

博士学位论文

暴涨宇宙学与暗能量中若干问题的  
研究

郭宗宽

导师 张元仲 研究员

中国科学院理论物理研究所

二零零五年六月

# **A study of several issues in inflation and dark energy**

Dissertation for Ph.D

**Zong-Kuan Guo**

Directed by **Prof. Yuan-Zhong Zhang**

Institute of Theoretical Physics, Chinese Academy of  
Science, P.O.Box 2735, Beijing 100080, China

June, 2005

## 摘要

近几年来, 宇宙大尺度结构的观测和宇宙微波背景各向异性的探测都支持在宇宙的早期曾经存在一个短暂的加速膨胀阶段, Ia 型超新星的数据分析表明目前宇宙又一次处于一个加速时期, 具有负压的暗能量成为了宇宙物质的主导成分. 能够实现宇宙加速膨胀的暴涨和暗能量成为了现代宇宙学的两大重要课题. 前者不但解决了标准宇宙学模型中的平坦性问题, 视界问题和磁单极问题, 而且预言了一个近标度不变的, 高斯的, 绝热的原初曲率扰动谱, 从而产生了宇宙微波背景辐射的各向异性和宇宙结构的形成. 后者可能是宇宙学常数, 精质场或其它暗能量成分, 它们的性质决定着宇宙的命运.

尽管大量的唯象暴涨模型能够给出很好的暴涨性质, 但一般地都存在模型参数的精细调节问题, 因而从理论上实现暴涨显得非常重要和迫切. 我们的工作主要集中在快子暴涨, 膜世界暴涨和幂律暴涨方面. 我们分析了在标准宇宙学和膜世界宇宙学中普通标量场和快子标量场驱动的暴涨模型的吸引子行为, 数值计算表明暴涨场的初始动能项随着宇宙的演化快速衰减, 不能阻止暴涨的发生, 慢滚解就是吸引子解, 从而保证了模型的可行性. 我们还研究了指数势的多标量场和反平方势的多快子场的宇宙学演化, 分析了标度解的存在性和稳定性, 并给出了存在吸引子解的参数空间.

从最近的观测数据对暗能量性质的分析表明在不久的过去暗能量的物态方程参数穿过了  $-1$ . 我们提出了鬼场精质场暗能量模型, 在该模型中物态方程参数从大于  $-1$  转变成小于  $-1$ , 并且鬼场为主的标度解是稳定的后期吸引子解. 在鬼场暗能量模型中, 由于暗能量的能量密度随宇宙膨胀而增加, 因而巧合性问题变得更加严重. 为了缓解这一问题, 我们提出了相互作用的鬼场暗能量模型, 在该模型中, 通过能量从鬼场到暗物质的传递, 实现了一个稳态标度解, 并且在模型参数空间的一定区域, 宇宙可以逃避大撕裂的灾难.

**关键词:** 暴涨, 膜世界, 快子, 标度解, 暗能量, 鬼场

## Abstract

Recent observations of large scale structure, searches for Type Ia supernovae, and measurements of the cosmic microwave background anisotropy all suggest that in the early universe there is a short phase when the universe accelerated exponentially, and at present the universe is undergoing cosmic acceleration and is dominated by a dark energy component with negative pressure. Inflation and dark energy, both of them describe the accelerating expansions in the universe, are two hot issues in modern cosmology. The former not only offers a possible solution to the flatness, horizon and monopole problems, but also predicts a Gaussian and adiabatic primordial curvature perturbation, which lead to the CMB anisotropy and the formation of structure. The latter may consist of a cosmological constant, quintessence or other dark energy components, which lead to different fates of the universe.

Although there exist in the literature numerous phenomenological inflation models, which give the proper inflationary properties, some fine-tunings are generically required. Therefore it is important and urgent to look for the theoretical realization of inflation. We have worked on the three aspects, tachyon inflation, braneworld inflation and power-law inflation. We demonstrate that inflation driven by a scalar field or a tachyon field, in the standard cosmology and in the braneworld scenario, possesses the attractor behavior. The numerical calculation shows that an initial non-vanishing momentum does not prevent the onset of inflation. The slow-rolling solution is an attractor. Our works guarantee the feasibility of the tachyon inflation and the braneworld inflation. We investigated the existence and the stability of the scaling solutions of cosmology containing multiple scalar fields with exponential potentials or multiple tachyon fields with inverse square potentials, and discussed the parameter space where there exists an attractor.

---

The analyses on the properties of dark energy from the recent observations mildly favor models with  $w$  crossing  $-1$  in the near past. We proposed a phantom-quintessence hybrid dark energy model, in which the equation of state changes from above  $-1$  to below  $-1$  and the phantom-dominated scaling solution is the stable late-time attractor. To solve the coincidence problem we proposed an interacting phantom dark energy model, in which there exists a stationary scaling solution, which is a stable attractor at late times. Furthermore, the cosmic doomsday is avoided in one region of the parameter space.

**Keywords:** Inflation, Braneworld, Tachyon, Scaling Solution, Dark Energy, Phantom



# 目 录

<b>第一章</b>	<b>引言</b>	<b>1</b>
<b>第二章</b>	<b>暴涨宇宙学</b>	<b>5</b>
§2.1	标准宇宙学 . . . . .	5
§2.2	标准宇宙学的困难 . . . . .	7
§2.3	暴涨的物理图象 . . . . .	9
§2.4	暴涨模型的构造 . . . . .	11
§2.5	暴涨模型的预言 . . . . .	13
§2.6	暴涨模型的分类 . . . . .	20
<b>第三章</b>	<b>快子宇宙学</b>	<b>25</b>
§3.1	快子暴涨吸引子 . . . . .	26
§3.2	多快子标度解 . . . . .	30
<b>第四章</b>	<b>膜世界宇宙学</b>	<b>39</b>
§4.1	膜世界宇宙学 . . . . .	41
§4.2	膜世界暴涨吸引子 . . . . .	45
<b>第五章</b>	<b>宇宙学标度解</b>	<b>55</b>
§5.1	求和指数势的多标量场 . . . . .	55
§5.2	交叉耦合指数势的多标量场 . . . . .	60
<b>第六章</b>	<b>鬼场暗能量</b>	<b>67</b>
§6.1	宇宙暗能量 . . . . .	67
§6.2	鬼场暗能量 . . . . .	69
§6.3	鬼场精质场混合暗能量模型 . . . . .	75
§6.4	相互作用的鬼场暗能量模型 . . . . .	78

第七章 总结与展望	87
参考文献	89

## 第一章 引言

建立在爱因斯坦引力理论和宇宙学原理基础上的标准宇宙学模型依靠它的几个重要的成功的预言得到了普遍的认同。首先，它预言了宇宙的膨胀，这给出了一个从大爆炸到现在大约 137 亿年的宇宙演化历史。其次，它预言了宇宙微波背景辐射，这是大爆炸后大约 10 万年时自由电子与原子核结合成中性原子而遗留下的退耦光子。第三，它预言了轻粒子的丰度，这是当宇宙的温度降至大约 1MeV 时核合成的遗留物。这些预言在观测和实验上都得到了很好的验证。

然而，在标准宇宙学模型中也存在一些问题，譬如，平坦性问题，视界问题，残余物问题，宇宙结构的起源问题等。基于这些问题，八十年代初期，暴涨宇宙学应运而生，在短短的二十多年里有大量暴涨模型被提出。暴涨宇宙学并没有代替标准宇宙学，而是对标准宇宙学的早期初始条件做了一个具体的描述。暴涨模型成为了一个最经济，最流行的，描述早期宇宙的唯一模型。它不但对标准宇宙学模型中的一些问题给出了合理的解释，而且它还预言了宇宙是近乎平坦的，更重要的是它预言了近标度不变的，绝热的，高斯的原初曲率扰动功率谱，这为我们观测到的宇宙结构的形成提供了种子，同时导致了宇宙微波背景辐射的各向异性，从而提供了检验暴涨模型的可能性。特别是近几年，地面观测和卫星探测，如 BOOMERANG [1], MAXIMA [2], DASI [3] 和 WMAP [4] 等，给出了更精确的微波背景的温度各向异性功率谱，从而对暴涨模型给出了进一步的检验。

暴涨模型的基本思想是在宇宙学早期存在一个短暂的近指数加速膨胀的阶段。在该阶段宇宙是以真空能为主导的，宇宙的快速膨胀使得宇宙变得非常平坦，并很快稀释掉了多余的残留物。暴涨的简单实现是引入一个标量场，它的有效势提供了真空能。足够的暴涨要求标量场的势足够平坦，这样标量场沿其平坦的势缓慢滚动，从而保证了势能为主的加速膨胀和暴涨维持足够的时间。一般来讲，如果对标量势没有一个理论动机，要得到一个足够平坦的势要求一定的精细调节。尽管有大量的暴涨模型被提出，但目前没有一个令人信服的候选者。因而，从理论上探讨暴涨模型显得非常重要。

从弦理论中研究宇宙学是有意义的尝试。D 膜的发现和 Horava-Witten 图

象的提出为弦理论中膜世界图象的实现开辟了途径. 在 IIA, IIB 和 I 类型的弦中可能存在许多 D 膜, 至少它们中的一个应该包含粒子物理中的标准模型. 开弦的端点束缚在膜上, 闭弦可以在整个时空中运动. 基于这些思想, Randall 和 Sundrum 考虑了卷曲额外维的五维膜世界模型, 度规中卷曲因子对额外维的指数依赖使得标度快速变化, 从而缓解了普朗克标度和电弱标度等级问题. 在该模型中, 背景是一个五维 AdS 时空, 额外维有拓扑  $S^1/Z_2$ , 两个三维膜分别放在  $S^1/Z_2$  流形的两个固定点上. 其中一个膜具有负张力, 标准模型粒子束缚在其上, 称为可见膜, 另一膜具有正的张力, 称为隐藏膜, 而引力可以在整个五维时空中传播. 膜世界图象中的非标准宇宙学在宇宙早期给出了新的效应, 在宇宙晚期恢复到标准宇宙学. 我们研究了膜世界图象中暴涨模型的吸引子行为.

在弦理论中, 多数情况下扰动理论给出零标量势, 非扰动效应通常导致陡峭的反幂律势, 很难实现暴涨. D 膜之间的相互作用提供了一个研究标量场暴涨的新途径. 如果两个膜都是 BPS, 即保持系统的原初超对称部分, 并满足 Bogomolnyi-Prasad-Sommerfeld 边界条件, 那么它们之间没有净力. 对于一个 non-BPS 系统, 由于超对称被破坏, 两个膜在吸引力下相互靠近, 当它们的距离小于弦的长度标度时, 连接在膜上的开弦谱中就会有快子态, 这就意味这样的系统是不稳定的, 将向着稳定的闭弦真空演化. 弦理论学家 A.Sen 构造了一个经典的时间依赖的解, 它描述了在弦理论中一个不稳定的 D 膜衰变的物理过程. 在这个过程中, 快子场向势的极小值滚动, 实现快子凝聚. 快子场的有效势能够产生慢滚暴涨, 很自然地快子场成为了宇宙早期暴涨的候选者. 我们分析了快子场的宇宙动力学演化, 以及多快子场的宇宙学标度解.

在弦理论中, 额外维的紧致化自然地产生许多指数势的标量场, 宇宙暴涨可能由多标量场驱动. 另一方面, 指数势的标量场有非常有趣的性质, 例如, 如果宇宙中含有理想流体和指数势的标量场两种物质成分, 那么标量场通过其物态方程在广泛的参数空间模仿理想流体. 这些标度解是后期吸引子. 指数势的标量场在空间平坦的 FRW 模型中有严格的宇宙学解, 对应于宇宙标度因子为  $a \propto t^p$  的幂律解. 它的演化方程和 Friedmann 方程能够被约化为一维系统, 从而更适

合于定性的分析. 因此, 研究指数势的多标量场显得更为重要. 我们采用无量纲的动力学变量系统, 分析了求和指数势和交叉耦合指数势的多标量场的宇宙学标度解.

近几年来, 大量的天文观测, 尤其是 Ia 型超新星的数据分析, 表明宇宙正处于一个加速膨胀的阶段. 这意味着宇宙中存在大约  $2/3$  的暗能量成分, 我们观测不到它, 并且它具有负压强, 这与通常的物质不一样, 不是引力吸引的, 而是引力相斥的, 因而我们称它暗能量. 暗能量的性质决定着宇宙的命运, 因而暗能量的研究成为了宇宙学和粒子物理共同面临的重要课题和研究的热点. 最简单的暗能量候选者就是爱因斯坦引进的宇宙学常数, 它的能量密度是一个常数, 状态方程参数为  $-1$ . 然而, 宇宙学常数在理论上存在一些困难, 譬如精细调节问题和巧合性问题. 缓解这些问题的可能办法是用一个动力学标量场来实现宇宙的目前加速, 譬如, 正则动能项的精质模型, 包含高阶动能项的动能精质模型, 负动能项的鬼场模型, 包含曲率标量的动力学趋近模型等. 近来, 超新星数据分析似乎支持暗能量的物态方程参数目前值小于  $-1$ , 为了得到这一性质, 具有负动能项的鬼场是最简单的实现方式. 鬼场暗能量模型具有非常有趣的宇宙学性质, 如鬼场沿势上爬, 这将导致鬼场的能量密度随宇宙的膨胀而增加, 以及宇宙在不久的将来会出现奇点, 称为“大撕裂”. 基于鬼场模型存在的一些问题, 我们提出了两个模型, 给出了很好的物理性质.

本文共分七章, 各章内容安排如下: 在第一章, 我们简要介绍了宇宙学在观测方面和理论方面的进展. 在第二章, 我们回顾了暴涨模型的发展历史, 物理图象, 模型构造, 模型预言以及模型分类. 在第三章, 我们将研究快子暴涨模型中的吸引子性质和多快子场的宇宙学标度解. 在第四章, 我们将分析膜世界暴涨模型中暴涨场的动力学演化, 给出它们的数值解. 在第五章, 我们将分析求和指数势和交叉耦合指数势的多标量场的宇宙学标度解. 在第六章, 我们将首先介绍一些比较流行的宇宙暗量模型, 之后介绍我们提出的两个模型, 鬼场精质场暗量模型和相互作用的鬼场暗能量模型. 在第七章, 我们将对本文进行一些总结, 并对今后工作作一些展望.



## 第二章 暴涨宇宙学

大量的观测表明,我们生活的宇宙在大尺度上是空间均匀和各向同性的,这是我们探索宇宙的基本假定,称为宇宙学原理.建立在这一原理和引力理论基础上的标准宇宙学给我们提供了一个清晰的宇宙演化历史的物理图象.

在标准宇宙学模型中,我们观测到的宇宙起源于一个能量密度和温度非常高的爆炸,其实经典的引力理论在普朗克时期已不再适用,因而,有时也把标准宇宙学称为热大爆炸宇宙学.热大爆炸宇宙学大致是在  $10^{-18\pm 6}$  秒开始的,这个时候宇宙中充满了炙热的辐射和极端相对论性粒子,能量密度大致为  $(10^{6\pm 3}\text{GeV})^4$ .随着宇宙的膨胀,宇宙的温度渐渐降低,大致到  $10^{-10}$  秒的时候,宇宙的能量密度大约是  $(100\text{GeV})^4$ ,这时发生了电弱相变.大约 1 秒的时候,能量密度大约是  $(1\text{MeV})^4$ ,中微子退耦.直到大约 100 秒的时候,能量密度大约是  $(0.1\text{MeV})^4$ ,这时质子和中子结合在一起形成原子核,核合成理论很好的解释了我们现在所观测的宇宙中轻元素的丰度,为热大爆炸宇宙学模型提供了强有力的证据.此后,温度随着宇宙的膨胀而继续降低,大约  $10^4$  年的时候,红移  $z \approx 3300$ ,宇宙中辐射和物质的能量密度基本相等,之后宇宙进入物质为主阶段.大约到  $10^5$  年的时候,能量密度大约是  $(0.1\text{eV})^4$ ,红移  $z \approx 1100$ ,电子与核结合形成中性原子,光子退耦,宇宙变得透明.这些光子就是形成了我们现在所看到的宇宙微波背景辐射,这也是为观测所证实的.大概在  $10^9$  年的时候,红移  $z \approx 17$ ,宇宙结构开始形成.直到今天,宇宙的温度已经很冷了,只有大约  $2.73\text{K}$ ,宇宙的结构已变得非常丰富,包括行星,恒星,星系 ( $\sim 100\text{kpc}$ ),星系团 ( $\sim 3\text{Mpc}$ ),超星系团 ( $\sim 10\text{Mpc}$ ),空洞 ( $\sim 100\text{Mpc}$ ) 等结构 [5, 6, 7, 8].

### §2.1 标准宇宙学

根据宇宙学原理,宇宙在三维空间上是均匀且各向同性的,由 Friedmann-Robertson-Walker(FRW) 度规来描述:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \right], \quad (2.1)$$

其中  $a(t)$  是宇宙学标度因子,  $k$  表示三维空间的曲率, 取  $+1, 0$  和  $-1$  分别代表闭合, 平坦和开放的宇宙. 方程 (2.1) 中的坐标我们通常称为共动坐标, 即一个静止于共动坐标的观者必然是在做自由下落运动, 因此时间  $t$  就是宇宙标准时.

宇宙演化的动力学由爱因斯坦场方程

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (2.2)$$

和协变的能动张量守恒方程

$$T_{;\nu}^{\mu\nu} = 0 \quad (2.3)$$

来描述, 其中  $R_{\mu\nu}$  是 Ricci 张量,  $R$  是 Ricci 标量. 对于均匀且各向同性的宇宙, 其物质的能动张量  $T^{\mu\nu}$  取理想流体的形式,

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)U^\mu U^\nu + pg^{\mu\nu}, \quad (2.4)$$

这里  $\rho$  是能量密度,  $p$  是压强,  $U^\mu = dx^\mu/\sqrt{ds^2}$  是流体的四速度. 对于膨胀的背景来说, 在共动坐标系中  $U^i = dx^i/\sqrt{ds^2}=0$ ,  $U^0 = dt/\sqrt{ds^2} = -1$ , 即宇宙流体在共动坐标系中是静止的. 在 FRW 度规 (2.1) 下, 爱因斯坦场方程 (2.2) 的 (00) 分量和 (ii) 分量为

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}, \quad (2.5)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p), \quad (2.6)$$

其中  $H \equiv \dot{a}/a$  是哈勃参数. 从上面两方程可以导出能动量守恒方程

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0. \quad (2.7)$$

定义临界密度  $\rho_c \equiv 3H^2/8\pi G$  和密度参数  $\Omega \equiv \rho/\rho_c$ , 方程 (2.5) 能够重新写为

$$\Omega - 1 = \frac{k}{a^2 H^2}. \quad (2.8)$$

因此, 我们可以看出密度参数  $\Omega$  与空间曲率的关系: 正曲率对应  $\Omega > 1$ , 负曲率对应  $\Omega < 1$ , 零曲率对应  $\Omega = 1$ .

标准宇宙学取得了巨大的成功，它预言了宇宙的膨胀，宇宙中轻元素的原初丰度以及宇宙微波背景等，这些都得到了实验的验证。1922年 A.Friedmann 得到了宇宙学膨胀解，宇宙的膨胀是标准宇宙学最重要的特征，它在观测宇宙学中起着最基本的作用。1929年 E.Hubble 发现宇宙在膨胀，给出了光度距离和红移的近似关系，即线性的哈勃定律。40年代至60年代提出了原初核合成理论，它是对标准宇宙学的最早时期的验证，它预言了  $D, {}^3\text{He}, {}^4\text{He}$  和  ${}^7\text{Li}$  的丰度。只要重子数与光子数比值  $\eta$  在  $\eta = (4 \sim 7) \times 10^{-10}$  范围内，那么目前的观测值和预言的丰度是一致的。1965年 A.Penzias 和 R.Wilson 发现了宇宙微波背景辐射，它为宇宙起源于热大爆炸提供了重要的证据。地面上和卫星上的观测表明它具有黑体辐射谱，并且大角度是各向同性的。这些直接的证据把标准宇宙学模型的有效性至少倒推到了原初核合成的开始。但是它也存在一些问题，如奇点问题，平坦性问题，视界问题，大尺度结构的起源问题，磁单极和其它多余的残留物问题等。下面我们将讨论这些问题。

## §2.2 标准宇宙学的困难

### 1) 奇点问题

在标准宇宙学模型中，沿时间回溯，存在一个宇宙标度因子为零的时空点，此时宇宙的能量密度，压强和温度都趋于无穷大，宇宙的标量曲率也趋于无穷大，这就是本性奇点。奇异问题不是某一个具体的宇宙学模型所特有的，而是爱因斯坦引力理论本身的问题，即奇异性在爱因斯坦场方程的合理的物理解中不可避免，这表明在标量曲率变成无限大时，爱因斯坦引力理论已经不再适合，而需要一个合理的量子引力理论来代替它。

### 2) 平坦性问题

从方程 (2.8) 我们可以看出，如果宇宙是平坦的 ( $\Omega = 1$ )，那么它总是平坦的。否则，密度参数将随时间演化。例如，在空间接近平坦的物质为主时期， $|1 - \Omega| \propto t^{2/3}$ ，在辐射为主时期， $|1 - \Omega| \propto t$ 。第一年的 WMAP 数据证实今天我们的宇宙在空间上是近似平坦的，即  $\Omega = 1.02 \pm 0.02$  [9]。为了得到我们现在的宇宙，在核合成

时期必须要求

$$|1 - \Omega(t_{\text{nuc}})| < 10^{-16}. \quad (2.9)$$

也就是说，在宇宙的早期密度参数  $\Omega$  必须非常接近 1，这样精细调节的初始条件几乎是不可能的。否则，将会导致一个要么闭合的宇宙，它会即刻塌缩，要么开放的宇宙，它会很快进入曲率为主时期。这就是标准宇宙学的平坦性问题。

### 3) 视界问题

在标准宇宙学模型中，假定光子能够自由运动，宇宙总是物质为主，并且空间是平坦的，那么，从  $a = 0$  的时刻发出的光子在原子合成时刻  $t_{\text{rec}}$  传播的距离为

$$\begin{aligned} d_H(t_{\text{rec}}) &\equiv a(t_{\text{rec}}) \int_0^{t_{\text{rec}}} \frac{dt}{a} = 3t_{\text{rec}} = 3t_0(1 + z_{\text{rec}})^{-3/2} \\ &= 2H_0^{-1}(1 + z_{\text{rec}})^{-3/2}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

在上面的推导中利用了红移的定义  $1 + z \equiv a_0/a$  和宇宙年龄的计算  $t_0 = 2H_0^{-1}/3$ 。而我们现在能够观测到的哈勃距离  $H_0^{-1}$  在原子合成时刻  $t_{\text{rec}}$  的距离为

$$r_{\text{rec}} = H_0^{-1}(1 + z_{\text{rec}})^{-1}. \quad (2.11)$$

取  $z_{\text{rec}} \approx 1100$ ，那么  $r_{\text{rec}}$  大约是  $d_H(t_{\text{rec}})$  的 33 倍，也就是说，今天观测的宇宙包含  $33^3 \approx 3.6 \times 10^4$  个无因果联系的区域。如果再往前追溯，情况会更严重。这将意味着，来自相距大于视界标度的不同区域的光子在退耦之前不可能发生相互作用。因而，标准宇宙学模型不可能解释观测到的微波背景辐射的各向同性。

### 4) 大尺度结构的起源问题

在大尺度上宇宙物质分布是均匀且各向同性的，而在小尺度上宇宙具有非常丰富的结构，如星系，星系团以及超星系团等。宇宙微波背景的观测告诉我们宇宙早期存在密度扰动，大约为  $\delta\rho/\rho \sim 10^{-5}$ 。由于引力的不稳定性，密度扰动被不断放大而演化成我们今天所看到的宇宙。但是在标准宇宙学模型中，早期的空间并不是因果连通的，因而不可能产生这样的密度扰动。

### 5) 磁单极和其它多余的残留物问题

现代物理理论预言在宇宙的早期会出现许多稳定的重粒子，例如磁单极，宇宙

弦, 超对称粒子等. 在大统一理论中, 对称性自发破缺自然产生磁单极, 它的密度远高于观测能够准许的. 在超引力理论中, 引力子的超对称伙伴粒子的质量大约是  $100\text{GeV}$ , 从而破坏了核合成. 这些粒子都会造成许多问题, 与观测违背, 但标准宇宙学模型不能消除这些多余的残留物.

### §2.3 暴涨的物理图象

为了解决标准宇宙学模型中的这些问题, 1981年 A.H.Guth 提出了暴涨模型 [10], 常称为“旧暴涨模型”. 在该模型中, 假定标量场束缚在  $\phi = 0$  的假真空态, 宇宙标度因子指数膨胀, 所有其它物质很快红移掉, 宇宙冷却. 标量场通过量子隧道从假真空态转变到真真空态从而结束暴涨. 宇宙暴涨期间在假真空的海洋中形成许多真真空泡, 这些真真空泡不断增大和碰撞, 从而重新加热了宇宙. 然而, 如果真真空泡充分碰撞和渗透, 那么相变会很快结束, 不能提供足够的暴涨. 如果要求足够的暴涨, 那么较小的隧道转变速率将阻止了泡的碰撞, 因而宇宙将永远暴涨 [11].

基于旧暴涨模型的思想, 1982年 Linde [12], Albrecht 和 Steinhardt [13], 在  $SU(5)$  大统一理论框架中, 提出了“慢滚动”暴涨模型, 也称为“新暴涨模型”. 在新暴涨模型中, 标量场沿势向势的最低点缓慢滚动, 它要求标量势足够平坦, 此时真空能成为宇宙能量密度的主导, 从而导致宇宙指数膨胀. 当标量场接近势的最低点时, 由于势的陡峭, 标量场加速下滚, 然后在势的最低点振荡, 对应于零动量  $\phi$  粒子的凝聚,  $\phi$  粒子衰变为与它耦合的其它轻粒子, 从而实现宇宙的重新加热. 足够的暴涨和观测对原初扰动的限制要求对暴涨标量场的初始值和势参数精细调节, 因而, 无论在  $SU(5)$  大统一理论中还是在超对称理论中都很难构造出成功的暴涨模型.

1983年 Linde 提出了一个非常简单和优美的“混沌暴涨模型” [14], 它是最为流行的暴涨模型之一. 在该模型中, 暴涨场不再是任何统一理论中的场, 标量势也与对称破缺无关, 实际上它的唯一目的就是为了实现暴涨. 势的最低点在  $\phi = 0$ , 标量场的初始值必须被移离  $\phi = 0$ , 它在宇宙的不同区域取不同的初始

值，也就是说，标量场的初始值是混沌分布的（因而取名混沌暴涨）。只要满足合适的条件它就会暴涨，最终包围我们所观测的宇宙。这样，在我们观测的区域是平坦和均匀的，而在超过视界的尺度上宇宙是弯曲和不均匀的。

回顾历史，暴涨模型的基本思想是很明显和简单的。暴涨的条件为

$$\ddot{a} > 0 \iff \frac{d}{dt}(aH)^{-1} \iff \rho + 3p < 0. \quad (2.12)$$

上式告诉我们在共动坐标系中哈勃长度  $(aH)^{-1}$  在暴涨阶段是不断减小的，这是暴涨模型的关键所在。下面我们来具体讨论暴涨是如何解决标准宇宙学模型中的一些困难的。首先，它解决了平坦性问题。在暴涨过程中哈勃参数近似为一个常数，那么方程 (2.8) 给出

$$|1 - \Omega| \sim a^{-2}. \quad (2.13)$$

在标准宇宙学模型中，要使  $|1 - \Omega(t_0)| \sim 1$ ，就需要在辐射为主时期的初始时刻  $|1 - \Omega| \sim 10^{-60}$ 。在暴涨期间（从时刻  $t_i$  到时刻  $t_f$ ），

$$\frac{|1 - \Omega(t_f)|}{|1 - \Omega(t_i)|} = \left(\frac{a_i}{a_f}\right)^2 = e^{-2N}, \quad (2.14)$$

其中  $N$  就是 e-folding 数。假定  $|1 - \Omega(t_i)| \sim 1$ ，如果暴涨的 e-folding 数  $N \simeq 70$ ，

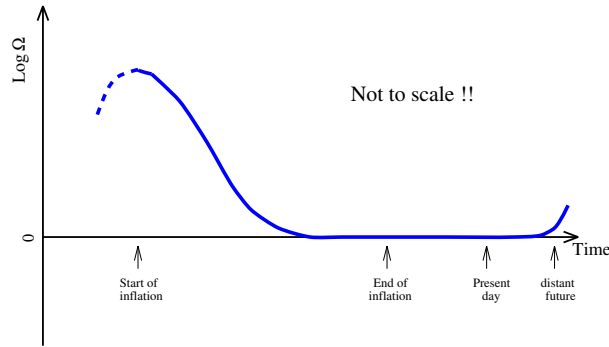


图 2.1: 宇宙的密度参数  $\Omega$  的演化示意图。

这时我们发现暴涨模型可以自然的给出辐射为主时期的初始时刻  $|1 - \Omega|$  的值。在考虑了暴涨之后，宇宙的密度参数  $\Omega$  的演化可以大致用图 2.1 来描述。这里需要强调一下的是，暴涨并不改变宇宙的整体几何性质。或者说宇宙是开放的，

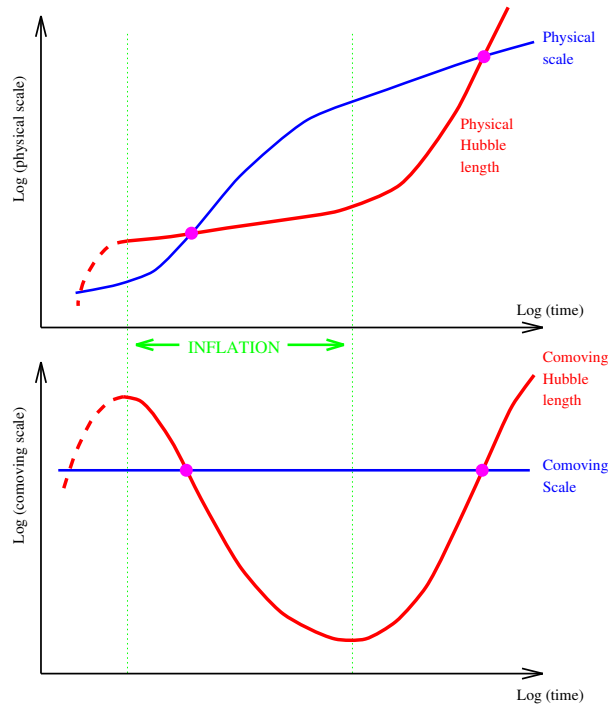


图 2.2: 物理尺度和视界尺度的演化示意图。

闭合的或是平坦的，它将仍然是开放的，闭合的或是平坦的。其次，它解决了视界问题。在暴涨期间，共动哈勃长度是减小的，这准许我们现在所观测的宇宙起源于一个小于哈勃半径的小区域，如图 2.2 所示。暴涨是一个近似指数膨胀的宇宙演化阶段，宇宙在很短的时间里膨胀了  $10^{30}$  甚至更多倍，从而稀释了磁单极和其它多余残留物，这样也就解决了多余残留物所带来的宇宙学问题。更为重要的是，暴涨为宇宙的结构形成提供了原初的密度扰动。在暴涨期间，暴涨场的真空量子扰动被暴涨拉到了视界以外，从而冻结了扰动。在暴涨结束后，它重新进入视界，从而为宇宙结构的形成提供了种子。

## §2.4 暴涨模型的构造

一个成功的暴涨模型需要考虑以下几个部分：首先，能够满足暴涨条件 (2.12)，其次，能够产生足够的暴涨，即足够的 e-folding 数，另外，预言的原初扰动（包括

标量扰动和张量扰动) 应该与观测一致, 最后, 暴涨能够很好的退出, 从而让位于标准宇宙学. 在标准的暴涨模型中, 暴涨通过一个弱耦合的标量场的动力学演化来实现的, 这个标量场称为暴涨场, 因此, 理解暴涨机制的关键就是在膨胀的宇宙中标量场的动力学演化. 为了分析标量场的演化, 有必要做一些合理的简化. 首先假定背景时空是空间平坦的 FRW 度规, 只考虑标量场的能量密度. 可以证明暴涨开始后不久, 时空很快趋于 FRW 度规, 其它形式的能量密度和空间几何项很快红移掉, 所以, 这一假定是很好的近似. 其次, 标量场是空间均匀的, 标量场的初始值偏离势的最小值点. 只要非均匀性足够小, 标量场的空间梯度很快红移掉, 因而可以忽略, 只有标量场的零动量模将是重要的. 最后, 标量场的量子扰动能够作为场的经典运动的小修正项, 后面我们将讨论量子涨落的重要性.

考虑最小耦合的标量场的作用量

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + V(\phi) \right], \quad (2.15)$$

其中  $V(\phi)$  为暴涨场的势. 假定暴涨场  $\phi$  是空间均匀的, 它的能动张量为理想流体形式, 那么它的能量密度和压强为

$$\rho_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (2.16)$$

$$P_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (2.17)$$

暴涨条件 (2.12) 告诉我们, 只要  $\dot{\phi} < V(\phi)$ , 暴涨就能发生. 如果标量势能远大于动能, 那么

$$P_\phi \simeq -\rho_\phi. \quad (2.18)$$

可以看出, 标量场相当于宇宙常数, 宇宙处于 dS 相中, 暴涨被一个标量场真空能驱动. 通过对作用量 (2.15) 变分或利用能动量守恒 (2.3), 我们可以得到暴涨场的运动方程

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0, \quad (2.19)$$

其中哈勃参数  $H$  为

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left[ \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right]. \quad (2.20)$$

为了让暴涨维持足够长的时间，我们要求暴涨势足够平坦，让暴涨场沿势慢慢下滚。也就是说，暴涨场的势能占宇宙的主导，同时暴涨场的加速项  $\ddot{\phi}$  可以忽略，由于宇宙的膨胀而产生的摩擦项  $3H\dot{\phi}$  平衡了暴涨势力项  $V'(\phi)$ ，从而使得暴涨场缓慢滚动。为了方便，我们引入三个有用的慢滚参数

$$\epsilon \equiv \frac{1}{16\pi G} \left( \frac{V'}{V} \right)^2, \quad (2.21)$$

$$\eta \equiv \frac{1}{8\pi G} \left( \frac{V''}{V} \right), \quad (2.22)$$

$$\delta \equiv -\frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}} \simeq \eta - \epsilon. \quad (2.23)$$

于是，慢滚条件可写为

$$\epsilon \ll 1, \quad \eta \ll 1. \quad (2.24)$$

当暴涨场满足慢滚条件 (2.24) 时，哈勃方程 (2.19) 和暴涨场运动方程 (2.20) 可简化为

$$3H\dot{\phi} \simeq -V'(\phi), \quad (2.25)$$

$$H^2 \simeq \frac{8\pi G}{3} V(\phi). \quad (2.26)$$

当慢滚条件 (2.24) 被破坏时，我们说暴涨结束了。在慢滚近似下，我们很容易算出从开始  $\phi_i$  到结束  $\phi_f$  所产生的 e-folding 数，

$$N = \int_{t_i}^{t_f} H dt \simeq 8\pi G \int_{\phi_f}^{\phi_i} \frac{V}{V'} d\phi. \quad (2.27)$$

只要  $N$  足够大就可以解决视界问题和平坦性问题。当暴涨场到达势的最低点时，它将开始振荡，暴涨场将衰变为其它极端相对论粒子，宇宙被重新加热。

## §2.5 暴涨模型的预言

暴涨模型不但解决了标准宇宙学中的一问题，预言了宇宙是近似平坦的，而且更重要的是，它能够给出近标度不变的，绝热的，高斯的原初曲率扰动谱，

从而形成了我们今天所看到的宇宙结构. 下面我们将利用线性扰动理论推导出原初曲率扰动谱.

在暴涨期间, 暴涨场的量子涨落  $\delta\phi$  将引起相应的能动张量的扰动  $\delta T_{\mu\nu}$ , 通过爱因斯坦场方程, 必定带来时空度规的扰动  $\delta g_{\mu\nu}$ . 反过来, 度规的扰动又会影响暴涨场的扰动. 因此暴涨的扰动  $\delta\phi$  和度规的扰动  $\delta g_{\mu\nu}$  是密切联系的, 必须联立在一起研究.

度规的扰动能够分解为标量扰动, 矢量扰动和张量扰动. 在线性近似下, 它们都彼此独立地演化, 因而可以分别研究它们. 在暴涨期间, 由于不存在转动的矢量场, 因而矢量扰动一般不被激发, 只产生标量扰动和张量扰动 (即引力波). 通过自由度的分析告诉我们, 对于四维的时空, 只存在 2 个标量扰动自由度和 2 个张量扰动自由度. 本节我们将分析在暴涨期间标量模和张量模的产生 [15, 16, 17, 18, 19].

首先我们考虑度规的标量扰动, 一般的扰动度规可写为

$$ds^2 = a^2 [(-1 - 2A)d\tau^2 + 2\partial_i B d\tau dx^i + ((1 - 2\psi)\delta_{ij} + D_{ij}E) dx^i dx^j], \quad (2.28)$$

这里  $\tau$  是共形时间, 即  $d\tau = dt/a$ ,  $D_{ij} \equiv (\partial_i \partial_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\nabla^2)$ . 这里的  $A, B, \psi$  和  $E$  并不都是物理的, 仅仅有两个是独立的, 存在着规范任意性, 因此在计算标量扰动时, 涉及到一个规范选取问题. 一般有两种方法, 一种方法是利用这些自由度构造出两个规范不变量 [20]

$$\Phi = -A + \frac{1}{a} \left[ \left( -B + \frac{E'}{2} \right) a \right]', \quad (2.29)$$

$$\Psi = -\psi - \frac{1}{6}\nabla^2 E + \frac{a'}{a} \left( B - \frac{E'}{2} \right), \quad (2.30)$$

这里的撇号表示对共形时间  $\tau$  求导. 另一种方法是先选取一个规范, 相当于选取了一个坐标系. 这样做的好处是当适当的规范条件被选择时, 扰动的计算能被相当大的简化. 但是也正是由于这种选择, 一些非物理的自由度也许会出现. 一般常采用以下五种具体的规范: 牛顿规范 (也称为纵向规范), 共动规范, 同时规范, 空间平坦规范和均匀密度规范. 我们采用牛顿规范, 扰动度规可简化为

$$ds^2 = a^2 [(-1 - 2A)d\tau^2 + (1 - 2\psi)\delta_{ij}dx^i dx^j]. \quad (2.31)$$

经过繁琐的推导，我们可以算出扰动的联络，扰动的曲率张量和曲率标量，最后得到扰动的爱因斯坦张量

$$\delta G_0^0 = 6 \left( \frac{a'}{a} \right)^2 A + 6 \frac{a'}{a} \psi' - 2 \nabla^2 \psi, \quad (2.32)$$

$$\delta G_i^0 = -2 \frac{a'}{a} \partial_i A - 2 \partial_i \psi', \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} \delta G_j^i = & \left[ 2 \frac{a'}{a} A' + 4 \frac{a''}{a} A - 2 \left( \frac{a'}{a} \right)^2 A + \nabla^2 A \right. \\ & \left. + 4 \frac{a'}{a} \psi' + 2 \psi'' - \nabla^2 \psi \right] \delta_j^i - \partial^i \partial_j A + \partial^i \partial_j \psi. \end{aligned} \quad (2.34)$$

在暴涨期间，暴涨场的扰动的能动张量为

$$\delta T_0^0 = A \phi'^2 - \delta \phi' \phi' - \delta \phi \frac{\partial V}{\partial \phi} a^2, \quad (2.35)$$

$$\delta T_i^0 = -\partial_i \delta \phi \phi', \quad (2.36)$$

$$\delta T_j^i = \left( -A \phi'^2 + \delta \phi' \phi' - \delta \phi \frac{\partial V}{\partial \phi} a^2 \right) \delta_j^i. \quad (2.37)$$

暴涨场的扰动的 Klein-Gordon 方程为

$$\delta \phi'' + 2 \frac{a'}{a} \delta \phi' - \nabla^2 \delta \phi - A' \phi' - 3 \psi' \phi' = -\delta \phi \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} a^2 - 2A \frac{\partial V}{\partial \phi}. \quad (2.38)$$

把方程 (2.32)-(2.37) 代入扰动的爱因斯坦场方程  $\delta G_{\mu\nu} = 8\pi G \delta T_{\mu\nu}$ ，并注意到扰动的能动张量的  $(ij)$  分量 (2.37) 只有对角项，方程 (2.34) 表明  $\psi = A$ ，那么，我们可以得到扰动度规  $\psi$  和扰动标量场  $\delta\phi$  的演化方程

$$3\mathcal{H}(\mathcal{H}\psi + \psi') - \nabla^2 \psi = 4\pi G \left( \psi \phi'^2 - \phi' \delta \phi' - \frac{\partial V}{\partial \phi} a^2 \delta \phi \right), \quad (2.39)$$

$$\psi' + \mathcal{H}\psi = 4\pi G \phi' \delta \phi, \quad (2.40)$$

$$(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2) \psi + 3\mathcal{H}\psi' + \psi'' = 4\pi G \left( -\psi \phi'^2 + \phi' \delta \phi' - \frac{\partial V}{\partial \phi} a^2 \delta \phi \right), \quad (2.41)$$

这里  $\mathcal{H} \equiv a'/a$ 。从方程 (2.40) 中减去方程 (2.39) 来消除  $\partial V/\partial \phi$  项，利用方程 (2.40) 把  $\delta\phi$  表达为  $\psi$  和  $\psi'$  的函数，并利用经典场的关系  $\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2 = -4\pi G \phi'^2$ ，最后，我们得到  $\psi$  的方程

$$\psi'' + 2 \left( \mathcal{H} - \frac{\phi''}{\phi'} \right) \psi' + 2 \left( \mathcal{H}' - \mathcal{H} \frac{\phi''}{\phi'} \right) \psi - \nabla^2 \psi = 0. \quad (2.42)$$

从方程 (2.42) 我们可以看出, 第二项是哈勃摩擦项, 第三项是导致不稳定的引力项, 最后一项是导致振荡的压强项. 我们引入一个规范不变量

$$u \equiv a\delta\phi + z\psi, \quad (2.43)$$

$$z \equiv a\frac{\phi'}{\mathcal{H}}. \quad (2.44)$$

注意到  $u$  与共动坐标系中的曲率扰动,  $\mathcal{R} = \psi + \mathcal{H}\delta\phi/\phi'$ , 有下面的关系

$$u = z\mathcal{R}. \quad (2.45)$$

方程 (2.42) 变为

$$u'' - \nabla^2 u - \frac{z''}{z}u = 0. \quad (2.46)$$

将  $u(\tau, \mathbf{x})$  按平面波展开

$$u(\tau, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} [u_{\mathbf{k}}(\tau)a_{\mathbf{k}}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + u_{\mathbf{k}}^*(\tau)a_{\mathbf{k}}^\dagger e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}], \quad (2.47)$$

在动量空间, 方程 (2.46) 变为

$$u_k'' + \left(k^2 - \frac{z''}{z}\right)u_k = 0. \quad (2.48)$$

对系统正则量子化, 有对易关系

$$[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}] = [a_{\mathbf{k}}^\dagger, a_{\mathbf{k}'}^\dagger] = 0, \quad [a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (2.49)$$

我们真正感兴趣的是计算共动曲率扰谱. 我们将共动曲率扰动作傅立叶展开

$$\mathcal{R} = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \mathcal{R}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \quad (2.50)$$

于是曲率扰动的功率谱  $P_s(k)$  就定义为曲率扰动的真空期望值,

$$\langle \mathcal{R}_{\mathbf{k}} \mathcal{R}_{\mathbf{k}'}^* \rangle = \frac{2\pi^2}{k^3} P_s(k) \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (2.51)$$

其中下指标  $s$  表示标量扰动. 利用方程 (2.45), (2.49) 和 (2.50), 我们得到

$$\langle \mathcal{R}_{\mathbf{k}} \mathcal{R}_{\mathbf{k}'}^* \rangle = \frac{1}{z^2} |u_k|^2 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (2.52)$$

比较方程 (2.51) 和 (2.52) 我们可以得到曲率扰动的功率谱的表达式

$$P_s(k) = \frac{k^3}{2\pi^2} \left| \frac{u_k}{z} \right|^2. \quad (2.53)$$

在慢滚近似下, 我们有

$$\frac{z''}{z} = 2a^2H^2 \left( 1 - \frac{3}{2}\delta + \epsilon + \frac{1}{2}\delta^2 - \frac{1}{2}\epsilon\delta + \frac{1}{2}\frac{1}{H}\dot{\epsilon} - \frac{1}{2}\frac{1}{H}\dot{\delta} \right), \quad (2.54)$$

共形时间  $\tau$  为

$$\tau = \int \frac{dt}{a} = \int \frac{da}{a^2H} = \frac{-1}{aH} + \int \frac{\epsilon da}{a^2H}. \quad (2.55)$$

在慢滚近似下,  $\epsilon$  和  $\delta$  可看作常数, 那么方程 (2.48) 简化为

$$u_k'' + \left[ k^2 - \frac{1}{\tau^2} \left( \nu^2 - \frac{1}{4} \right) \right] u_k = 0, \quad (2.56)$$

其中

$$\tau = \frac{-1}{aH} \left( \frac{1}{1-\epsilon} \right), \quad (2.57)$$

$$\nu = \frac{1-\delta+\epsilon}{1-\epsilon} + \frac{1}{2}. \quad (2.58)$$

在暴涨初始时刻, 扰动波长远远小于视界, 即  $aH/k \rightarrow 0$ , 方程 (2.56) 中的  $1/\tau^2$  项可忽略, 扰动模式  $u_k$  应该趋于平面波形式

$$u_k \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{-ik\tau}. \quad (2.59)$$

事实上, 这种做法相当于选择了真空态为绝热真空, 也被称为 Bunch-Davies 真空. 它在  $k\tau \rightarrow \infty$  的情况下对应于闵氏真空. 在弯曲时空的量子场论中, 真空态并不唯一, 不同的真空态对应的模函数  $u_k$  也不相同, 各真空态之间通过 Bogolyubov 变换相联系. 把 (2.59) 作为初始条件, 方程 (2.56) 的解为

$$u_k = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} e^{i(\nu+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}} (-\tau)^{\frac{1}{2}} H_\nu^{(1)}(-k\tau), \quad (2.60)$$

其中  $H_\nu^{(1)}$  是  $\nu$  阶第一类 Hankel 函数. 随着暴涨的进行, 它被逐渐拉出视界, 当  $aH/k \rightarrow \infty$  时, 即扰动的波长远远大于哈勃视界, 方程 (2.56) 中的  $k^2$  项可忽略, 有

$$u_k \rightarrow e^{i(\nu-\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}} 2^{\nu-\frac{3}{2}} \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\frac{3}{2})} \frac{1}{\sqrt{2k}} (-k\tau)^{\frac{1}{2}-\nu}. \quad (2.61)$$

把 (2.61) 代入 (2.53), 我们得到原初曲率扰动谱在  $k = aH$  处的取值

$$P_s(k) \simeq \frac{2^{2\nu-3} \Gamma^2(\nu)}{4\pi^2 \Gamma^2(\frac{3}{2})} (1 - \epsilon)^{2\nu-1} \left. \frac{H^2}{|\dot{\phi}|^2} \right|_{aH=k}. \quad (2.62)$$

这就是 Stewart-Lyth 公式. 定义标量谱指数

$$n_s(k) \equiv 1 + \frac{d \ln P_s}{d \ln k}, \quad (2.63)$$

那么, 在慢滚近似下, 标量谱指数的解析表达式为

$$n_s = 1 - 6\epsilon + 2\eta. \quad (2.64)$$

暴涨模型除了给出一个近标度不变的标量扰动外, 作为暴涨的另一个重要的预言是暴涨期间还产生了张量扰动, 即引力波. 下面我们简要给出张量扰动的推导. 一般的引力扰动的度规可写为

$$ds^2 = a^2(\tau) [-d\tau^2 + (\delta_{ij} + h_{ij})dx^i dx^j], \quad (2.65)$$

其中  $|h_{ij}| \ll 1$ . 张量  $h_{ij}$  有六个自由度, 考虑到引力波是无迹的  $\delta^{ij}h_{ij} = 0$  和横向的  $\partial^i h_{ij} = 0$ , 只剩下两个物理的自由度, 对应于无质量引力子的两个螺旋度 +2 和 -2 的自由度. 把张量扰动展开

$$h_{ij} = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\lambda=1}^2 \psi_{\mathbf{k},\lambda}(\tau) e_{ij}(\mathbf{k}, \lambda) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad (2.66)$$

其中  $e_{ij}(\mathbf{k}, \lambda)$  是极化张量, 满足关系

$$e_{ij} = e_{ji}, \quad e_{ii} = 0, \quad k_i e_{ij} = 0, \quad (2.67)$$

$$e_{ij}(\mathbf{k}, \lambda) e_{ij}^*(\mathbf{k}, \mu) = \delta_{\lambda\mu}, \quad e_{ij}(-\mathbf{k}, \lambda) = e_{ij}^*(\mathbf{k}, \lambda). \quad (2.68)$$

我们定义张量扰动的功率谱

$$\langle \psi_{\mathbf{k},\lambda} \psi_{\mathbf{l},\lambda}^* \rangle = \frac{2\pi^2}{k^3} P_t \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{l}) \quad (2.69)$$

扰动  $h_{ij}$  本身是规范不变量，描述了物理的张量扰动自由度。由于暴涨期间，暴涨场的能动张量是对角的，那么张量扰动是无源的。我们可以写出二阶张量扰动的作用量

$$S = \frac{1}{2} \int a^2 \left[ (h'_{ij})^2 - (\partial_t h_{ij})^2 \right] d\tau d^3\mathbf{x} \quad (2.70)$$

$$= \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{k} \sum_{\lambda=1}^2 \int \left[ |v'_{\mathbf{k},\lambda}|^2 - \left( k^2 - \frac{a''}{a} \right) |v_{\mathbf{k},\lambda}|^2 \right] d\tau, \quad (2.71)$$

这里

$$v_{\mathbf{k},\lambda} = a \psi_{\mathbf{k},\lambda}. \quad (2.72)$$

我们可以看出， $v_{\mathbf{k},\lambda}$  的两个独立分量具有相同的演化方程，所以在后面的计算中我们只需要考虑其中的一个分量  $v_{\mathbf{k}}$ 。它是正规化好的动力学变量，可以把它看作算符来做量子化，

$$v_{\mathbf{k}}(\tau) = v_{\mathbf{k}}(\tau) a_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}}^*(\tau) a_{-\mathbf{k}}^\dagger, \quad (2.73)$$

$$\left[ a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{l}}^\dagger \right] = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{l}), \quad a_{\mathbf{k}} |0\rangle = 0, \quad \text{etc.} \quad (2.74)$$

$v_{\mathbf{k}}$  的运动方程为

$$v_{\mathbf{k}}'' + \left( k^2 - \frac{a''}{a} \right) v_{\mathbf{k}} = 0. \quad (2.75)$$

在慢滚近似下，把慢滚参数看成常数，那么，方程 (2.75) 变为

$$v_{\mathbf{k}}'' + \left[ k^2 - \frac{1}{\eta^2} \left( \mu^2 - \frac{1}{4} \right) \right] v_{\mathbf{k}} = 0, \quad (2.76)$$

其中

$$\mu = \frac{1}{1-\epsilon} + \frac{1}{2}. \quad (2.77)$$

与计算标量扰动谱一样，我们取绝热真空，当  $aH/k \rightarrow 0$  时，有

$$v_{\mathbf{k}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{-ik\tau}. \quad (2.78)$$

满足初始条件 (2.78) 的方程 (2.76) 的解为

$$v_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} e^{i(\mu+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}} (-\tau)^{\frac{1}{2}} H_{\mu}^{(1)}(-k\tau). \quad (2.79)$$

于是

$$\langle \psi_{\mathbf{k}} \psi_{\mathbf{l}}^\dagger \rangle = \frac{1}{a^2} |v_k|^2 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{l}), \quad (2.80)$$

与方程 (2.69) 比较, 我们很容易得到

$$P_t(k) = \frac{k^3}{2\pi^2} \left| \frac{v_k}{z} \right|^2. \quad (2.81)$$

把解 (2.79) 在  $aH/k \rightarrow \infty$  时的渐进解代入张量扰动谱的表达式 (2.81), 并在  $aH = k$  处取值, 就可以得到慢滚条件下的张量扰动谱的解析表达式

$$P_t(k) = 2^{2\mu-3} \frac{\Gamma^2(\mu)}{\Gamma^2(\frac{3}{2})} (1 - \epsilon)^{2\mu-1} \left. \frac{H^2}{4\pi^2} \right|_{aH=k}. \quad (2.82)$$

定义张量谱的指数

$$n_t \equiv \frac{d \ln P_t}{d \ln k}, \quad (2.83)$$

则在慢滚近似下有

$$n_t = -2\epsilon. \quad (2.84)$$

定义张量扰动和标量扰动功率谱的幅度比

$$r \equiv \frac{P_t}{P_s} \simeq 16\epsilon = -8n_t, \quad (2.85)$$

这个关系通常称为一致性关系.

## §2.6 暴涨模型的分类

二十多年来, 有很多暴涨模型被提出, 然而我们并没有一个很好的标准来划分各种暴涨模型, 从而给出一个分类. 本节我们将根据慢滚参数  $\epsilon$  和  $\delta$  的关系把暴涨模型大致分为三类: 大场模型, 小场模型和混合模型.

### 1) 大场模型 ( $-\epsilon < \delta \leq \epsilon$ )

大场模型指的是暴涨开始时, 暴涨场的初始值都相当大, 暴涨场从较大值向较小值滚动, 如图 2.3 所示. 典型的大场模型有混沌暴涨模型 [14] 和幂律暴涨模

型 [21]. 这类模型的特征是  $V''(\phi) > 0$  和  $-\epsilon < \delta \leq \epsilon$ . 这类模型的有效势一般为多项式形式或指数形式:

$$V(\phi) = \Lambda^4 \left( \frac{\phi}{\mu} \right)^p, \quad (2.86)$$

$$V(\phi) = \Lambda^4 \exp \left( \frac{\phi}{\mu} \right). \quad (2.87)$$

对于多项式势 (2.86),  $\epsilon$  和  $\delta$  的关系为

$$\epsilon = \frac{p}{p-2} \delta. \quad (2.88)$$

对于指数势 (2.87), 宇宙学有严格的幂律解,  $\epsilon$  和  $\delta$  的关系为

$$\epsilon = \delta. \quad (2.89)$$

### 2) 小场模型 ( $\delta < -\epsilon$ )

在小场模型中, 暴涨场的初始值比较小, 一般接近于一个亚稳的平衡点, 暴涨场沿势向它的稳定的最低点滚动, 如图 2.4 所示. 该模型在对称性自发破缺理论中很自然的出现, 典型的小场暴涨模型有早期的新暴涨模型 [12, 13] 和自然暴涨模型 [22]. 其特征为  $V''(\phi) < 0$  和  $\delta < -\epsilon$ , 参数  $\epsilon$  非常接近于零, 使得张量扰动幅度非常小. 这类模型的有效势一般能够被写为

$$V(\phi) = \Lambda^4 \left[ 1 - \left( \frac{\phi}{\mu} \right)^p \right]. \quad (2.90)$$

它能够被看成是一个任意的有效势在原点的最低阶泰勒展开.

### 3) 混合模型 ( $0 < \epsilon < \delta$ )

在混合暴涨模型中, 一般有两个标量场, 其中一个标量场沿势滚动, 称为暴涨场; 另一个标量场起辅助作用, 提供真空能和结束暴涨过程, 如图 2.5 所示. 该模型常在超对称和超引力理论中出现, 它的有效势的一般形式为

$$V(\psi, \phi) = \left( \frac{\phi}{\mu} \right)^p + \frac{1}{4} \lambda (\psi^2 - M^2)^2 + \frac{1}{2} g \psi^2 \phi^2, \quad (2.91)$$

其中  $g$  是两个场的耦合常数. 暴涨开始时,  $\psi$  场处于  $\psi = 0$  点, 有效势的形式可简化为

$$V(\phi) = \frac{1}{4}\lambda M^4 + \left(\frac{\phi}{\mu}\right)^p, \quad (2.92)$$

$\phi$  场从较大值开始下滚, 直到  $\phi^2 = \phi_c^2 \equiv \lambda M^2/g$ , 此时  $\psi = 0$  点成为不稳定点, 滚向它的真真空  $\psi = \pm M$  点, 从而结束暴涨. 我们可以看出,  $\psi$  场的引入为暴涨提供了一种自然的退出机制. 在这类模型中, 暴涨场  $\phi$  向着非零真空态滚动, 暴涨结束是由  $\psi$  的不稳定性导致的. 其特征为  $V''(\phi) > 0$  和  $0 < \epsilon < \delta$ . 有效势一般能够被写为

$$V(\phi) = \Lambda^4 \left[ 1 + \left(\frac{\phi}{\mu}\right)^p \right], \quad (2.93)$$

由于在暴涨结束时的暴涨场由另一个场的物理决定, 因此需要另一个自由参数来表征这类模型. 大部分混合模型有蓝标量扰动谱, 即  $n_s > 1$ , 这相应于  $\delta > 2\epsilon$  的情况, 这也是它区别与其它模型的特点. 当然, 也可能产生红谱的标量扰动.

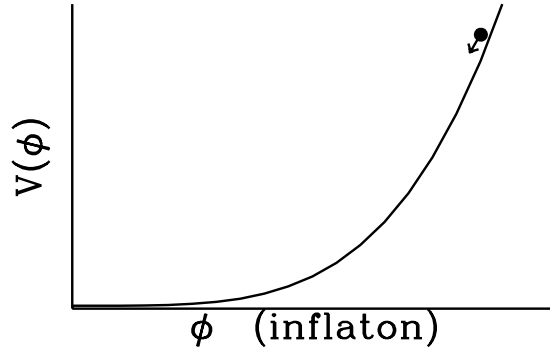


图 2.3: 大场暴涨模型中势的示意图.

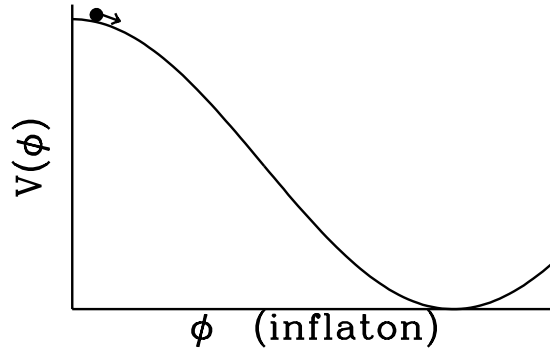


图 2.4: 小场暴涨模型中势的示意图.

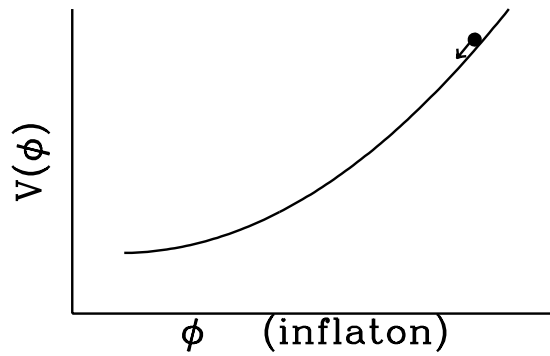


图 2.5: 混合暴涨模型中势的示意图.



### 第三章 快子宇宙学

所谓快子, 是指质量平方为负的量子场的量子. 一个存在快子的体系是不稳定的. 近年来, 出现在弦理论中的 non-BPS 结构, 譬如  $D - \bar{D}$  系统, 得到了许多研究者的关注. 一方面是由于理解这类结构对弦理论研究有着重要意义, 另一方面是它应用在宇宙学上能带来许多有趣的结果. 对于 non-BPS 结构, 由于超对称被破坏, 连接在膜上的开弦谱中就会有快子态, 这就意味着这样的系统是不稳定的, 将向着稳定的闭弦真空演化. 弦理论学家 A.Sen 构造了一个经典的时间依赖的解, 它描述了在弦理论中一个不稳定的 D 膜衰变的物理过程 [23]. 在这个过程中, 快子场向势的极小值滚动, 实现快子凝聚, 原来的膜消失, 得到一个闭弦真空.

快子场与引力场极小耦合的有效作用量可写为

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{R}{2\kappa^2} + V(T) \sqrt{1 + \alpha' g^{\mu\nu} \partial_\mu T \partial_\nu T} \right], \quad (3.1)$$

其中,  $\kappa^2 \equiv 8\pi G$ ,  $T$  是快子场,  $V(T)$  是快子场的有效势,  $M_s = l_s^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\alpha'}}$  是弦的基本质量标度和基本长度标度. 假定快子场是空间均匀各向同性的, 在空间平坦的 FRW 度规下, 由方程 (3.1), 我们得到快子的能量密度和压强

$$\rho_T = \frac{V(T)}{\sqrt{1 - \alpha' \dot{T}^2}}, \quad P_T = -V(T) \sqrt{1 - \alpha' \dot{T}^2}. \quad (3.2)$$

那么快子场的状态方程参数为

$$w \equiv \frac{P_T}{\rho_T} = -(1 - \alpha' \dot{T}^2). \quad (3.3)$$

显然, 快子场是负压场  $-1 \leq w \leq 0$ . 当  $\dot{T}$  很小时, 快子场能够驱动宇宙加速膨胀, 因而成为早期宇宙暴涨场和后期宇宙的暗能量的候选者. 我们可以看出, 滚动的快子场最终演化为非相对论流体 [24].

基于方程 (3.1), 我们很容易写下快子场的运动方程和 Friedmann 方程

$$\frac{\ddot{T}}{1 - \alpha' \dot{T}^2} + 3H\dot{T} + \frac{V'(T)}{\alpha' V(T)} = 0, \quad (3.4)$$

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3} \frac{V(T)}{\sqrt{1 - \alpha' \dot{T}^2}}. \quad (3.5)$$

在超弦理论中，快子场在  $T = 0$  附近的势是

$$V(T) \simeq \tau_3 e^{-T^2}, \quad (3.6)$$

其中  $\tau_3$  是 non-BPS 膜的张力

$$\tau_3 = \frac{\sqrt{2} M_s^4}{(2\pi)^3 g_s}, \quad (3.7)$$

这里  $g_s$  是弦的耦合常数。当快子场偏离势的极大时，Sen 指出势应当是指数形式 [23, 25]。指数势的快子场成为了驱动早期宇宙暴涨的候选者 [26]。

### §3.1 快子暴涨吸引子

如果暴涨模型具有预言性，那么演化结果不应该依赖于暴涨场的初始条件。否则任何结果，譬如密度扰动振幅，将依赖于未知的初始条件。然而，暴涨场的运动方程是二阶微分方程，场的一阶微分项的取值是任意的，因而导致在势函数的每一点会存在不同的解。只有解具有吸引子行为，即不同初始条件的解的差别快速衰减，暴涨模型才具有预言性。本节我们将证明指数势的快子暴涨具有吸引子性质，分析快子场的一般演化行为，从而给出成功的快子暴涨模型对初始条件的限制 [27]。

为简单起见，我们略去  $\alpha'$ ，取快子的有效势为一般指数势

$$V(T) = V_0 e^{-\alpha T}. \quad (3.8)$$

定义  $\Pi \equiv \dot{T}$  代表快子场的速度，方程 (3.4) 和 (3.5) 能够被写为

$$\frac{\dot{\Pi}}{1 - \Pi^2} + 3H\Pi + \frac{V'(T)}{V(T)} = 0, \quad (3.9)$$

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3} \frac{V(T)}{\sqrt{1 - \Pi^2}}. \quad (3.10)$$

把方程 (3.10) 对时间  $t$  微分, 代入方程 (3.9), 那么我们得到

$$\dot{T} = -\frac{2}{3} \frac{H'(T)}{H^2(T)}. \quad (3.11)$$

该方程给出了快子场  $T$  与时间  $t$  之间的关系, 那么我们能够把 Friedmann 方程重新写为

$$[H'(T)]^2 - \frac{9}{4}H^4(T) = -\frac{\kappa^4}{4}V^2(T), \quad (3.12)$$

这就是通常的 Hamilton-Jacobi 方程 [28, 29]. 在这里  $H(T)$  是一个基本量. 假设  $H_0(T)$  是方程 (3.12) 的一个解. 如果对这个解加上一个线性扰动, 随着  $T$  的增大, 这个扰动减小, 那么表明这个解就是一个吸引子. 展开  $H(T) = H_0(T) + \delta H(T)$ , 代入方程 (3.12) 中, 我们得到线性扰动满足的方程

$$H'_0 \delta H' \simeq \frac{9}{2} H_0^3 \delta H. \quad (3.13)$$

它的一般解是

$$\delta H(T) = \delta H(T_i) \exp\left(\frac{9}{2} \int_{T_i}^T \frac{H_0^3(T)}{H'_0(T)} dT\right), \quad (3.14)$$

其中  $\delta H(T_i)$  是在初始点  $T_i$  的取值, 由于  $H'_0$  和  $dT$  有相反的符号, 在指数项中的积分是负的, 因此相应的线性扰动是衰减的, 这样的解是吸引子.

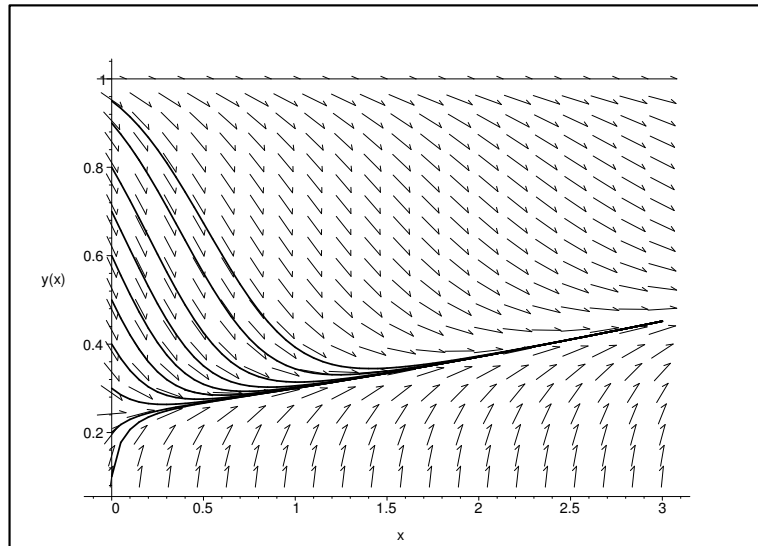


图 3.1: 快子场演化的相图.

我们在  $T \geq 0$  和  $0 \leq \Pi \leq 1$  范围选取了快子场的不同初始条件，画出了在  $(T, \Pi)$  平面的相图。从图 3.1 中我们可以看出存在一条曲线，它吸引了大多数曲线，是一个吸引子。另外，快子场的初始动能项迅速衰减，并不能阻止暴涨的发生。

为了进一步理解快子场的演化，我们解析地分析了快子场在相空间的运动轨迹。在  $(T, \Pi)$  平面上我们定义两个区域  $P$  和  $K$ ，如图 3.2， $P$  代表势能为主的区域，而  $K$  代表动能为主的区域。

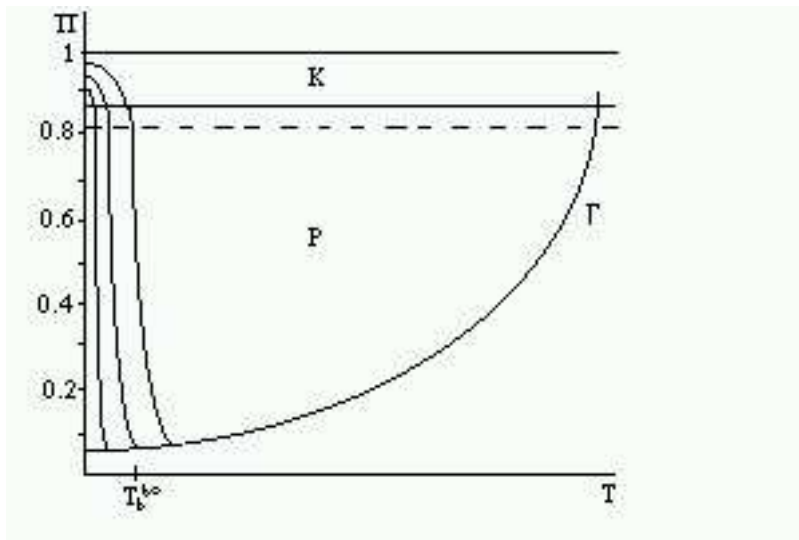


图 3.2: 快子场在相空间演化的示意图。

**曲线  $\Gamma$ :** 这条曲线描述了一个相应于暴涨的慢滚条件的解。此时，方程 (3.9) 和 (3.10) 能够被近似为

$$3H\Pi + \frac{V'(T)}{V(T)} = 0, \quad (3.15)$$

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3}V(T). \quad (3.16)$$

我们很容易得到其解为

$$\Pi = \frac{\alpha}{3\beta}e^{\frac{\alpha}{2}T}, \quad (3.17)$$

$$T = \frac{2}{\alpha} \ln \left( \frac{3\beta}{\alpha} \Pi \right), \quad (3.18)$$

其中  $\beta \equiv \sqrt{\kappa^2 V_0/3}$ . 暴涨的 e-folding 数是

$$N = \ln \frac{a_e}{a_b} = \kappa^2 \int_{T_e}^{T_b} \frac{V^2}{V''} dT = \frac{\kappa^2}{\alpha^2} V(T) \Big|_{T_e}^{T_b}, \quad (3.19)$$

这里  $T_b$  是它到达曲线  $\Gamma$  时的那一点的场值,  $T_e$  是慢滚动结束时的场值. 为了得到足够的 e-folding 数, 对于某一个轨道,  $T_b$  必须满足条件

$$0 \leq T_b < T_b^{60}, \quad (3.20)$$

其中  $T_b^{60}$  是从方程 (3.19) 在  $N = 60$  时得到的.

**区域  $P$ :** 在这个区域中, 势能为主. 由于在方程 (3.9) 中摩擦项正比于有效势, 势的导数项相对于摩擦项可以忽略. 因而方程 (3.9) 和 (3.10) 能够被近似为

$$\dot{\Pi} + 3H\Pi = 0, \quad (3.21)$$

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3} V(T), \quad (3.22)$$

其解为

$$\Pi = \Pi_{pk} - \frac{6\beta}{\alpha} (e^{-\frac{\alpha}{2}T_{pk}} - e^{-\frac{\alpha}{2}T}), \quad (3.23)$$

$$T = -\frac{2}{\alpha} \ln \left[ e^{-\frac{\alpha}{2}T_{pk}} - \frac{\alpha}{6\beta} (\Pi_{pk} - \Pi) \right], \quad (3.24)$$

这里  $T_{pk}$  和  $\Pi_{pk}$  分别是在区域  $P$  和  $K$  边界处的值. 我们定义  $T_b$  和  $\Pi_b$  分别为当轨道到达慢滚曲线时的场值和动量值, 得到

$$T_b = -\frac{2}{\alpha} \ln \left[ e^{-\frac{\alpha}{2}T_{pk}} - \frac{\alpha}{6\beta} \Pi_{pk} \right], \quad (3.25)$$

这里我们已忽略了  $\Pi_b$ , 因为它相对于  $\Pi_{pk}$  是非常小的. 由于快子场的作用量不同于通常的标量场, 动能项和势能项分离是比较困难的. 如果我们假定势能和动能分别为  $V(T)$  和  $V(T) \left( \frac{1}{\sqrt{(1-T^2)}} - 1 \right)$ , 那么在区域  $P$  和  $K$  之间的边界值是  $\Pi_{pk} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . 我们可得到

$$T_b = -\frac{2}{\alpha} \ln \left[ e^{-\frac{\alpha}{2}T_{pk}} - \frac{\alpha}{4\sqrt{3}\beta} \right]. \quad (3.26)$$

从方程 (3.20), 对于足够的 e-folding 数, 初始条件必须满足

$$-\frac{2}{\alpha} \ln \left[ e^{-\frac{\alpha}{2} T_{pk}} - \frac{\alpha}{4\sqrt{3}\beta} \right] < T_b^{60}. \quad (3.27)$$

**区域 K:** 在这个区域中, 动能项为主.  $V'(T)$  相对于摩擦项可以忽略掉, 于是方程 (3.9) 和 (3.10) 成为

$$\frac{\dot{\Pi}}{1 - \Pi^2} + 3H\Pi = 0, \quad (3.28)$$

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3} \frac{V(T)}{\sqrt{1 - \Pi^2}}. \quad (3.29)$$

对其积分, 我们得到

$$\Pi_2 F_1 \left( \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}, \Pi^2 \right) = \Pi_{pk2} F_1 \left( \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}, \Pi_{pk}^2 \right) - \frac{6\beta}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2} T} \Big|_T^{T_{pk}}, \quad (3.30)$$

$$T = -\frac{2}{\alpha} \ln \left[ e^{-\frac{\alpha}{2} T_{pk}} - \frac{\alpha}{6\beta} \Pi_2 F_1 \left( \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}, \Pi^2 \right) \Big|_{\Pi}^{\Pi_{pk}} \right], \quad (3.31)$$

这里  ${}_2F_1 \left( \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}, \Pi^2 \right)$  是高斯超几何函数.

我们得到了在不同区域的快子场轨道的解析近似, 从图 3.1 和图 3.2 中我们容易看出这些分析结果与相应的数值结果非常一致. 因此, 在快子暴涨模型中, 快子场的慢滚解仍然是吸引子, 初始的动能项并不能阻止暴涨的发生.

### §3.2 多快子标度解

对于快子暴涨模型 [30], L.Kofman 和 A.Linde 指出了一些困扰这个模型的问题, 譬如暴涨模型预言的观测量与模型中的弦理论参数不自洽 [31]. 为了解决这些问题, 多快子场的辅助暴涨模型被提出 [32]. 另一方面, 快子场拉氏量的特殊形式导致了有趣的物理性质, 反平方势的快子场产生的宇宙学演化行为类似于指数势的普通标量场 [33]. 快子场的反平方势如普通标量场的指数势一样, 也能被构造成为自治系统, 给出幂律的宇宙学解. 本节我们将利用相空间分析法研究反平方势的多快子场的宇宙动力学 [34].

考虑  $m$  个无直接相互作用的快子场  $T_i$ , 并且它们具有如下反平方势

$$V_i(T_i) = V_{0i}T_i^{-2}. \quad (3.32)$$

在平空间的 FRW 度规下, 每个场的运动方程和 Friedmann 方程分别为

$$\frac{\ddot{T}_i}{1 - \dot{T}_i^2} + 3H\dot{T}_i + \frac{1}{V_i(T_i)} \frac{dV_i(T_i)}{dT_i} = 0, \quad (3.33)$$

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3} \sum_{i=1}^m \frac{V_i(T_i)}{\sqrt{1 - \dot{T}_i^2}}. \quad (3.34)$$

定义两个无量纲变量

$$x_i \equiv \dot{T}_i, \quad y_i \equiv \frac{\kappa^2 V_i(T_i)}{3H^2}, \quad (3.35)$$

那么演化方程 (3.33) 就可以写为一个如下自治系统:

$$x'_i = -3 \left( x_i - \sqrt{\beta_i y_i} \right) (1 - x_i^2), \quad (3.36)$$

$$y'_i = 3y_i \left( \sum_{i=1}^m \frac{y_i x_i^2}{\sqrt{1 - x_i^2}} - \sqrt{\beta_i y_i} x_i \right), \quad (3.37)$$

其中, 撇号表示对  $N \equiv \ln a$  微分,  $a$  是宇宙标度因子, 定义了  $\beta_i \equiv 4/(3\kappa^2 V_{0i})$ .

那么 Friedmann 方程 (3.34) 成为一个约束方程

$$1 = \sum_{i=1}^m \frac{y_i}{\sqrt{1 - x_i^2}}. \quad (3.38)$$

自治系统的临界点对应于  $x'_i = 0$  和  $y'_i = 0$  的不变点, 有满足

$$\frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{3}{2} \sum_{i=1}^m \frac{y_i x_i^2}{\sqrt{1 - x_i^2}} \quad (3.39)$$

的自相似解. 它对应于一个  $a \propto t^p$  的膨胀宇宙, 或  $a \propto (-t)^p$  的收缩宇宙, 其中

$$p = \frac{1}{\frac{3}{2} \sum_{i=1}^m \frac{y_i x_i^2}{\sqrt{1 - x_i^2}}}. \quad (3.40)$$

Label	$x_i$	$y_i$	$p$	Existence	Stability
$K$	$\pm 1$	$0$	$\frac{2}{3}$	all $\beta_i$	unstable
$S$	$x_s$	$\frac{x_s^2}{\beta_i}$	$\frac{4}{3\beta(\sqrt{\beta^2+4}-\beta)}$	all $\beta_i$	stable

表 3.1: 对于两个快子场情况, 临界点的性质.

令  $x'_i = 0$  和  $y'_i = 0$ , 我们得到两类临界点  $K$  和  $S$ , 分别对应于动能为主解和动势能标度解, 它们的性质列入表 3.1 上, 其中

$$x_s^2 = \frac{1}{2}\beta \left( \sqrt{\beta^2 + 4} - \beta \right), \quad (3.41)$$

这里我们定义了

$$\frac{1}{\beta} \equiv \sum_{i=1}^m \frac{1}{\beta_i}. \quad (3.42)$$

从方程 (3.40) 和 (3.38) 我们可以看出, 临界点  $K$  的行为类似非相对论性物质, 宇宙标度因子按  $p = 2/3$  幂律膨胀. 此动能为主的解是快子场沿势下滚的渐进极限解. 对于临界点  $S$ ,

$$p = \frac{4}{3\beta(\sqrt{\beta^2 + 4} - \beta)}. \quad (3.43)$$

相应的单个快子场均线性演化

$$T_i = x_s t + T_{i0}, \quad (3.44)$$

这里  $T_{i0}$  是任意积分常数. 每一个快子场都以相同的常速沿势向下滚动. 具有反平方势的多快子场产生的宇宙学性质类似于理想流体, 物态方程参数是

$$w \equiv \frac{P_T}{\rho_T} = \frac{1}{2}\beta \left( \sqrt{\beta^2 + 4} - \beta \right) - 1. \quad (3.45)$$

指数势的普通标量场的宇宙学标度解具有类似的行为, 标量场的动项和势能项成比例演化 [35]. 暴涨解要求  $\rho_T + 3P_T < 0$ , 即  $\beta < 2/\sqrt{3}$ . 对于反平方势的单快子场模型,  $V_0$  必须大于  $2/(\sqrt{3}\kappa^2)$  才能保证宇宙的加速膨胀. 然而, 若有足够多的快子场协调驱动宇宙, 那么  $V_0$  在普朗克能标以下就能满足暴涨条件.

为了分析临界点的稳定性, 我们只考虑两个快子场的情况. 利用约束方程 (3.38), 方程 (3.36) 和 (3.37) 约化为三个独立的方程:

$$x_1' = -3 \left( x_1 - \sqrt{\beta_1 y_1} \right) (1 - x_1^2), \quad (3.46)$$

$$y_1' = 3y_1 \left[ \frac{(x_1^2 - x_2^2)y_1}{\sqrt{1 - x_1^2}} + x_2^2 - \sqrt{\beta_1 y_1} x_1 \right], \quad (3.47)$$

$$x_2' = -3 \left[ x_2 - \sqrt{\beta_2} (1 - x_2^2)^{\frac{1}{4}} \left( 1 - \frac{y_1}{\sqrt{1 - x_1^2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right] (1 - x_2^2). \quad (3.48)$$

在临界点  $K$  附近, 我们对系统 (3.46)-(3.48) 加入扰动, 并线性化, 得到三个正的特征指数

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 6, \quad \lambda_3 = 3,$$

它们表明了动能为主的解是不稳定的. 对于临界点  $K$ , 线性扰动给出了三个负的本征值

$$\lambda_1 = -\frac{3x_s^2}{2\beta^2} (2x_s^2 + \beta^2),$$

$$\lambda_2 = -\frac{3x_s^2}{4\beta^2} \left[ (2x_s^2 + \beta^2) + \sqrt{(2x_s^2 + \beta^2)^2 - 16\beta^2 x_s^2 (1 + \beta_2/\beta_1)(1 - \beta/\beta_1)} \right],$$

$$\lambda_3 = -\frac{3x_s^2}{4\beta^2} \left[ (2x_s^2 + \beta^2) - \sqrt{(2x_s^2 + \beta^2)^2 - 16\beta^2 x_s^2 (1 + \beta_2/\beta_1)(1 - \beta/\beta_1)} \right].$$

因此, 这一临界点是稳定的, 相应的宇宙学标度解是吸引子, 不依赖于参数  $\beta$ . 对于单快子场模型  $\beta = \beta_1$ , 三个本征值简并为一个.

上面我们只考虑了多快子场的情况, 现在我们引入理想流体成分, 其物态方程为  $P_\gamma = (\gamma - 1)\rho_\gamma$ , 其中  $0 < \gamma \leq 2$ . 譬如, 对于辐射成分  $\gamma = 4/3$ , 对于非相对论物质  $\gamma = 1$ . 理想流体的演化方程是

$$\dot{\rho}_\gamma = -3H(\rho_\gamma + P_\gamma). \quad (3.49)$$

Fridemann 方程为

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3} \left( \sum_{i=1}^m \frac{V_i(T_i)}{\sqrt{1 - \dot{T}_i^2}} + \rho_\gamma \right). \quad (3.50)$$

定义另一个无量纲变量  $z \equiv \kappa^2 \rho_\gamma / 3H^2$ , 演化方程 (3.33) 和 (3.49) 能够写为如下自治系统:

$$x'_i = -3 \left( x_i - \sqrt{\beta_i y_i} \right) (1 - x_i^2), \quad (3.51)$$

$$y'_i = 3y_i \left( \sum_{i=1}^m \frac{y_i x_i^2}{\sqrt{1-x_i^2}} - \sqrt{\beta_i y_i} x_i + \gamma z \right), \quad (3.52)$$

$$z' = 3z \left( \sum_{i=1}^m \frac{y_i x_i^2}{\sqrt{1-x_i^2}} + \gamma z - \gamma \right). \quad (3.53)$$

方程 (3.50) 成为

$$1 = \sum_{i=1}^m \frac{y_i}{\sqrt{1-x_i^2}} + z. \quad (3.54)$$

自治系统的临界点对应于  $x'_i = 0$ ,  $y'_i = 0$  和  $z' = 0$ , 其自相似解满足

$$\frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{3}{2} \left( \sum_{i=1}^m \frac{y_i x_i^2}{\sqrt{1-x_i^2}} + \gamma z \right). \quad (3.55)$$

这对应于  $a \propto t^p$  的膨胀宇宙, 其中

$$p = \frac{2}{3 \sum_{i=1}^m \frac{y_i x_i^2}{\sqrt{1-x_i^2}} + 3\gamma z}. \quad (3.56)$$

系统 (3.51)-(3.53) 有四类临界点: 点  $K$ , 对应于动能为主的解; 点  $S$ , 对应于动势能标度解; 点  $F$ , 对应于流体为主的解; 点  $T$ , 对应于快子物质跟踪解. 它们的物理性质列在了表 3.2 中. 为了分析它们的稳定性, 我们仍考虑两个快子场, 并且引入理想流体. 下面我们将分析这些临界点的物理性质.

**临界点  $K$ :**  $x_i = \pm 1$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ . 无论参数  $\beta_i$  和  $\gamma$  取任何值, 这类动能为主的解总是存在的, 它们的行为类似于非相对论物质, 标度因子的演化为  $a \propto t^{2/3}$ . 系统 (3.51)-(3.53) 的线性扰动方程给出四个本征值

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 6, \quad \lambda_3 = \lambda_4 = 3\gamma,$$

表明这些解是不稳定的.

Label	$x_i$	$y_i$	$z$	$p$	Existence	Stability
$K$	$\pm 1$	0	0	$\frac{2}{3}$	all $\beta_i, \gamma$	unstable
$S$	$x_s$	$\frac{x_s^2}{\beta_i}$	0	$\frac{2}{3\beta_*}$	all $\beta_i, \gamma$	stable ( $\gamma \geq \beta_*$ ); unstable ( $\gamma < \beta_*$ )
$F$	0	0	1	$\frac{2}{3\gamma}$	all $\beta_i, \gamma$	stable ( $\gamma = 0$ ); unstable ( $\gamma \neq 0$ )
$T$	$\sqrt{\gamma}$	$\frac{\gamma}{\beta_i}$	$\frac{\beta\sqrt{1-\gamma}-\gamma}{\beta\sqrt{1-\gamma}}$	$\frac{2}{3\gamma}$	$\gamma < \beta_*$	stable

表 3.2: 在包含两个快子场和理想流体成分的宇宙学模型中, 临界点的性质. 在表中我们定义了  $\beta_* \equiv \beta(\sqrt{\beta^2 + 4} - \beta)/2$ .

**临界点  $S$ :**  $x_i = x_s, y = x_s^2/\beta_i, z = 0$ . 该解总是存在的. 方程 (3.56) 中幂指数  $p$  依赖于势参数  $\beta$ . 从该点的线性扰动方程, 我们得到四个本征值

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -3 \left( \frac{x_s^4}{\beta^2} + \frac{x_s^2}{2} \right), \\ \lambda_2 &= -3(\gamma - x_s^2), \\ \lambda_3 &= -\frac{3}{2} \left( \frac{x_s^4}{\beta^2} + \frac{x_s^2}{2} \right) + \frac{3}{2} \sqrt{\left( \frac{x_s^4}{\beta^2} + \frac{x_s^2}{2} \right)^2 - \frac{4x_s^6}{\beta^2}}, \\ \lambda_4 &= -\frac{3}{2} \left( \frac{x_s^4}{\beta^2} + \frac{x_s^2}{2} \right) - \frac{3}{2} \sqrt{\left( \frac{x_s^4}{\beta^2} + \frac{x_s^2}{2} \right)^2 - \frac{4x_s^6}{\beta^2}}.\end{aligned}$$

从中我们可以看出, 当  $\gamma < \beta(\sqrt{\beta^2 + 4} - \beta)/2$  时, 动势能标度解是不稳定的; 当  $\gamma \geq \beta(\sqrt{\beta^2 + 4} - \beta)/2$  时, 它是稳定解.

**临界点  $F$ :**  $x_i = 0, y_i = 0, z = 1$ . 该流体为主的解总是存在的, 宇宙幂律膨胀解为  $p = 2/3\gamma$ . 线性扰动方程的四个本征值为

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -3, \lambda_3 = \lambda_4 = 3\gamma,$$

表明除了  $\gamma = 0$  的情况, 流体为主的解是不稳定的.

**临界点  $T$ :**  $x_i = \sqrt{\gamma}, y_i = \gamma/\beta_i, z = 1 - \frac{\gamma}{\beta\sqrt{1-\gamma}}$ . 当  $\gamma < \beta(\sqrt{\beta^2 + 4} - \beta)/2$  时, 该跟踪解存在. 宇宙幂律膨胀解为  $p = 2/3\gamma$ , 这跟流体为主的解相同, 只依

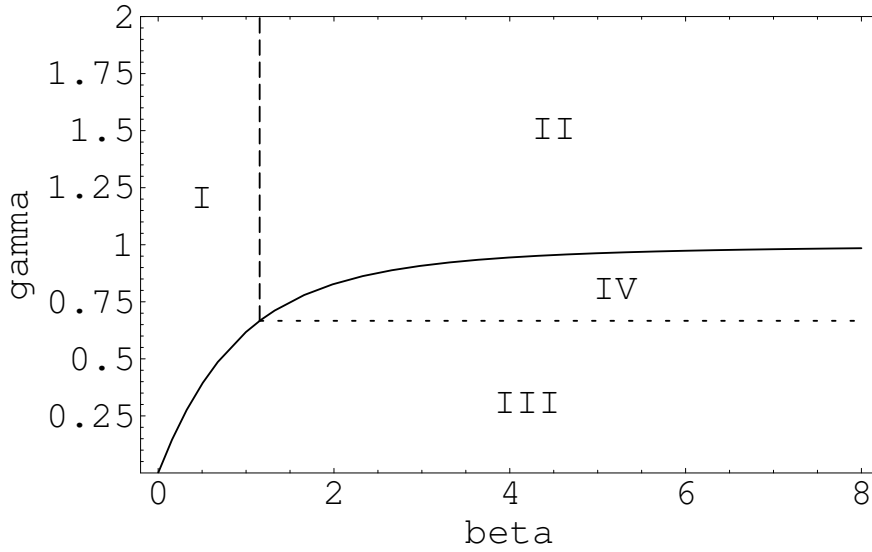


图 3.3: 参数空间  $(\beta, \gamma)$  中稳定性区域. 在区域 I 和 II 中, 快子动势能标度解是吸引子. 在区域 III 和 IV 中, 快子流体跟踪解是后期吸引子. 另外, 在区域 I 和 III 中, 宇宙加速膨胀, 而在区域 II 和 IV 中, 宇宙减速膨胀.

赖于理想流体指标  $\gamma$ , 而于势参数  $\beta_i$  无关. 线性扰动本征值为

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -\frac{3}{4}(2-\gamma) + \frac{3}{4}\sqrt{4-20\gamma+17\gamma^2}, \\ \lambda_2 &= -\frac{3}{4}(2-\gamma) - \frac{3}{4}\sqrt{4-20\gamma+17\gamma^2}, \\ \lambda_3 &= -\frac{3}{4}(2-\gamma) + \frac{3}{4}\sqrt{(2-\gamma)^2 + 16\gamma\sqrt{1-\gamma}\left(\frac{\gamma}{\beta} - \sqrt{1-\gamma}\right)}, \\ \lambda_4 &= -\frac{3}{4}(2-\gamma) - \frac{3}{4}\sqrt{(2-\gamma)^2 + 16\gamma\sqrt{1-\gamma}\left(\frac{\gamma}{\beta} - \sqrt{1-\gamma}\right)}.\end{aligned}$$

因此, 只要跟踪解存在, 它就是稳定的.

如图 3.3 所示, 在参数空间  $(\beta, \gamma)$  中, 不同的区域导致不同的宇宙学演化结果. 若  $\gamma > \beta(\sqrt{\beta^2+4}-\beta)/2$ , 点  $K, S$  和  $F$  存在, 只有点  $S$  是稳定的后期吸引解, 因此动能为主的解或流体为主的解总是趋向动势能标度解. 若  $\gamma < \beta(\sqrt{\beta^2+4}-\beta)/2$ , 四类临界点都存在, 点  $T$  是后期吸引子. 因此, 从动能为主的解, 流体为主的解或动势能标度解开始演化的一般解, 总是趋向于稳定的流体快子跟踪解.

本节, 我们首先对反平方势的多快子场的宇宙学演化做了相空间分析, 得到了幂律膨胀的宇宙学标度解. 稳定性分析表明它是后期吸引子解. 这意味着随着宇宙的演化每个快子场的速度趋于同一个常数. 对单快子场模型, 宇宙加速要求势能高于普朗克能标, 而对于足够多的快子场, 能级在普朗克能标以下, 加速仍能够发生. 其物理原因可能是, 每个快子场除了受自身势产生的向下推力外, 还受来自所有快子场对膨胀贡献产生的摩擦力 [36]. 其次, 我们把这种分析方法推广到宇宙中含理想流体成分. 分析了临界点的存在性和稳定性, 给出了导致不同宇宙演化的参数空间.



## 第四章 膜世界宇宙学

为了解决普朗克能标 ( $M_{pl} \sim 10^{18}\text{GeV}$ ) 和电弱能标 ( $M_{ew} \sim 10^3\text{GeV}$ ) 之间的等级问题, Arkani-Hamed 等人 1998 年提出了 ADD 模型 [37]. 其基本思想是: 我们的四维世界是一个镶嵌在  $(4+n)$  维时空中的三维空间膜, 标准模型的粒子被束缚在这张膜上, 而引力可以在整个时空中传播. 在该模型中, 四维普朗克标度不是基本标度, 这个高维时空理论的基本标度大约在电弱标度附近, 而我们观测到的四维普朗克标度之所以这么高, 是因为额外维的体积比较大的结果. 四维普朗克标度  $M_{pl}$  和  $(4+n)$  维普朗克标度  $M_*$  的关系为

$$M_{pl}^2 = M_*^{2+n} r_c^n, \quad (4.1)$$

其中  $r_c$  是额外维的紧致化半径. 假定  $M_* \sim M_{ew}$ , 则额外维半径为

$$r_c \sim 10^{\frac{30}{n}-17} \text{cm} \times \left( \frac{1\text{TeV}}{M_{ew}} \right)^{1+\frac{2}{n}}. \quad (4.2)$$

当  $n = 1$  时,  $r_c \sim 10^{13}\text{cm}$ , 这种情况已被目前实验所排除. 当  $n = 2$  时,  $r_c \sim 1\text{mm}$ , 这个值落在我们即将能够探测的范围. 因此, 如果 ADD 模型的假定是正确的, 我们的实验将能探测到额外维度的效应. 当  $n > 2$  时, 只有在比目前实验能探测的尺度小很多尺度上, 才能观测到引力的修正. 在膜上, 当距离  $r \gg r_c$  时, 引力就是通常的四维牛顿引力. 当距离  $r \sim r_c$  时, 引力是有 KK 模式的修正:

$$V(r) \sim \frac{1}{M_*^{2+n} r_c^n} \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{r_c^n}{r^n} \right). \quad (4.3)$$

当距离  $r \ll r_c$  时, 其引力势为  $(4+n)$  维的牛顿引力势.

ADD 假定了额外维空间几何是平坦的. 基于 M 理论的思想 [38], Randall 和 Sundrum 考虑了卷曲的额外维空间几何, 取得了重要的进展 [39, 40]. 最初, 为了解决普朗克标度和电弱标度等级问题, 他们提出了两膜的 RSI 模型 [39]. 在该模型中, 背景是一个五维 AdS 时空, 额外维有拓扑  $S^1/Z_2$ , 两个三维膜分别放在  $S^1/Z_2$  流形的两个固定点上. 位于额外维坐标  $y = r$  的膜具有负张力, 标准模型粒子束缚在其上, 称为可见膜, 另一膜具有正的张力, 位于  $y = 0$  处, 称为隐藏膜, 而引力可以在整个五维时空中传播.

RSI 模型的作用量是

$$S = S_{\text{HE}} + S_{\text{brane}}, \quad (4.4)$$

$$S_{\text{HE}} = \int d^4x dy \sqrt{-\tilde{g}} \left( \frac{\tilde{R}}{2\kappa_5^2} - \Lambda_5 \right), \quad (4.5)$$

$$S_{\text{brane}} = \int d^4x (\sqrt{-g_1} \sigma_1 + \sqrt{-g_2} \sigma_2). \quad (4.6)$$

其中,  $\kappa_5$  是五维引力耦合常数,  $g_1$  和  $g_2$  分别是五维度规  $\tilde{g}$  在  $y = 0$  和  $y = r$  的膜上的诱导度规,  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$  是相应的膜张力,  $\Lambda_5$  是五维宇宙学常数. 一个在四维子流形上具有 Poincare 不变性的五维度规具有如下形式:

$$ds^2 = e^{-2K(y)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2. \quad (4.7)$$

我们可以看出, 对  $y$  为常数的四维子流形, 卷曲函数  $K(y)$  是一个共形因子. 对作用量 (4.4) 变分得到的爱因斯坦方程给出下面两个独立方程:

$$6K'^2 = -\kappa_5^2 \Lambda_5, \quad (4.8)$$

$$3K'' = \kappa_5^2 [\sigma_1 \delta(y) + \sigma_2 \delta(y - r)], \quad (4.9)$$

其中撇号表示对  $y$  求导. 由于假定额外维空间具有  $Z_2$  对称性  $y \rightarrow -y$ , 第一个方程 (4.8) 有解

$$K(y) = y \sqrt{-\frac{\kappa_5^2 \Lambda_5}{6}} \equiv yk, \quad (4.10)$$

它表明五维宇宙学常数  $\Lambda_5$  一定是负的. 要使该结果满足第二个方程 (4.9), 膜张力和五维宇宙学常数必须满足

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = -\frac{\Lambda_5}{k}. \quad (4.11)$$

这是方程组 (4.8) 和 (4.9) 的解 (4.10) 存在的条件. 它的物理意义是使得膜上的四维有效宇宙学常数为零. 从 (4.11) 式, 我们可以看出这两个膜有相反的张力, 即在  $y = 0$  的是正张力膜, 在  $y = r$  的是负张力膜.

考虑一个局域在负张力膜上的标量场, 其作用量为

$$S_\phi = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} e^{-4kr} (e^{2kr} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - m^2 \phi^2). \quad (4.12)$$

对标量场作标度变换  $\phi \rightarrow e^{kr} \phi$ , 作用量变为

$$S_\phi = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - m^2 e^{-2kr} \phi^2). \quad (4.13)$$

我们看出, 在可见膜上一个质量参数  $m$  对应一个物理质量  $m_{\text{physics}} \equiv m e^{-kr}$ . 由于指数因子  $e^{-kr}$ , 物理质量被显著地降低. 如果取  $e^{-kr} \sim 10^{-16}$  和  $m \sim M_{pl}$ , 那么我们就得到电弱标度. 由于共形因子是指数形式, 额外维度不需要很大 ( $kr \approx 50$ ). 因此, 在 RSI 模型中, 我们可以把四维普朗克标度作为基本质量标度, 把电弱标度看成诱导标度. 当然, 这个机制的完整实现需要解释为什么负张力膜固定在一个特定的位置. 虽然在额外维中引入标量场能满足这一性质 [41], 但我们对额外维空间稳定机制仍然没有完全清楚.

## §4.1 膜世界宇宙学

在膜世界图象中, 如何恢复标准宇宙学和研究与标准宇宙学相比可能存在的偏差显然是非常重要的, 因此, 在这一节我们讨论膜世界图象中的宇宙学. 研究膜宇宙学的一种方法是假定一个五维的度规, 然后通过爱因斯坦方程求出度规的具体形式, 同时得到膜上标度因子的演化方程 [42]. 另一种方法是考虑两个五维的 Schwarzschild-AdS 时空通过膜连接在一起, 求解 Israel 连接条件 [43] 得到膜在背景时空中的运动行为. 对膜上的观测者而言, 膜在额外维空间的运动能够被解释为膜宇宙的膨胀或收缩 [44]. 下面我们将利用前一种方法求解膜上的宇宙学演化方程.

考虑一个五维时空度规

$$ds^2 = -n^2(\tau, y) d\tau^2 + a^2(\tau, y) \gamma_{ij} dx^i dx^j + b^2(\tau, y) dy^2, \quad (4.14)$$

其中,  $\gamma_{ij}$  是一个最大对称性的三维度规 ( $k = -1, 0, +1$  分别对应于开, 平坦和闭的三维空间几何). 五维爱因斯坦方程有通常的形式

$$G_{AB} \equiv R_{AB} - \frac{1}{2} R g_{AB} = \kappa_5^2 T_{AB}. \quad (4.15)$$

则爱因斯坦张量的非零分量为

$$G_{00} = 3 \left\{ \frac{\dot{a}}{a} \left( \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} \right) - \frac{n^2}{b^2} \left( \frac{a''}{a} + \frac{a'}{a} \left( \frac{a'}{a} - \frac{b'}{b} \right) \right) + k \frac{n^2}{a^2} \right\}, \quad (4.16)$$

$$G_{ij} = \frac{a^2}{b^2} \gamma_{ij} \left\{ \frac{a'}{a} \left( \frac{a'}{a} + 2 \frac{n'}{n} \right) - \frac{b'}{b} \left( \frac{n'}{n} + 2 \frac{a'}{a} \right) + 2 \frac{a''}{a} + \frac{n''}{n} \right\} \\ + \frac{a^2}{n^2} \gamma_{ij} \left\{ \frac{\dot{a}}{a} \left( 2 \frac{\dot{n}}{n} - \frac{\dot{a}}{a} \right) - 2 \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} \left( \frac{\dot{n}}{n} - 2 \frac{\dot{a}}{a} \right) - \frac{\ddot{b}}{b} \right\} - k \gamma_{ij}, \quad (4.17)$$

$$G_{05} = 3 \left( \frac{n' \dot{a}}{n a} + \frac{a' \dot{b}}{a b} - \frac{\dot{a}'}{a} \right), \quad (4.18)$$

$$G_{55} = 3 \left\{ \frac{a'}{a} \left( \frac{a'}{a} + \frac{n'}{n} \right) - \frac{b^2}{n^2} \left( \frac{\dot{a}}{a} \left( \frac{\dot{a}}{a} - \frac{\dot{n}}{n} \right) + \frac{\ddot{a}}{a} \right) - k \frac{b^2}{a^2} \right\}, \quad (4.19)$$

其中，点号和撇号分别表示对  $\tau$  和  $y$  求导数. 对于 RSII 模型，五维 AdS 时空的能动张量为  $\Lambda_5 \delta_B^A$ ，位于  $y = 0$  的膜上能动张量为  $\text{diag}(-\rho, p, p, p, 0) \delta(y)/b$ . 假定能动张量的 (05) 分量为零，其物理意义是沿第五维没有能量流. 爱因斯坦方程的 (00) 和 (55) 分量可写为简单的形式

$$F' = \frac{2a'a^3}{3} \kappa_5^2 \Lambda_5, \quad (4.20)$$

$$\dot{F} = \frac{2\dot{a}a^3}{3} \kappa_5^2 \Lambda_5, \quad (4.21)$$

这里  $F$  是  $\tau$  和  $y$  的函数

$$F(\tau, y) \equiv \frac{(a'a)^2}{b^2} - \frac{(\dot{a}a)^2}{n^2} - ka^2. \quad (4.22)$$

对方程 (4.20) 积分，我们得到

$$F - \frac{\kappa_5^2}{6} a^4 \Lambda_5 + \mathcal{C} = 0, \quad (4.23)$$

其中， $\mathcal{C}$  是积分常数. 方程 (4.21) 表明  $\mathcal{C}$  是一个常数. 利用 Bianchi 恒等式和方程 (4.23)，我们发现爱因斯坦方程的  $(ij)$  分量是恒等的. 因此，任何满足方程 (4.23)，即

$$\left( \frac{\dot{a}}{na} \right)^2 = -\frac{1}{6} \kappa_5^2 \Lambda_5 + \left( \frac{a'}{ba} \right)^2 - \frac{k}{a^2} + \frac{\mathcal{C}}{a^4}, \quad (4.24)$$

和  $G_{05} = 0$  的函数  $a$ ,  $n$  和  $b$ , 都是方程 (4.15) 的解. 考虑爱因斯坦方程的 (00) 和  $(ij)$  分量在膜上能动量张量的  $\delta$  函数部分, 我们可以得到度规对  $y$  的一阶导数项在膜两侧的连接条件

$$\frac{[a']}{a_0 b_0} = -\frac{\kappa_5^2}{3}\rho, \quad (4.25)$$

$$\frac{[n']}{n_0 b_0} = \frac{\kappa_5^2}{3}(3p + 2\rho), \quad (4.26)$$

这里  $a$ ,  $b$  和  $n$  的下标 0 表示这些函数在  $y = 0$  的取值,  $[f] = f(0^+) - f(0^-)$  表示函数  $f$  过  $y = 0$  的跳跃值. 假定膜两侧具有  $Z_2$  对称性, 则  $f'(0^+) = -f'(0^-)$ . 从而我们可以用连接条件 (4.25) 算出  $a'$  在膜两侧的取值, 然后代入方程 (4.24) 得到了膜世界图象中的 Friedmann 方程 (令  $n_0 = 1$ , 总可以通过时间的合适选取来实现这一点):

$$\frac{\dot{a}_0^2}{a_0^2} = -\frac{\kappa_5^2}{6}\Lambda_5 + \frac{\kappa_5^4}{36}\rho^2 + \frac{C}{a_0^4} - \frac{k}{a_0^2}. \quad (4.27)$$

从方程 (4.27) 我们看到哈勃参数正比于膜的能量密度, 但我们知道在标准宇宙学的 Friedmann 方程中, 哈勃参数是正比于能量密度的平方根, 因而与标准宇宙学矛盾. 但是, 当我们把膜的能量密度分解为膜张力  $\sigma$  和膜上的普通物质的能量密度  $\rho$ , 即  $\rho \rightarrow \rho + \sigma$ , 并且基于 RS 模型的思想采取精细调节关系 (4.11), 使得膜上的宇宙学常数为零, 则方程 (4.27) 变为

$$H^2 = \frac{\kappa_4^2}{3}\rho \left(1 + \frac{\rho}{2\sigma}\right) - \frac{k}{a^2} + \frac{C}{a^4}, \quad (4.28)$$

其中我们认同了  $\kappa_5^4\sigma/6 = \kappa_4^2$ . 方程中包含  $C$  的项, 其影响类似于有效的辐射项, 因而称为暗辐射项. 参数  $C$  与整个五维时空有关, 需要对五维场方程完整的分析才能确定. 另外, 与标准宇宙学相比, 该方程最重要的变化是出现了  $\rho^2$  项. 它告诉我们, 如果物质能量密度远大于膜张力时, 即  $\rho \ll \sigma$ , 则哈勃参数  $H$  正比于  $\rho$ , 而不是  $\sqrt{\rho}$ , 这将意味着在膜世界图象中这一时期的宇宙膨胀速度比在标准宇宙学中快. 只有在膜张力远大于物质能量密度时, 才能恢复到标准的宇宙学. 在膜世界图象中, 这是非常重要的变化. 因为在宇宙学早期,  $\rho^2$  项占主导地位, 这将会影响宇宙学早期的暴涨模型 [45, 46, 47, 48].

我们感兴趣的是膜世界图象中的宇宙暴涨时期. 在暴涨过程中, 方程 (4.28) 中的空间几何项和暗辐射项会很快稀释掉, 因而这些项可以忽略, 则修正的 Friedmann 方程变为

$$H^2 = \frac{\kappa_4^2}{3} \rho \left(1 + \frac{\rho}{2\sigma}\right). \quad (4.29)$$

考虑局域在膜上的标量场, 其运动方程为

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0. \quad (4.30)$$

在慢滚近似条件下, 场的演化方程将变得非常简单

$$3H\dot{\phi} \simeq -V'(\phi), \quad (4.31)$$

$$H^2 \simeq \frac{\kappa_4^2}{3} V(\phi) \left[1 + \frac{V(\phi)}{2\sigma}\right], \quad (4.32)$$

相应的慢滚参数可定义为

$$\epsilon \equiv \frac{1}{2\kappa_4^2} \left(\frac{V'}{V}\right)^2 \left[\frac{2\sigma(2\sigma + 2V)}{(2\sigma + V)^2}\right], \quad (4.33)$$

$$\eta \equiv \frac{1}{\kappa_4^2} \left(\frac{V''}{V}\right) \left[\frac{2\sigma}{2\sigma + V}\right]. \quad (4.34)$$

与标准暴涨模型相比, 修正项包含在方括号中. 这意味着对于给定的标量场的势和初始条件, 慢滚参数被抑制. 也就是说, 膜世界效应使得慢滚暴涨更容易发生. 在极限条件  $\sigma \ll V$  下慢滚参数被强烈抑制, 这意味着比较陡峭的势也能驱动慢滚暴涨. 在慢滚条件下暴涨期间的 e-folding 数为

$$N \simeq -\kappa_4^2 \int_{\phi_i}^{\phi_f} \frac{V}{V'} \left[1 + \frac{V}{2\sigma}\right] d\phi. \quad (4.35)$$

在宇宙高能阶段, 修正项  $V/2\sigma$  加快了宇宙的膨胀, 对于给定的势和场的初末值, 会产生更多的 e-folding 数. 在慢滚条件下, 膜世界暴涨模型预言的标量扰动和张量扰动的振幅为

$$A_s^2 \simeq \frac{\kappa_4^6}{75\pi^2} \frac{V^3}{V'^2} \left[\frac{2\sigma + V}{2\sigma}\right]^3 \Big|_{k=aH}, \quad (4.36)$$

$$A_t^2 \simeq \frac{\kappa_4^2}{150\pi^2} V \left[\frac{2\sigma + V}{2\sigma}\right] \Big|_{k=aH}. \quad (4.37)$$

尽管膜的效应增大了标量扰动和张量扰动的振幅,但整体效应压制了张量扰动相对于标量扰动的贡献.

## §4.2 膜世界暴涨吸引子

在膜世界图象中,修正的 Friedmann 方程给早期暴涨宇宙学带来了新的效应. 本节我们将研究膜暴涨模型的吸引子性质,给出模型对暴涨场(普通标量场和快子场)的初始条件的限制. 我们假定暴涨场的能量远高于膜张力  $V \gg \sigma$ , 那么方程 (4.29) 中  $\rho$  的一次项可以忽略.

首先我们考虑膜上的一个标量场驱动宇宙暴涨. 场的运动方程为

$$H^2 = \frac{\kappa_4^2}{6\sigma} \left[ \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right]^2, \quad (4.38)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0. \quad (4.39)$$

把方程 (4.38) 对时间  $t$  求导, 代入方程 (4.39), 我们得到

$$\dot{\phi} = -\frac{\sqrt{6\sigma}}{3\kappa_4} \frac{H'(\phi)}{H(\phi)}, \quad (4.40)$$

那么 Friedmann 方程可写为

$$\frac{\sigma}{3\kappa_4^2} \left[ \frac{H'(\phi)}{H(\phi)} \right]^2 - \frac{\sqrt{6\sigma}}{\kappa_4} H(\phi) = -V(\phi). \quad (4.41)$$

(4.40) 和 (4.41) 就是 Hamilton-Jacobi 方程. 在方程中  $H(\phi)$  是基本量, 而不再是  $V(\phi)$ . 只要知道  $H(\phi)$  的具体形式, 我们就可以从 (4.41) 中得到相应的势函数, 并且利用 (4.40) 得到  $\phi$  和  $t$  的关系, 从而得到宇宙标度因子  $a(t)$ . 因此, 用这种 Hamilton-Jacobi 方法我们能够直接地找到精确的暴涨解. 譬如, 假定  $H(\phi) = \phi^{-\alpha}$ , 基本的代数运算就能给出势的形式

$$V(\phi) = \frac{\sqrt{6\sigma}}{\kappa_4} \phi^{-\alpha} - \frac{\sigma\alpha^2}{3\kappa_4^2} \phi^{-2}, \quad (4.42)$$

相应的  $\phi(t)$  为

$$\phi(t) = \left( \phi_0^2 + \frac{2\sqrt{6\sigma}\alpha}{3\kappa_4} t \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.43)$$

从而我们得到宇宙学解

$$a(t) \propto \begin{cases} \left(1 + \frac{4\sqrt{6\sigma}t}{3\phi_0^2\kappa_4}\right)^{\frac{3\kappa_4}{4\sqrt{6\sigma}}} & \text{for } \alpha = 2, \\ \exp\left[\frac{3\kappa_4}{\alpha(2-\alpha)\sqrt{6\sigma}}\left(\phi_0^2 + \frac{2\sqrt{6\sigma}\alpha t}{3\kappa_4}\right)^{1-\frac{\alpha}{2}}\right] & \text{for } \alpha \neq 2. \end{cases} \quad (4.44)$$

下面我们用 Hamilton-Jacobi 方程证明膜世界图象中暴涨宇宙学具有吸引子行为. 假定  $H_0(\phi)$  是方程 (4.41) 的任意解, 暴涨的或非暴涨的. 加入一个线性扰动  $\delta H(\phi)$ , 若随着  $\phi$  的演化扰动衰减, 我们说该系统具有吸引子性质. 为了简单起见, 在下面的讨论中我们假定扰动不改变  $\phi$  的符号, 在比较一般的情况下这个假定是成立的. 把  $H(\phi) = H_0(\phi) + \delta H(\phi)$  代入方程 (4.41), 并线性化, 我们发现扰动满足

$$H'_0 \delta H' \simeq \left( \frac{9\sqrt{6}\kappa_4}{2\sqrt{\sigma}} H_0 - \frac{3\kappa_4^2}{\sigma} V \right) H_0 \delta H, \quad (4.45)$$

该方程有一般的解

$$\delta H(\phi) = \delta H(\phi_i) \exp \left[ \int_{\phi_i}^{\phi} \left( \frac{3\sqrt{6}\kappa_4}{2\sqrt{\sigma}} \frac{H_0^2}{H'_0} + \frac{H'_0}{H_0} \right) d\phi \right], \quad (4.46)$$

这里  $\delta H(\phi_i)$  是在某初始点  $\phi_i$  的取值. 由于  $H'_0$  与  $d\phi$  有相反的符号, 指数中的被积分项为负, 因此线性扰动指数衰减. 如果存在暴涨解, 那么随着暴涨场的演化, 不同初始条件的解将会指数地趋向它.

为了研究相空间轨迹的数值演化行为, 我们把  $H$  和  $\phi$  的演化方程 (4.38) 和 (4.39) 写成独立变量  $\phi$  和  $\dot{\phi}$  的一阶微分方程

$$\frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi}, \quad (4.47)$$

$$\frac{d\dot{\phi}}{dt} = -\frac{3\kappa_4}{\sqrt{6\sigma}} \left[ \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \right] \dot{\phi} - V'(\phi). \quad (4.48)$$

我们考虑两个例子, 新暴涨模型和混沌暴涨模型. 对于新暴涨模型我们选取具有 Coleman-Weinberg 类型的势

$$V(\phi) = \lambda\phi^4 \left( \ln \frac{\phi^2}{\varphi^2} - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2}\lambda\varphi^4. \quad (4.49)$$

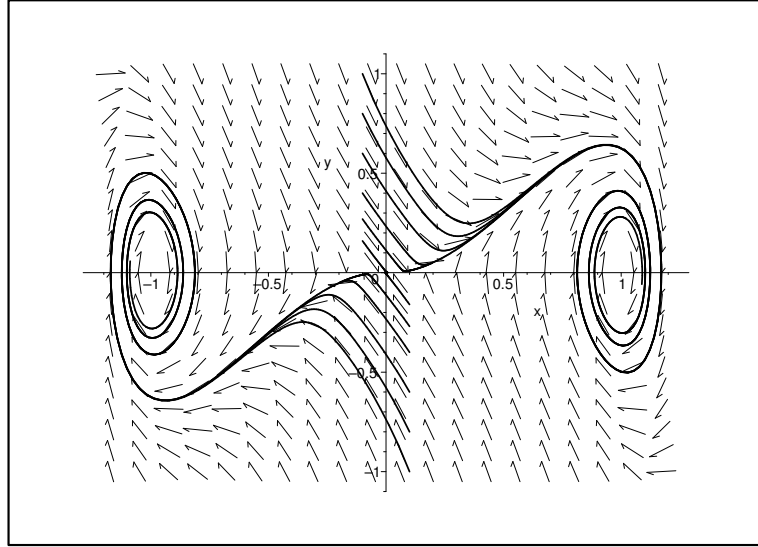


图 4.1: 在膜世界图象中, 具有 Coleman-Weinberg 势的暴涨场的相图  $(x, y)$ .

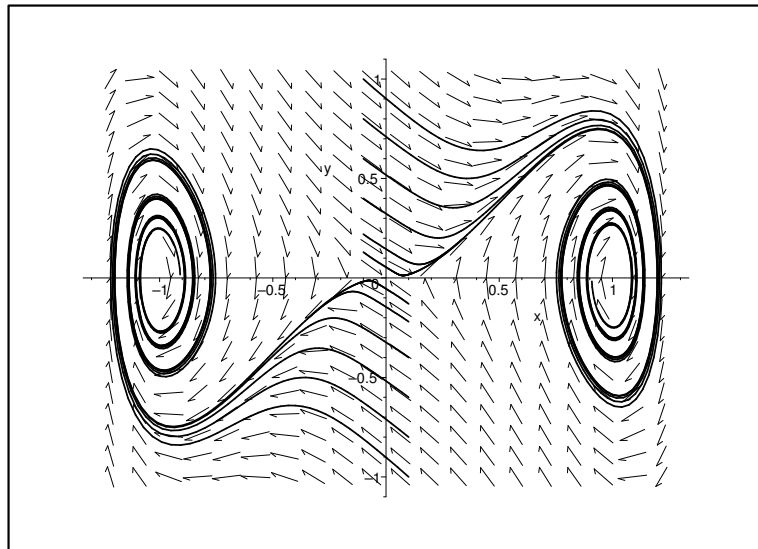


图 4.2: 在标准宇宙学中, 具有 Coleman-Weinberg 势的暴涨场的相图  $(x, y)$ .

我们在区域  $|\phi_0| < \varphi$  和  $|\dot{\phi}_0| < \sqrt{\lambda}\varphi^2$  中选取不同的初始条件，跟踪相空间的演化轨迹，直到场在  $\pm\varphi$  的真空振荡为止. 图 4.1 展示了相空间  $(x, y)$  轨迹的演化行为，这里  $x$  和  $y$  是无量纲坐标

$$\phi = \varphi x, \quad \dot{\phi} = \sqrt{\lambda}\varphi^2 y, \quad t = \frac{1}{\sqrt{\lambda}\varphi}\eta, \quad y = \frac{dx}{d\eta}.$$

从图 4.1 中，我们发现初始的动能项很快衰减，不会阻止暴涨的发生. 在相空间存在一条吸引大部分轨迹的曲线，这条曲线就是对应于慢滚解的吸引子. 另外，与图 4.2 比较我们发现膜世界暴涨模型中的轨迹比标准暴涨模型中的轨迹更快地趋向于慢滚曲线. 假定  $\lambda \sim 1$ ,  $\varphi \sim M_p$  和  $\varphi^4/\sigma \sim 10$ , 从相图 4.1 我们可以看到暴涨场的初始速度为  $\dot{\phi}_0 \sim 0.3M_p^2$  的演化曲线在  $\phi \sim 0.3M_p$  处到达慢滚解，而在图 4.2 中演化曲线在  $\phi \sim 0.5M_p$  处才到达慢滚解.

在第二个例子中，我们研究在膜世界图象中的混沌暴涨模型，暴涨场具有  $\phi$  平方势

$$V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2. \quad (4.50)$$

二维相空间  $(\phi, \dot{\phi})$  中的轨迹代表运动方程的所有解，如图 4.3 所示，其中  $x$  和  $y$  是定义的无量纲坐标

$$\phi = mx, \quad \dot{\phi} = m^2y, \quad t = \frac{1}{m}\eta, \quad y = \frac{dx}{d\eta}.$$

我们看到相空间存在一条吸引大部分轨迹的曲线，该解对应于慢滚暴涨解，而在新暴涨模型中只有一小部分对应于暴涨解. 比较图 4.3 和图 4.4, 我们同样可以看到初始动能项在膜世界图景中比在标准宇宙学中衰减的更快. COBE 观测要求  $m \sim 10^{13}\text{GeV}$  [49], 假定  $V(\phi)/\sigma \sim 10$ , 那么从图 4.3 初始动能项为  $\dot{\phi}_0 \sim 2 \times 10^{31}\text{GeV}$  的曲线在  $\phi \sim 3 \times 10^{17}$  处衰减为零，而在图 4.4 中是  $\phi \sim 9 \times 10^{17}$  处.

下面我们研究快子场在膜的动力学演化. 快子场  $T$  的演化方程和 Friedmann 方程为

$$\frac{\ddot{T}}{1 - \dot{T}^2} + 3H\dot{T} + \frac{V'(T)}{V(T)} = 0, \quad (4.51)$$

$$H^2 = \frac{\kappa_4^2}{6\sigma} \frac{V^2(T)}{1 - \dot{T}^2}. \quad (4.52)$$

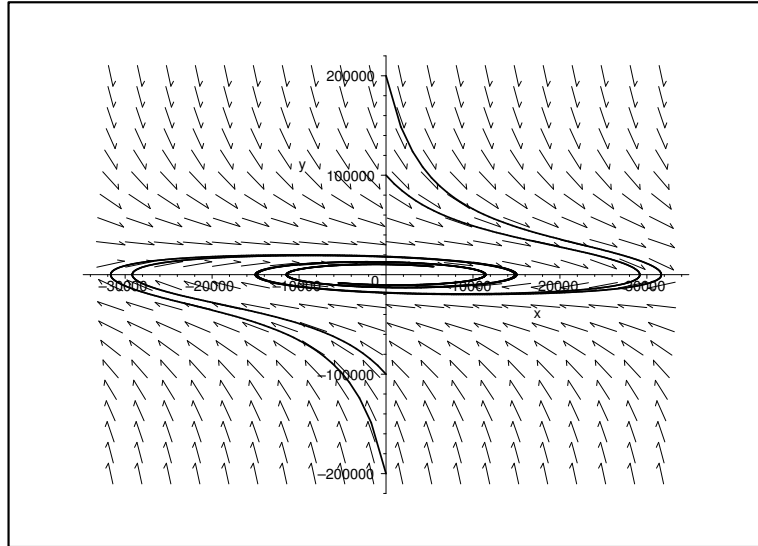


图 4.3: 在膜世界图象中, 混沌暴涨模型的相图  $(x, y)$ .

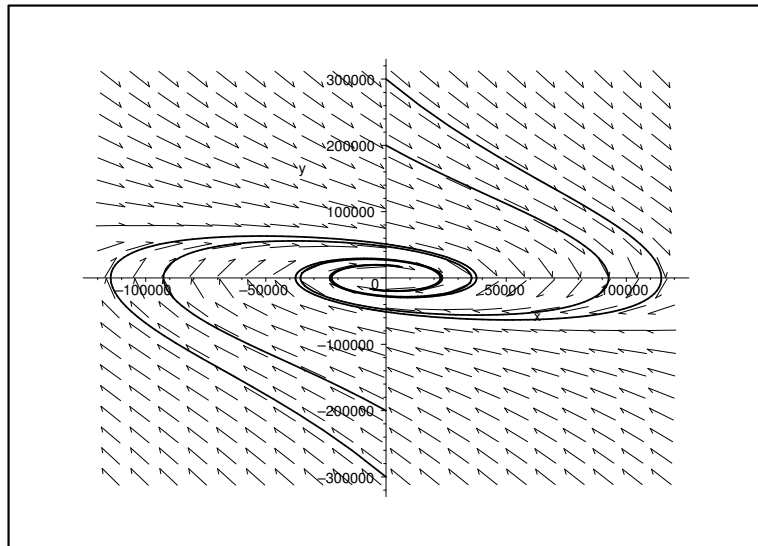


图 4.4: 在标准宇宙学中, 混沌暴涨模型的相图  $(x, y)$ .

同样方法，我们可以得到它们的 Hamilton-Jacobi 形式

$$\dot{T} = -\frac{H'(T)}{3H^2(T)}, \quad (4.53)$$

$$\frac{2\sigma}{3\kappa_4^2} \left[ \frac{H'(T)}{H(T)} \right]^2 - \frac{6\sigma}{\kappa_4^2} H^2(T) = -V^2(T). \quad (4.54)$$

给出  $H(T)$  具体的函数形式，我们就能得到相应的势和暴涨解。譬如，假定  $H(T) = T^{-\alpha}$ ，则势为

$$V(T) = \frac{\sqrt{\sigma}}{\kappa_4} \left( 6T^{-2\alpha} - \frac{2\alpha^2}{3} T^{-2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (4.55)$$

相应的  $T(t)$  为

$$T(t) = \begin{cases} T_0 e^{\frac{2}{3}t} & \text{for } \alpha = 2, \\ \left( T_0^{2-\alpha} + \frac{(2-\alpha)\alpha}{3} t \right)^{\frac{1}{2-\alpha}} & \text{for } \alpha \neq 2. \end{cases} \quad (4.56)$$

从而得到宇宙标度因子的演化

$$a(t) \propto \begin{cases} \left( 1 + \frac{1}{3} T_0^{-1} t \right)^3 & \text{for } \alpha = 1, \\ \exp \left( -\frac{3}{4} T_0^{-2} e^{-\frac{4}{3}t} \right) & \text{for } \alpha = 2, \\ \exp \left[ \frac{3}{2\alpha(1-\alpha)} \left( T_0^{2-\alpha} + \frac{2\alpha-\alpha^2}{3} t \right)^{\frac{2-2\alpha}{2-\alpha}} \right] & \text{for others.} \end{cases} \quad (4.57)$$

利用 Hamilton-Jacobi 形式我们分析膜世界图象中的快子暴涨场的吸引子行为。

假定  $H_0(T)$  是方程 (4.54) 的任意解，那么线性扰动  $\delta H(T)$  满足方程

$$H'_0 \delta H' \simeq \left( 18H_0^2 - \frac{3\kappa_4^2}{2\sigma} V^2 \right) H_0 \delta H, \quad (4.58)$$

其一般解为

$$\delta H(T) = \delta H(T_i) \exp \left[ \int_{T_i}^T \left( \frac{9H_0^3}{H'_0} + \frac{H'_0}{H_0} \right) dT \right]. \quad (4.59)$$

由于  $H'_0$  与  $dT$  符号相反，则指数中的被积分项为负，因而线性扰动随着快子场的演化衰减掉。只要快子场的势能够驱动宇宙暴涨，那么在线性区域暴涨解将会指数地快速会聚。当快子场  $T \rightarrow \infty$  时，它的势  $V(T) \rightarrow 0$ ，但势的具体函数形式还不清楚。假定势为指数形式

$$V(T) = V_0 e^{-\alpha T}, \quad (4.60)$$

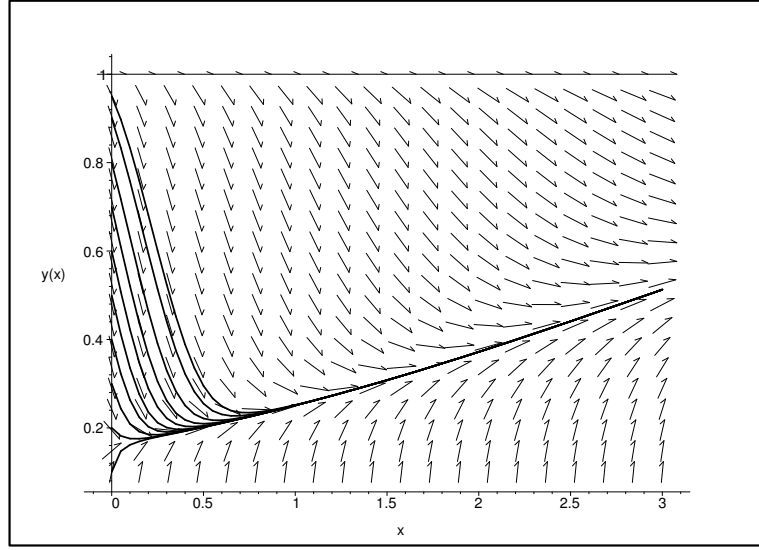


图 4.5: 在膜世界图象中, 指数势快子暴涨模型的相图  $(T, \dot{T})$ .

那么方程 (4.51) 和 (4.52) 可写为

$$\frac{dT}{dt} = \dot{T}, \quad (4.61)$$

$$\frac{d\dot{T}}{dt} = (1 - \dot{T}^2) \left[ \alpha - \frac{3\kappa_4 V(T)}{\sqrt{6}\sigma} (1 - \dot{T}^2)^{-\frac{1}{2}} \dot{T} \right]. \quad (4.62)$$

我们选取不同的初始条件  $T$  ( $0 \leq T$ ) 和  $\dot{T}$  ( $0 \leq \dot{T} \leq 1$ ), 画出了快子场的数值演化曲线. 图 4.5 展示了相空间  $(T, \dot{T})$  的轨迹, 图中我们选取了  $\alpha \sim 1/2$  和  $V_0/\sigma \sim 10$ . 我们可以看出相空间存在一条吸引多数轨迹的曲线, 该曲线对应于慢滚解. 膜世界快子暴涨模型与观测数据的一致性给出弦耦合系数  $g_s \sim 10^{-16}$  和弦质量标度  $M_s \sim 10^{-7} M_p$  [50], 从而得到弦能量密度为  $V_0 \sim 10^{-15} M_p^4$ . 在图 4.5 中, 初始值为  $\dot{T}_0 \sim 0.8 \times 10^{-7} M_p$  的轨迹在  $T \sim 0.7$  处到达慢滚解, 而在图 3.1 中该轨迹在  $T \sim 1.2$  处才到达慢滚解. 数值计算表明, 快子场的动能项在膜世界图象中比在标准宇宙学中衰减的更快, 这使得暴涨更容易实现. 由于快子场的有效作用量包含  $\partial_\mu T$  的所有高阶项, 我们不可能通过场的重新定义得到正则动能项, 然而可以定义快子场的共轭动量

$$\Pi = \frac{V(T)}{\sqrt{1 - \dot{T}^2}} \dot{T}, \quad (4.63)$$

从而得到快子暴涨场在相空间  $(T, \Pi)$  的演化轨迹, 如图 4.6 和图 4.7 所示, 分

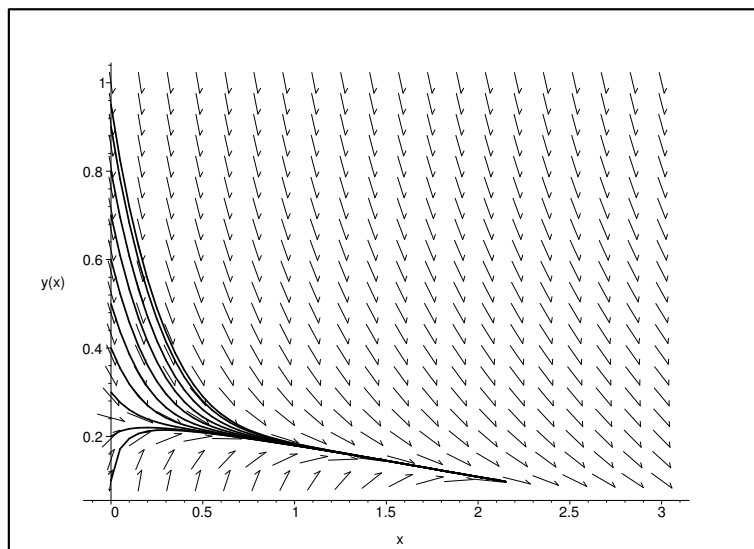


图 4.6: 在膜世界图象中, 指数势快子暴涨模型的相图  $(T, \Pi)$ .

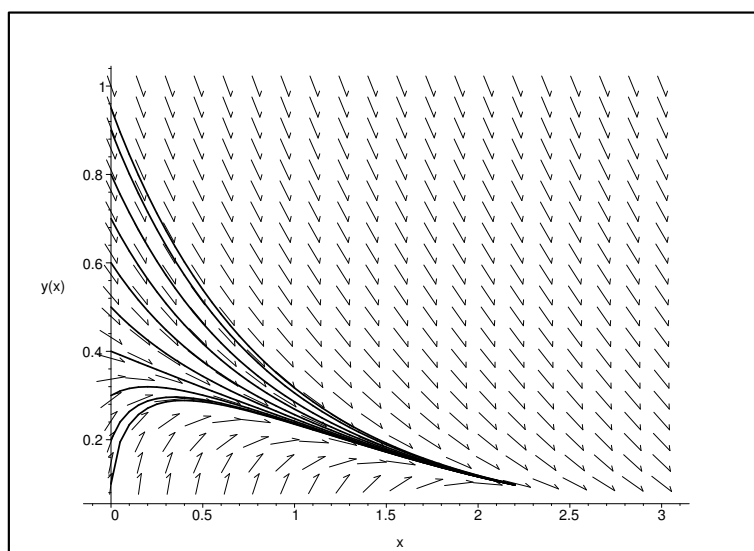


图 4.7: 在标准宇宙学中, 指数势快子暴涨模型的相图  $(T, \Pi)$ .

别对应于膜世界图象和标准宇宙学. 从图中我们可以看出当  $T \rightarrow \infty$  时  $\dot{T} \rightarrow 1$ , 由于  $V(T) \rightarrow 0$  动量密度  $\Pi \rightarrow 0$ .



## 第五章 宇宙学标度解

标量场的宇宙学模型在现代物理学中有着重要的地位. 譬如, 标量场可以作为暗能量, 其吸引子解能够很好地解释目前宇宙学的加速膨胀 [51]. 标量场能够驱动宇宙学加速膨胀, 因而为宇宙学早期的暴涨提供了可能的模型 [52]. 尤其是指数势的标量场被广泛地研究. 它有非常有趣的性质. 例如, 如果宇宙中含有理想流体和指数势的标量场两种物质成分, 那么标量场通过其物态方程在广泛的参数空间模仿理想流体 [53]. 这些标度解是后期吸引子 [54]. 指数势的标量场在空间平坦的 FRW 模型中有严格的宇宙学解, 对应于宇宙标度因子为  $a \propto t^p$  的幂律解 [55]. 它的演化方程和 Friedmann 方程能够被约化为一维系统, 从而更适合于定性的分析 [56, 57]. 另一方面, 通常在超引力, 超弦和推广的爱因斯坦理论中存在许多指数势的标量场, 宇宙暴涨可能由多标量场驱动 [59, 60], 因而研究指数势的多标量场显得更为重要. 本章, 我们将采用无量纲的动力学变量系统 [58], 研究求和指数势 [61] 和交叉耦合指数势 [62] 的多标量场的宇宙学标度解.

### §5.1 求和指数势的多标量场

考虑  $m$  个求和指数势的标量场  $\phi_i$ , 每个场有相同斜度的指数势

$$V_i(\phi_i) = V_{0i} \exp(-\lambda\kappa\phi_i), \quad (5.1)$$

这里  $\lambda$  是无量纲常数, 描述势的斜度. 标量场之间没有直接的耦合, 只有通过它们对宇宙膨胀的效应来间接地相互影响. 在空间平坦的 FRW 度规下每个场的演化方程为

$$\ddot{\phi}_i + 3H\dot{\phi}_i + \frac{dV_i(\phi_i)}{d\phi_i} = 0, \quad (5.2)$$

受约束于 Friedmann 方程

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3} \sum_{i=1}^m \left[ V_i(\phi_i) + \frac{1}{2} \dot{\phi}_i^2 \right]. \quad (5.3)$$

定义  $2m$  个无量纲变量

$$x_i = \frac{\kappa\dot{\phi}_i}{\sqrt{6}H}, \quad y_i = \frac{\kappa\sqrt{|V_i|}}{\sqrt{3}H}, \quad (5.4)$$

那么演化方程 (5.2) 能够写为一个自治系统:

$$x'_i = -3x_i \left( 1 - \sum_{j=1}^m x_j^2 \right) \pm \lambda \sqrt{\frac{3}{2}} y_i^2, \quad (5.5)$$

$$y'_i = y_i \left( 3 \sum_{j=1}^m x_j^2 - \lambda \sqrt{\frac{3}{2}} x_i \right), \quad (5.6)$$

这里的撇号表示对标度因子对数  $N \equiv \ln a$  的导数. Friedmann 方程 (5.3) 变为

$$\sum_{i=1}^m (x_i^2 \pm y_i^2) = 1. \quad (5.7)$$

在本节中, 上下符号分别表示  $\pm V_i > 0$  的两种不同的情况.  $x_i^2$  度量了场的动能项对膨胀的贡献, 而  $\pm y_i^2$  度量了势能的贡献. 我们对临界点的存在性和稳定性分析局限于膨胀的宇宙学 (即  $H > 0$ ) 和  $\lambda > 0$ . 临界点对应于  $x'_i = 0$  和  $y'_i = 0$  的解, 满足

$$\frac{\dot{H}}{H^2} = -3 \sum_{i=1}^m x_i^2. \quad (5.8)$$

这对应于幂律的膨胀宇宙学解  $a \propto t^p$ , 其中

$$p = \frac{1}{3 \sum_{i=1}^m x_i^2}. \quad (5.9)$$

令  $x'_i = 0$  和  $y'_i = 0$ , 我们从方程 (5.5) 和 (5.6) 得到一个镶嵌在  $2m$  维相空间的  $m$  维球, 该解对应于动能为主解, 和  $(2^m - 1)$  个临界点, 其中的一个是动势能标度解.

为了分析这些临界点的稳定性, 我们只考虑两个场的情况. 其解为单位圆  $S$  和三个固定点  $A_1$ ,  $A_2$  和  $B$ , 见表 5.1. 利用 Friedmann 方程 (5.7) 我们把方程 (5.5) 和 (5.6) 约化为三个独立的方程

$$x'_1 = -3x_1(1 - x_1^2 - x_2^2) \pm \lambda \sqrt{\frac{3}{2}} y_1^2, \quad (5.10)$$

$$x'_2 = -3x_2(1 - x_1^2 - x_2^2) + \lambda \sqrt{\frac{3}{2}} (1 - x_1^2 - x_2^2 \mp y_1^2), \quad (5.11)$$

$$y'_1 = y_1(3x_1^2 + 3x_2^2 - \lambda \sqrt{\frac{3}{2}} x_1). \quad (5.12)$$

Label	Existence	Eigenvalues	Stability
$S$	all $\lambda$	$(3 - \lambda\sqrt{\frac{3}{2}}x_1);$	stable ( $\lambda^2 > 12$ )
		$(6 - \lambda\sqrt{6}x_2); 0$	unstable ( $\lambda^2 < 12$ )
$A_{1,2}$	$\lambda^2 < 6 (V > 0)$	$(\lambda^2 - 6)/2;$	unstable
	$\lambda^2 > 6 (V < 0)$	$(\lambda^2 - 6)/2; \lambda^2$	
$B$	$\lambda^2 < 12 (V > 0)$	$(\lambda^2 - 12)/4;$	stable ( $V > 0, \lambda^2 < 12$ )
	$\lambda^2 > 12 (V < 0)$	$\frac{1}{8}(\lambda^2 - 12) \pm$ $\frac{3}{8}\sqrt{(\lambda^2 - 4/3)(\lambda^2 - 12)}$	unstable ( $V < 0$ )

表 5.1: 两个标量场的临界点的性质.

把临界点附近的线性扰动  $x_1 \rightarrow x_1 + \delta x_1$ ,  $x_2 \rightarrow x_2 + \delta x_2$  和  $y_1 \rightarrow y_1 + \delta y_1$  代入方程 (5.10)-(5.12), 近似到扰动的一阶项, 我们得到运动方程

$$\begin{pmatrix} \delta x'_1 \\ \delta x'_2 \\ \delta y'_1 \end{pmatrix} = \mathcal{M} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \delta y_1 \end{pmatrix}, \quad (5.13)$$

其中

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 9x_1^2 + 3x_2^2 - 3 & 6x_1x_2 & \pm\lambda\sqrt{6}y_1 \\ 6x_1x_2 - \lambda\sqrt{6}x_1 & 3x_1^2 + 9x_2^2 - 3 - \lambda\sqrt{6}x_2 & \mp\lambda\sqrt{6}y_1 \\ 6x_1y_1 - \lambda\sqrt{\frac{3}{2}}y_1 & 6x_2y_1 & 3x_1^2 + 3x_2^2 - \lambda\sqrt{\frac{3}{2}}x_1 \end{pmatrix}. \quad (5.14)$$

该演化方程的一般解为

$$\begin{aligned} \delta x_1 &= u_1 \exp(m_1 N) + u_2 \exp(m_2 N) + u_3 \exp(m_3 N), \\ \delta x_2 &= v_1 \exp(m_1 N) + v_2 \exp(m_2 N) + v_3 \exp(m_3 N), \\ \delta y_1 &= w_1 \exp(m_1 N) + w_2 \exp(m_2 N) + w_3 \exp(m_3 N), \end{aligned}$$

这里的  $m_1$ ,  $m_2$  和  $m_3$  是矩阵  $\mathcal{M}$  的本征值. 解的稳定性要求所有本征值的实部为负, 即线性的扰动指数衰减.

$$\mathbf{S}: x_1^2 + x_2^2 = 1, y_1 = y_2 = 0.$$

这些动能为主的解总是存在的，它们的宇宙学效应类似于硬流体为主的宇宙学演化  $a \propto t^{1/3}$ 。扰动方程的本征值为

$$m_1 = 0, \quad m_2 = 3 - \sqrt{\frac{3}{2}}\lambda x_1, \quad m_3 = 6 - \sqrt{6}\lambda x_2.$$

解的稳定性要求  $\lambda x_1 > \sqrt{6}$  和  $\lambda x_2 > \sqrt{6}$ ，而方程 (5.7) 给出  $1 \geq 2x_1x_2 > 12/\lambda^2$ ，因此，当它们的势足够陡峭时，即  $\lambda > 2\sqrt{3}$ ，这些解才稳定。

$$\mathbf{A}_1: x_1 = \lambda/\sqrt{6}, y_1 = \sqrt{\pm(1 - \lambda^2/6)}, x_2 = y_2 = 0.$$

$$\mathbf{A}_2: x_1 = y_1 = 0, x_2 = \lambda/\sqrt{6}, y_2 = \sqrt{\pm(1 - \lambda^2/6)}.$$

只有对于较平坦的正指数势 ( $\lambda^2 < 6$ ) 或较陡峭的负指数势 ( $\lambda^2 > 6$ )，这两个解才存在。宇宙有  $p = 2/\lambda^2$  的幂律膨胀解。扰动方程的本征值为

$$m_1 = \lambda^2, \quad m_2 = m_3 = \frac{1}{2}(\lambda^2 - 6).$$

对于正势和负势这些解都是不稳定的，这是由于两场的势能扰动破坏了原来单场标度解的稳定性。

$$\mathbf{B}: x_1 = x_2 = \frac{\lambda}{2\sqrt{6}}, y_1 = y_2 = \sqrt{\pm(\frac{1}{2} - \frac{\lambda^2}{24})}.$$

对于平坦的正势 ( $\lambda^2 < 12$ ) 或陡峭的负势 ( $\lambda^2 > 12$ )，该动势能标度解存在。宇宙学标度因子的演化为  $a \propto t^{4/\lambda^2}$ ，与势参数有关。线性扰动给出三个本征值：

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{1}{4}(\lambda^2 - 12), \\ m_2 &= \frac{1}{8}(\lambda^2 - 12) - \frac{3}{8}\sqrt{(\lambda^2 - 12)(\lambda^2 - 4/3)}, \\ m_3 &= \frac{1}{8}(\lambda^2 - 12) + \frac{3}{8}\sqrt{(\lambda^2 - 12)(\lambda^2 - 4/3)}. \end{aligned}$$

因此，对于正指数势，只要该动势能标度解存在，它就稳定；而对于负指数势，该标度解是不稳定的。

参数空间 ( $\lambda$ ) 的不同区域导致不同的宇宙学演化。对于陡峭的正指数势 ( $\lambda^2 > 12$ )，只有  $S$  存在，其中一些动能为主的标度解是后期吸引子，最终每个场的动能随宇宙的演化而趋于相等。对于  $6 < \lambda^2 < 12$  的正指数势，只有  $S$  和  $B$  存在，后

者是后期吸引子. 对于平坦的正指数势 ( $\lambda^2 < 6$ ), 所有临界点都存在, 动能势能为主的解是后期吸引子. 对于负指数势, 若  $\lambda^2 > 12$ , 则所有临界点都存在, 动能为主的标度解是后期吸引子, 这对应于前大爆炸图象中的宇宙收缩阶段 [63]; 若  $6 < \lambda^2 < 12$ , 则圈  $S$ , 点  $A_1$  和点  $A_2$  存在, 但它们都不是稳定解; 若  $\lambda^2 < 6$ , 则只有  $S$  存在, 宇宙没有稳定解.

现在我们把以上讨论推广到不同斜度  $\lambda_i$  的指数势

$$V_i(\phi_i) = V_{0i} \exp(-\lambda_i \kappa \phi_i). \quad (5.15)$$

令  $x'_i = 0$  和  $y'_i = 0$ , 我们得到

$$0 = -3x_i \left( 1 - \sum_{j=1}^m x_j^2 \right) \pm \lambda_i \sqrt{\frac{3}{2}} y_i^2, \quad (5.16)$$

$$0 = y_i \left( 3 \sum_{j=1}^m x_j^2 - \lambda_i \sqrt{\frac{3}{2}} x_i \right). \quad (5.17)$$

我们只考虑多动势能标度解. 从方程 (5.17) 很容易得到

$$\sum_{j=1}^m x_j^2 = \frac{\lambda_i x_i}{\sqrt{6}}. \quad (5.18)$$

由于  $\lambda_i x_i / \sqrt{6} = c$  是不变量, 则

$$\sum_{j=1}^m x_j^2 = 6c^2 \sum_{j=1}^m \frac{1}{\lambda_j^2}. \quad (5.19)$$

比较方程 (5.19) 和方程 (5.18), 给出  $c = (6 \sum_{i=1}^m \lambda_i^{-2})^{-1}$ . 从方程 (5.16) 和方程 (5.17), 我们得到多动势能标度解

$$x_i = \frac{\sqrt{6}c}{\lambda_i}, \quad (5.20)$$

$$y_i = \sqrt{\pm \frac{6c}{\lambda_i^2} (1 - c)}, \quad (5.21)$$

从而得到

$$p = \sum_{j=1}^m \frac{2}{\lambda_j^2}. \quad (5.22)$$

这与文献 [59] 中的结果一致. 若  $\lambda_i = \lambda$ , 则  $x_i = \lambda/(m\sqrt{6})$ ,  $y_i = \sqrt{\pm \frac{1}{m}(1 - \frac{\lambda^2}{6m})}$  和  $p = 2m/\lambda^2$ , 这些结果与前面的讨论一致. 多动势能标度解的存在性要求平坦的正指数势 ( $\lambda^2 < 6m$ ) 或陡峭的负指数势 ( $\lambda^2 > 6m$ ). 对于单场模型, 暴涨条件要求  $\lambda$  必须小于  $\sqrt{2}$ , 这么平坦的指数势很难从目前已知的理论中得到. 然而, 在多场模型中只要每个势满足  $\lambda^2 < 2m$ , 幂律解就是暴涨解. 也就是说, 足够多的陡峭指数势仍能够驱动宇宙暴涨, 从而放宽了对势参数的要求.

## §5.2 交叉耦合指数势的多标量场

上一节我们假定了多标量场之间不存在直接的相互作用, 实际的理论中势函数常常包含交叉耦合项, 例如, 在乘积空间  $\mathbb{R}^{3+1} \times \mathbb{K}_1 \times \cdots \times \mathbb{K}_n$  上真空爱因斯坦引力的紧致化很自然地产生指数势的交叉耦合项 [64]. 因而, 研究耦合指数势的宇宙学性质是必要的.

考虑  $m$  个标量场  $\phi_i$ , 其耦合是为

$$V = V_0 \exp\left(-\sum_{i=1}^m \lambda_i \kappa \phi_i\right). \quad (5.23)$$

假定所有的  $\lambda_i \geq 0$ , 如果有些为负值, 总是可以通过  $\phi_i \rightarrow -\phi_i$  使它们变为正. 在空间平坦的 FRW 度规下, 每个场的演化方程和 Friedmann 方程为

$$\ddot{\phi}_i + 3H\dot{\phi}_i - \lambda_i \kappa V = 0, \quad (5.24)$$

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3} \left( \sum_{i=1}^m \frac{1}{2} \dot{\phi}_i^2 + V \right). \quad (5.25)$$

定义  $(m+1)$  个无量纲变量

$$x_i = \frac{\kappa \dot{\phi}_i}{\sqrt{6}H}, \quad y = \frac{\kappa \sqrt{|V|}}{\sqrt{3}H},$$

Label	$x_i$	$y$	Existence	Stability
S	$\sum_i^m x_i^2 = 1$	0	all $\lambda_i$	stable $\sum_i^m (\lambda_i x_i) > \sqrt{6}$
A <sub>+</sub>	$\frac{\lambda_i}{\sqrt{6}}$	$\sqrt{(1 - \sum_i^m \frac{\lambda_i^2}{6})}$	$\sum_i^m \lambda_i^2 < 6$	stable ( $V > 0$ )
A <sub>-</sub>	$\frac{\lambda_i}{\sqrt{6}}$	$\sqrt{(\sum_i^m \frac{\lambda_i^2}{6} - 1)}$	$\sum_i^m \lambda_i^2 > 6$	unstable ( $V < 0$ )

表 5.2:  $m$  个标量场的临界点的性质.

演化方程 (5.24) 和 (5.25) 可写为一个自治系统

$$x'_i = -3x_i \left( 1 - \sum_{j=1}^m x_j^2 \right) \pm \lambda_i \sqrt{\frac{3}{2}} y^2, \quad (5.26)$$

$$y' = y \sum_{j=1}^m \left( 3x_j^2 - \lambda_j \sqrt{\frac{3}{2}} x_j \right), \quad (5.27)$$

和约束方程

$$\sum_{i=1}^m x_i^2 \pm y^2 = 1. \quad (5.28)$$

令  $x'_i = 0$  和  $y' = 0$  可以得到该自治系统的临界点, 它们满足

$$\frac{\dot{H}}{H^2} = -3 \sum_{i=1}^m x_i^2. \quad (5.29)$$

这对应于宇宙学的幂律膨胀解  $a \propto t^p$ , 其中

$$p = \frac{1}{3 \sum_{i=1}^m x_i^2}. \quad (5.30)$$

自治系统 (5.26) 和 (5.27) 的临界点为: 一个镶嵌在  $(m+1)$  维相空间的  $m$  维球, 对应于动能为主的解, 和一个定点  $A$ , 对应于动势能标度解, 如表 5.2 所示.

为了研究各临界点的稳定性, 我们用约束方程 (5.28) 把方程 (5.26) 和 (5.27) 约化为  $m$  个独立的方程

$$x'_i = \left( \lambda_i \sqrt{\frac{3}{2}} - 3x_i \right) \left( 1 - \sum_{j=1}^m x_j^2 \right). \quad (5.31)$$

把线性扰动  $x_i \rightarrow x_i + \delta x_i$  代入上式，近似到扰动的一阶项，我们得到扰动的运动方程

$$\delta x'_i = -2 \left( \lambda_i \sqrt{\frac{3}{2}} - 3x_i \right) \sum_{j=1}^m (x_j \delta x_j) - 3 \left( 1 - \sum_{j=1}^m x_j^2 \right) \delta x_i, \quad (5.32)$$

该方程给出  $m$  个本征值  $m_i$ . 稳定性要求本征值的实部为负.

$$\mathbf{S}: \sum_{i=1}^m x_i^2 = 1, y = 0.$$

这些动能为主的解总是存在的，其宇宙学行为类似于硬流体，标度因子按  $a \propto t^{1/3}$  演化. 在该临界点，方程 (5.32) 变为

$$\delta x'_i = -2 \left( \lambda_i \sqrt{\frac{3}{2}} - 3x_i \right) \sum_{j=1}^m (x_j \delta x_j),$$

有一个本征值为  $-\sqrt{6}(\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i - \sqrt{6})$ ，其它  $(m-1)$  本征值为零. 因而，只有当  $\sum_{i=1}^m (\lambda_i x_i) > \sqrt{6}$  时，该解才是稳定的. 对于特殊情况  $\lambda_i = \lambda$ ，我们可以看出  $\sqrt{6}/(m\lambda) < \sum_{i=1}^m x_i/n \leq (\sum_{i=1}^m x_i^2/m)^{1/2} = 1/\sqrt{m}$ . 即，对于具有相同坡度的指数耦合势，动能为主解的稳定性条件为  $\lambda^2 > 6/m$ .

$$\mathbf{A}: x_i = \frac{\lambda_i}{\sqrt{6}}, y = \sqrt{\pm(1 - \frac{1}{6} \sum_{i=1}^m \lambda_i^2)}.$$

对于平坦的正势 (满足  $\sum_{i=1}^m \lambda_i^2 < 6$ ) 或陡峭的负势 (满足  $\sum_{i=1}^m \lambda_i^2 > 6$ )，该势能动能标度解存在. 幂律指数  $p = \frac{2}{\sum_{i=1}^m \lambda_i^2}$  依赖于势参数  $\lambda_i$ . 从方程 (5.32) 我们得到本征值

$$m_i = -\frac{1}{2} \left( 6 - \sum_{j=1}^m \lambda_j^2 \right).$$

因而，只要正指数势的标度解存在，则它也是稳定的，在膨胀宇宙模型中相应的幂律暴涨解要求  $\sum_{i=1}^m \lambda_i^2 < 2$ . 然而，负指数势的标度解是不稳定的.

参数空间  $\lambda_i$  中不同区域导致不同的宇宙学演化. 作为例子我们考虑  $\lambda_i = \lambda$  的特殊情况. 对于正指数势，当  $\lambda^2 < 6/m$  时，动能为主的解是不稳定的，动能势能标度解是后期的吸引子，宇宙的演化是从动能为主解趋于稳定的动能势能标度解；当  $\lambda^2 > 6/m$  时，只存在一个稳定的动能为主的区域，该区域中每个点都是晚期吸引子. 对于负指数势，当  $\lambda^2 < 6/m$  时，只有动能为主的解存在，但不

稳定; 当  $\lambda^2 > 6/m$  时, 动能为主的解和动能势能标度解都存在, 只有动能为主的解是稳定的, 宇宙的演化是从这两种解趋于稳定的动能为主解.

现在我们把以上讨论推广到宇宙中还包含理想流体成分, 其物态方程为  $P_\gamma = (\gamma - 1)\rho_\gamma$ , 这里  $\gamma$  是常数. 在空间坦的 FRW 度规下流体的演化方程为

$$\dot{\rho}_\gamma = -3H(\rho_\gamma + P_\gamma), \quad (5.33)$$

服从 Fridemann 约束方程

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3} \left( \sum_{i=1}^m \frac{1}{2} \dot{\phi}_i^2 + V + \rho_\gamma \right). \quad (5.34)$$

我们定义一个新的无量纲变量  $z \equiv \frac{\kappa\sqrt{\rho_\gamma}}{\sqrt{3}H}$ . 演化方程 (5.24) 和 (5.33) 能够写为一个如下自治系统:

$$x'_i = -3x_i \left( 1 - \sum_{j=1}^m x_j^2 - \frac{\gamma}{2} z^2 \right) \pm \lambda_i \sqrt{\frac{3}{2}} y^2, \quad (5.35)$$

$$y' = y \left( 3 \sum_{i=1}^m x_i^2 + \frac{3\gamma}{2} z^2 - \sqrt{\frac{3}{2}} \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \right), \quad (5.36)$$

$$z' = \frac{3}{2} z \left( -\gamma + 2 \sum_{i=1}^m x_i^2 + \gamma z^2 \right), \quad (5.37)$$

和约束方程

$$\sum_{i=1}^m x_i^2 \pm y^2 + z^2 = 1. \quad (5.38)$$

自治系统 (5.35)-(5.37) 的临界点为: 一个镶嵌在  $(m+2)$  维相空间的  $m$  维球  $S$ , 对应于动能为主解; 一个对应于动能势能标度解的固定点  $A$ ; 一个对应于流体为主解的固定点  $B$ ; 一个对应于流体标量场跟踪解  $C$ , 如表 5.3 所示. 每个临界点满足

$$\frac{\dot{H}}{H^2} = -3 \sum_{i=1}^m x_i^2 - \frac{3\gamma}{2} z^2. \quad (5.39)$$

这对应于一个幂律膨胀的宇宙  $a \propto t^p$ , 其中

$$p = \frac{2}{6 \sum_{i=1}^m x_i^2 + 3\gamma z^2}. \quad (5.40)$$

Label	$x_i$	$y$	$z$	Existence	Stability
S	$\sum x_i^2 = 1$	0	0	all $\lambda_i, \gamma$	stable $\gamma = 2,$ $\sum(\lambda_i x_i) > \sqrt{6}$
A <sub>+</sub>	$\frac{\lambda_i}{\sqrt{6}}$	$\sqrt{(1 - \sum \frac{\lambda_i^2}{6})}$	0	$\sum \lambda_i^2 < 6$	stable $\sum \lambda_i^2 < 3\gamma$
A <sub>-</sub>	$\frac{\lambda_i}{\sqrt{6}}$	$\sqrt{(\sum \frac{\lambda_i^2}{6} - 1)}$	0	$\sum \lambda_i^2 > 6$	unstable $V < 0$
B	0	0	1	all $\lambda_i, \gamma$	unstable
C	$\sqrt{\frac{3}{2} \frac{\gamma \lambda_i}{\sum_j^m \lambda_j^2}}$	$\sqrt{\frac{3}{2} \frac{(2-\gamma)\gamma}{\sum_i^m \lambda_i^2}}$	$\sqrt{1 - \frac{3\gamma}{\sum_i^m \lambda_i^2}}$	$\sum \lambda_i^2 > 3\gamma$	stable $V > 0$

表 5.3: 在包含  $m$  个标量场和理想流体成分的宇宙学模型中, 临界点的性质.

**S:**  $\sum_{i=1}^m x_i^2 = 1, y = 0, z = 0.$

这些动能为主的解总是存在的, 标度因子  $a \propto t^{1/3}$ , 类似于硬流体的性质. 自治系统 (5.35)-(5.37) 在该临界点附近的的扰动方程为

$$\begin{aligned} \delta x'_i &= -2 \left( \lambda_i \sqrt{\frac{3}{2}} - 3x_i \right) \sum_{j=1}^m (x_j \delta x_j), \\ \delta z' &= \frac{3}{2} (2 - \gamma) \delta z, \end{aligned}$$

这表明只有当  $\sum_{i=1}^m (\lambda_i x_i) > \sqrt{6}$  和  $\gamma = 2$  时, 该解才是稳定的.

**A:**  $x_i = \frac{\lambda_i}{\sqrt{6}}, y = \sqrt{\pm(1 - \frac{1}{6} \sum_{i=1}^m \lambda_i^2)}, z = 0.$

对于平坦的正势 (满足  $\sum_{i=1}^m \lambda_i^2 < 6$ ) 或陡峭的负势 (满足  $\sum_{i=1}^m \lambda_i^2 > 6$ ), 该动能势能标度解才存在. 膨胀的幂律指数  $p = \frac{2}{\sum_{i=1}^m \lambda_i^2}$ , 依赖于势的形状. 在该临界点附近的线性扰动给出  $(m + 1)$  个本征值

$$\begin{aligned} m_i &= -\frac{1}{2} \left( 6 - \sum_{j=1}^m \lambda_j^2 \right), \\ m_z &= -\frac{1}{2} \left( 3\gamma - \sum_{j=1}^m \lambda_j^2 \right). \end{aligned}$$

因而, 只有对于满足  $\sum_{i=1}^m \lambda_i^2 < 3\gamma$  的正势, 此解才是稳定的后期吸引子, 并且当  $\sum_{i=1}^m \lambda_i^2 < 2$  时它是暴涨幂律解.

**B:**  $x_i = 0, y = 0, z = 1$ .

此流体为主解总是存在的, 相应的幂律解为  $p = 2/3\gamma$ . 在该点的扰动方程为

$$\begin{aligned}\delta x'_i &= -3\delta x_i + (3\gamma - \sqrt{6}\lambda_i)\delta z, \\ \delta z' &= 3\gamma\delta z,\end{aligned}$$

这表明此解是不稳定的.

**C:**  $x_i = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{\gamma\lambda_i}{\sum_{j=1}^m \lambda_j^2}}, y = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{(2-\gamma)\gamma}{\sum_{i=1}^m \lambda_i^2}}, z = \sqrt{1 - \frac{3\gamma}{\sum_{i=1}^m \lambda_i^2}}$ .

只有对于满足  $\sum_{i=1}^m \lambda_i^2 > 3\gamma$  的正势, 此流体标量场追踪解存在. 相应的幂律膨胀指数是  $p = 2/3\gamma$ , 这与流体为主解的幂律指数相同, 只依赖于流体物态方程参数  $\gamma$ , 与势参数  $\lambda_i$  无关. 在该点的线性扰动方程为

$$\begin{aligned}\delta x'_i &= 3(2-\gamma)x_i \sum_{j=1}^m (x_j \delta x_j) - 3 \left( (1 - \frac{\gamma}{2})(1 - \sum_{j=1}^m x_j^2) + \frac{\gamma}{2}y^2 \right) \delta x_i \\ &\quad + (\sqrt{6}\lambda_i - 3\gamma x_i)y\delta y, \\ \delta y' &= 3(2-\gamma)y \sum_{j=1}^m (x_j \delta x_j) - \sqrt{\frac{3}{2}}y \sum_{j=1}^m (\lambda_j \delta x_j) \\ &\quad + \left( \frac{3}{2}(2-\gamma) \sum_{j=1}^m x_j^2 - \sqrt{\frac{3}{2}} \sum_{j=1}^m (\lambda_j x_j) + \frac{3\gamma}{2} - \frac{9\gamma}{2}y^2 \right) \delta y,\end{aligned}$$

它给出  $(m+1)$  个本征值

$$\begin{aligned}m_1 &= -\frac{3(2-\gamma)}{4} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{8\gamma(\sum_{i=1}^m \lambda_i^2 - 3\gamma)}{\sum_{i=1}^m \lambda_i^2(2-\gamma)}} \right), \\ m_2 &= -\frac{3(2-\gamma)}{4} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{8\gamma(\sum_{i=1}^m \lambda_i^2 - 3\gamma)}{\sum_{i=1}^m \lambda_i^2(2-\gamma)}} \right), \\ m_3 &= \cdots = m_{m+1} = -\frac{3}{2}(2-\gamma).\end{aligned}$$

因此, 对于  $\sum_{i=1}^m \lambda_i^2 > 3\gamma$  的正指数势该追踪解是稳定的.

以上对各临界点的存在性和稳定性的分析表明, 参数空间  $(\gamma, \lambda_i)$  的不同区域将会导致不同的宇宙学演化. 对于正指数势的情况, 当  $\sum_{i=1}^m \lambda_i^2 < 3\gamma$  时, 临界点  $S, A$  和  $B$  存在, 点  $A$  是稳定的后期吸引子, 因而从点  $S$  和  $B$  开始的一般

解会趋于动势能标度解；当  $3\gamma < \sum_{i=1}^m \Lambda_i^2 < 6$  时，所有的临界点都存在，点  $C$  是稳定的后期吸引子，因而一般解会趋于跟踪解；当  $\sum_{i=1}^m \lambda_i^2 > 6$  时，临界点  $S$ ,  $B$  和  $C$  存在，点  $C$  是稳定的吸引子，因而一般解会趋于跟踪解. 对于负的指数势，当  $\sum_{i=1}^m \lambda_i^2 < 3\gamma$  时，临界点  $S$  和  $B$  存在，没有稳定解；当  $3\gamma < \sum_{i=1}^m \lambda_i^2 < 6$  时，临界点  $S$  和  $B$  存在，但不稳定；当  $\sum_{i=1}^m \lambda_i^2 > 6$  时，临界点  $S$ ,  $A$  和  $B$  存在，临界点  $A$  是稳定的，因而动能势能为主的解是宇宙演化后期的吸引子解.

## 第六章 鬼场暗能量

近几年来, 宇宙大尺度结构的观测 [65], Ia 型超新星的数据分析 [66, 67, 68], 以及宇宙微波背景各向异性的探测 [69], 都表明宇宙正处于一个加速膨胀的时期. 这一加速膨胀行为可以解释为暗能量的存在或在大尺度上的引力修正. 这种具有负压强的暗能量与通常的物质不一样, 不是引力吸引的, 而是引力相斥的. 暗能量的性质决定着我们的命运, 而我们对宇宙中占主导成分的暗能量的本质并不清楚. 因此, 暗能量的研究成为了宇宙学和粒子物理共同面临的重要课题和研究的热点.

### §6.1 宇宙暗能量

描述暗能量的特征量是它的能量密度  $\rho_\Lambda$  和状态方程参数  $w_\Lambda$ , 目前天文观测对它们的限制非常弱, 因而在探讨暗能量的本质方面提供的信息非常少. 最简单的暗能量候选者就是爱因斯坦引进的宇宙学常数. 它的能量密度是一个常数, 它的状态方程参数是  $w_\Lambda = -1$ . 宇宙学常数将导致宇宙永远加速膨胀下去, 宇宙的时空渐近于一个 dS 时空. 然而, 宇宙学常数在理论上存在一些困难. (1) 观测给出的宇宙学常数非常小  $\rho_\Lambda \sim 10^{-120} M_{pl}^4$ , 与量子场论中的真空能量密度相差 120 个量级, 显得理论上很不自然, 这就是精细调节问题 (fine-tuning problem). (2) 物质的能量密度随着宇宙的膨胀不断地稀释, 而宇宙常数的能量密度不依赖于时间, 为什么两者恰恰在目前处于同一个量级, 即  $\rho_\Lambda \sim \rho_m$ , 这就是巧合性问题 (coincidence problem), 如图 6.1 所示.

缓解这些问题的可能办法是假定宇宙学常数不是常数, 而是其能量密度总是与宇宙中其它物质成分的能量密度可比较的. 用一个动力学标量场能够实现这一点, 其能量密度和状态方程都是随宇宙的膨胀而演化, 譬如, 精质 (Quintessence) 模型 [71, 72], 动能精质 (K-essence) 模型 [73], 鬼场 (Pantom) 暗能量模型 [74], 动力学趋近模型 [75] 等. 在精质模型中, quintessence 的运动方程具有类似的吸引子解, 在宇宙早期, 初条件的变化范围可以很大, 但很快趋近于几乎相同的宇宙演化方式. 势函数满足跟踪条件的跟踪场具有很好的性质, 它的状态方程参

数  $w_Q$  随背景物质的变化而变化. 当宇宙在辐射为主阶段,  $w_Q$  的值小于或等于  $1/3$ , 跟踪场的能量密度的变化速度比辐射密度慢, 当宇宙在物质为主阶段,  $w_Q$  的值小于零, 跟踪场的能量密度的变化速度同样比物质的能量密度慢, 最后超过物质的能量密度而成为宇宙的主要成分. 跟踪场的物态方程参数  $w_Q$  趋于  $-1$ , 宇宙永远加速膨胀.

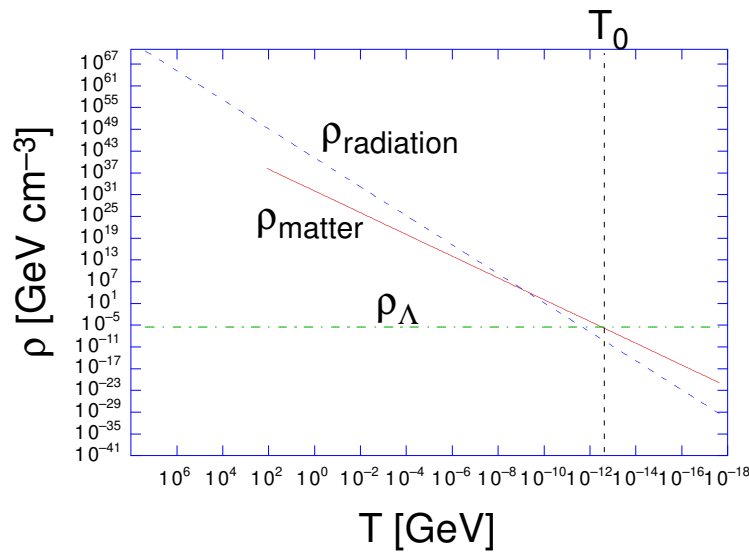


图 6.1: 物质, 辐射及宇宙学常数的演化 [70].

在动能精质模型中,  $k$ -essence 场的物态方程参数和它的声速都是依赖于背景的物态方程. 在辐射为主时期,  $k$ -essence 场具有稳定的标度解, 其能量密度小于辐射能量密度, 它们的比值保持不变. 当宇宙从辐射为主阶段进入物质为主阶段时,  $k$ -essence 场不再模仿背景的状态方程演化, 其能量密度迅速减小几个数量级, 其压强急剧从正的变为负的. 在物质为主阶段, 随着宇宙的膨胀, 它的能量密度比物质的能量密度减小慢, 因而在目前阶段  $k$ -essence 场占了主导, 宇宙开始了加速膨胀. 巧合性问题归结为我们生活在辐射物质相等之后的正好的时刻. 最终, 它的物态方程参数将趋于一个  $0$  到  $-1$  之间的某值.

除了暗能量模型, 在大尺度上的引力修正也能够实现宇宙的目前加速膨胀. 譬如, 五维膜世界图象中的 DGP 模型 [76], 全息暗能量模型 [77],  $1/R$  模型 [78],

Cardassian 模型 [79], Chaplygin-gas 模型 [80] 等. 因此, 区分是暗能量还是引力修正导致的宇宙加速是理论和观测所面临的重要的课题. 如果暗能量真的存在, 那么确定或排除宇宙学常数是暗能量研究的首要目标. 如果排除了宇宙学常数, 那么暗能量的物态方程参数是大于  $-1$  还是小于  $-1$  成为下一个重要的研究目标.

由于 Ia 型超新星可以作为标准烛光, 因而可以利用超新星数据的光度距离与红移的关系对不同的暗能量模型给出数值拟合. 一般采用对物态方程参数化或者对能量密度参数化. 物态方程  $w(z)$  参数化有以下四种 [81, 82, 83, 84]:

$$w(z) = w_0 + w_1 z; \quad (6.1)$$

$$w(z) = w_0 + w_1 \frac{z}{1+z}; \quad (6.2)$$

$$w(z) = w_0 + w_1 \frac{z}{1+z} + w_2 \frac{z^2}{(1+z)^2}; \quad (6.3)$$

$$w(z) = \begin{cases} w_0 + w_1 z & \text{if } z < 1 \\ w_0 + w_1 & \text{if } z \geq 1. \end{cases} \quad (6.4)$$

对能量密度  $\rho_X(z)$  的参数化常见的有以下两种 [85, 86]:

$$\frac{\rho_X(z)}{\rho_X(0)} = A + B(1+z) + C(1+z)^2; \quad (6.5)$$

$$\frac{\rho_X(z)}{\rho_X(0)} = 1 + (4f_1 - f_2 - 3) \frac{z}{z_{max}} + (f_2 - 2f_1 + 1) \frac{2z^2}{z_{max}^2}. \quad (6.6)$$

两类参数化方法各有利弊, 对物态方程参数化, 能够比较直观地描述暗能量的性质, 而对能量密度参数化, 不必要进行积分运算, 从而减小了误差. 高红移 Ia 型超新星的观测有助于我们了解近期宇宙的膨胀历史.

## §6.2 鬼场暗能量

近来, 超新星数据分析似乎支持暗能量的物态方程参数目前值  $w < -1$  [87]. 为了得到  $w < -1$ , 具有负动能项的鬼场是最简单的实现方式, 它与宇宙学的经典检验和目前观测一致, 在某些情况下比  $w > -1$  的暗能量模型更符合观测 [74].

当然，该模型存在一些问题，譬如鬼场暗能量破坏了弱能量条件，而它是证明奇点定理的前提条件 [88]。另外，在量子场论中鬼场会有不稳定的真空，但我们可以假定它是有效场而避开稳定性问题 [89, 90]。由于它有非常有趣的宇宙学行为，最近有不少关于鬼场暗能量的研究 [91]。鬼场类型的物质出现在很多物理背景中，如弦理论 [92]，高阶引力理论 [93]，非最小耦合的标量张量理论 [94]，膜世界图象中的幻景宇宙 [95]，以及动能精质模型 [96]。

本小节我们研究鬼场宇宙学的吸引子行为，即宇宙学演化对初始条件的依赖性 [97]。与引力最小耦合的鬼场作用量为

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left( \frac{1}{2\kappa^2} R - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + V(\phi) \right), \quad (6.7)$$

这里  $V(\phi)$  是鬼场  $\phi$  的势，度规号差为  $(-, +, +, +)$ 。在空间平坦的 FRW 宇宙学模型中沿势上爬的鬼场能够用正能量密度  $\rho$  和负压强  $P$  描述，

$$\rho = -\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (6.8)$$

$$P = -\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi), \quad (6.9)$$

这意味着鬼场破坏了能量为主条件  $\rho + P < 0$  和  $\rho > 0$ 。相应的状态方程参数为

$$w \equiv \frac{P}{\rho} = \frac{\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi)}{\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi)}. \quad (6.10)$$

由于鬼场能量密度为正，方程 (6.10) 表明  $w < -1$ ，并且当  $\dot{\phi}^2/2V(\phi) \rightarrow 0$  时  $w \rightarrow -1$ 。从上面的作用量不难得到鬼场的运动方程和 Friedmann 方程

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - V'(\phi) = 0, \quad (6.11)$$

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3} \left[ -\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right]. \quad (6.12)$$

注意到方程 (6.11) 中的势力项的符号为负，这是鬼场不同与一般标量场的地方，从而导致鬼场沿势上爬，而一般标量场是沿势下滚。

运动方程的 Hamilton-Jacobi 形式是一种研究系统演化的有效方法，我们将利用它证明鬼场宇宙学解的稳定性。方程 (6.12) 对时间微分并代入方程 (6.11)

可给出

$$\dot{\phi} = \frac{2}{\kappa^2} H'(\phi). \quad (6.13)$$

利用它我们可以把 Friedmann 重写为

$$[H'(\phi)]^2 + \frac{3}{2}\kappa^2 H^2(\phi) = \frac{\kappa^4}{2} V(\phi). \quad (6.14)$$

方程 (6.13) 和 (6.14) 就是 Hamilton-Jacobi 方程. 在该形式中  $H(\phi)$  是基本量, 而不再是  $V(\phi)$ .

假定  $H(\phi, p)$  是方程 (6.14) 的解, 由初始条件唯一确定, 这里参数  $p$  代表选取不同的初始条件. 方程 (6.13) 的一般解可形式上表示为

$$a(\phi, p) = a_i \exp \left[ \frac{\kappa^2}{2} \int_{\phi_i}^{\phi} d\phi H(\phi, p) \left( \frac{\partial H(\phi, p)}{\partial \phi} \right)^{-1} \right], \quad (6.15)$$

这里  $a_i$  是在初始点  $\phi_i$  的取值. 我们考虑两个解  $H(\phi, p + \Delta p)$  和  $H(\phi, p)$ , 这里  $\Delta p \ll 1$ . 方程 (6.14) 对  $p$  求导, 利用方程 (6.15) 我们得到

$$H(\phi, p + \Delta p) - H(\phi, p) \propto a^{-3}(\phi, p) \Delta p. \quad (6.16)$$

我们发现在膨胀的宇宙中任何两个解都趋于吸引子解. 然而对参数的所有取值吸引子解可能不唯一, 为了验证是否存在唯一的吸引子解, 定义一个量 [98]

$$F \equiv \left| \frac{H(\phi, p + \Delta p)}{H(\phi, p)} - 1 \right|. \quad (6.17)$$

方程 (6.16) 表明随着宇宙膨胀  $F \rightarrow 0$ , 但如果  $\partial F / \partial \phi$  改变符号吸引子的形式可能会改变. 注意到若  $\partial F / \partial \phi > 0$  或  $\partial F / \partial \phi < 0$ , 则  $F$  能够趋于零, 但两种情况不可能同时满足. 因此, 如果对参数的某些点  $\partial F / \partial \phi = 0$ , 那么吸引子解将不是唯一的.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln F}{\partial \phi} &= -H(\phi, p) \left( \frac{\partial H(\phi, p)}{\partial \phi} \right)^{-1} \\ &\quad \left[ \frac{3\kappa^2}{2} + \frac{1}{H^2(\phi, p)} \left( \frac{\partial H(\phi, p)}{\partial \phi} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (6.18)$$

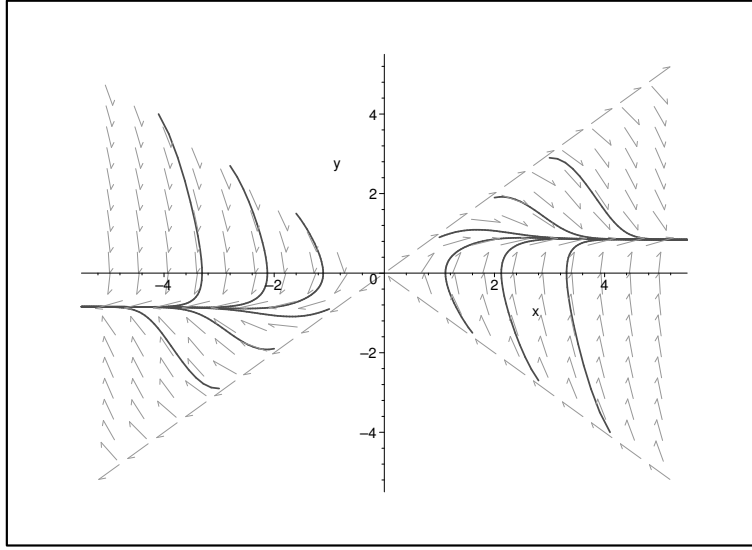


图 6.2: 平方势鬼场的演化相图

我们可以看出  $\partial F/\partial\phi$  不能穿过零点, 因而鬼场宇宙学存在唯一的吸引子解.

为了研究相空间轨迹的数值演化, 我们把演化方程 (6.11) 和 (6.12) 写成独立变量  $\phi$  和  $\dot{\phi}$  的一阶微分方程

$$\frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi}, \quad (6.19)$$

$$\frac{d\dot{\phi}}{dt} = -\sqrt{3}\kappa \left[ -\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \right]^{\frac{1}{2}} \dot{\phi} + V'(\phi). \quad (6.20)$$

我们考虑下面三个典型的鬼场势: 平方势, 指数势和余弦势.

$$V(\phi) = m^2\phi^2/2, \quad (6.21)$$

$$V(\phi) = V_0 \exp(-\lambda\kappa\phi), \quad (6.22)$$

$$V(\phi) = V_0[1 + \cos(\phi/f)]. \quad (6.23)$$

在范围  $\dot{\phi}_0^2 < 2V(\phi_0)$  中选取不同的初始条件, 我们得到相空间  $(\phi, \dot{\phi})$  的演化轨迹, 如图 6.2, 图 6.3 和图 6.4 所示.

**平方势:** 从图 6.2 我们看到存在两个非联络的区域, 在每个区域中存在一条唯一的吸引子轨迹, 它吸引大部分轨迹曲线. 初始的动能项迅速衰减掉, 汇聚到

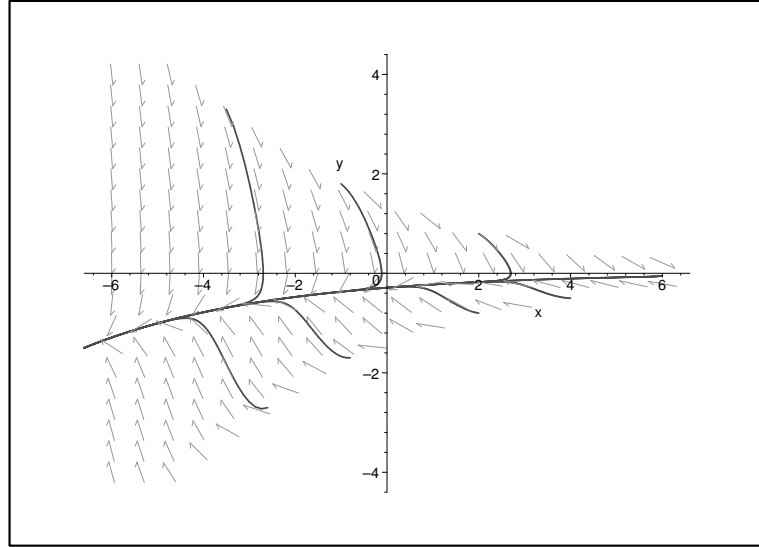


图 6.3: 指数势鬼场的演化相图.

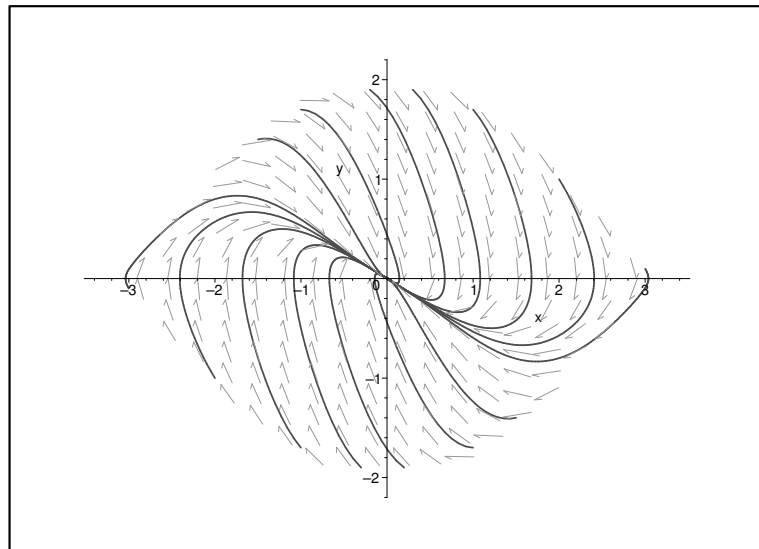


图 6.4: 余弦势鬼场的演化相图.

同一条演化曲线. 鬼场沿势上爬, 这种行为不同于一般标量场. 两条吸引子轨迹分别对应于在区域  $\phi > 0$  和  $-m\phi < \dot{\phi} < m\phi$  中的慢爬解

$$\dot{\phi} = \frac{\sqrt{6}m}{3\kappa}, \quad (6.24)$$

在区域  $\phi < 0$  和  $m\phi < \dot{\phi} < -m\phi$  中的慢爬解

$$\dot{\phi} = -\frac{\sqrt{6}m}{3\kappa}. \quad (6.25)$$

在该模型中, 鬼场的动能与势能的比值趋于零, 因而其状态方程参数趋于  $-1$ . 对于更一般的幂律势  $V(\phi) = \lambda\phi^\alpha$ , 轨迹的一般性质保持不变. 尽管对于  $\alpha > 2$  的情况吸引子解的动能项不再是常数, 而是随宇宙的膨胀增大, 但动能与势能的比值仍正比于  $\phi^{-2}$  并且趋于零. 对于  $\alpha = 4$  的慢爬区域, 鬼场指数地增加.

**指数势:** 从图 6.3 我们看出吸引子曲线对应于在区域  $-\sqrt{2V_0}\exp(-\lambda\kappa\phi/2) < \dot{\phi} < \sqrt{2V_0}\exp(-\lambda\kappa\phi/2)$  的慢爬解:

$$\dot{\phi} = -\lambda\sqrt{\frac{V_0}{3}}e^{-\frac{1}{2}\lambda\kappa\phi}. \quad (6.26)$$

在该模型中, 尽管动能项指数地增大, 但动能与势能的比值是一个常数  $\lambda^2/6$ , 物态方程参数  $w = (\lambda^2 + 6)/(\lambda^2 - 6) < -1$ . 因此, 对于指数势的鬼场, 只要势参数满足  $\lambda^2 < 6$ , 标度解就存在, 并且是稳定的. 这与指数势的一般标量场的宇宙学标度解类似.

**余弦势:** 在图 6.4 中, 吸引子曲线对应于在区域  $-\sqrt{2V_0}[1 + \cos(\phi/f)]^{1/2} < \dot{\phi} < \sqrt{2V_0}[1 + \cos(\phi/f)]^{1/2}$  中的慢爬解:

$$\dot{\phi} = -\frac{\sqrt{V_0}}{\sqrt{3}\kappa f} \left(1 + \cos\frac{\phi}{f}\right)^{-\frac{1}{2}} \sin\frac{\phi}{f}. \quad (6.27)$$

在该模型中, 鬼场向势的最大值点运动, 并静止在  $\phi = 0$  的最大值点. 由于摩擦项  $3H\dot{\phi}$  比势力项  $V'(\phi)$  大, 鬼场不能够在势的极值点附近振荡, 这不同于高斯势的情况 [89]. 动能与势能的比值趋于零, 物态方程参数趋于  $-1$ . 类似 dS 解是后期吸引子, 宇宙将永远加速膨胀.

### §6.3 鬼场精质场混合暗能量模型

如果在膨胀的宇宙中暗能量的物态方程参数小于  $-1$ , 其能量密度随时间增加, 这必将导致不受欢迎的宇宙奇点, 称为“大撕裂” [99]. 因此, 从这个意义上讲, 如果存在一个从  $w \geq -1$  到  $w < -1$  或相反的转变, 这将会改变宇宙的命运, 这也是人类所期望的. 另外, 近来超新星数据分析表明暗能量的物态方程参数在不久的过去从  $w \geq -1$  转变为  $w < -1$  [100]. 然而, 无论是精质场还是鬼场都不可能实现这一转变, 本节我们提出的鬼场精质场混合暗能量模型就能实现暗能量的物态方程参数过  $-1$ . 它不但保持精质模型的吸引子性质, 而且比鬼场需要更少的精细调节, 预言了有趣的宇宙的演化和命运 [101].

我们考虑一个模型, 包含一个指数势的鬼场  $\phi$  和一个指数势的精质场  $\sigma$ , 它的作用量可写为

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left( \frac{R}{2\kappa^2} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \sigma \partial_\nu \sigma + V(\phi, \sigma) + \mathcal{L}_m \right), \quad (6.28)$$

这里  $\mathcal{L}_m$  代表物质场的拉氏密度. 在空间平坦的 FRW 宇宙模型中有效能量密度  $\rho$  和有效压强  $P$  为

$$\rho = -\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} \dot{\sigma}^2 + V(\phi, \sigma), \quad (6.29)$$

$$P = -\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} \dot{\sigma}^2 - V(\phi, \sigma). \quad (6.30)$$

相应的有效物态方程参数为

$$w = \frac{-\dot{\phi}^2 + \dot{\sigma}^2 - 2V(\phi, \sigma)}{-\dot{\phi}^2 + \dot{\sigma}^2 + 2V(\phi, \sigma)}. \quad (6.31)$$

对于精质场, 物态方程  $w \geq -1$ , 对于鬼场, 物态方程  $w < -1$ . 而在我们的模型中, 方程 (6.31) 表明, 如果  $\dot{\sigma} \geq \dot{\phi}$  那么  $w \geq -1$ , 如果  $\dot{\sigma} < \dot{\phi}$  那么  $w < -1$ . 假定两场之间没有直接的耦合, 有如下形式的指数势

$$V(\phi, \sigma) = V_\phi(\phi) + V_\sigma(\sigma) = V_{\phi 0} e^{-\lambda_\phi \kappa \phi} + V_{\sigma 0} e^{-\lambda_\sigma \kappa \sigma}, \quad (6.32)$$

这里  $\lambda_\phi$  和  $\lambda_\sigma$  分别是场  $\phi$  和场  $\sigma$  的势参数. 为了便于讨论, 假定它们都大于零, 若它是负的, 总可以通过场的变换使其为正. 场的演化方程为

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - \frac{dV_\phi(\phi)}{d\phi} = 0, \quad (6.33)$$

$$\ddot{\sigma} + 3H\dot{\sigma} + \frac{dV_\sigma(\sigma)}{d\sigma} = 0, \quad (6.34)$$

$$\dot{\rho}_\gamma + 3H(\rho_\gamma + P_\gamma) = 0, \quad (6.35)$$

这里  $\rho_\gamma$  是理想流体的能量密度, 其状态方程是  $P_\gamma = (\gamma - 1)\rho_\gamma$ , 这里  $\gamma$  是常数.

相应的 Fridemann 方程为

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3} \left( -\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V_\phi(\phi) + \frac{1}{2}\dot{\sigma}^2 + V_\sigma(\sigma) + \rho_\gamma \right). \quad (6.36)$$

定义五个无量纲变量

$$\begin{aligned} x_\phi &\equiv \frac{\kappa\dot{\phi}_i}{\sqrt{6}H}, & y_\phi &\equiv \frac{\kappa\sqrt{V_\phi}}{\sqrt{3}H}, \\ x_\sigma &\equiv \frac{\kappa\dot{\sigma}_i}{\sqrt{6}H}, & y_\sigma &\equiv \frac{\kappa\sqrt{V_\sigma}}{\sqrt{3}H}, \\ z &\equiv \frac{\kappa\sqrt{\rho_\gamma}}{\sqrt{3}H}, \end{aligned} \quad (6.37)$$

演化方程 (6.33)-(6.35) 能够写为一个自治系统

$$x'_\phi = -3x_\phi \left( 1 + x_\phi^2 - x_\sigma^2 - \frac{\gamma}{2}z^2 \right) - \lambda_\phi \frac{\sqrt{6}}{2}y_\phi^2, \quad (6.38)$$

$$y'_\phi = 3y_\phi \left( -x_\phi^2 + x_\sigma^2 + \frac{\gamma}{2}z^2 - \lambda_\phi \frac{\sqrt{6}}{6}x_\phi \right), \quad (6.39)$$

$$x'_\sigma = -3x_\sigma \left( 1 + x_\phi^2 - x_\sigma^2 - \frac{\gamma}{2}z^2 \right) + \lambda_\sigma \frac{\sqrt{6}}{2}y_\sigma^2, \quad (6.40)$$

$$y'_\sigma = 3y_\sigma \left( -x_\phi^2 + x_\sigma^2 + \frac{\gamma}{2}z^2 - \lambda_\sigma \frac{\sqrt{6}}{6}x_\sigma \right), \quad (6.41)$$

$$z' = 3z \left( -x_\phi^2 + x_\sigma^2 + \frac{\gamma}{2}z^2 - \frac{\gamma}{2} \right), \quad (6.42)$$

和约束方程

$$-x_\phi^2 + y_\phi^2 + x_\sigma^2 + y_\sigma^2 + z^2 = 1. \quad (6.43)$$

Label	$x_\phi$	$y_\phi$	$x_\sigma$	$y_\sigma$	$z$	Stability
$K$	$x_\sigma^2 - x_\phi^2 = 1$	0		0	0	unstable
$P$	$-\frac{\lambda_\phi}{\sqrt{6}}$	$\sqrt{(1 + \frac{\lambda_\phi^2}{6})}$	0	0	0	stable
$S$	0	0	$\frac{\lambda_\sigma}{\sqrt{6}}$	$\sqrt{(1 - \frac{\lambda_\sigma^2}{6})}$	0	unstable
$F$	0	0	0	0	1	unstable
$T$	0	0	$\frac{3\gamma}{\sqrt{6}\lambda_\sigma}$	$\sqrt{\frac{3\gamma(2-\gamma)}{2\lambda_\sigma^2}}$	$\sqrt{1 - \frac{3\gamma}{\lambda_\sigma^2}}$	unstable

表 6.1: 鬼场精质场混合模型中临界点的性质.

系统 (6.38)-(6.42) 的临界点为: 镶嵌在五维相空间中的双曲线  $K$ , 对应于动能为主的解; 一个对应于鬼场为主的点  $P$ ; 一个对应于标量场为主的点  $S$ ; 一个对应于流体为主的点  $F$ ; 一个对应于流体标量场为主的点  $T$ , 见表 6.1. 稳定性分析表明鬼场为主的解 (即临界点  $P$ ) 是唯一的稳定解. 相应的宇宙学解为  $a \propto t^p$ , 其中  $p = -2/\lambda_\phi^2$ . 物态方程为  $w = -1 - \lambda_\phi^2/3$ , 它只依赖于鬼场的势参数. 我们数值地给出了不同的初始条件的物态方程的演化, 见图 6.5. 从图中我们可以看

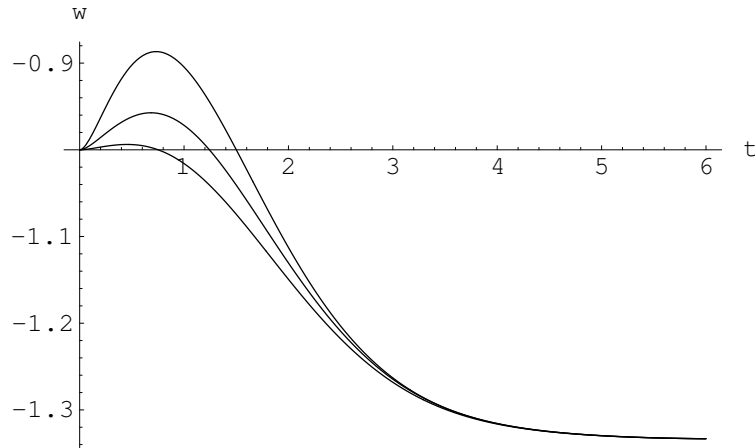


图 6.5: 指数势的混合模型中有效物态方程的演化.

出有效物态方程参数从大于  $-1$  转变为小于  $-1$ , 并趋于  $-(1 + \lambda_\phi^2/3)$ . 鬼场为主的解是吸引子, 而其它解都是不稳定的, 这种行为在物理上是容易理解的. 因为鬼场的能量密度随时间增大, 而标量场和理想流体的能量密度随时间减小, 所以

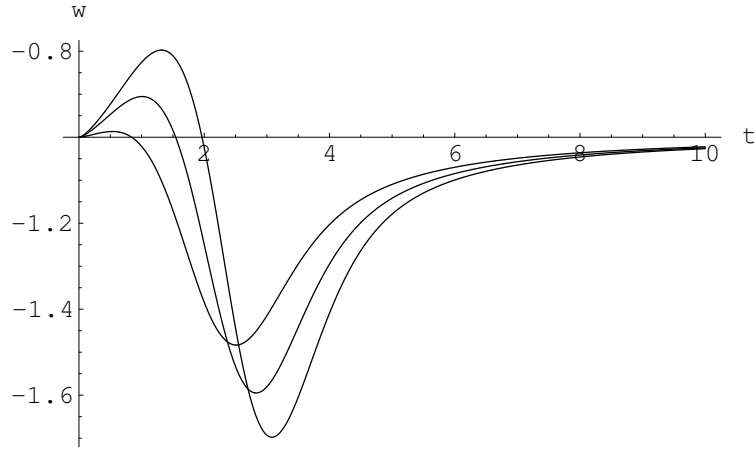


图 6.6: 势 (6.44) 的混合模型中有效物态方程的演化.

在宇宙演化的后期鬼场的能量密度必然占主导. 另外, 我们选取了其它两种势

$$V(\phi, \sigma) = \frac{1}{2}m_\phi^2\phi^2 + \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma^2, \quad (6.44)$$

$$V(\phi, \sigma) = V_{\phi 0} e^{-\lambda_\phi \kappa^2 \phi^2} + V_{\sigma 0} e^{-\lambda_\sigma \kappa^2 \sigma^2}, \quad (6.45)$$

分别给出了有效物态方程参数的数值演化, 如图 6.6 和图 6.7 所示. 从图 6.6 我们可以看出有效物态方程参数从大于  $-1$  变到小于  $-1$  并最终趋于  $-1$ , 而在图 6.7 中, 有效物态方程参数的演化行为正好相反.

## §6.4 相互作用的鬼场暗能量模型

从以上两节的分析我们知道, 鬼场暗能量除了物态方程参数小于  $-1$  和吸引子行为外, 它还有很奇怪的物理性质, 譬如, 破坏能量为主条件和能量密度随时间增加. 后者必然导致宇宙奇点, 即大撕裂, 表现为宇宙标度因子在未来有限时间内发散 [99]. 为了避免这个宇宙灾难, 我们可以采用特殊的鬼场势, 要求它的势有一个局部极大值, 在这样的模型中, 宇宙将永远加速膨胀. 另外, 物质的能量密度随宇宙膨胀不断地红移, 而鬼场的能量密度随时间增加, 这样使得巧合性问题变得更加严重, 即为为什么物质和暗能量的能量密度恰好在现在处于同一个数量级. 为了解决这些问题, 我们提出了与暗物质相互作用的鬼场暗能量模型 [102].

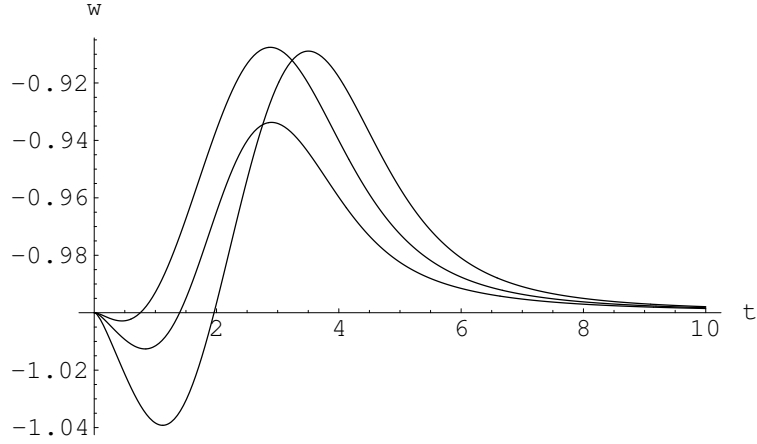


图 6.7: 势 (6.45) 的混合模型中有效物态方程的演化.

本节我们将研究鬼场与暗物质之间的耦合项的作用. 我们发现, 合适选取相互作用项的形式, 存在稳定的静态标度解, 从而缓解了巧合性问题, 并且在参数空间的某些区域可以避免宇宙灾难.

首先我们考虑一个简单的情况, 宇宙中只包含冷暗物质和物态方程参数为常数的鬼场暗能量成分. 令  $t_m$  为物质和暗能量的密度相等的时刻, 那么, 当  $t > t_m$  时宇宙标度因子的解为

$$a(t) = a(t_m) \left[ -w + (1+w) \left( \frac{t}{t_m} \right) \right]^{2/[3(1+w)]}, \quad (6.46)$$

相应的 Ricci 标量为

$$R = \frac{4(1-3w)}{3(1+w)^2} \left[ t - \left( \frac{w}{1+w} \right) t_m \right]^{-2}. \quad (6.47)$$

从上面的表达式中我们很容易看出鬼场物质最后会占主导, 在  $t = wt_m/(1+w)$  的时刻标度因子和 Ricci 标量都发散, 存在一个未来曲率奇点. 暗能量的快速增加导致了宇宙的大撕裂, 这非常不同与其它暗能量的宇宙命运 [103]. 如果宇宙的两种成分之间存在相互作用使得鬼场的能量传递给物质流体, 从而使得两成分都随宇宙的膨胀而减小, 那么, 宇宙的灾难就可能避免.

在含有物质流体  $\rho_m$  和鬼场  $\phi$  的 FRW 宇宙中, Friedmann 方程可写为

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3} (\rho_p + \rho_m). \quad (6.48)$$

我们假定两成分通过耦合项  $Q$  相互作用，它们的运动方程为

$$\dot{\rho}_p + 3H\gamma_p \rho_p = -Q, \quad (6.49)$$

$$\dot{\rho}_m + 3H\gamma_m \rho_m = Q, \quad (6.50)$$

这里我们定义了

$$\gamma_p \equiv 1 + w = \frac{\rho_p + P_p}{\rho_p} \quad (6.51)$$

$$\gamma_m \equiv \frac{\rho_m + P_m}{\rho_m} \quad (6.52)$$

它们分别满足  $\gamma_p \leq 0$  和  $1 \leq \gamma_m \leq 2$ . 相互作用项  $Q$  代表了一个附加自由度，我们可以通过稳态解的存在性对其进行限制，即要求物质流体和暗能量的能量密度比  $r \equiv \rho_m/\rho_p$  为常数. 利用方程 (6.49) 和 (6.50) 我们得到比率  $r$  的演化方程：

$$\dot{r} = r \left( \frac{Q}{\rho_m} + \frac{Q}{\rho_p} - 3H\gamma_m + 3H\gamma_p \right). \quad (6.53)$$

显然，满足下面表达式的相互作用

$$Q = 3H(\gamma_m - \gamma_p) \frac{r\rho_p}{1+r} \quad (6.54)$$

保证了稳态解的存在. 注意到  $Q > 0$ , 表明只存在从鬼场到物质的能量转移. 为了进一步研究，我们假定相互作用项的具体形式为

$$Q = 3Hc^2(\rho_p + \rho_m), \quad (6.55)$$

这里  $c^2$  是个常数，代表能量转移的强度. 这种形式的相互作用在文献 [104] 中已被讨论. 在这种具体的相互作用下方程 (6.53) 变得非常简单

$$\dot{r} = 3Hr \left( 2c^2 - \gamma_m + \gamma_p + c^2r + \frac{c^2}{r} \right). \quad (6.56)$$

我们假定  $\gamma_p$  为常数，即鬼场的宇宙学标度解，那么方程 (6.54) 有两个稳态解

$$r_s^\pm = \frac{\gamma_m - \gamma_p}{2c^2} - 1 \pm \sqrt{\left( \frac{\gamma_m - \gamma_p}{2c^2} - 1 \right)^2 - 1}, \quad (6.57)$$

并且当  $\gamma_m - \gamma_p \geq 4c^2$  时两个解满足关系  $0 < r_s^- \leq 1 \leq r_s^+$  和  $r_s^- r_s^+ = 1$ . 把在稳态解附近的线性扰动  $r = r_s + \delta r$  代入方程 (6.56), 近似到扰动的一阶项, 我们得到扰动的运动方程

$$\dot{\delta r} = 3Hc^2 \frac{r_s^2 - 1}{r_s} \delta r. \quad (6.58)$$

这表明物质为主的标度解  $r_s^+$  是不稳定的, 而鬼场为主的标度解  $r_s^-$  是稳定的. 能量密度比  $r$  可能是从不稳定的值  $r_s^+ > 1$  向稳定的值  $r_s^- < 1$  演化, 即宇宙从物质为主阶段演化为暗能量为主阶段, 这与目前的观测  $\Omega_m \approx 0.3$  和  $\Omega_\Lambda \approx 0.7$  是一致的. 这可能为解决巧合性问题提供了一个唯象的动力学模型.

从现在起我们考虑  $\gamma_m = 1$  的情况, 即冷暗物质, 研究稳态解的宇宙学演化. 把方程 (6.54) 代入方程 (6.49) 得到

$$\dot{\rho}_p + 3 \frac{\gamma_p + r}{1 + r} H \rho_p = 0, \quad (6.59)$$

它给出

$$\rho_p \propto a^{-3\nu}, \quad (6.60)$$

这里  $\nu \equiv \frac{\gamma_p + r}{1 + r}$  是一个常数. 如果时间  $t_m$  之前物质占主导, 那么标度因子为

$$a(t) = a(t_m) \left( 1 - \nu + \nu \frac{t}{t_m} \right)^{2/3\nu}. \quad (6.61)$$

利用  $r$  和  $\gamma_p$  的定义, Friedmann 方程 (6.48) 有解

$$a \propto \exp \left( \frac{\sqrt{1+r}}{\sqrt{-3(1+w)}} \kappa \phi \right). \quad (6.62)$$

于是, 表达式 (6.60) 用  $\phi$  表示为

$$\rho_p \propto \exp \left( - \frac{\sqrt{3(1+r)} \nu}{\sqrt{-(1+w)}} \kappa \phi \right). \quad (6.63)$$

由于  $\gamma_p$  是常数, 这意味着鬼场的动能和势能成比例变化, 从而我们得到势函数的具体形式为

$$V(\phi) = V_0 \exp \left( - \frac{\sqrt{3(1+r)} \nu}{\sqrt{-(1+w)}} \kappa \phi \right). \quad (6.64)$$

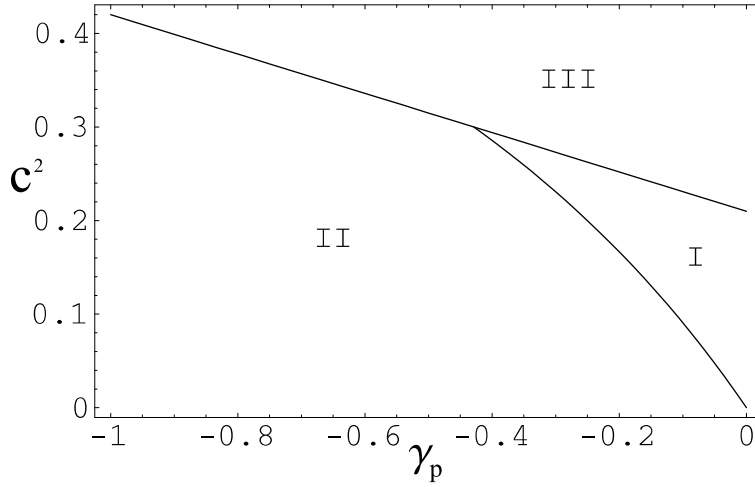


图 6.8: 参数空间  $(\gamma_p, c^2)$  的区域, 这里我们选取了  $\gamma_m = 1$ . 在区域 I 和 II 中, 标度解是稳定的吸引子, 而在区域 III 中, 不存在满足  $r_s^- < 3/7$  的稳定的标度解. 在区域 I 中, 宇宙永远加速膨胀, 而在区域 II 中, 宇宙将会在不久的将来遇到大撕裂的灾难.

这种指数形式的势常出现在 Kaluza-Klein 理论, 超引力和弦理论中. 在文献 [105] 中也得到了相似的结果. 他们从一般形式的指数势出发, 研究了存在稳定标度解的参数空间. 而我们首先构造出所期望的解, 然后得到相应的势函数. 在耦合的鬼场模型中, 势函数 (6.64) 中的幂指数的符号随参数空间的不同区域而不同, 它由参数  $\nu$  的符号来决定. 我们发现递增的指数势对应于上爬的鬼场演化, 而递减的指数势对应于下滚的鬼场演化.

近来的观测表明大约宇宙总能量密度的 30% 是冷暗物质, 大约 70% 是暗能量. 为了解释巧合性问题, 稳定的稳态能量密度比应该满足  $r_s^- < 3/7$ , 这对应于  $c^2 < 0.21(1 - \gamma_p)$ , 就是图 6.8 中的区域 I 和区域 II. 在区域 I 中, 即

$$1 - \frac{1}{1 - \gamma_p} < c^2 < \frac{21}{100}(1 - \gamma_p) \quad \text{for } -3/7 < \gamma_p < 0,$$

由于  $0 < \nu < 2/3$ , 鬼场的能量密度随时间减小, 宇宙永远加速膨胀. 然而, 在区域 II 中, 即

$$c^2 < 1 - \frac{1}{1 - \gamma_p} \quad \text{for } -3/7 < \gamma_p < 0,$$

和

$$c^2 < \frac{21}{100}(1 - \gamma_p) \quad \text{for } \gamma_p < -3/7,$$

由于  $\nu < 0$ , 鬼场的能量密度随时间增大, 宇宙加速膨胀, 在  $t = (1 - 1/\nu)t_m$  的时刻宇宙大撕裂发生. 从鬼场到冷暗物质的能量转移只是延长了宇宙的使用寿命, 并没有改变宇宙的命运.

为了研究能量密度比  $r$  与鬼场能量密度 (或物质能量密度) 的数值演化, 我们把演化方程 (6.53) 和 (6.49) (或方程 (6.50)) 写成两个独立变量  $r$  与  $\rho_p$  (或  $\rho_m$ ) 的一阶微分方程组

$$r' = 3c^2 r \left( 2 + r + \frac{1}{r} - \frac{\gamma_m - \gamma_p}{c^2} \right), \quad (6.65)$$

$$\rho_p' = -3\rho_p (\gamma_p + c^2 r + c^2), \quad (6.66)$$

$$\rho_m' = -3\rho_m \left( \gamma_m - c^2 - \frac{c^2}{r} \right), \quad (6.67)$$

这里的撇号表示对  $N \equiv \ln a$  的导数. 考虑参数空间  $(\gamma_p, c^2)$  中的两个点  $(-0.2, 0.2)$  和  $(-1.4, 0.2)$ , 它们分别位于图 6.8 中的区域 I 和区域 II 中. 我们选取不同的初始条件, 给出它们的演化曲线. 我们发现, 初始的能量密度比率很快减小并趋于一个常数, 存在一条吸引子曲线, 它对应于稳态标度解. 这意味着宇宙从物质为主时期演化到暗能量为主时期, 最终两种组份的能量密度比率变为一个常数. 另外, 当  $\gamma_p$  固定时, 随着转移强度  $c^2$  的增大稳态能量密度比率也增大. 从图 6.9 和图 6.10 我们可以看出宇宙的两种组份的能量密度都随时间减小. 方程 (6.63) 和 (6.64) 表明鬼场沿势下滚. 从图 6.11 和图 6.12 我们可以看出鬼场的能量密度随时间增大, 而物质的能量密度开始减小, 最后也是随时间增大. 方程 (6.63) 和 (6.64) 表明鬼场沿势上爬.

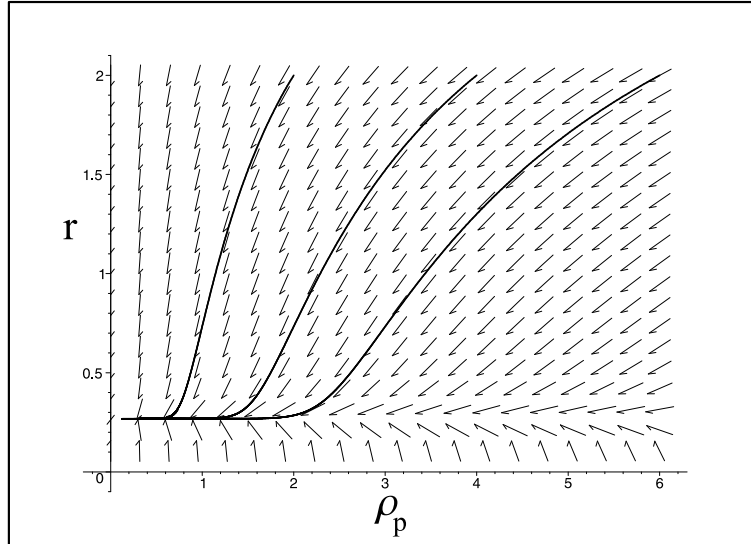


图 6.9:  $r - \rho_p$  相图, 我们选取了  $\gamma_m = 1$ ,  $\gamma_p = -0.2$  和  $c^2 = 0.2$ .

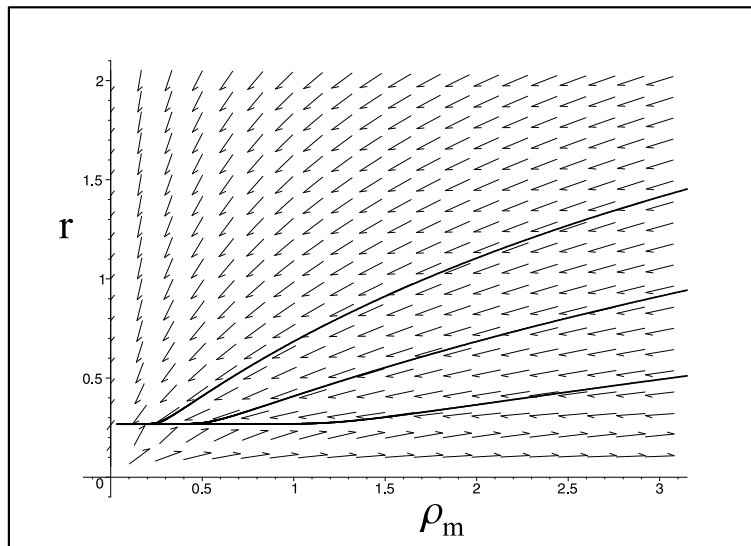


图 6.10:  $r - \rho_m$  相图, 我们选取了  $\gamma_m = 1$ ,  $\gamma_p = -0.2$  和  $c^2 = 0.2$ .

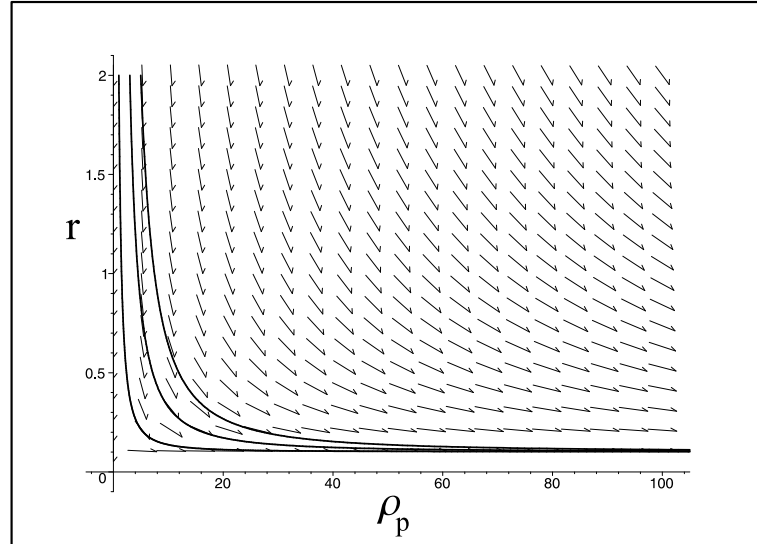


图 6.11:  $r - \rho_p$  相图, 我们选取了  $\gamma_m = 1$ ,  $\gamma_p = -1.4$  和  $c^2 = 0.2$ .

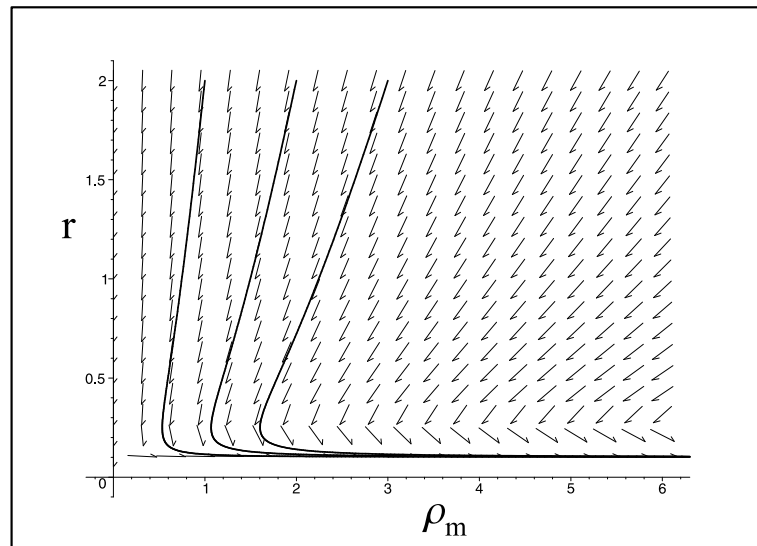


图 6.12:  $r - \rho_m$  相图, 我们选取了  $\gamma_m = 1$ ,  $\gamma_p = -1.4$  和  $c^2 = 0.2$ .



## 第七章 总结与展望

随着大量天文观测数据的出现, 宇宙学的研究进入了一个更精确的黄金时代. 微波背景各向异性探测和 Ia 型超新星数据分析表明, 宇宙在早期曾经有一个短暂的加速膨胀阶段, 目前宇宙又一次进入了加速膨胀阶段. 在漫长的宇宙演化历史中两端的加速膨胀阶段成为了宇宙学研究中的热点, 从理论上解释宇宙的加速显得非常重要.

本论文主要对加速宇宙从理论上进行一些探讨. 在第三章, 我们分析了快子暴涨模型中的快子场的动力学演化, 给出了相空间的数值演化曲线, 我们发现快子暴涨模型具有吸引子性质, 从而保证了模型的可预言性. 然后, 我们研究了具有反平方势的多快子场的宇宙学演化, 分析了标度解的存在性和稳定性. 在第四章, 我们分析了膜世界暴涨模型中的吸引子性质, 并与标准暴涨模型进行了比较, 数值解表明在膜世界图象中暴涨更容易发生. 在第五章, 我们研究了具有指数势的多标量场的宇宙学演化, 稳定性分析表明宇宙学标度解是稳定的吸引子. 在第六章, 我们讨论了鬼场暗能量的吸引子性质, 提出了精质场鬼场混合模型和相互作用的鬼场暗能量模型, 从而实现了暗能量的物态方程参数穿过  $-1$ , 并缓解了巧合性问题.

在观测方面, 尽管我们已经取得了前所未有的进展, 但观测数据对暴涨模型和暗能量模型的限制仍然很小, 我们期待将来的实验对暴涨和暗能量的本质提供更加精确的信息. 继 COBE 和 WMAP 之后, 2007 年将发射 Planck 卫星, 它将更加精确地探测整个天空的宇宙背景辐射场, 为验证早期的暴涨模型和宇宙结构的形成提供更加准确的信息. 1998 年, 超新星宇宙学组 (SCP) 和高红移超新星组 (HZS) 几乎同时发现宇宙正在加速, 这一发现改变了我们对宇宙的认识, 神秘的暗能量成为了宇宙学家面临的一个挑战. 目前的超新星数据仍然不足以排除各种暗能量模型, 正在设计中的超新星加速探测 (SNAP) 卫星将能够观测到数千个高红移的超新星, 从而更加准确揭示暗能量的本质.

在理论方面, 我们对宇宙的了解有了前所未有的进展, 但也存一些问题悬而未解, 例如, 暴涨场的起源, 暗物质的起源, 以及暗能量的本质等. 这些问题的

解决需要新的物理，需要引力量子化。目前弦理论是最有希望成为一个成功的描述量子引力的理论框架，从弦理论来研究宇宙学是一个有意义的尝试。在以后的工作中，我们打算在该方向做进一步的研究。

## 参考文献

- [1] P.de Bernardis, et al., *Nature* **404** (2000) 955, astro-ph/0004404;  
C.B.Netterfield, et al., *Astrophys.J.* **571** (2002) 604, astro-ph/0104460.
- [2] S.Hanany, et al., *Astrophys.J.* **545** (2000) L5, astro-ph/0005123.
- [3] N.W.Halverson, et al., *Astrophys.J.* **568** (2002) 38, astro-ph/0104489.
- [4] C.L.Bennett, et al., *Astrophys.J.Suppl.* **148** (2003) 1, astro-ph/0302207.
- [5] E.W.Kolb and M.S.Turner, *The Early Universe*, (Addison-Wesley, Redwood City, California, 1990).
- [6] P.Coles and F.Lucchin, *Cosmology: The Origin and Evolution of Cosmic Structure*, (Wiley,Chichester,UK,1995).
- [7] A.R.Liddle and D.H.Lyth, *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure*, (Cambridge University Press,2000).
- [8] S.Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, (Wiley,New York, 1972).
- [9] C.L.Bennett, et al., *Astrophys.J.Suppl.* **148** (2003) 1, astro-ph/0302207;  
H.V.Peiris, et al., *Astrophys.J.Suppl.* **148** (2003) 213, astro-ph/0302225.
- [10] A.H.Guth, *Phys.Rev.* **D23** (1981) 347.
- [11] A.H.Guth and E.J.Weinberg, *Nucl.Phys.* **B212** (1983) 321;  
S.W.Hawking, I.Moss and J.Stewart, *Phys.Rev.* **D26** (1982) 2681.
- [12] A.D.Linde, *Phys.Lett.* **B108** (1982) 389.
- [13] A.Albrecht and P.J.Steinhardt, *Phys.Rev.Lett.* **48** (1982) 1220.
- [14] A.D.Linde, *Phys.Lett.* **B129** (1983) 177.
- [15] V.Mukhanov, H.Feldman and R.Brandenberger, *Phys.Rept.* **215** (1992) 203.
- [16] E.D.Stewart and D.H.Lyth, gr-qc/9302019.
- [17] A.Riotto, hep-ph/0210162.
- [18] R.H.Brandenberger, hep-th/0306071.
- [19] W.Hu, astro-ph/0402060.
- [20] J.M.Bardeen, *Phys.Rev.* **D22** (1980) 1882;  
J.M.Bardeen, P.J.Steinhardt and M.S.Turner, *Phys.Rev.* **D28** (1983) 679.

- [21] F.Lucchin and S.Matarrese, Phys.Rev. **D32** (1985) 1316.
- [22] K.Freese, J.Frieman and A.Olinto, Phys.Rev.Lett. **65** (1990) 3233.
- [23] A.Sen, hep-th/0203211;  
A.Sen, hep-th/0203265.
- [24] G.W.Gibbons, hep-th/0204008.
- [25] A.Sen, hep-th/0204143.
- [26] M.Sami, P.Chingangbam and T.Qureshi, hep-th/0205179;  
M.Sami, hep-th/0301140.
- [27] Z.K.Guo, Y.S.Piao, R.G.Cai and Y.Z.Zhang, Phys.Rev. **D68** (2003) 043508.
- [28] D.S.Salopek and J.R.Bond, Phys.Rev. **D42** (1990) 3936;  
A.G.Muslimov, Class.Quant.Grav. **7** (1990) 231;  
J.E.Lidsey, Phys.Lett. **B273** (1991) 42.
- [29] A.R.Liddle, P.Parsons and J.D.Barrow, Phys.Rev. **D50** (1994) 7222;  
A.R.Liddle and D.H.Lyth, *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure*,  
(2000) Cambridge, UK.
- [30] M.Fairbairn and M.H.Tytgat, hep-th/0204070;  
D.Choudhury, D.Ghoshal, D.P.Jatkar and S.Panda, hep-th/0207143.
- [31] L.Kofman and A.Linde, hep-th/0205121.
- [32] Y.S.Piao, R.G.Cai, X.M.Zhang and Y.Z.Zhang, hep-ph/0207143;  
M.Majumdar and A.Christine-Davis, hep-th/0304226.
- [33] T.Padmanabhan, Phys.Rev. **D66** (2002) 021301;  
L.R.W.Abramo and F.Finelli, Phys. Lett. **B575** (2003) 165.
- [34] Z.K.Guo and Y.Z.Zhang, JCAP bf 0408 (2004) 010.
- [35] I.P.C.Heard and D.Wands, Class.Quant.Grav. **19** (2002) 5435, gr-qc/0206085.
- [36] A.R.Liddle, A.Mazumdar and F.E.Schunck, Phys.Rev. **D58** (1998) 061301.
- [37] N.Arkani-Hamed, S.Dimopoulos and G.Dvali, Phys.Lett. **B429** (1998) 263, hep-ph/9803315;  
I.Antoniadis, N.Arkani-Hamed, S.Dimopoulos and G.Dvali, Phys.Lett. **B436**  
(1998) 257, hep-ph/9804398.

- [38] P.Horava and E.Witten, Nucl.Phys. **B460** (1996) 506;  
P.Horava and E.Witten, Nucl.Phys. **B475** (1996) 94;  
E.Witten, Nucl.Phys. **B471** (1996) 135.
- [39] L.Randall and R.Sundrum, Phys.Rev.Lett. **83** (1999) 3370, hep-ph/9905221.
- [40] L.Randall and R.Sundrum, Phys.Rev.Lett. **83** (1999) 4690, hep-th/9906064.
- [41] W.D.Goldberger and M.B.Wise, Phys.Rev.Lett. **83** (1999) 4922.
- [42] P.Binetruy, C.Deffayet and D.Langlois, Nucl.Phys. **B565** (2000) 269, hep-th/9905012;  
P.Binetruy, C.Deffayet, U.Ellwanger and D.Langlois, Phys.Lett. **B477** (2000) 285, hep-th/9910219.
- [43] W.Israel, Nuovo Cimento **44B** (1966) 1; **48B** (1967) 463E.
- [44] T.Shiromizu, K.Maeda and M.Sasaki, Phys.Rev. **D62** (2000) 024012, gr-qc/9910076;  
P.Kraus, JHEP **9912** (1999) 011, hep-th/9910149;  
S.Mukohyama, T.Shiromizu and K.Maeda, Phys.Rev. **D62** (2000) 024028, hep-th/9912287.
- [45] R.Maartens, D.Wands, B.A.Bassett and I.P.C.Heard, Phys.Rev. **D62** (2000) 041301, hep-ph/9912464;  
E.J.Copeland, A.R.Liddle and J.E.Lidsey, Phys.Rev. **D64** (2001) 023509.
- [46] N.Kaloper and A.Linde, Phys.Rev. **D59** (1999) 101303, hep-ph/9811141;  
A.Lukas, B.A.Ovrut and D.Waldram, Phys.Rev. **D61** (2000) 023506, hep-th/9902071.
- [47] G.Dvali and S.H.H.Tye, Phys.Lett. **B450** (1999) 72, hep-ph/9812483;  
A.Mazumdar, Phys.Lett. **B469** (1999) 55, hep-ph/9902381.
- [48] J.M.Cline, C.Grojean and G.Servant, Phys.Rev.Lett. **83** (1999) 4245, hep-ph/9906523.
- [49] R.Maartens, D.Wands, B.A.Bassett and I.P.C.Heard, Phys.Rev. **D62** (2000) 041301, hep-ph/9912464.
- [50] M.C.Bento, O.Bertolami and A.A.Sen, Phys.Rev. **D67** (2003) 063511, hep-

- ph/0208124.
- [51] K.Coble, S.Dodelson and J.A.Frieman, Phys.Rev. **D55** (1997) 1851;  
R.R.Caldwell and P.J.Steinhardt, Phys.Rev. **D57** (1998) 6057;  
I.Zlatev, L.M.Wang and P.J.Steinhardt, Phys.Rev.Lett. **82** (1999) 896;  
P.J.Steinhardt, L.M.Wang and I.Zlatev, Phys.Rev. **D59** (1999) 123504.
- [52] A.H.Guth, Phys.Rev. **D23** (1981) 347;  
A.D.Linde, Phys.Lett. **B108** (1982) 389;  
A.D.Linde, Phys.Lett. **B129** (1983) 177.
- [53] E.J.Copland, A.R.Liddle, D.H.Lyth, E.D.Stewart and D.Wands, Phys.Rev. **D49**  
(1994) 6410;  
M.Dine, L.Randall and S.Thomas, Phys.Rev.Lett. **75** (1995) 398.
- [54] E.D.Stewart, Phys.Rev. **D51** (1995) 6847.
- [55] F.Lucchin and S.Matarrese, Phys.Rev. **D32** (1985) 1316;  
Y.Kitada and K.I.Maeda, Class.Quant.Grav. **10** (1993) 703.
- [56] J.J.Halliwell, Phys.Lett. **B185** (1987) 341;  
A.B.Burd and J.D.Barrow, Nucl.Phys. **B308** (1988) 929;  
A.A.Coley, J.Ibanez and R.J.van den Hoogen, J.Math.Phys. **38** (1997) 5256.
- [57] E.J.Copeland, A.R.Liddle and D.Wands, Phys.Rev. **D57** (1998) 4686;  
A.P.Billyard, A.A.Coley and R.J.van den Hoogen, Phys.Rev. **D58** (1998) 123501;  
R.J.van den Hoogen, A.A.Coley and D.Wands, Class.Quant.Grav. **16** (1999)  
1843.
- [58] G.F.R.Ellis and J.Wainwright, *Dynamical systems in cosmology* (Cambridge UP,  
1997).
- [59] A.R.Liddle, A.Mazumdar and F.E.Schunck, astro-ph/9804177;  
E.J.Copeland, A.Mazumdar and N.J.Nunes, Phys.Rev. **D60** (1999) 083506,  
astro-ph/9904309;  
K.A.Malik and D.Wands, Phys.Rev. **D59** (1999) 123501;  
F.Finelli, Phys.Lett. **B545** (2002) 1, hep-th/0206112.
- [60] Y.S.Piao, W.B.Lin, X.M.Zhang and Y.Z.Zhang, Phys.Lett. **B528** (2002) 188,

- hep-ph/0109076;  
Y.S.Piao, R.G.Cai, X.M.Zhang and Y.Z.Zhang, Phys.Rev. **D66** (2002) 121301,  
hep-ph/0207143.
- [61] Z.K.Guo, Y.S.Piao and Y.Z.Zhang, Phys.Lett. **B568** (2003) 1, hep-th/0304048.
- [62] Z.K.Guo, Y.S.Piao, R.G.Cai and Y.Z.Zhang, Phys.Lett. **B576** (2003) 12, hep-th/0306245.
- [63] M.Gasperini and G.Veneziano, Astropart.Phys. **1** (1993) 317, hep-th/9211021.
- [64] C.M.Chen, P.M.Ho, I.P.Neupane and J.E.Wang, hep-th/0304177.
- [65] M.Tegmark et al., Phys.Rev. **D69** (2004) 103501;  
W.J.Percival et al., Mon.Not.Roy.Astron.Soc. **337** (2002) 1068.
- [66] A.G.Riess et al., Astron.J. **116** (1998) 1009;  
S.Perlmutter et al., Astrophys.J. **517** (1999) 565.
- [67] J.L.Tonry et al., Astrophys.J. **594** (2003) 1;  
R.A.Knop et al., astro-ph/0309368;  
B.J.Barris et al., astro-ph/0402512.
- [68] A.G.Riess et al., astro-ph/0503159.
- [69] D.N.Spergel et al., Astrophys.J.Suppl. **148** (2003) 175.
- [70] N.Arkani-Hamed, L.J.Hall, C.Kolda and H.Murayama, Phys.Rev.Lett. **85** (2000) 4434.
- [71] P.J.E.Peebles, Astrophys.J. **325** (1988) L17;  
B.Ratra, Phys.Rev. **D37** (1988) 3406;  
C.Wetterich, Nucl.Phys. **B302** (1988) 668.
- [72] I.Zlatev, L.Wang and P.J.Steinhardt, Phys.Rev.Lett. **82** (1999) 896;  
P.J.Steinhardt, L.Wang and I.Zlatev, Phys.Rev. **D59** (1999) 123504.
- [73] C.Armendariz-Picon, V.Mukhanov and P.J.Steinhardt, Phys.Rev.Lett. **85** (2000) 4438;  
C.Armendariz-Picon, V.Mukhanov and P.J.Steinhardt, Phys.Rev. **D63** (2001) 103510.
- [74] R.R.Caldwell, Phys.Lett. **B545** (2002) 23.

- [75] S.Mukohyama and L.Randall, Phys.Rev.Lett. **92** (2004) 211302;  
S.Mukohyama, Phys.Rev. **D70** (2004) 063505.
- [76] G.Dvali, G.Gabadadze and M.Porrati, Phys.Lett. **B485** (2000) 208;  
C.Deffayet, Phys.Lett. **B502** (2001) 199;  
C.Deffayet, G.Dvali and G.Gabadadze, Phys.Rev. **D65** (2002) 044023.
- [77] M.Li, Phys.Lett. **B603** (2004) 1;  
Q.G.Huang and M.Li, JCAP **0408** (2004) 013.
- [78] E.E.Flanagan, Phys.Rev.Lett. **92** (2004) 071101;  
S.Capozziello, V.F.Cardone and A.Troisi, Phys.Rev. **D71** (2005) 043503.
- [79] A.Y.Kamenshchik, U.Moschella and V.Pasquier, Phys.Lett. **B511** (2001) 265.
- [80] K.Freese and M.Lewis, Phys.Lett. **B540** (2002) 1.
- [81] A.R.Cooray and D.Huterer, Astrophys.J. **513** (1999) L95.
- [82] E.V.Linder, Phys.Rev.Lett. **90** (2003) 091301.
- [83] U.Seljak et al., astro-ph/0407372.
- [84] A.Upadhye, M.Ishak and P.J.Steinhardt, astro-ph/0411803.
- [85] V.Sahni, T.D.Saini, A.A.Starobinsky and U.Alam, JETP Lett. **77** (2003) 201.
- [86] Y.Wang and K.Freese, astro-ph/0402208.
- [87] U.Alam, V.Sahni and A.A.Starobinsky, JCAP **0406** (2004) 008;  
T.R.Choudhury and T.Padmanabhan, Astron.Astrophys. **429** (2005) 807;  
B.Feng, X.Wang and X.Zhang, astro-ph/0404224;  
Y.Gong, astro-ph/0405446.
- [88] S.W.Hawking and G.F.R.Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time*, (Cambridge, Cambridge University Press: 1973).
- [89] S.M.Carroll, M.Hoffman and M.Trodden, Phys.Rev. **D68** (2003) 023509.
- [90] G.W.Gibbons, hep-th/0302199;  
S.Nojiri and S.D.Odintsov, Phys.Lett. **B562** (2003) 147;  
S.Nojiri and S.D.Odintsov, Phys.Lett. **B565** (2003) 1.
- [91] A.E.Schulz and M.White, Phys.Rev. **D64** (2001) 043514;  
M.P.Dabrowski, T.Stachowiak and M.Szydlowski, Phys.Rev. **D68** (2003) 103519;

- P.Singh, M.Sami and N.Dadhich, Phys.Rev. **D68** (2003) 023522;  
Y.S.Piao and E.Zhou, Phys.Rev. **D68** (2003) 083515;  
Y.S.Piao and Y.Z.Zhang, astro-ph/0401231.
- [92] L.Mersini, M.Bastero-Gil and P.Kanti, Phys.Rev. **D64** (2001) 043508;  
M.Bastero-Gil, P.H.Frampton and L.Mersini, Phys.Rev. **D65** (2002) 106002;  
P.H.Frampton, Phys.Lett. **B555** (2003) 139.
- [93] M.D.Pollock, Phys.Lett. **B215** (1988) 635.
- [94] D.F.Torres, Phys.Rev. **D66** (2002) 043522.
- [95] A.Kehagias and E.Kiritsis, JHEP **9911** (1999) 022.
- [96] T.Chiba, T.Okabe and M.Yamaguchi, Phys.Rev. **D62** (2000) 023511.
- [97] Z.K.Guo, Y.S.Piao and Y.Z.Zhang, Phys.Lett. **B594** (2004) 247.
- [98] J.E.Lidsey, Gen.Rel.Grav. **25** (1993) 399;  
J.M.Aguirregabiria and R.Lazkoz, gr-qc/0402060.
- [99] R.R.Caldwell, M.Kamionkowski and N.N.Weinberg, Phys.Rev.Lett. **91** (2003) 071301;  
M.Sami and A.Toporensky, gr-qc/0312009;  
M.Bouhmadi-Lopez and J.J.Madrid, astro-ph/0404540.
- [100] D.Huterer and A.Cooray, Phys.Rev. **D71** (2005) 023506;  
U.Alam, V.Sahni, T.D.Saini and A.A.Starobinsky, Mon.Not.Roy.Astron.Soc. **354** (2004) 275.
- [101] Z.K.Guo, Y.S.Piao, X.Zhang and Y.Z.Zhang, Phys.Lett. **B608** (2005) 177.
- [102] Z.K.Guo and Y.Z.Zhang, Phys.Rev. **D71** (2005) 023501.
- [103] G.Starkman, M.Trodden and T.Vachaspati, Phys.Rev.Lett. **83** (1999) 1510;  
L.M.Krauss and G.D.Starkman, astro-ph/9902189;  
P.P.Avelino, J.P.M.de Carvalho and C.J.A.P.Martins, astro-ph/0002153;  
D.Huterer, G.D.Starkman and M.Trodden, astro-ph/0202256.
- [104] W.Zimdahl, D.Pavon and L.P.Chimento, Phys.Lett. **B521** (2001) 133, astro-ph/0105479;  
L.P.Chimento, A.S.Jakubi, D.Pavon and W.Zimdahl, Phys.Rev. **D67** (2003)

083513, astro-ph/0303145.

[105] B.Ratra and P.J.E.Peebles, Phys.Rev. **D37** (1988) 3406;

C.Wetterich, Astron.Astrophys. **301** (1995) 321, hep-th/9408025.

## 博士期间所做的工作

1. Variable Chaplygin Gas  
**Zong-Kuan Guo** and Yuan-Zhong Zhang  
Submitted to Phys.Lett. **B**, astro-ph/0506091.
2. Parametrization of Quintessence and Its Potential  
**Zong-Kuan Guo**, Nobuyoshi Ohta and Yuan-Zhong Zhang  
Submitted to Phys.Rev. **D**, astro-ph/0505253.
3. Cosmological Evolution of Interacting Phantom Energy with Dark Matter  
**Zong-Kuan Guo**, Rong-Gen Cai and Yuan-Zhong Zhang  
JCAP **0505** (2005) 002, astro-ph/0412624.
4. Interacting Phantom Energy  
**Zong-Kuan Guo** and Yuan-Zhong Zhang  
Phys.Rev. **D71** (2005) 023501, astro-ph/0411524.
5. Cosmological Evolution of a Quintom Model of Dark Energy  
**Zong-Kuan Guo**, Yun-Song Piao, Xinmin Zhang and Yuan-Zhong Zhang  
Phys.Lett. **B608** (2005) 177-182, astro-ph/0410654.
6. On the Dynamical Stability of Phantom Cosmology  
**Zong-Kuan Guo**, Yun-Song Piao and Yuan-Zhong Zhang  
Phys.Lett. **B594** (2004) 247-251, astro-ph/0404225.
7. Cosmological Scaling Solutions of Multiple Tachyon Fields with Inverse Square Potentials  
**Zong-Kuan Guo** and Yuan-Zhong Zhang  
JCAP **0408** (2004) 010, hep-th/0403151.
8. Inflationary Attractor in Braneworld Scenario  
**Zong-Kuan Guo**, Hong-Sheng Zhang and Yuan-Zhong Zhang  
Phys.Rev. **D69** (2004) 063502, hep-ph/0309163.

9. Cosmological Scaling Solutions and Cross-coupling Exponential Potential  
**Zong-Kuan Guo**, Yun-Song Piao, Rong-Gen Cai and Yuan-Zhong Zhang  
Phys.Lett. **B576** (2003) 12-17, hep-th/0306245.
10. Inflationary Attractor from Tachyonic Matter  
**Zong-Kuan Guo**, Yun-Song Piao, Rong-Gen Cai and Yuan-Zhong Zhang  
Phys.Rev. **D68** (2003) 043508, hep-ph/0304236.
11. Cosmological Scaling Solutions and Multiple Exponential Potentials  
**Zong-Kuan Guo**, Yun-Song Piao and Yuan-Zhong Zhang  
Phys.Lett. **B568** (2003) 1-7, hep-th/0304048.
12. 5D Dirac Equation in Induced-Matter Theory  
Guang-Wen Ma and **Zong-Kuan Guo**  
Int. J. Theor. Phys. **41** (2002) 1733-1743.

## 致 谢

本论文是在我的导师张元仲研究员的悉心指导下完成的。

诚挚地感谢我的导师张元仲研究员。三年来，张老师广博的知识，清晰的物理图象，精益求精的治学态度以及孜孜不倦的工作热情，使我终身难忘。张老师的言传身教不仅让我学到了很多从事物理研究所需要的知识而且还培养了我对物理的洞察力。同时张老师给予了我工作上很大的自由，这对于我独立工作能力的提高有莫大的帮助。张老师不仅在学术方面指引我不断进步，而且在生活上也给了我无微不至的关心和帮助。衷心地感谢张老师！

感谢理论所的欧阳钟灿所长，吴岳良副所长和牟克雄副所长等领导对我在学习和工作上的支持和关心。

感谢理论所的蔡荣根研究员，高能所的张新民研究员和郑州大学的马光文教授。在过去的几年里，他们给了我学术上的指导和生活上的关怀，他们对物理的深刻的理解和严谨的治学态度让我受益匪浅。

感谢李淼研究员，朱重远研究员，喻明研究员，上海师范大学的童若轩教授，中科院研究生院的章德海教授，北京师范大学的赵峥教授等等对我的关心，指导，支持和鼓励。

感谢我的师兄朴云松博士。与他在学术上的交流和讨论以及工作上的合作都是一件非常令人愉快而又难忘的事，他的敏锐和热情给我留下了深刻的印象。也感谢我的师兄龚云贵教授和何平博士，与他们的多次讨论对我帮助很大，这对我的影响无疑是深远的，他们对宇宙学的浓厚兴趣和敏锐的物理直觉以及热忱待人的态度在我心目中留下了无法忘怀的记忆。

感谢我们组里的张宏升，石春太，张立峰，郭琦，庞大伟，李辉，韦浩，张益。也感谢从事相近方向研究的王飞，黄庆国博士，王秀莲博士，佘建黄，魏韧，华中科大的刘国正，高能所的冯波，李明哲，毕效军博士，研究生院的孙成一。与他们学业上的讨论和生活上的愉快相处，是我一生都难以忘怀的美好回忆。

感谢理论所综合办公室的郭玲老师，安慧敏老师，王淑敏老师，业务处的孙

立群老师，机房的杨镜波老师，财务室的杨晋花老师和张军老师，图书馆的魏莲芝老师和郝江平老师，医务室的李大夫以及有关工作人员对我在学习和工作上的关心和帮助。

特别感谢与我携手走过五个春秋的妻子。她在生活上的理解，支持和帮助是促使我完成学业的巨大精神动力。

特别感谢我的父母。他们含辛茹苦地抚养我长大，我的每一分进步都与他们默默的支持息息相关，他们在我身上所付出的心血已经成为我生命中不可或缺的一部分，对他们的感激已经无法用言语来表达。也感谢我的妹妹，哥哥和嫂子，他们在我求学的历程中付出了许多心血和关爱。

感谢所有关心和帮助过我的朋友们。