b}}\Rightarrow\hat{\mathbf{b}}=\mathbf{a}+\mathbf{c}$$

$$\hat{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{c}} + \hat{\mathbf{b}} \Rightarrow \hat{\mathbf{b}} = \mathbf{a} + \mathbf{c}$$

$$\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{d}$$



❖ 如果 $\hat{\mathbf{a}} = 0$，要想使 $\hat{\mathbf{b}} = 0$ ，则必须 $\hat{\mathbf{c}} = 0$ ； $\hat{\mathbf{b}} = 1$ 则 $\hat{\mathbf{c}} = 1$

$$P_{\hat{\mathbf{a}}=0}\left(\hat{\mathbf{b}} = 0\right) = P\left(\hat{\mathbf{c}} = 0\right) P\left(\hat{\mathbf{d}} = 0\right)$$

$$P_{\hat{\mathbf{a}}=0}\left(\hat{\mathbf{b}} = 1\right) = P\left(\hat{\mathbf{c}} = 1\right) P\left(\hat{\mathbf{d}} = 1\right)$$

$$LR_{\hat{\mathbf{a}}=0}\left(\hat{\mathbf{b}}\right) = \frac{P_{\hat{\mathbf{a}}=0}\left(\hat{\mathbf{b}} = 0\right)}{P_{\hat{\mathbf{a}}=0}\left(\hat{\mathbf{b}} = 1\right)} = \frac{P\left(\hat{\mathbf{c}} = 0\right) P\left(\hat{\mathbf{d}} = 0\right)}{P\left(\hat{\mathbf{c}} = 1\right) P\left(\hat{\mathbf{d}} = 1\right)} = LR\left(\hat{\mathbf{c}}\right) LR\left(\hat{\mathbf{d}}\right)$$

❖ 同理，可得 $$LR_{\hat{\mathbf{a}}=1}\left(\hat{\mathbf{b}}\right) = \frac{P_{\hat{\mathbf{a}}=1}\left(\hat{\mathbf{b}} = 0\right)}{P_{\hat{\mathbf{a}}=1}\left(\hat{\mathbf{b}} = 1\right)} = \frac{LR\left(\hat{\mathbf{d}}\right)}{LR\left(\hat{\mathbf{c}}\right)}$$

- 统一的式子为： $LR(\hat{\mathbf{b}}) = \left[LR(\hat{\mathbf{c}})\right]^{1-2\hat{\mathbf{a}}} LR(\mathbf{d})$

- 为了方便起见，我们用a、b、c、d代替 $\hat{\mathbf{a}}$ 、$\hat{\mathbf{b}}$ 、$\hat{\mathbf{c}}$ 、$\hat{\mathbf{d}}$ 。

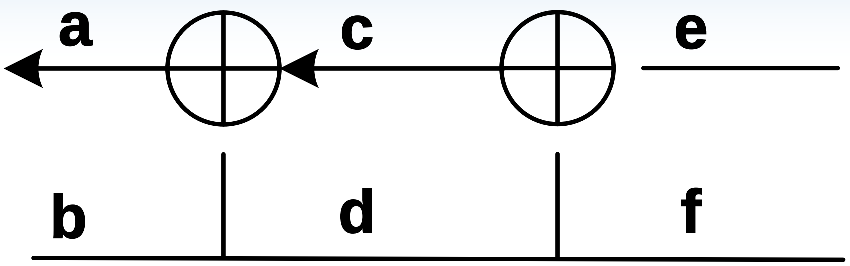
- 举例：假设编码器和译码单元如下

- 如果 $LR(c)=10$ ，$LR(d)=0.1$ ，求a和b的值

$$LR(a)=\frac{P(a=0)}{P(a=1)}=\frac{1+LR(c)LR(d)}{LR(c)+LR(d)}=\frac{1+10*0.1}{10+0.1}\approx 0.2 \Rightarrow a=1$$

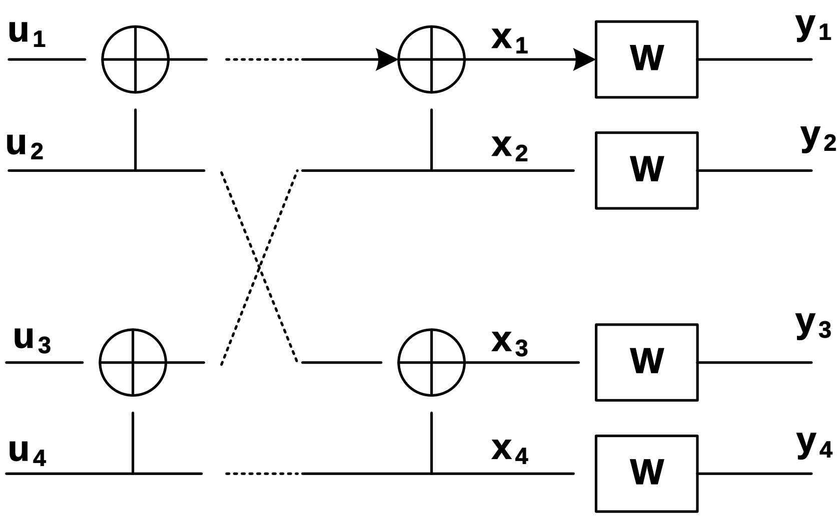
$$LR(b)=\left[LR(c)\right]^{1-2a} LR(d)=0.01 \Rightarrow b=1$$

❖ 练习1：如果LR(e)=10，LR(f)=0.1，求a、b、c、d的值

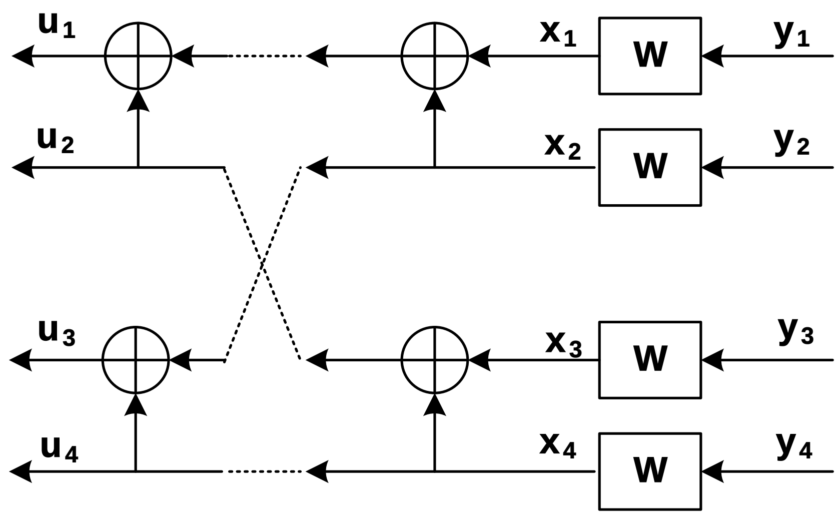


基于树图的连续消除译码算法

- 以N=4为例，编码器及其反过程如下图所示

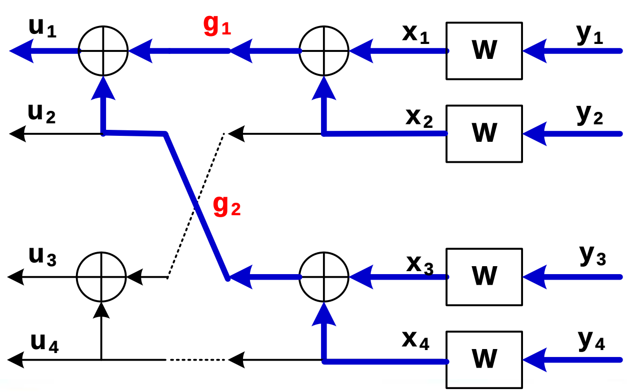


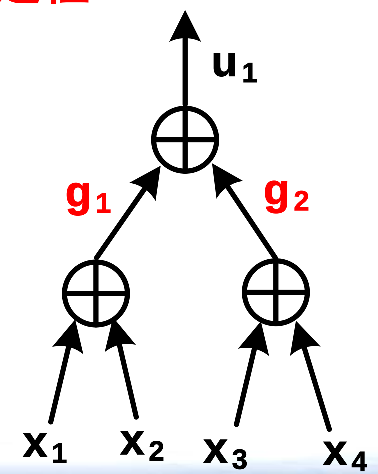
编码过程



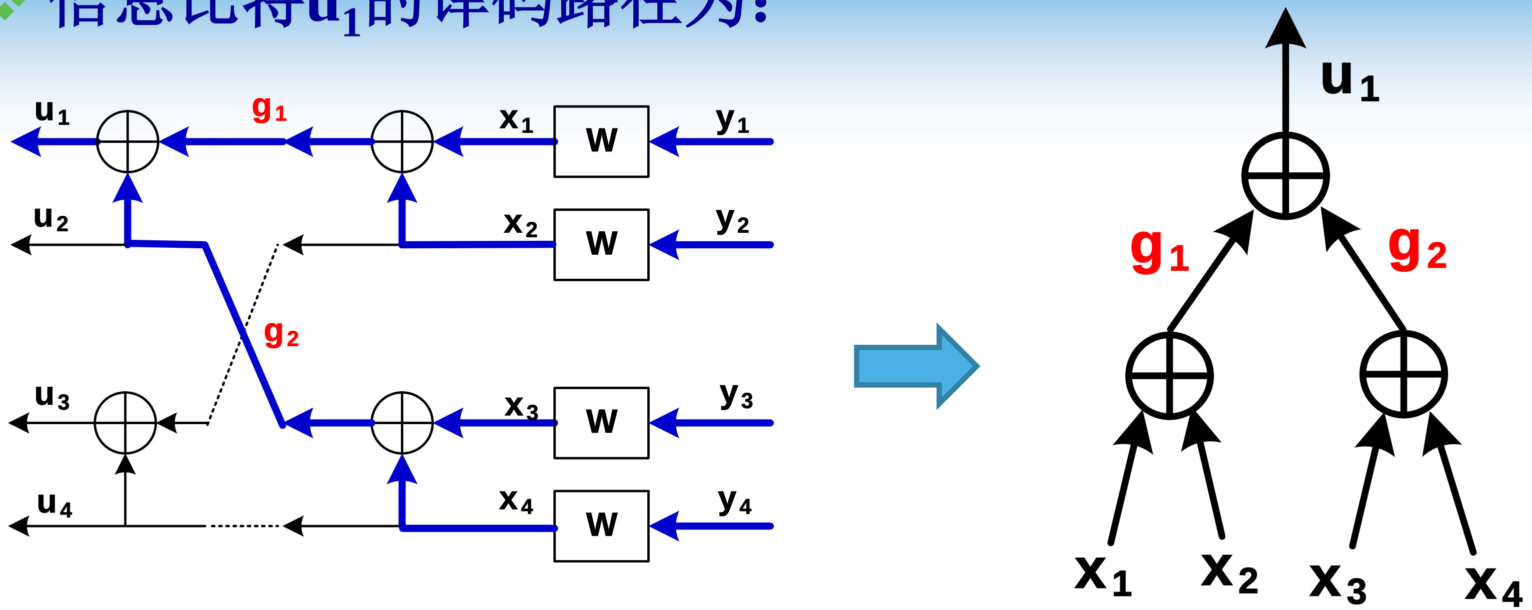
译码过程

- 信 息 比 特 u_1 的 译 码 路径为:





- 信息比特u_1的译码路径为:

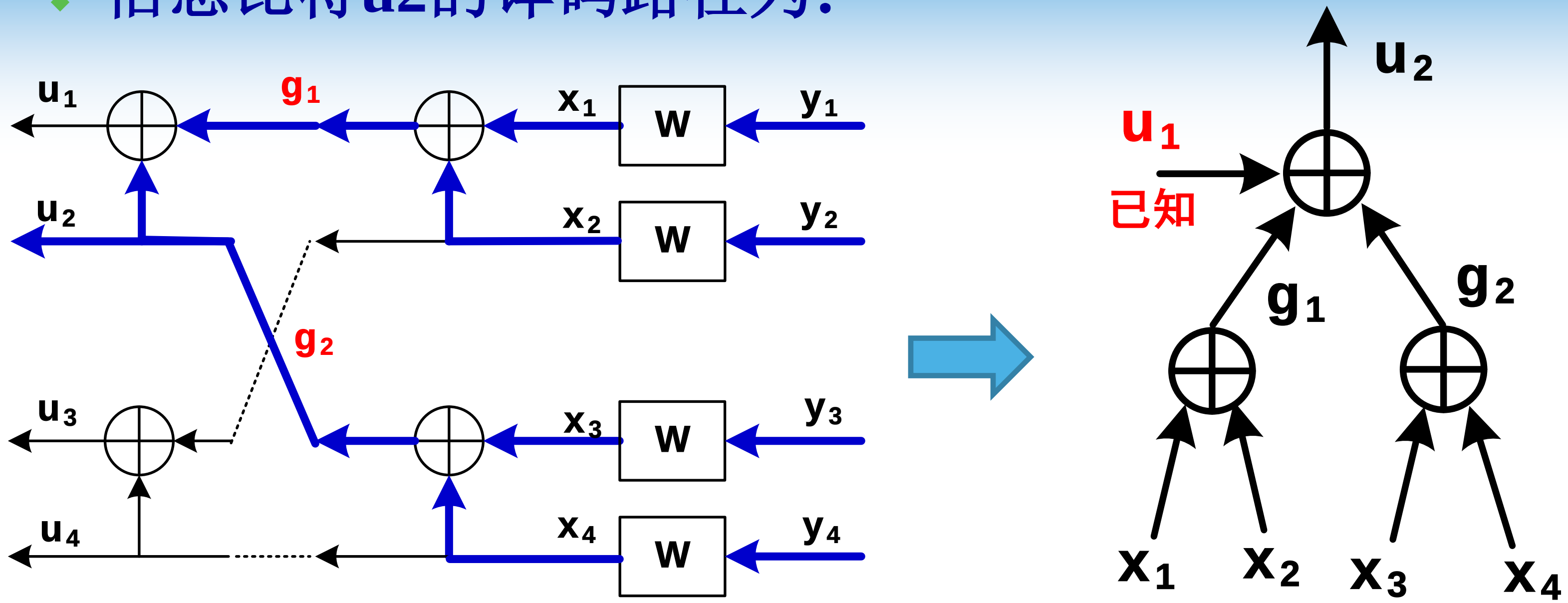


$$LR(g_1)=\frac{1+LR(x_1)LR(x_2)}{LR(x_1)+LR(x_2)}$$

$$LR(g_2)=\frac{1+LR(x_3)LR(x_4)}{LR(x_3)+LR(x_4)}$$

$$LR(u_1)=\frac{1+LR(g_1)LR(g_2)}{LR(g_1)+LR(g_2)}$$

❖ 信息比特u2的译码路径为：

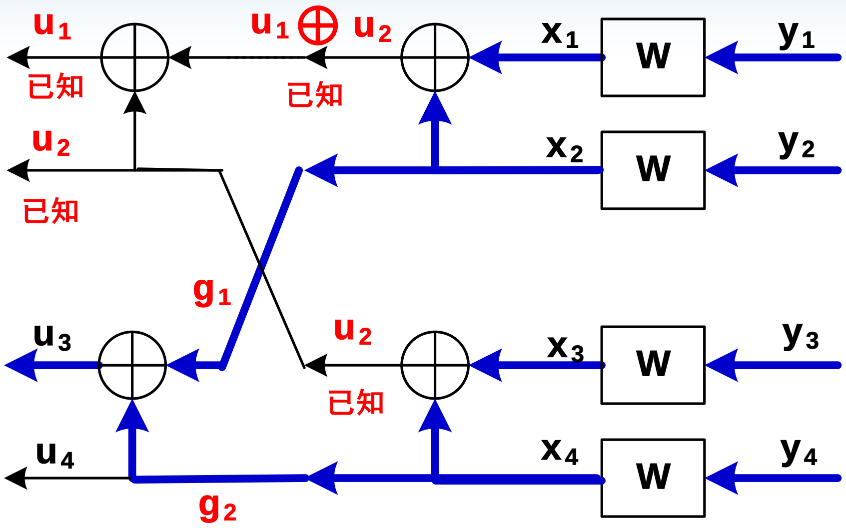


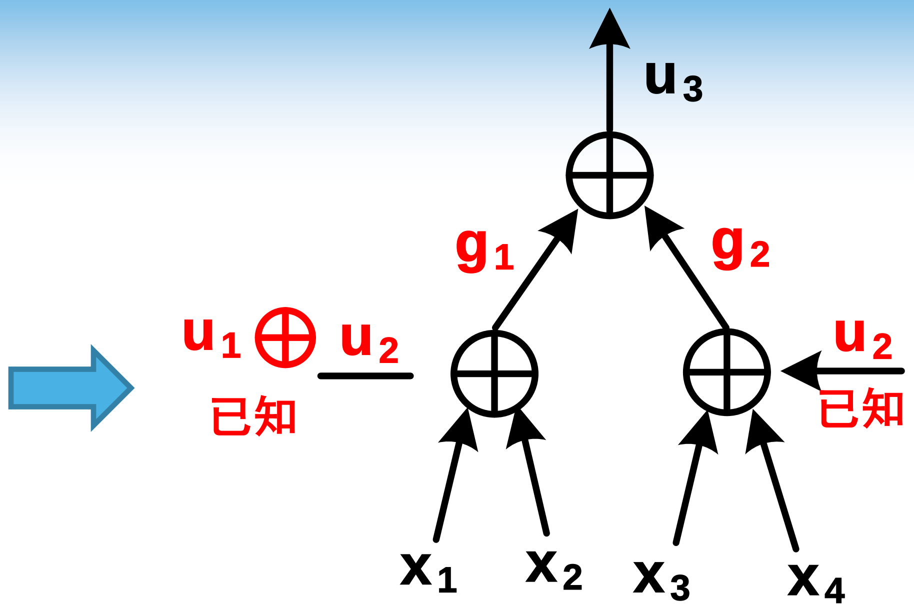
$$LR(g_1)=\frac{1+LR(x_1)LR(x_2)}{LR(x_1)+LR(x_2)}\qquad LR(g_2)=\frac{1+LR(x_3)LR(x_4)}{LR(x_3)+LR(x_4)}$$

❖ 因为$\mathbf{u}_1$已知，所以$\mathbf{u}_2$的译码为：

$$LR(u_2)=\left[LR(g_1)\right]^{1-2u_1}LR(g_2)$$

❖ 信息比特u_3的译码路径为：



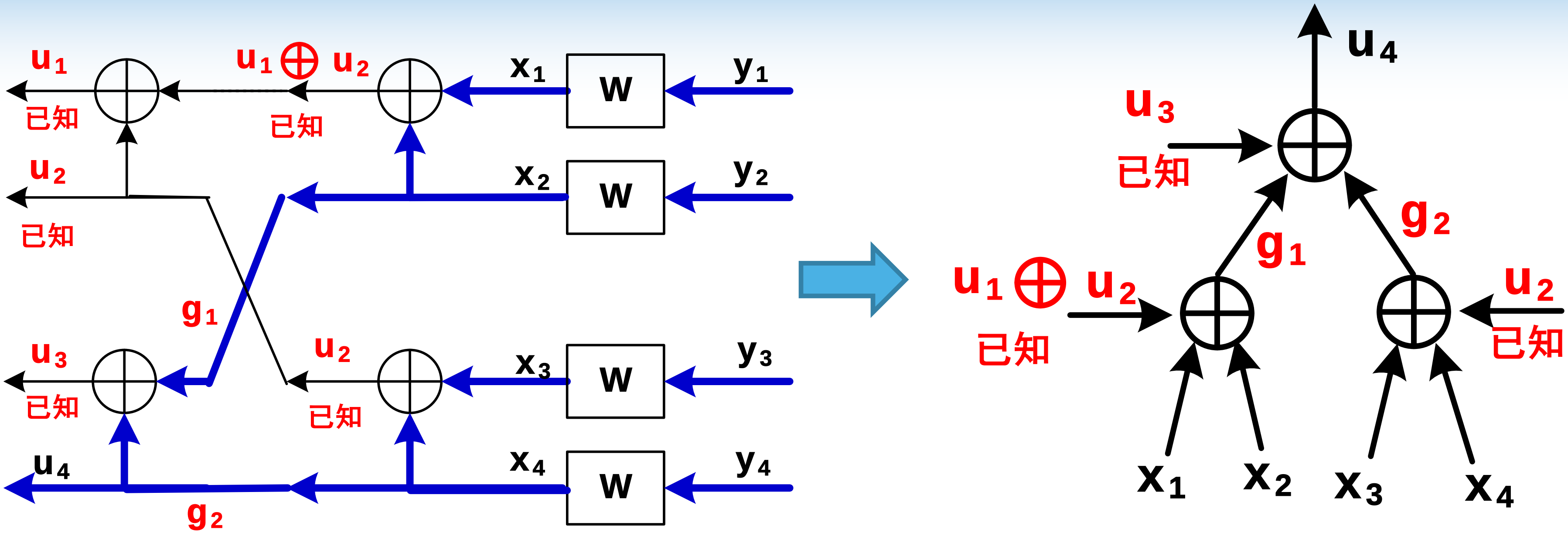


$$LR(g_1)=\left[LR(x_1)\right]^{1-2(u_1\oplus u_2)}LR(x_2)$$

$$LR(g_2)=\left[LR(x_3)\right]^{1-2u_2}LR(x_4)$$

$$LR(u_3)=\frac{1+LR(g_1)LR(g_2)}{LR(g_1)+LR(g_2)}$$

❖ 信息比特u4的译码路径为：

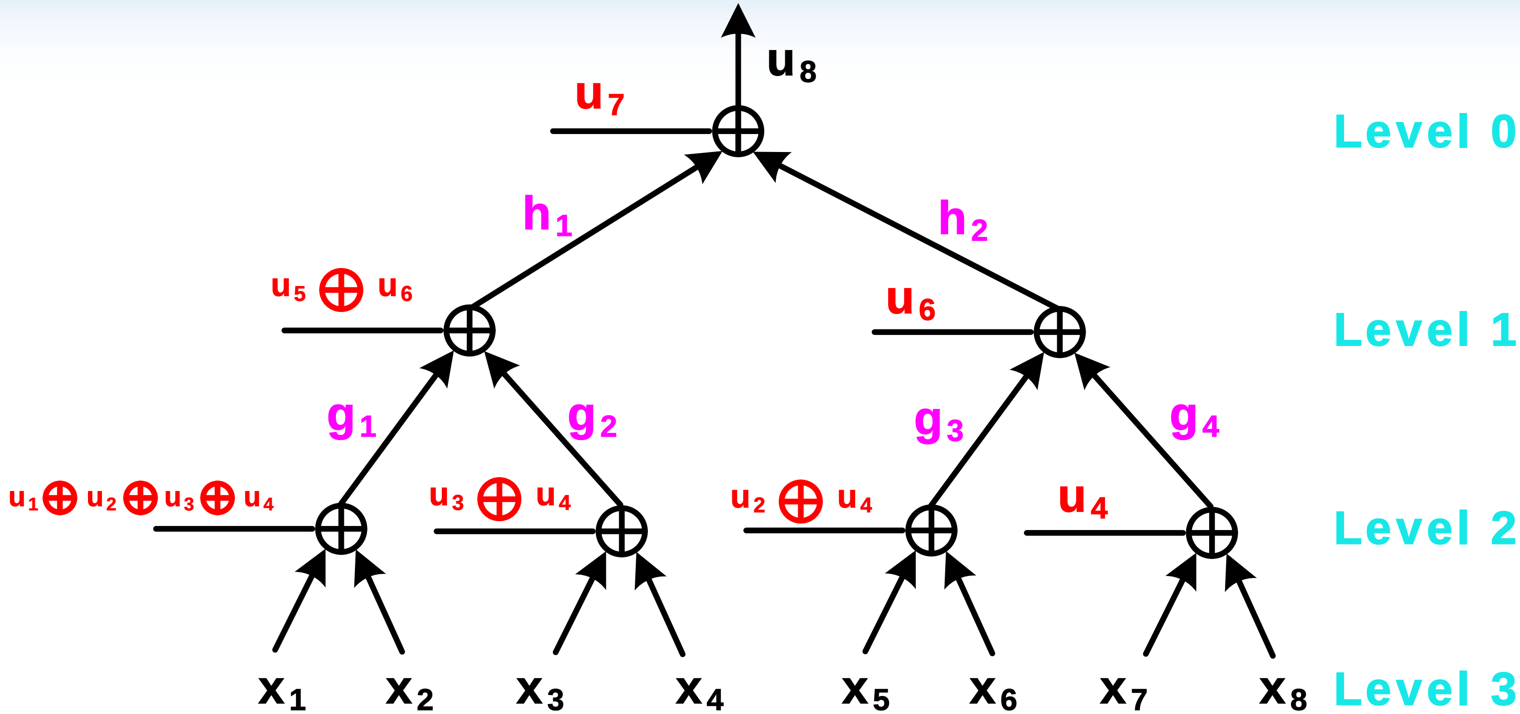


$$LR(g_1)=\left[LR(x_1)\right]^{1-2(u_1\oplus u_2)}LR(x_2)$$

$$LR(g_2)=\left[LR(x_3)\right]^{1-2u_2}LR(x_4)$$

$$LR(u_4)=\left[LR(g_1)\right]^{1-2u_3}LR(g_2)$$

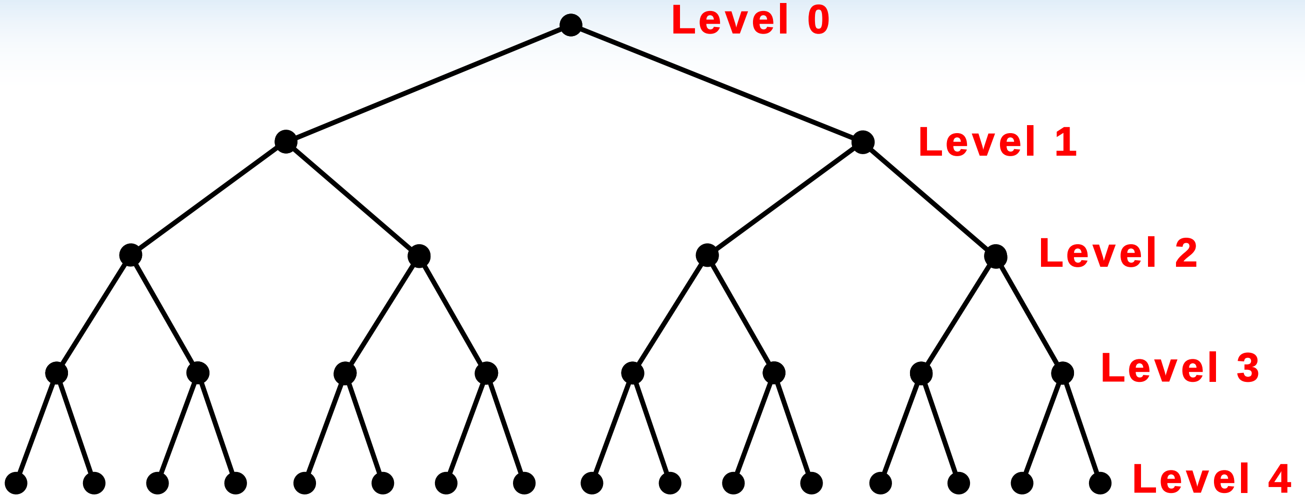
❖ 如果N=8，其最后消息比特译码的树图为：



❖ 规律：节点比特按照矩阵G_4、G_2、G_1的列给出的。

$$G_4=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&0&1&0\\1&1&0&0\\1&1&1&1\end{bmatrix}\qquad G_2=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}\qquad G_1=[1]$$

❖ N=16时树图的分层情况为：

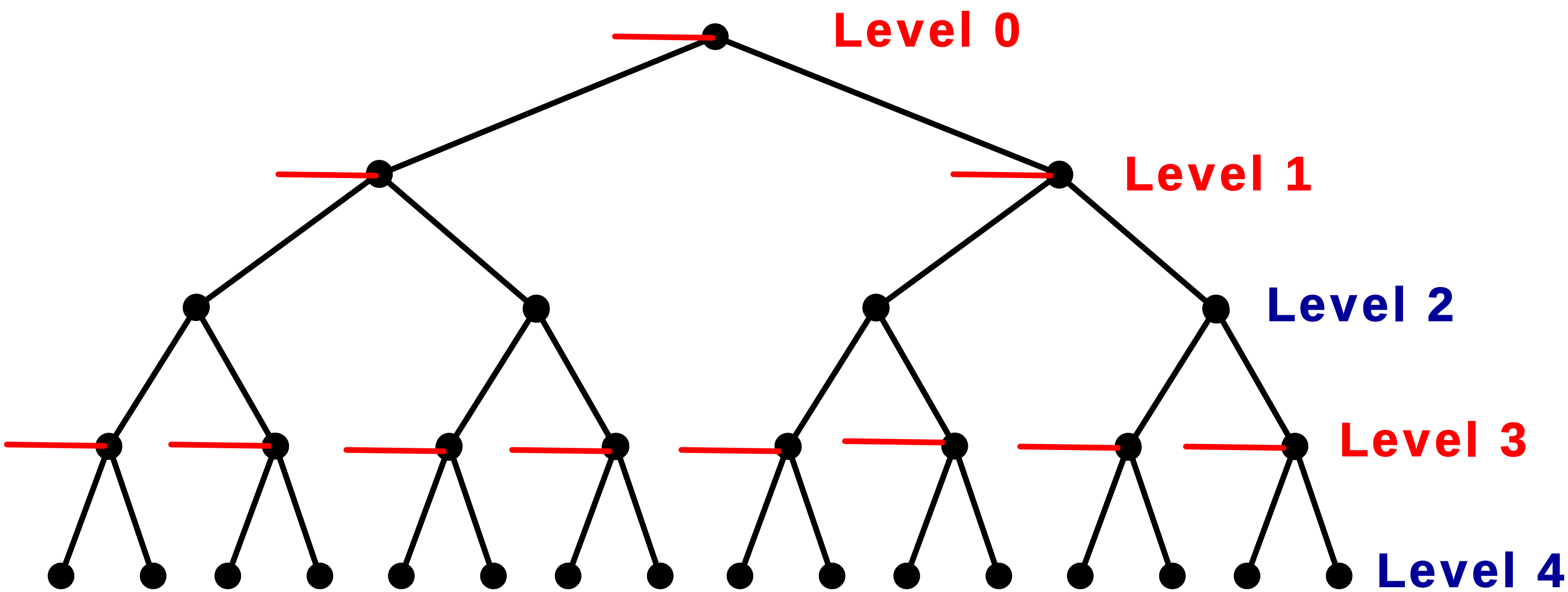


❖ Level i具有2^i个节点，总的层数为（$1+\log_2 N$）。

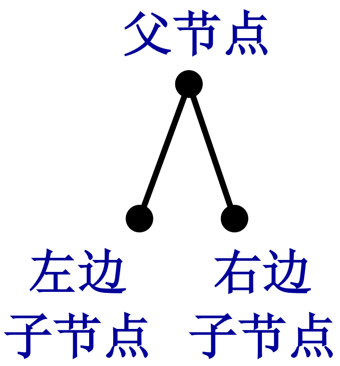
❖ 假设L个比特已译出，现在对第（L+1）比特进行译码。首先要了解这L个比特分布在哪几层，即：

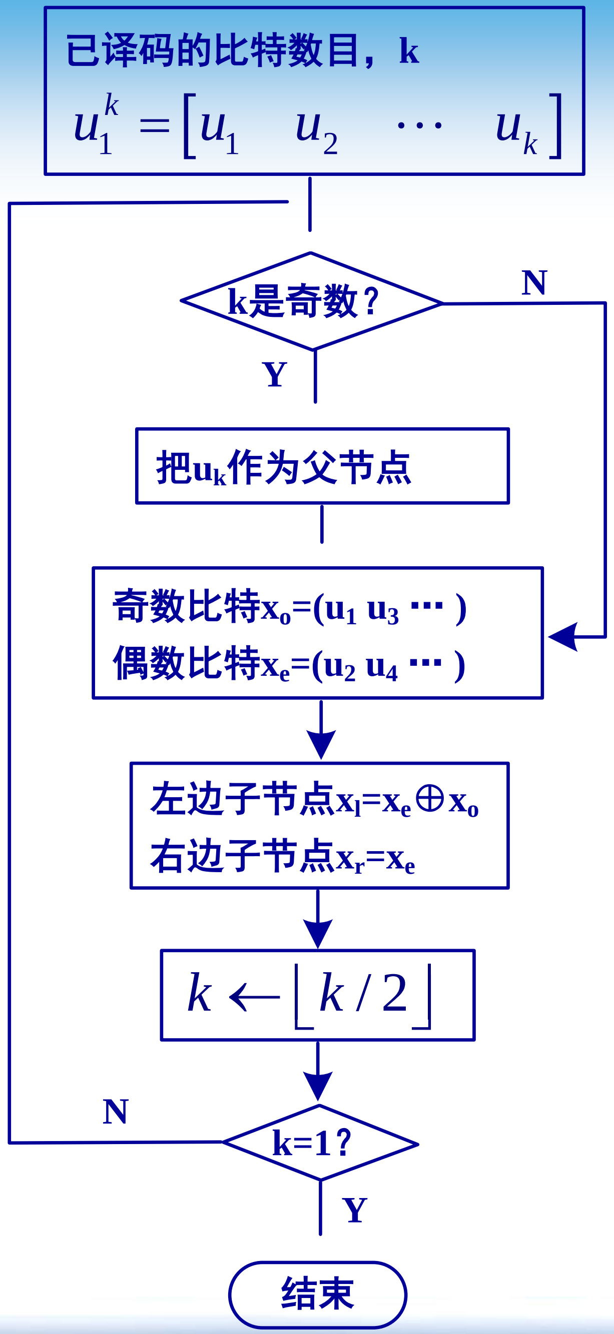
$$L=\sum_i 2^i$$

❖ 例：N=16，L=11，可知L=1+2+8=$2^0+2^1+2^3$，分布在第0、1、3层



- 这样，基于树图的译码算法有两个步骤：
  - **已译码比特在节点上的分布情况**
  - **当前比特的译码**





- 例如：**N=8，u_1^5=[10111]，**希望对第**6**个比特进行译码。

- **解：** $u_1^5=\begin{bmatrix}u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5\end{bmatrix}=[10111]$

因为**k=5**，所以**u_5=1**被安排在父节点

$$b=u_1^4G_4$$
$$=[1011]\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&0&1&0\\1&1&0&0\\1&1&1&1\end{bmatrix}$$
$$=[1011]$$

1 0 1 1 1

奇数比特：**11**

偶数比特：**01**

1 0

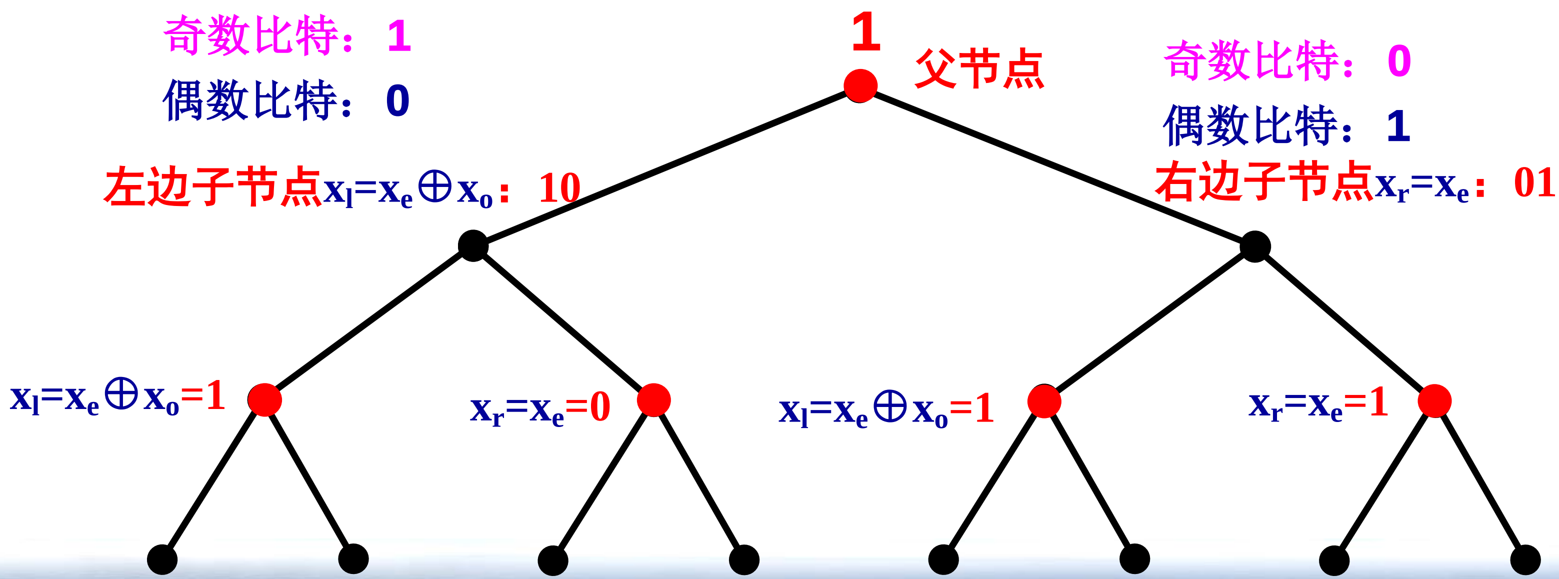
奇数比特：**1**

偶数比特：**0**

0 1

奇数比特：**0**

偶数比特：**1**



- 我们可以用生成矩阵来计算已译码比特在不同节点上的分布情况，假设已译码比特为：$u_1^k = [u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_k]$，**k<N**
- 把**k**分解

$$k = \underbrace{2^{i_m}}_{k_m} + \underbrace{2^{i_{m-1}}}_{k_{m-1}} + \cdots + \underbrace{2^{i_1}}_{k_1} \rightarrow k = k_m + k_{m-1} + \cdots + k_1$$

$$k_m > k_{m-1} > \cdots > k_1$$

$$[\underbrace{u_1 u_2 \cdots\cdots}_{k_m}\underbrace{\cdots\cdots\cdots}_{k_{m-1}}\underbrace{\cdots\cdots u_k}_{k_1}]$$

- 假设长度为$\mathbf{k_m}$的比特向量为$\mathbf{v_m}$，长度为$\mathbf{k_1}$的向量为$\mathbf{v_1}$，则

$$b_m = v_m G_{k_m} \quad \cdots \quad b_1 = v_1 G_{k_1}$$

❖ 举例：**N=16**，$u_1^7=\left[u_1\ u_2\ u_3\ u_4\ u_5\ u_6\ u_7\right]$ ，要解码第**8**个比特。

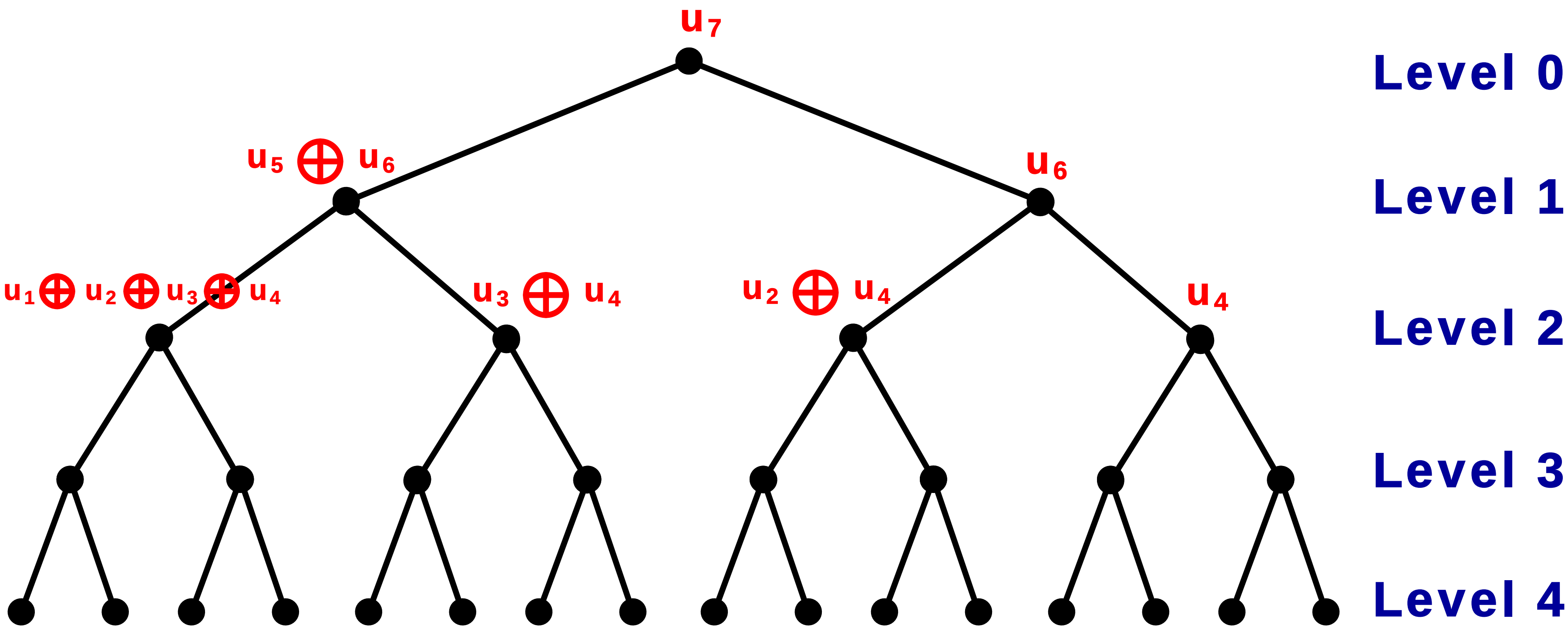
$$7=2^2+2^1+2^0 \qquad u_1^7=[\underbrace{u_1\quad u_2\quad u_3\quad u_4}_{4}\quad \underbrace{u_5\quad u_6}_{2}\quad \underbrace{u_7}_{1}]$$

$$b_4=v_4G_4=\left[u_1\quad u_2\quad u_3\quad u_4\right]\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&0&1&0\\1&1&0&0\\1&1&1&1\end{bmatrix}$$

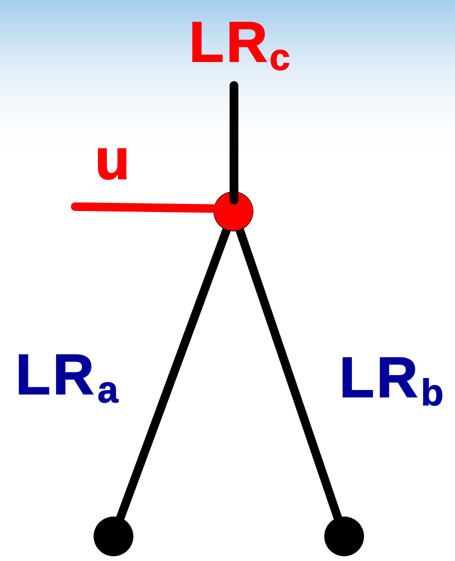
$$=\left[u_1\oplus u_2\oplus u_3\oplus u_4\quad u_3\oplus u_4\quad u_2\oplus u_4\quad u_4\right]$$

$$b_2=v_2G_2=\left[u_5\quad u_6\right]\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}=\left[u_5\oplus u_6\quad u_6\right]$$

$$b_1=v_1G_1=u_7\left[1\right]=u_7$$


u_7
$u_5 \oplus u_6$
u_6
$u_1 \oplus u_2 \oplus u_3 \oplus u_4$
$u_3 \oplus u_4$
$u_2 \oplus u_4$
u_4
Level 0
Level 1
Level 2
Level 3
Level 4

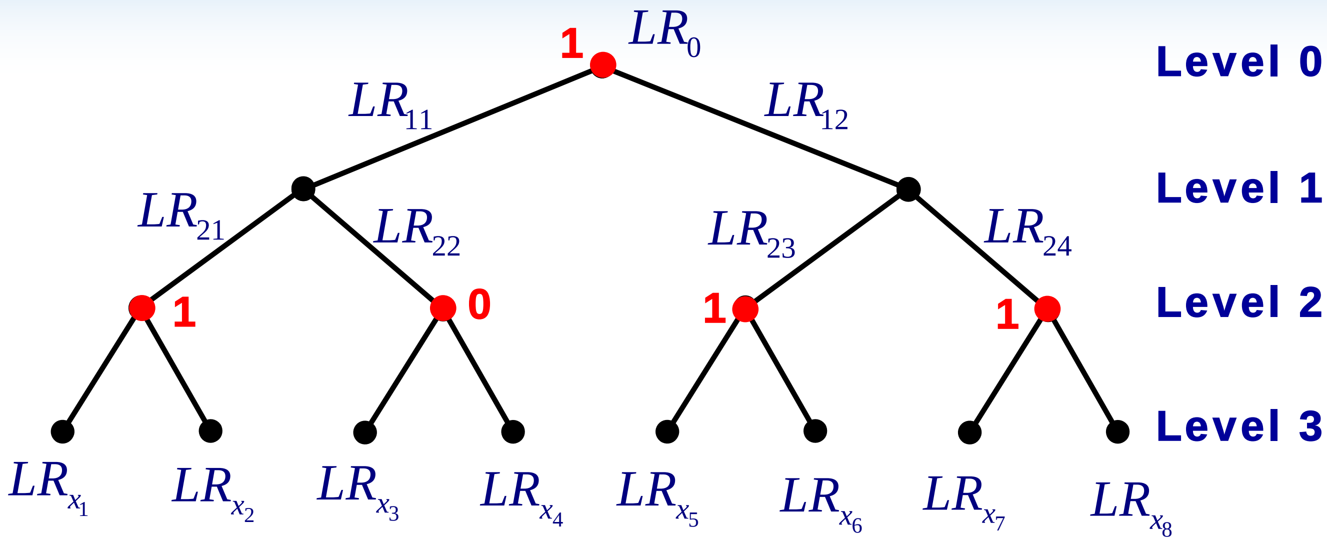
- 译码是从子节点向父节点方向进行，基本译码单元如右图所示，如果父节点有个已知比特**u**，则该节点的似然比为：



$$LR_c = LR_a^{1-2u} LR_b$$

$$LR_c = \begin{cases} LR_a \cdot LR_b \quad , & u = 0 \\ \dfrac{LR_b}{LR_a} \quad , & u = 1 \end{cases}$$

❖ 例：计算下图中父节点的似然比



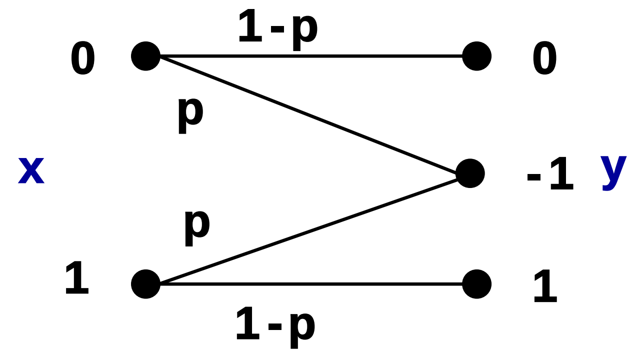
$$LR_{21} = \frac{LR_{x_2}}{LR_{x_1}} \qquad LR_{22} = LR_{x_3} \cdot LR_{x_4} \qquad LR_{23} = \frac{LR_{x_6}}{LR_{x_5}} \qquad LR_{24} = \frac{LR_{x_8}}{LR_{x_7}}$$

$$LR_{11} = \frac{1 + LR_{21} \cdot LR_{22}}{LR_{21} + LR_{22}} \qquad LR_{12} = \frac{1 + LR_{23} \cdot LR_{24}}{LR_{23} + LR_{24}}$$

$$\mathbf{LR_0 = LR_{12} / LR_{11}}$$

❖ 例如：在BEC信道中，**p(x=0)=p(x=1)=0.5**，对于y的值为0、1、-1，求似然比：

$$LR = \frac{P(x=0\,|\,y)}{P(x=1\,|\,y)}$$



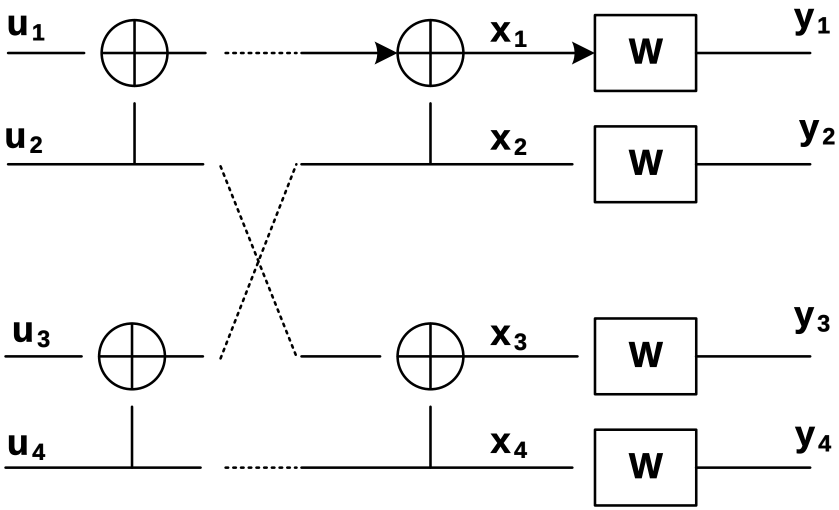
$$LR_0 = \frac{P(x=0\,|\,y=0)}{P(x=1\,|\,y=0)} \rightarrow LR_0 = \frac{P(y=0\,|\,x=0)P(x=0)}{P(y=0\,|\,x=1)P(x=1)} \rightarrow LR_0 = \frac{1-p}{0} = \infty$$

$$LR_1 = \frac{P(x=0\,|\,y=1)}{P(x=1\,|\,y=1)} \rightarrow LR_1 = \frac{P(y=1\,|\,x=0)P(x=0)}{P(y=1\,|\,x=1)P(x=1)} \rightarrow LR_1 = \frac{0}{1-p} = 0$$

$$LR_{-1} = \frac{P(x=0\,|\,y=-1)}{P(x=1\,|\,y=-1)} \rightarrow LR_0 = \frac{P(y=-1\,|\,x=0)P(x=0)}{P(y=-1\,|\,x=1)P(x=1)} \rightarrow LR_0 = \frac{p}{p} = 1$$

❖ 实际操作时，可以用一个较大值代替∞，如$LR_0=100$

❖ 举例：**N = 4的编码器，BEC信道，接收到的值为：$y_1 = 1$，$y_2 = 0$，$y_3 = -1$，$y_4 = 1$，计算每个编码比特x_i的似然比。**



$$LR(x_1) = \frac{P(y_1 = 1 | x_1 = 0)}{P(y_1 = 1 | x_1 = 1)} = \frac{0}{1-p} = 0$$

$$LR(x_2) = \frac{P(y_2 = 0 | x_2 = 0)}{P(y_2 = 0 | x_2 = 1)} = \frac{1-p}{0} = 100$$

$$LR(x_3) = \frac{P(y_3 = -1 | x_3 = 0)}{P(y_3 = -1 | x_3 = 1)} = \frac{p}{p} = 1$$

$$LR(x_4) = \frac{P(y_4 = 1 | x_4 = 0)}{P(y_4 = 1 | x_4 = 1)} = \frac{0}{1-p} = 0$$

- 分解BEC的Bhattacharyya参数（可看作是传输错误概率的最大值）能够递归计算：

$$Z\left(W_N^{2k-1}\right)=2Z\left(W_{N/2}^{k}\right)-\left[Z\left(W_{N/2}^{k}\right)\right]^2$$

$$Z\left(W_N^{2k}\right)=\left[Z\left(W_{N/2}^{k}\right)\right]^2$$

- 递归初始值： $Z\left(W_1^1\right)=p$

- 例如：N=4，p=0.5，分解信道的Bhattacharyya参数可计算为

$$N=1,\quad Z\left(W_1^1\right)=0.5$$

$$N=2$$

$$Z\left(W_2^{2k-1}\right)=2Z\left(W_1^{k}\right)-\left[Z\left(W_1^{k}\right)\right]^2$$

$$Z\left(W_2^{2k}\right)=\left[Z\left(W_1^{k}\right)\right]^2$$

- **k=1时** $$Z\left(W_2^1\right)=2Z\left(W_1^1\right)-\left[Z\left(W_1^1\right)\right]^2=0.75$$

$$Z\left(W_2^2\right)=\left[Z\left(W_1^1\right)\right]^2=0.25$$

$N=4$

$$Z\left(W_4^{2k-1}\right)=2Z\left(W_2^k\right)-\left[Z\left(W_2^k\right)\right]^2$$

$$Z\left(W_4^{2k}\right)=\left[Z\left(W_2^k\right)\right]^2$$

- **k=1时** $$Z\left(W_4^1\right)=2Z\left(W_2^1\right)-\left[Z\left(W_2^1\right)\right]^2=0.9375$$

$$Z\left(W_4^2\right)=\left[Z\left(W_2^1\right)\right]^2=0.5625$$

- **k=2时** $$Z\left(W_4^3\right)=2Z\left(W_2^2\right)-\left[Z\left(W_2^2\right)\right]^2=0.4375$$

$$Z\left(W_4^4\right)=\left[Z\left(W_2^2\right)\right]^2=0.0625$$

- 分解信道的容量可写为一个向量：

$$Z\left(W_4^i\right)=\begin{bmatrix}0.9375 & 0.5625 & 0.4375 & 0.0625\end{bmatrix}$$

- 意味着 W_4^4 具有最小的传输错误概率，而 W_4^1 具有最大的传错概率。

- 也可以按照容量升序，对分解的信道进行排序。

$$C=\begin{bmatrix}4 & 3 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

- 如果我们进行码率0.5的polar编码，则消息序列**u=[0 0 u_3 u_4]**，即不在容易传错的信道上传输数据。

$$x_1^4=u\ \ _4\ G\begin{bmatrix}0\,0\,u_3\,u_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\1 & 0 & 1 & 0\\1 & 1 & 0 & 0\\1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_3\oplus u_4 & u_3\oplus u_4 & u_4 & u_4\end{bmatrix}$$

译码的完整举例

- 假设N=8，BEC的p=0.5，信道容量排序C=[8 7 6 4 5 3 2 1]，编码速率R=0.5，信息比特d=[1111]（对译码来说是不知道的），根据信道容量排序，我们会将信息比特放在1~4的位置，其余位置为0，即u=[00010111]，这些0就表示不传信息。这样编码序列为：

$$x = uG_8 = \begin{bmatrix}00010111\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10000000\\10001000\\10100000\\10101010\\11000000\\11001100\\11110000\\11111111\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}01101001\end{bmatrix}$$

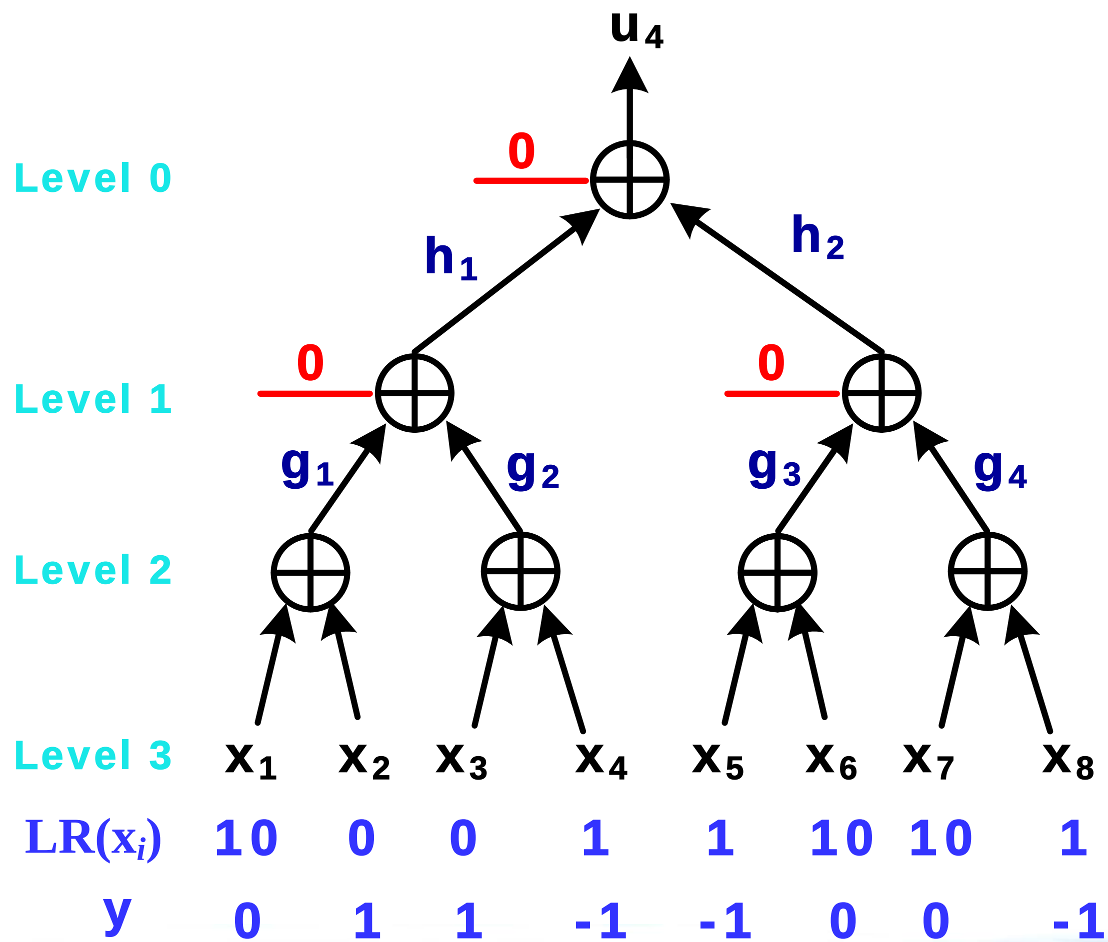
- 若接收序列为y=[0 1 1 -1 -1 0 0 -1]，译出信息比特。

- 从前面已知u=[00010111]，即信息比特放置在u_4、u_6、u_7和u_8的位置，其余位置都是0，所以先对u_4进行译码。
- 已知$u_1=u_2=u_3=0$，对u_4进行树图译码，如下图所示。

$$LR(x_1)=\frac{P(y_1=0\,|\,x_1=0)}{P(y_1=0\,|\,x_1=1)}=\frac{1-p}{0}=10$$

$$LR(x_2)=\frac{0}{1-p}=0$$

其余的值已列在右图中



$$LR(g_1)=\frac{1+LR(x_1)LR(x_2)}{LR(x_1)+LR(x_2)}=\frac{1+10*0}{10+0}=0.1 \quad LR(g_2)=\frac{1+LR(x_3)LR(x_4)}{LR(x_3)+LR(x_4)}=\frac{1+0*1}{0+1}=1$$

$$LR(g_3)=\frac{1+LR(x_5)LR(x_6)}{LR(x_5)+LR(x_6)}=\frac{1+1*10}{1+10}=1 \quad LR(g_4)=\frac{1+LR(x_7)LR(x_8)}{LR(x_7)+LR(x_8)}=\frac{1+10*1}{10+1}=1$$

$$LR(h_1)=LR(g_1)LR(g_2)=0.1*1=0.1 \quad LR(h_2)=LR(g_3)LR(g_4)=1*1=1$$

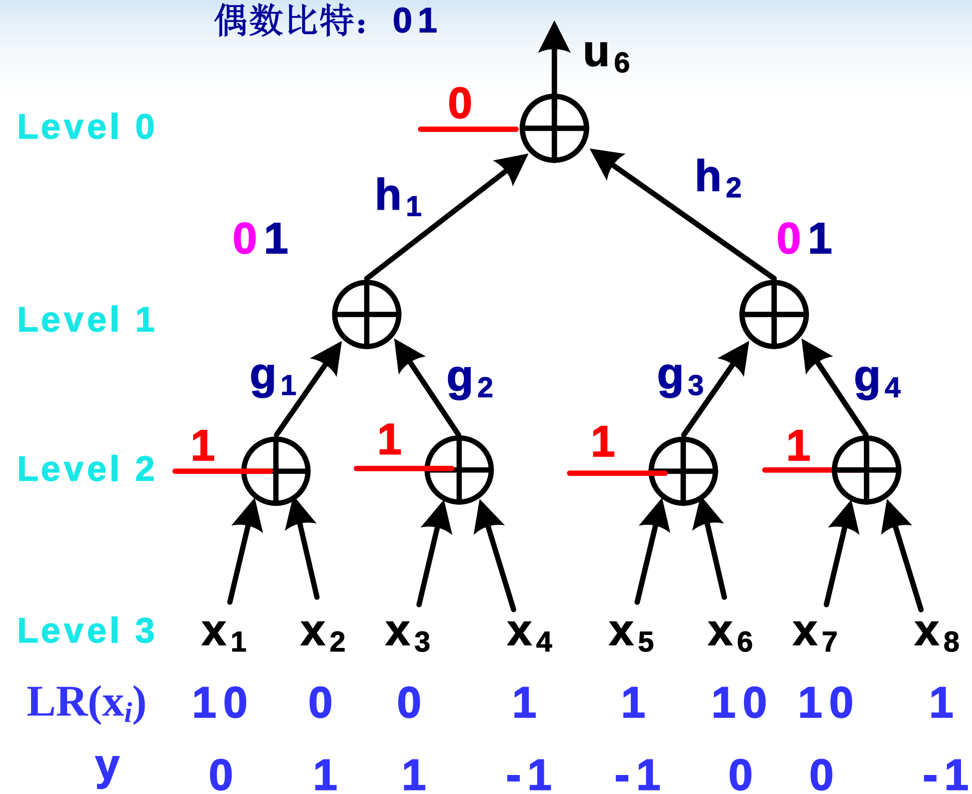
$$LR(u_4)=LR(h_1)LR(h_2)=0.1*1=0.1$$

- 这样就可对u_4进行判决，$u_4=1$
- 由于$u_5=0$，所以变成了已知[00010]，现在对u_6进行译码，画出它的已知比特分布及树图译码结构。

0 0 0 1 0

奇数比特：00

偶数比特：01



$$LR(g_1)=\frac{LR(x_2)}{LR(x_1)}=\frac{0}{10}=0$$

$$LR(g_2)=\frac{LR(x_4)}{LR(x_3)}=\frac{1}{0}=10$$

$$LR(g_3)=\frac{LR(x_6)}{LR(x_5)}=\frac{10}{1}=10$$

$$LR(g_4)=\frac{LR(x_8)}{LR(x_7)}=\frac{1}{10}=0.1$$

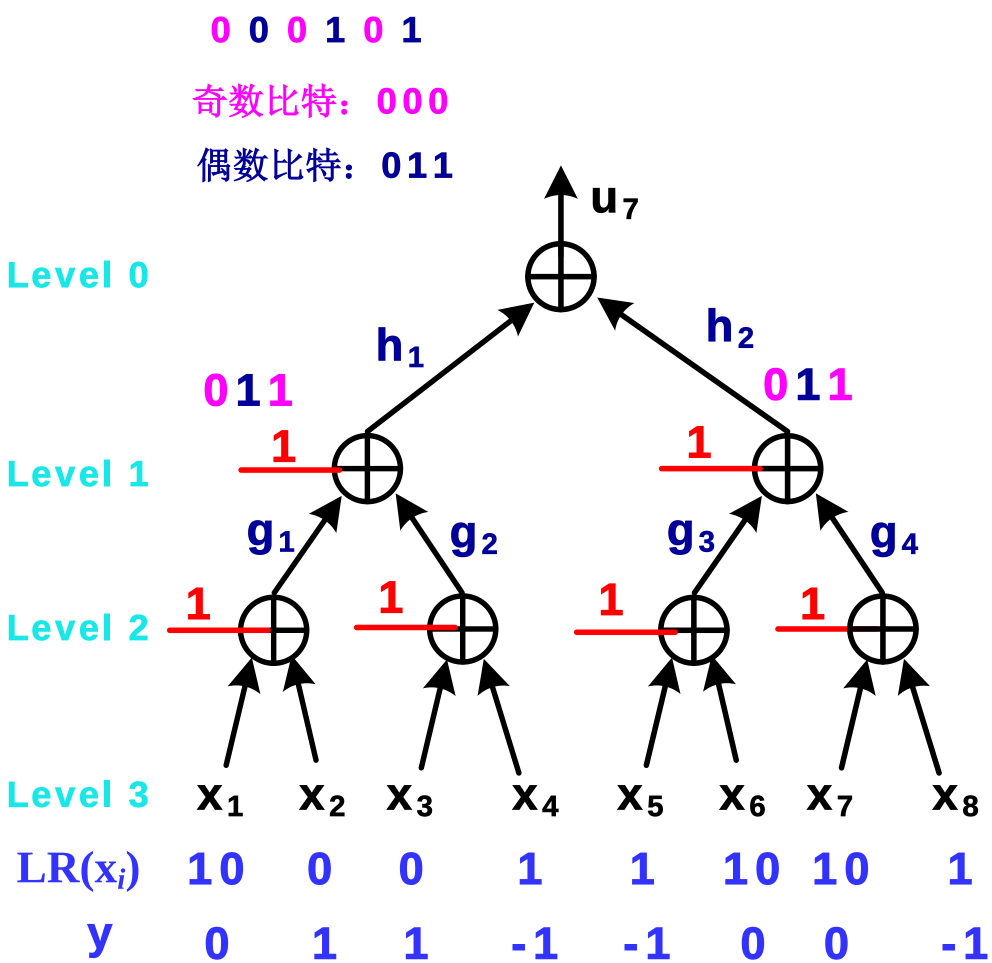
$$LR(h_1)=\frac{1+LR(g_1)LR(g_2)}{LR(g_1)+LR(g_2)}=\frac{1+0*10}{0+10}=0.1$$

$$LR(h_2)=\frac{1+LR(g_3)LR(g_4)}{LR(g_3)+LR(g_4)}=\frac{1+10*0.1}{10+0.1}=0.2$$

$$LR(u_6)=LR(h_1)LR(h_2)$$
$$=0.1*0.2=0.02$$

- 这样$u_6=1$

❖ 由于$u_6=1$，所以变成了已知[000101]，现在对u_7进行译码，画出它的已知比特分布及树图译码结构。



$$LR(g_1)=0 \qquad LR(g_2)=10$$

$$LR(g_3)=10 \qquad LR(g_4)=0.1$$

$$LR(h_1)=\frac{LR(g_2)}{LR(g_1)}=\frac{10}{0}=10$$

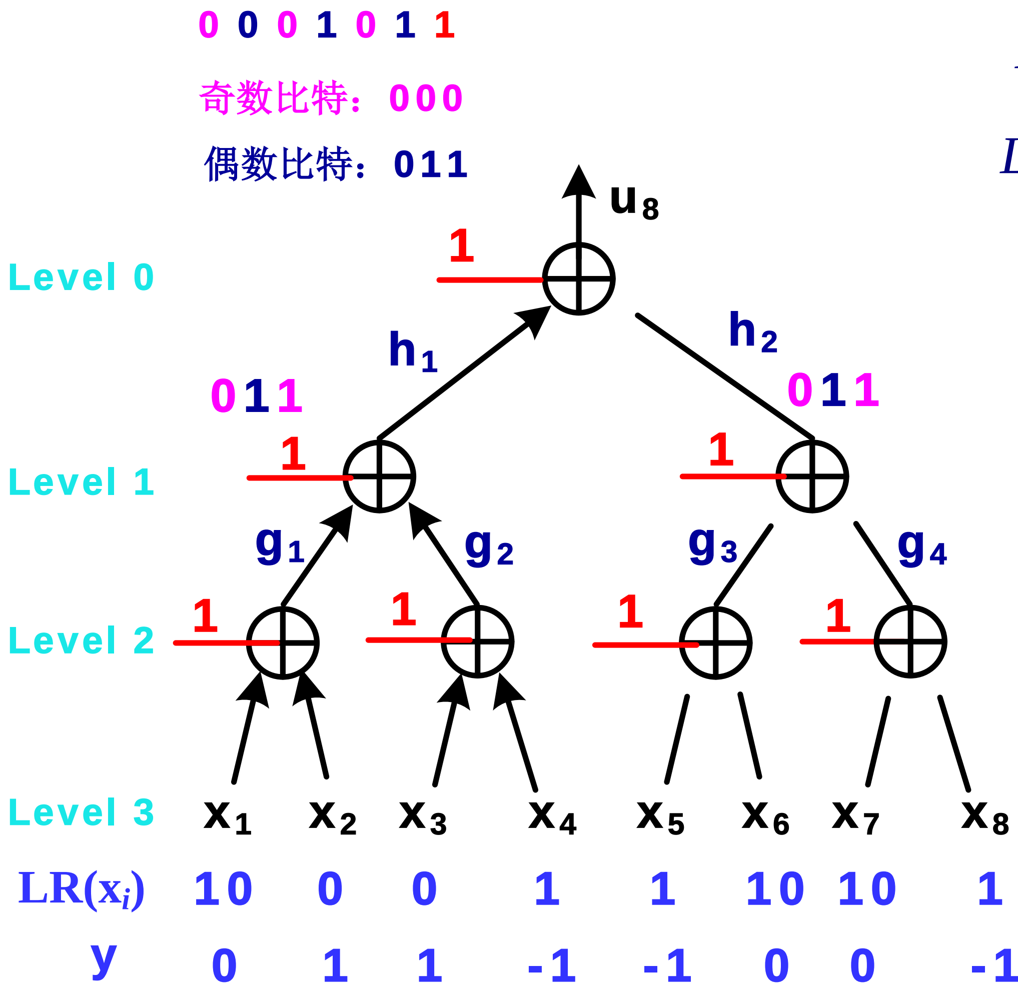
$$LR(h_2)=\frac{LR(g_4)}{LR(g_3)}=\frac{0.1}{10}=0.01$$

$$LR(u_7)=\frac{1+LR(h_1)LR(h_2)}{LR(h_1)+LR(h_2)}$$

$$=\frac{1+10*0.01}{10+0.01}=0.11$$

❖ 这样$u_7=1$

❖ 由于$u_6=1$，所以变成了已知[0001011]，现在对u_8进行译码，画出它的已知比特分布及树图译码结构。



$LR(g_1)=0$ $\quad LR(g_2)=10$

$LR(g_3)=10$ $\quad LR(g_4)=0.1$

$$LR(h_1)=\frac{LR(g_2)}{LR(g_1)}=\frac{10}{0}=10$$

$$LR(h_2)=\frac{LR(g_4)}{LR(g_3)}=\frac{0.1}{10}=0.01$$

$$LR(u_8)=\frac{LR(h_2)}{LR(h_1)}=\frac{0.01}{10}=0.001$$

❖ 这样$u_8=1$