

中国科学技术大学

博士学位论文

论文题目：宇宙中暗能量、残余引力波和微波背景辐射极化的一些研究

作者姓名：赵 文

学科专业：天体物理

导师姓名：张 杨 教授

完成时间：2006 年 9 月

摘要

本文主要介绍了我们对宇宙暗能量、残余引力波和宇宙微波背景辐射(CMB)极化的一些研究结果。宇宙暗能量,残余引力波和微波背景辐射是目前宇宙学研究中非常热门的课题,它们对于理解宇宙中最基本的物质构成,极早期宇宙的暴涨过程,以及宇宙在漫长的演化过程中的演化行为等问题的研究都具有极为重要的意义。目前大量的观测数据的出现,特别是Ia型超新星数据,CMB扰动谱等数据的出现,使得近期对这几个问题的研究更为重要。本文共分五章。

第一章介绍了宇宙学研究的一些背景知识,着重介绍了目前暗能量,引力波和CMB的研究现状和最新进展。在本章中我们同时简要介绍了我们在这几个方面所作的工作。在暗能量方面,我们简要介绍了宇宙暗能量问题的起源,目前主要的观测手段,目前暗能量理论研究的现状,几类主要的暗能量模型,暗能量模型存在的主要问题等。本章中还介绍了我们主要研究的两类暗能量模型:Quintom模型和Yang-Mills凝聚的暗能量模型。简要介绍了这两类模型的主要特征,以及与观测数据的比较等问题。在引力波方面,我们首先简要阐述了引力波在引力论研究中的地位,当前引力波探测的现状。引力波源的分类,及其各自的起源。着重介绍了我们研究的宇宙残余引力波的主要特性,主要的观测手段,和我们在该方面的主要研究成果,包括在宇宙残余引力波在加速膨胀宇宙中的演化行为,几种主要观测宇宙残余引力波的方法的比较,目前的观测对模型的限制等;在CMB方面,我们首先说明了CMB在当代宇宙学,特别是暴涨宇宙学中的极为重要的意义,着重介绍了我们的解析计算的方法及其主要结论。

第二章中,首先讨论了暗能量的观测基础,各种理论模型以及模型存在的两个主要问题:精细调节问题和宇宙巧合性问题。然后着重讨论我们在这方面所作的两个主要工作:首先详细地介绍了一类Quintom暗能量模型,讨论了它与通常的Quintessence模型,以及Phantom模型的关系。然后我们对模型进行了分类。接着我们研究了Quintom模型的演化方程,其势能的演化与其状态方程演化行为的关系,模型在 $w-w'$ 相空间的演化行为,其状态方程跨越-1的可能性,其晚期吸引子解的行为,Quintom暗能量模型的

重建问题, 以及暗能量的扰动方程等. 另外一种我们着重讨论的是我们提出Yang-Mills场的暗能量模型, 我们详细介绍了该模型的物理基础, 基本的演化方程, 和该模型状态方程演化的基本性质. 研究了该模型状态方程跨越-1的可能性, “磁场”分量的影响, 对宇宙巧合性问题的回答, 暗能量和物质以及辐射的耦合问题, 该耦合对宇宙演化的影响以及对宇宙巧合性问题的回答, Yang-Mills 暗能量与标量场暗能量的区别等。

第三章中我们首先介绍了引力波的一些基本性质, 以及宇宙中存在的两类重要的孤立引力波源: 周期性的引力波源和突发性的引力波源, 研究了它们预言的引力波的大小及探测现状. 然后着重讨论了宇宙背景的残余引力波, 研究了暴涨宇宙学模型中残余引力波的起源, 分别用解析近似的方法, 严格解析的方法, 数值计算的方法研究了在加速膨胀的宇宙中, 残余引力波的演化行为. 同时我们还讨论了宇宙中微子和宇宙相变对引力波的影响. 并分别给出了一个简单的下降因子来描述其影响. 然后我们讨论了残余引力波的探测问题: 首先简要介绍了目前探测残余引力波的几种主要的方法, 包括CMB极化的探测方法, 毫秒脉冲星信号残差的探测方法, 激光干涉仪直接探测的方法以及宇宙核合成的限制方法. 并且针对各种不同的暴涨模型, 考虑到引力波的红移压低效应, 加速膨胀效应, 中微子效应和宇宙相变效应, 我们给出了引力波能量密度的上限, 并且将其与未来的探测计划的观测能力作了比较, 研究了不同的探测方法对引力波探测的优缺点等问题。

在第四章中我们从Boltzmann方程出发, 介绍了宇宙微波背景辐射(CMB)的扰动和极化功率谱(包括电场型极化功率谱和磁场型极化功率谱)的起源, 及其各自所满足的演化方程. 然后我们着重讨论宇宙残余引力波作为扰动源的CMB功率谱的演化行为. 其演化方程主要依赖于: 宇宙残余引力波的演化方程和可视函数的演化. 对于前者, 我们分别用了三种不同的方法: 解析近似方法, WKB近似方法和完全数值方法, 分别求解了在加速膨胀宇宙中残余引力波的演化. 对于后者, 我们用了两种近似来描述可视函数: 高斯近似和我们提出的半高斯近似. 在此基础上, 我们近似求解了CMB的极化功率谱, 并得到了一个关于极化功率谱的解析的积分表达式. 利用该表达式, 我们分析了各种宇宙学参数: 宇宙中的重子物质, 宇宙暗能量, 宇宙再电离, 引力波功率谱的谱指数, 张量标量比等对极化功率谱的影响等问题。

第五章是全文的总结和一些展望。

Abstract

This thesis mainly focuses on our studies on the cosmic dark energy, relic gravitational waves and the polarization of cosmic microwave background radiation (CMB), which are the most active issues in the modern cosmology. The studies on them are very important for understanding the foundational components of the universe, the inflationary physics in the extreme early universe and the evolution of the universe. Recently, the open of a number of observed data, especially the data of Ia Supernova and power spectra of CMB anisotropy and polarization, makes the studies on these topics become more and more important. This thesis consists of five chapters.

In the first chapter, we introduce some background knowledge of the modern cosmology, especially the recent studies and new processes on the cosmic dark energy, relic gravitational waves and CMB. In this chapter, we also briefly introduce our works on these topics. For the dark energy, we briefly introduce the origin of the cosmic dark energy problem, the main observational methods, the status of the theoretical studies on the dark energy, the popular models of dark energy and the important problems in the present models. In this chapter, we also introduce two kinds of dark energy models, which we are interested in this thesis: Quintom models and Yang-Mill condensate dark energy models. We introduce the important properties of the models, the comparison with the observation. For the gravitational waves, we first discuss the importance of the gravitational waves in the gravitational theory, the status of recent observations on the gravitational waves, the different kinds of the sources of gravitational waves, and their origin. We mainly focus on the relic gravitational waves. We introduce the important characters of relic gravitational waves, the main observational method and our studies on this topic: the evolution of relic gravitational waves in the accelerating universe, the comparison of the different observational methods and the constraint on the models by the present observations. In the topic of CMB, we

first introduce the importance of CMB in the cosmology, especially in inflationary cosmology. Then we introduce our analytic calculation on the CMB polarization and the important results.

In Chapter 2, we first discuss the observed foundation of the cosmic dark energy, the models of dark energy and two important problems for the dark energy models: the fine-tuning problem and the cosmic coincidence problem. Then we mainly introduce two of our works on the dark energy: detailed discussion on a kind of Quintom models, showing the difference between the Quintom model and the general quintessence and phantom models. We separate the models into difference kinds. Then we investigate their evolution equations, the relation of their potential and equation of state, the evolution in the phase space of $w-w'$, the possibility of their equation of state crossing -1 , their late attractor solutions, the construction of the potential functions of the Quintom models from the parametrized equation of state and the perturbation of this kind of dark energy models. We also discuss another kind of dark energy: Yang-Mills condensate dark energy model, which has been advised by us. We introduce their physical foundation, their evolution equations and some important characters of this kind of models. We investigate the possibility of their equation of state crossing -1 , the influence of the “magnetic” field, the coincidence problem in this model, the coupling between the dark energy and matter (or/and radiation), the influence of these couplings on the evolution of the universe, the coincidence problem in these coupling models, the difference between the Yang-Mills dark energy and scalar dark energy.

In Chapter 3, we introduce the basic characters of the gravitational waves, and two kinds of important sources of gravitational waves in the universe: the periodic sources and pulsed sources. We investigate the prediction of these sources on the amplitude of gravitational waves and the observed status. Then we mainly discuss some topics on the relic gravitational waves, investigating their generation in the early inflationary stage of the universe. We use there different methods: analytic approximation, the exactly analytic method and numerical method to study the evolution of the relic gravitational waves in the accelerating universe. At the same time, we also study the effects of the cosmic neutrino and cosmic phase transition on the gravitational waves, and find they can be described by a simple damping factor. Then we discuss the topic of the observation on the gravitational waves. First, we introduce four kinds of important observational methods for the relic gravitational waves detection: the CMB polarization method, the millisecond pulsar

method, the direct method by the laser interferometers and the constraint by the BBN observations. Focused on the special inflationary models, after taking into account the redshift-suppression effect, the accelerating expansion effect, the neutrino damping effect and the cosmic phase transition effect on the gravitational waves, we give the upper limit of the strength of the gravitational waves. Comparing this limit with the sensitivities limits of the future observational projects, we study the advantage and disadvantage of different observational methods.

In Chapter 4, we discuss from the Boltzmann equations. We introduce the origin of the power spectra of the anisotropies in CMB temperature and polarization (including the electric-type and magnetic-type polarizations), and their evolution equations. Then we focus on the evolution of the CMB polarization generated by the relic gravitational waves. We find the evolution mainly based on the evolution equation of relic gravitational waves and the visibility function. Due to the former, we use three different methods: analytic approximation, WKB approximation and exactly numerical method, to solve the evolution of relic gravitational waves in the accelerating universe. For the visibility function, we use a Gaussian and a half-Gaussian visibility function to approximate it. Then we obtain an analytic integral formula of the CMB polarization power spectra. Based on this formula, we study the influence on the polarization by the cosmic parameters: cosmic baryon, cosmic dark energy, cosmic reionization, tensor spectral index, the tensor/scalar ratio and so on.

The summary and future discussions are presented in Chapter 5.

The thesis has been partially supported by Graduate Student Research Funding from USTC.

目 录

中文摘要	i
英文摘要	iii
第一章 引言	1
第二章 宇宙中的暗能量	5
§ 2.1 暗能量	5
§ 2.1.1 Friedmann-Robertson-Walker宇宙	6
§ 2.1.2 暗能量存在的实验证据	7
§ 2.1.3 暗能量模型的研究现状	9
§ 2.1.4 暗能量模型存在的主要问题	12
§ 2.2 Quintom模型	13
§ 2.2.1 简介	13
§ 2.2.2 Hesseence和Hantom模型	15
§ 2.2.3 状态方程的演化	18
§ 2.2.4 两类特殊的Hesseence模型	23
§ 2.2.5 Hesseence势能函数的重建	25
§ 2.2.6 Quintom的扰动	28
§ 2.3 Yang-Mills 场暗能量模型	32
§ 2.3.1 Yang-Mills 场暗能量模型的基本性质	32

§ 2.3.2 Yang-Mills 暗能量模型的物态跨越-1的可能性	37
§ 2.3.3 Yang-Mills 暗能量模型和宇宙巧合性问题	42
§ 2.3.4 耦合的 Yang-Mills 暗能量和宇宙巧合性问题	51
§ 2.3.5 有磁场的 Yang-Mills 模型	54
§ 2.3.6 Yang-Mills 暗能量和标量场暗能量的区别	59
第三章 宇宙残余引力波	63
§ 3.1 引力波与引力波源	63
§ 3.1.1 周期性的引力波源 (periodic sources)	65
§ 3.1.2 突发式的引力波源 (pulsed sources)	69
§ 3.2 暴涨宇宙学与残余引力波的产生	71
§ 3.2.1 暴涨宇宙学的基本思想与其动力学描述	71
§ 3.2.2 标量和张量原初扰动谱的解析计算	75
§ 3.2.3 暴涨模型的分类以及对残余引力波的预言	82
§ 3.3 残余引力波的演化	84
§ 3.3.1 宇宙的加速膨胀对引力波的影响	85
§ 3.3.2 宇宙中微子和宇宙相变的影响	98
§ 3.4 残余引力波的探测	106
§ 3.4.1 各种探测残余引力波的方法	106
§ 3.4.2 各种探测方法的比较	115
第四章 宇宙残余引力波与CMB 极化	131
§ 4.1 简介	131
§ 4.2 CMB 极化的 Boltzmann 方程	132
§ 4.3 CMB 极化的电场和磁场分量	135
§ 4.4 引力波的演化	138
§ 4.5 可视函数模型	141
§ 4.6 极化功率谱的解析计算	143

§ 4.7 主要结论及其讨论	152
第五章 总结与展望	161
§ 5.1 总结	161
§ 5.2 展望	164
参考文献	167
致谢	177
论文发表情况	179
个人简历	181

第一章

引言

现代宇宙学的建立，可以追溯到上世纪初。爱因斯坦在建立了广义相对论不久，就将其应用到宇宙学研究。基于当时对宇宙的理解，爱因斯坦引进了宇宙学常数项，试图建立一个静态的宇宙学模型。该模型存在两个问题：首先是爱丁顿在该模型提出不久就发现该模型是不稳定的。也就是说只要存在一个很小的扰动，该模型的静态条件就会被破坏。而且后来哈勃发现宇宙确实在膨胀。其次，为什么要引进宇宙学常数项？它是一个简单的常数，还是有其相应的物理起源？有意思的是，该宇宙学常数与当代宇宙学研究的一个热门问题—暗能量有着密切的关系。这一点我们在以后的讨论中会提到。

宇宙学作为一门观测科学，起源于上世纪二十年代初，哈勃发现大部分的星云是星系，而且它们正离我们远去，对星系的认识，第一次把人类的目光引向宇宙深处，加上后来轻元素相对丰度的测量和宇宙微波背景的辐射的观测，一并称为现代宇宙学的三大基石，奠定了现代宇宙学的理论框架，即现在被广泛接受的基于热大爆炸的宇宙学模型。而爱因斯坦广义相对论和宇宙学原理基本假设则提供了描述宇宙概貌及其演化的有效手段。随着探测技术，特别是空间探测技术的发展，新一代高精度的气球，望远镜和卫星等实验数据的空前积累极大丰富了人们对宇宙的认识。同时宇宙学的研究也取得了突飞猛进的发展，尤其是2003年和2006年两次公布的威尔金森各向异性探测器的观测结果 [Bennett et al., 2003]，斯隆数字巡天等结果的出现 [Tegmark et al., 2004]，精确地给出了大多数宇宙学参数的测量结果，并最终建立起了宇宙学的标准模型：暴涨+ Λ CDM模型。

该模型认为，现在宇宙中地主要组分是:约 73% 的暗能量（或真空能），约 23% 的暗物质（主要是冷暗物质），4% 左右的重子物质,以及少量的光子和中微子。其中未知的暗能量和暗物质是现在宇宙的主要组分，这是当代宇宙学观测给出的最重要、最出人意料的结果。另外该模型认为在宇宙的极早期，大爆炸开始之前，宇宙存在一个急速膨胀阶段，即暴涨阶段，该阶段抹平了早期宇宙可能存在的各种不均匀性并且留下了后来宇宙结构形成的种子。

宇宙暗能量的研究是当今宇宙最重要的研究课题之一。它的观测首先来源于 1998 年对 Ia 型超新星的观测 [Riess et al., 1998]，该观测表明现今的宇宙处于加速膨胀阶段。后来通过 CMB 的观测，宇宙大尺度结构的观测，以及宇宙重子振荡，弱引力透镜，伽玛暴等观测都证实了该加速膨胀的存在。导致宇宙加速膨胀的物质组分我们一般称之为暗能量。它有以下几个特点：其一暗能量的（有效）物态是负的，而且至少要小于 $-1/3$ ，这样才有可能导致宇宙的加速膨胀；其二多数观测都表明暗能量的分布没有明显的成团性质，其分布是均匀并且各向同性的。暗能量的物理本质非常令人困惑，目前常用的有以下几种模型：第一种是爱因斯坦引进的宇宙学常数；第二种是标量场模型该模型；第三种是矢量场模型。宇宙学常数模型能够自然地给出了 $\omega \equiv -1$ 的物态，并且与多数宇宙学观测能够很好地符合 [Seljak et al., 2005]。但是从理论方面考虑，该模型存在以下几个问题：首先宇宙学常数的起源是什么？多数人认为它与真空能量有关，但是粒子物理所预言的真空能与观测到的暗能量在量级上相去甚远。因此要得到现在的宇宙学常数，需要对宇宙的初始条件作非常精细的调节，这就是所谓的精细调节问题；其次由于物质的演化行为与宇宙学常数很不一样，但为什么如今的物质密度和宇宙学常数的等效密度在同一个量级？这就是所谓的恰好性问题。在宇宙学常数模型中，这是非常棘手的两个问题。正是由于这些原因，人们更加倾向于暗能量的动力学模型。其中最常用的是标量场模型，如 Quintessence [Wetterich, 1988]，Phantom [Caldwell, 2002]，K-essence [Armendariz-Picon et al., 1999]，以及 Quintom [Hu, 2005] 等。最近暗能量观测数据的丰富积累使得探测暗能量状态方程的演化成为可能。最直接探测暗能量本质的超新星数据倾向于暗能量为状态方程跨越 -1 的动力学模型。这是通常的 Quintessence，Phantom 和 K-essence 都不能实现的 [Vikman, 2005]。而 Quintom 是最简单的实现该限制的动力学唯象模型，

它由一个Quintessence场和一个Phantom场拼凑而成。我们考虑一种比较简单的Quintom 模型 [Zhao&Zhang, 2006a], 考察Quintom模型的一些基本性质: 研究其在 $\omega - \omega'$ 相空间的演化行为; 研究其 ω 跨越-1的可能性; 研究其 ω 的演化与势能函数的关系; 研究从 ω 的参数化模型直接构造势能函数的方法; 研究其扰动的演化行为。矢量场是研究暗能量的另外一种比较常用的模型。和标量场模型相比, 矢量场模型有一些不同的特性。我们着重讨论了我們提出的Yang-Mills 场的暗能量模型 [Zhao&Zhang, 2005a; 2006b; 2006c; Xia,Zhang&Zhao, 2006], 该模型有比较扎实的物理起源和很少的可调参数。我们首先研究该模型的一些基本的性质, 其物态的演化行为, 其实现 ω 跨越-1的可能性等问题。然后我们着重研究了该模型中宇宙的恰好性问题。研究发现, 在该模型中, 宇宙的恰好性问题是存在的, 或者更确切的说: 宇宙的恰好性问题可以归结为宇宙的精细调节问题, 而精细调节问题却涉及到暗能量的物理本质, 这个目前一无所知的问题。最后我们还讨论了Yang-Mills 场和暗物质、辐射物质的可能的耦合, 以及宇宙的演化行为。研究发现在这些模型中, 宇宙的恰好性问题仍然是自动不存在的, 有意思的是 该模型可能架起一座桥梁, 使得大爆炸宇宙模型和稳态宇宙模型自动地统一起来。前者预言了宇宙核合成, 宇宙微波背景辐射等, 而后者则预言了宇宙的加速膨胀, 而这些都被观测所证实。

引力波是爱因斯坦广义相对论的自然预言。在广义相对论提出不久, 爱因斯坦便在弱场近似下求解场方程, 发现了其具有波动解。上世纪五、六十年代, Bondi等人求解了引力波的严格解, 最终从理论上令人信服地证明了引力波的存在 [Bondi, 1957]。从观测上, 引力波存在的证据首先来自于Hulse 等人对脉冲双星轨道周期的观测 [Hulse&Taylor, 1975], 发现观测结果与相对论的预言符合得很好, 因为辐射引力波而使得双星逐渐靠近, 公转周期变短。现在有更多的团组正在利用各种不同的仪器来试图直接观测引力波, 最主要的仪器包括探测球和激光干涉仪两种。引力波研究之所以引人注目, 是因为通过对引力波的研究可能对下几个方面的研究取得突破性的进展: 1、理论物理, 特别是引力理论的研究将取得长足的发展; 2、致密星, 特别是黑洞附近物理的研究将取得突破性的进展; 3、引力波研究也将大大推动早期宇宙, 特别是宇宙光子退耦以前历史的研究。在天体物理中, 引力波的波源主要有以下两类: 孤立的引力波源和背景的残余引力波。前者主要是由致密的天体如中子星、黑洞、白矮星等产生,

这些都是激光干涉仪最主要的探测目标；后者是由极早期宇宙暴涨产生并遗留下来的。我们讨论的重点是后者。目前对它的探测，除了激光干涉仪直接探测以外还有其他的两种方法，一种是利用毫秒脉冲星精确的周期的信号残差来限制引力波；另一种是通过探测CMB的磁场型极化功率谱来探测引力波。在现阶段加速膨胀的宇宙学模型中，暗能量的多少可以直接影响引力波的功率谱，因此原则上我们可以通过观测引力波的功率谱来反过来研究宇宙中的暗能量。在本文中，我们首先分别利用近似解析的，数值的，严格解析的方法研究了在加速膨胀的宇宙中残余引力波的演化行为，并着重讨论了加速膨胀（暗能量）对引力波能谱的影响 [Zhang et al., 2005b; 2005c; 2006]。发现加速膨胀的影响可以归结为一个简单的damping因子。然后我们讨论了其他效应，如暴涨原初谱，红移压低效应，中微子，宇宙相变对引力波功率谱的影响，发现最终的引力波能谱可以写为一个简单的解析表达式 [Zhao&Zhang 2006d]。在该表达式中，各种宇宙学参数如暴涨能标，原初谱指数及其跑动，宇宙暗物质与暗能量的相对密度，宇宙中自由的相对论流体所占比例，以及宇宙的相变参数的影响很明显地表现出来。然后我们综合目前对引力波的各种限制，比较了各种探测方法的优缺点，以及未来各种探测计划的探测能力，并给出了暴涨预言的引力波的上限。

由于CMB的磁场型极化功率谱只能由引力波产生，而不能由密度扰动产生，因此观测CMB的磁场型极化功率谱是探测极低频引力波的最主要的方法之一，而这同时也是CMB研究的主要目标之一。在加速膨胀的宇宙学模型中，暗能量的多少可以直接影响引力波的能谱，从而影响极化功率谱的大小，因此原则上人们可以通过观测CMB的极化功率谱来反过来研究宇宙中的暗能量。我们解析地求解了在加速膨胀的宇宙中，CMB的磁场型极化功率谱 [Zhao&Zhang, 2005b]，其中对于引力波我们分别利用了解析近似的方法，完全数值的方法，WKB的方法来求解，对于可视函数，我们分别利用了高斯近似方法和半高斯近似的方法，对求解Boltzmann方程组，我们精确到了二阶紧耦合近似，最后得到一个关于极化功率谱的解析的积分表达式，它直接依赖于退耦时刻的引力波的演化行为，以及依赖于退耦时刻的物理。我们利用该表达式研究了各种宇宙学过程和宇宙学参数对极化功率谱的影响，特别是宇宙复合过程地影响，宇宙重子，暗能量，原初谱的大小以及谱指数的影响。

第二章

宇宙中的暗能量

本章中我们首先简要介绍一下有关暗能量的背景知识，主要包括其观测基础和模型研究的现状以及模型存在的一些问题。然后我们着重讨论了两类暗能量模型：Quintom 模型和 Yang-Mills 暗能量模型。Quintom 模型是一类比较常用的暗能量模型，它能够自然地产生跨越 -1 的状态方程。在我们的工作中，构造一类比较简单的 Quintom 模型，研究其演化行为，状态方程跨越 -1 的可能性，晚期吸引子解的行为，势能函数的构造，以及其扰动情况。然后详细介绍我们提出的 Yang-Mills 暗能量模型，介绍它的物理动机，基本的演化行为，状态方程跨越 -1 的可能性，对重合性问题的回答，“磁场”的影响，暗能量和物质及辐射的耦合，Yang-Mills 暗能量与标量场模型的区别等问题。

§ 2.1 暗能量

暗能量是近几年来观测宇宙学最重要的发现之一。综合各种观测，包括宇宙微波背景辐射温度各向异性功率谱、宇宙大尺度结构、Ia型超新星、Ly- α forest功率谱等观测数据，人们给出了宇宙学的标准模型：暴涨+ Λ CDM模型。该模型告诉我们：宇宙中的物质部分只占大约 30%，其中重子物质只有约 4%。而大约 70% 的组分是暗能量，它直接推动了现在宇宙的加速膨胀。

§ 2.1.1 Friedmann-Robertson-Walker宇宙

描述宇宙动力学的 Einstein 场方程是高度非线性的方程。但是如果所研究的对象具有内部对称性，则该方程可以被大大简化，从而得到解析解。对于宇宙学研究，基于均匀各向同性的基本假设，宇宙的演化满足 Friedmann-Robertson-Walker (FRW) 度规。该度规可以写为

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (2-1)$$

其中 $a(t)$ 是宇宙的尺度因子， t 是宇宙时间。而坐标 r 、 θ 、 ϕ 是共动坐标。方程 (2-1) 仅仅利用了宇宙的均匀各向同性的假设，并不包含动力学信息。宇宙的膨胀决定于尺度因子的演化，它由宇宙中的物质分布来决定。常数 K 表征宇宙的几何性质， $K = -1$ 表示宇宙空间是开放的， $K = +1$ 表示宇宙空间是闭合的，而 $K = 0$ 表示宇宙是空间平直的。该度规通常可以写为另外一种形式：

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) [d\chi^2 + f_K^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)], \quad (2-2)$$

其中

$$f_K(\chi) = \begin{cases} \sin \chi, & K = +1 \\ \chi, & K = 0 \\ \sinh \chi, & K = -1 \end{cases}. \quad (2-3)$$

宇宙尺度因子和物质密度的演化由 Einstein 场方程来决定。假设宇宙中的物质为理想流体，Einstein 场方程可以简化为 Friedmann 方程组

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{K}{a^2}, \quad (2-4)$$

$$\dot{H} = -4\pi G(p + \rho) + \frac{K}{a^2}, \quad (2-5)$$

其中 H 就是所谓的 Hubble 参数， ρ 和 p 为宇宙中总的物质密度和压强。我们也可以把方程 (2-4) 改写为下面的形式

$$\Omega(t) + \Omega_K = 1, \quad (2-6)$$

其中 $\Omega(t) \equiv \rho(t)/\rho_c(t)$ 是一个无量纲的能量密度参数, $\Omega_K = K/(aH)^2$ 是宇宙曲率的等效能量密度, 而 $\rho_c(t) = 3H^2/8\pi G$ 是宇宙临界密度。很明显物质的密度决定了宇宙的空间几何

$$\Omega > 1 \quad (\rho > \rho_c) \rightarrow K = +1, \quad (2-7)$$

$$\Omega = 1 \quad (\rho = \rho_c) \rightarrow K = 0, \quad (2-8)$$

$$\Omega < 1 \quad (\rho < \rho_c) \rightarrow K = -1. \quad (2-9)$$

由于目前理论预言和实际观测都表明现在宇宙是近似平坦的, 因此除特殊说明, 在我们后面的讨论中都只考虑 $K = 0$ 的情况。方程 (2-4) 和 (2-5) 也可以改写为另外的形式

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0, \quad (2-10)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p). \quad (2-11)$$

其中前者就是能量守恒方程, 而后者描述了宇宙的加速度。从该方程我们可以看出只有当 $\rho + 3p < 0$ 的时候, 宇宙才能是加速膨胀的。

§ 2.1.2 暗能量存在的实验证据

暗能量存在的证据主要有以下这些: (1) 最直接的证据是 1998 年人们对 Ia 型超新星的观测揭示现阶段宇宙在加速膨胀 [Riess et al., 1998], 由 Einstein 场方程可知, 加速膨胀要求 $p < -\rho/3$ 。由于通常的辐射, 重子和冷暗物质的压强都是非负的, 所以当今宇宙必定由一种未知的负压物质所主导, 通常称之为暗能量。(2) 近几年对微波背景辐射涨落的角功率谱第一个峰位置的观测揭示现在的宇宙是非常平坦的 [Bennett et al., 2003], 即宇宙的总密度约等于临界密度, 而宇宙曲率项的等效密度为: $\Omega_k = -0.010^{+0.016}_{-0.009}$ 。然而微波背景及大尺度结构的一系列观测表明在现阶段冷暗物质、重子物质、光子和中微子的密度之和只占到总密度的三分之一左右, 还留下三分之二的空缺, 这也就间接表明了今天的宇宙是由暗能量主导的。WMAP 给出的数据是: 考虑空间平坦的宇宙 WMAP+SNLS 的数据显示: 暗能量的物态方程 $\omega = -0.97^{+0.07}_{-0.09}$ 。如果假设 $\omega = -1$, 即暗能量为宇宙学常数, 那么 $\Omega_\Lambda = 0.72 \pm 0.04$ 。(3) 另一

个独立的研究通过探测微波背景的后期的积分 Sachs-Wolfe 效应也提供了暗能量存在的证据，这方面的观测最近也取得了比较大的进展。另外最近通过对宇宙大尺度结构成团，Gamma暴，弱引力透镜，宇宙年龄，以及宇宙重子振荡的观测也都表明暗能量的存在。总之现在几乎所有的宇宙学数据都与暗能量的存在是自洽的。详细情况可参考最近这方面的综述性文章 [Copeland et al., 2006]。下面我们主要介绍一下超新星的观测结果 [Padmanabhan, 1995; Riess et al., 1998; Copeland et al., 2006]。

对于高红移天体，如果我们知道它的绝对光度，那么可以通过与观测到的视光度的对比来定下它的距离，即光度距离，其定义是

$$d_L = \left(\frac{\mathcal{L}}{4\pi\mathcal{F}} \right)^{1/2}, \quad (2-12)$$

这里 \mathcal{L} 和 \mathcal{F} 就是绝对光度和视光度，它们分别与星体的绝对星等 M 和视星等 m 相对应：

$$\mathcal{F} = 10^{-2m/5} \times 2.52 \times 10^{-5} \text{ erg cm}^{-2} \text{ sec}^{-1}, \quad (2-13)$$

$$\mathcal{L} = 10^{-2M/5} \times 3.02 \times 10^{35} \text{ erg sec}^{-1}. \quad (2-14)$$

因此视星等和光度距离的关系为

$$m(z) = M + 5 \log_{10} \left[\frac{d_L(z)}{1\text{Mpc}} \right] + 25, \quad (2-15)$$

将通常的 Hubble 参数吸收进来定义一个无量纲量：

$$Q(z) \equiv \frac{H_0}{c} d_L(z), \quad (2-16)$$

这样我们得到

$$m(z) = \mathcal{M} + 5 \log_{10} Q(z), \quad (2-17)$$

其中

$$\mathcal{M} = M + 5 \log_{10} \left[\frac{c/H_0}{1\text{Mpc}} \right] + 25 = M - \log_{10} h + 42.38. \quad (2-18)$$

FRW 度规下我们今天观测到的 t_1 时刻发出的光（共动距离为 r_1 ）对应的光度距离为：

$$d_L = \frac{a_0^2}{a(t_1)} r_1, \quad (2-19)$$

对应的与红移的关系为:

$$\frac{d_L(z)}{(1+z)} = \begin{cases} R \sinh \left[\frac{1}{R} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \right], & K = -1 \\ \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}, & K = 0 \\ R \sin \left[\frac{1}{R} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \right], & K = +1 \end{cases}. \quad (2-20)$$

其中 R 是开放或者闭合宇宙中的共动曲率半径, 或者利用 $Q(z)$ 可以将之简单表示为:

$$Q(z) = (1+z) \frac{\sinh [x(z)\sqrt{\Omega_K}]}{\sqrt{\Omega_K}}, \quad (2-21)$$

其中

$$x(z) = \int_0^z \frac{H_0}{H(z')} dz'. \quad (2-22)$$

天文学家们对 Ia 型超新星 (SNIa) 的绝对光度有比较好的了解, 作“标准烛光”利用对 $Q(z)$ 的观测, 这是目前探测暗能量最直接的方法。自从 1998 年两个实验组 HZT (high z Search Team) 和 SCP (Supernovae Cosmology Project) 各自独立发现宇宙加速膨胀以来, SNIa 的数据越来越丰富, 对于限制暗能量的组分甚至其演化做出了非常重要的贡献。图 (2-1) 给出了 157 个“Gold” SNIa 超新星数据点 (Riess 组) 和最近 HST 给出的超新星数据。图 (2-2) 结合 CMB, 大尺度结构和星系团观测给出近期观测数据对 Λ CDM 模型参数的限制以及将来 SNAP (Supernova/Acceleration Probe) 观测的预言结果。

§ 2.1.3 暗能量模型的研究现状

尽管天文观测揭示了暗能量的存在, 但是今天的天文观测依然与状态方程等于 -1 的 Λ CDM 模型比较好的符合。宇宙学所期待的精确观测对于 $\omega = -1$ 的偏离, 今天还没有达到揭示暗能量精细的物理本质的程度, 目前物理学家对于暗能量的物理本质仍然处于一个探讨阶段。下面我们介绍暗能量的几种比较流行的模型, 探讨暗能量模型的研究现状, 以及模型存在的主要问题。

♣ 暗能量的候选者: 真空能

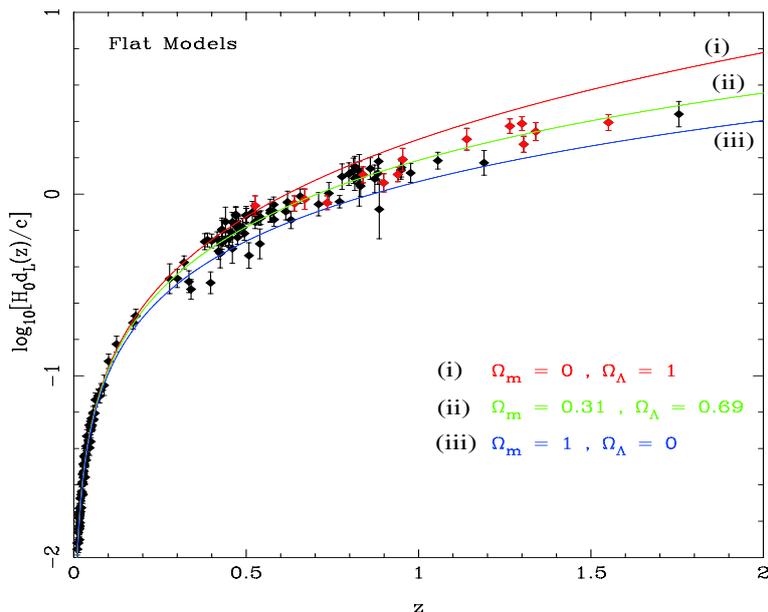


图 2-1: 157个“Gold” Ia 型超新星数据点（黑点）和最近 HST 给出的超新星数据（红点），以及对宇宙模型的拟和 [Copeland et al., 2006].

暗能量最简单的候选者是引入爱因斯坦引入的宇宙学常数 [Copeland et al., 2006]。它的状态方程恒为 -1 ，能量密度是个常数，不随时间变化。该常数最初有 Einstein 引入来构造静态的宇宙学模型，但是现在的观测发现该模型却能够很好的解释现阶段宇宙的加速膨胀。关于该常数的物理本质，一般认为它起源于真空的零点振动能，即所谓的真空能。但是该模型在理论上存在一些难以克服的困难。这一点我们在下面的讨论中会一一提到。

♣ 暗能量的候选者：标量场模型

正如导致宇宙早期加速膨胀的主要候选者为标量场暴涨子一样，暗能量也可能是动力学标量场。当标量场具有正则的动能项的时候，我们称之为“Quintessence”模型 [Copeland et al., 2006]。和引力最小耦合的 Quintessence 场的拉氏量为：

$$\mathcal{L}_\phi = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - V(\phi). \quad (2-23)$$

假设标量场 ϕ 的分布是均匀并且各向同性的，其对应的能量密度和压强分

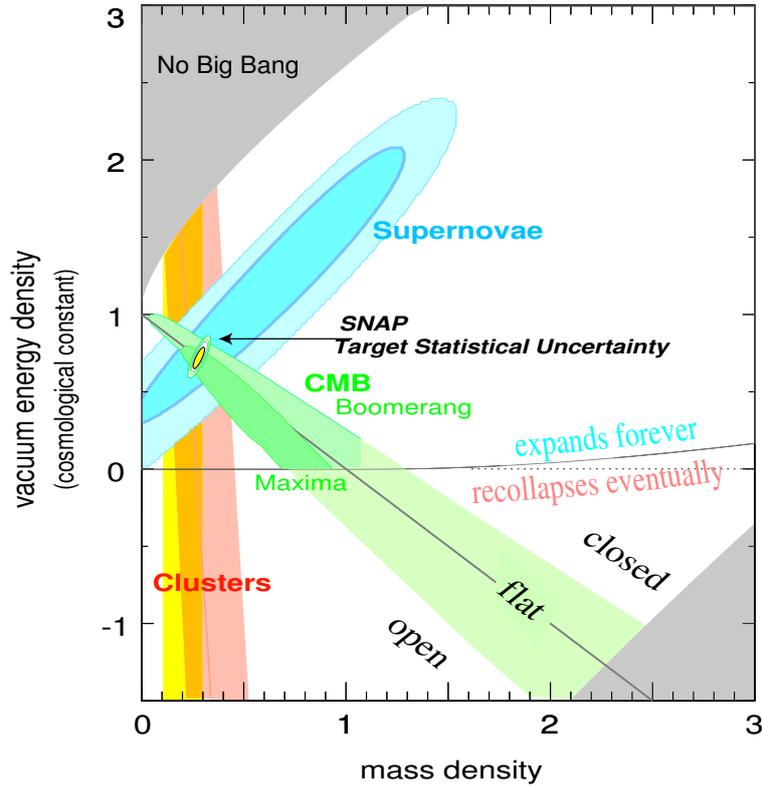


图 2-2: CMB, 大尺度结构和星系成团的观测对 Λ CDM 模型参数的限制以及SNAP的预期结果 [Copeland et al., 2006].

别为:

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (2-24)$$

$$p_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (2-25)$$

对于 $V(\phi) \geq 0$, 因此 Quintessence 的物态方程对应的区间为

$$-1 \leq \omega_\phi \leq 1. \quad (2-26)$$

为了得到小于 -1 的状态方程, 人们通常也考虑具有非正则动能项的“Phantom”模型和“K-essence”模型。这些模型或者可以得到大于 -1 的物态, 或者可以得到小于 -1 的物态, 但是却很难得到状态方程跨

越 -1 的情况。详细的讨论可以参考文献 [Vikman, 2005]。为了使得 ω 能够跨越 -1 ，人们又构造了“Quintom”模型。该模型我们会在后面详细讨论。当然还有一些其他的模型：例如我们后面将要讨论的矢量场模型，Chaplygin gas [Kamenshchik et al., 2001]，修改引力的 Cardassian Expansion 模型 [Free&Lewis, 2002]等等。这些模型都有其成功之处，但是仍然存在一些问题，比较详细的讨论可以参考最近的综述性文献 [Copeland et al., 2006]。对于大多数暗能量模型，存在两个主要的问题，即精细调节问题和恰好性问题。下面我们以宇宙学常数模型为例，介绍一下这两个问题。

§ 2.1.4 暗能量模型存在的主要问题

这一小节中我们以真空能模型为例来介绍一下大多数暗能量模型都存在的两个主要问题：精细调节问题，恰好性问题 [Steinhardt, 1997]。

♣ 精细调节问题

这个问题可以有更为通俗的描述：宇宙学常数为什么这么小？（对于动力学场模型，我们可以问类似的问题：暗能量的能量密度为什么这么小？）。在量子场论中，真空的能动张量在形式上与宇宙学常数完全一样：

$$(T_{\mu\nu})_{\text{vac}} = \rho_{\text{vac}} g_{\mu\nu}, \quad (2-27)$$

其中 ρ_{vac} 代表真空的能量密度。由 Einstein 方程可知，从观测角度真空能和“裸”的宇宙学常数 Λ 是分不开的，通常我们引入等效的真空能密度

$$\rho_{\text{eff}} = \rho_{\text{vac}} + \Lambda/8\pi G. \quad (2-28)$$

观测发现

$$\rho_{\text{eff}} \sim 2.8 \times 10^{-47} \text{GeV}^4. \quad (2-29)$$

然而量子场论预言的真空能量密度 ρ_{vac} 在数值上要远远大于观测到的 ρ_{eff} 。我们以一种质量为 m 的自由标量场的基态能量密度来对 ρ_{vac} 做个简单估算，把场作傅立叶展开，将对应的每一频率的谐振子的基态能相加，可以得到

$$\rho_{\text{vac}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^M \frac{1}{2} \sqrt{k^2 + m^2} 4\pi k^2 dk \simeq \frac{M^4}{16\pi^2}, \quad (2-30)$$

其中 M 为物理的截断能标。由于量子场论预言的截断能标一般远远高于 100 MeV ，这样 ρ_{vac} 和 ρ_{eff} 将至少相差几十个量级，也就是说如果导致今天加速膨胀的是真空能，观测将要求 ρ_{vac} 和 $\Lambda/8\pi G$ 在几十个量级上完全相消，才能给出今天如此小的观测值，这就是人们通常所说的精细调节问题。我们后面将会看到这个问题在大多数 Quintessence 模型和我们的 Yang-Mills 模型中都存在。

♣ 恰好性问题

宇宙学常数为什么恰好是这么大？观测给出今天的真空能量密度和物质密度处于同一个量级，即 $\rho_{\text{m}} \sim \rho_{\text{eff}}$ 。但是物质与宇宙学常数有截然不同的演化行为： $\omega_{\Lambda} = -1$ ， $\omega_{\text{m}} = 0$ 。由 $\rho \propto a^{-3(1+\omega)}$ ，暴涨以后宇宙尺度因子膨胀了几十个量级，为什么恰恰在今天达到了 $\rho_{\text{m}} \sim \rho_{\text{eff}}$ ？为了得到这个结果，就必须要求在宇宙早期对 ρ_{eff} 和 ρ_{m} 做非常精细的调节。这就是所谓的恰好性问题。但是应该指出这个问题在很多动力学模型中都可以得到很好的回答。例如在 Quintessence 模型中，如果取势能函数为 $V = V_0 \phi^{-\alpha}$ ，那么该模型在宇宙演化中具有追踪行为，可以很好的避免恰好性问题。在我们的 Yang-Mills 场模型中，恰好性也是自动避免的。关于宇宙恰好性问题，我们将在后面的章节作详细的讨论。

§ 2.2 Quintom 模型

§ 2.2.1 简介

目前研究暗能量最主要的方法还是通过各种观测来确定暗能量的状态方程及其演化行为，虽然多数观测都显示宇宙学常数模型能够很好地与观测相符，但是还有很多观测呈现一些出乎意料的迹象：有微弱的观测证据表明，暗能量的物态方程可能是演化的，并且这种演化是跨越 -1 的，即在宇宙早期暗能量的物态是大于 -1 ，而现在却是小于 -1 ，并且在演化中曾经跨越 -1 [Corasaniti et al., 2004]。这种现象对暗能量模型提出了严峻的挑战。

如前所述，虽然目前已经有很多暗能量模型已经被提出和研究过了，例如最常用的宇宙学常数模型，Quintessence, Phantom 和最普遍的 K-

essence模型，这些模型虽然可以使得暗能量的物态大于或者小于 -1 ，但是却无法得到一个模型，使得其物态能够跨越 -1 [Vikman, 2005]。因此在很多工作中，作者提出了一些更为复杂的模型来解决这个问题 [Torres, 2002]，这也是目前暗能量研究的一个热点问题之一。

我们知道Quintessence能够给出 $-1 \leq \omega \leq 1$ 的物态，而Phantom能够给出 $\omega \leq -1$ 的物态，因此最简单的能够模型是构造一个模型，该模型是由一个Quintessence场 ϕ_1 和一个Phantom场 ϕ_2 来共同充当暗能量。而该暗能量，我们通常称之为“Quintom”暗能量，或者称为“精灵场”暗能量模型。[Feng et al., 2005; Hu, 2005]。下面我们来研究这种模型的一些基本性质。考虑作用量

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{\mathcal{R}}{16\pi G} + \mathcal{L}_{de} + \mathcal{L}_m \right), \quad (2-31)$$

其中 g 是度规 $g_{\mu\nu}$ 的迹， \mathcal{R} 是Ricci标量， \mathcal{L}_{de} 和 \mathcal{L}_m 分别是暗能量和物质的 lagrangian 密度函数。Quintom场的 lagrangian 密度可以写为

$$\mathcal{L}_{de} = \mathcal{L}_Q = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_1)^2 - \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_2)^2 - V(\phi_1, \phi_2), \quad (2-32)$$

其中 ϕ_1 和 ϕ_2 是两个标量场，分别代表Quintessence和Phantom场。考虑空间平坦的 FRW 宇宙，并且假设 ϕ_1 和 ϕ_2 的分布是均匀的，我们可以得到Quintom的压强和能量密度

$$p_Q = \frac{1}{2}\dot{\phi}_1^2 - \frac{1}{2}\dot{\phi}_2^2 - V(\phi_1, \phi_2), \quad (2-33)$$

$$\rho_Q = \frac{1}{2}\dot{\phi}_1^2 - \frac{1}{2}\dot{\phi}_2^2 + V(\phi_1, \phi_2), \quad (2-34)$$

其相应的状态方程为

$$\omega_Q \equiv \frac{p_Q}{\rho_Q} = \frac{\dot{\phi}_1^2 - \dot{\phi}_2^2 - 2V(\phi_1, \phi_2)}{\dot{\phi}_1^2 - \dot{\phi}_2^2 + 2V(\phi_1, \phi_2)}. \quad (2-35)$$

明显可以看出：当 $\dot{\phi}_1^2 > \dot{\phi}_2^2$ 时， $\omega_Q > -1$ ；而 $\dot{\phi}_1^2 < \dot{\phi}_2^2$ 满足时， $\omega_Q < -1$ 。因此Quintom是一类简单的唯象模型，它的构造完全是为了得到一个能够跨越 -1 的状态方程。但是由于其势能函数的多样性，使得研究该模型的一些普遍性质变得困难起来。因此人们通常研究一些比较特殊的模型。例如很多作者已经研究过一类Quintom模型，其势能函数中 ϕ_1 和

ϕ_2 没有明显的耦合 [Guo et al., 2005a]。研究表明，这一类模型确实可以实现 ω 跨越 -1 。但同时发现其晚期的吸引子解总是 phantom-like 或者 Λ -like 的，因此有可能导致宇宙的“大撕裂”。其原因也很容易理解：因为两个标量场没有耦合，我们知道在宇宙膨胀过程中，Quintessence 的能量密度总是随着宇宙膨胀而减小的（因为其物态满足 $\omega \geq -1$ ），而 Phantom 的能量密度却是增大的，（因为其物态满足 $\omega \leq -1$ ），因此最终 Phantom 总会起主导作用，并有可能导致未来宇宙的“大撕裂”。

在本章中，我们着重研究另外一类特殊的 Quintom 模型，其势能函数具有下面的形式

$$V(\phi_1, \phi_2) = V(\phi_1^2 - \phi_2^2). \quad (2-36)$$

很明显在该模型中， ϕ_1 和 ϕ_2 是有耦合的，比较前面没有耦合的模型，这类模型因为其相对简单的势能形式而比较容易研究。并且在文献 [Aref'eva et al., 2005] 中，作者发现这类模型可能是 D3-brane 宇宙的局域有效近似。很容易发现该模型等价于一类非正则的复标量场模型 $\Phi = \phi_1 + i\phi_2$ ，其 lagrangian 密度具有形式

$$\mathcal{L}_{de} = \frac{1}{4} [(\partial_\mu \Phi)^2 + (\partial_\mu \Phi^*)^2] - V(\Phi^2 + \Phi^{*2}), \quad (2-37)$$

这种最早在文献 [Wei, Cai & Zeng, 2005] 中被提出。在这里我们主要关心这一类 Quintom 模型的一些普遍的性质：模型分类，在 $\omega - \omega'$ 相空间中的演化，晚期吸引子解的行为，势能函数的构造方法以及扰动演化行为等。

§ 2.2.2 Hessian 和 Phantom 模型

我们考虑的 Quintom 场，其拉氏密度为

$$\mathcal{L}_Q = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_1)^2 - \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_2)^2 - V(\phi_1^2 - \phi_2^2). \quad (2-38)$$

很容易发现，该拉氏量在下面的变换下是不变的

$$\phi_1 \rightarrow \phi_1 \cosh(i\alpha) - \phi_2 \sinh(i\alpha), \quad (2-39)$$

$$\phi_2 \rightarrow -\phi_1 \sinh(i\alpha) + \phi_2 \cosh(i\alpha), \quad (2-40)$$

其中 α 是常数。因此我们可以把拉氏量 (2-38) 写成另外一种形式

$$\mathcal{L}_Q = \mathcal{L}_{he} = \frac{1}{2} [(\partial_\mu \phi)^2 - \phi^2 (\partial_\mu \theta)^2] - V(\phi), \quad (2-41)$$

这里我们用到了两个新的变量 (ϕ, θ) ，其定义为

$$\phi^2 = \phi_1^2 - \phi_2^2, \quad \coth \theta = \phi_1/\phi_2. \quad (2-42)$$

我们称这一类模型为“*Hessence*” [Wei,Cai&Zeng, 2005]。需要注意的是这种形式的定义对模型附加了一个额外的要求，即 $\phi_1^2 > \phi_2^2$ 。当 $\phi_1^2 < \phi_2^2$ 时，我们可以将拉氏量（2-38）写成另外一种形式

$$\mathcal{L}_Q = \mathcal{L}_{ha} = \frac{1}{2} [-(\partial_\mu \phi)^2 + \phi^2(\partial_\mu \theta)^2] - V(\phi), \quad (2-43)$$

这里变量 (ϕ, θ) 的定义为

$$\phi^2 = -\phi_1^2 + \phi_2^2, \quad \coth \theta = \phi_2/\phi_1. \quad (2-44)$$

我们称这一类模型为“*Hantom*”。在后面的讨论中我们将会发现Hessence和Hantom模型具有不同的性质，特别是他们的晚期吸引子解。

♣ Hessence模型

我们从作用量出发

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{\mathcal{R}}{16\pi G} + \mathcal{L}_{he} + \mathcal{L}_m \right), \quad (2-45)$$

其中Hessence场的作用量在方程（2-41）中。在空间平直的FRW宇宙中，假设 ϕ 和 θ 都是均匀的，因此从作用量我们可以得到演化方程

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \phi\dot{\theta}^2 + dV/d\phi = 0, \quad (2-46)$$

$$\phi^2\ddot{\theta} + (2\phi\dot{\phi} + 3H\phi^2)\dot{\theta} = 0, \quad (2-47)$$

其中上点表示对宇宙时求导。Hessence的压强和能量密度分别为

$$p_{he} = \frac{1}{2} (\dot{\phi}^2 - \phi^2\dot{\theta}^2) - V(\phi), \quad \rho_{he} = \frac{1}{2} (\dot{\phi}^2 - \phi^2\dot{\theta}^2) + V(\phi). \quad (2-48)$$

由方程（2-47）可以得到

$$Q = a^3\phi^2\dot{\theta} = \text{const}, \quad (2-49)$$

如果把Hessence看作一种非正则的复标量场，那么 Q 就对应于某种守恒荷 [Wei,Cai&Zeng, 2005]。因此我们可以用 Q 来替代 $\dot{\theta}$ ，带入方程 (2-46)，可以将运动方程改写为

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{Q^2}{a^6\phi^3} + \frac{dV}{d\phi} = 0, \quad (2-50)$$

该方程等价于Hessence的能量守恒方程 $\dot{\rho}_{he} + 3H(\rho_{he} + p_{he}) = 0$ 。而Hessence的压强、能量密度和状态方程也可以改写为

$$p_{he} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{Q^2}{2a^6\phi^2} - V(\phi), \quad \rho_{he} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{Q^2}{2a^6\phi^2} + V(\phi), \quad (2-51)$$

$$\omega_{he} = \left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{Q^2}{2a^6\phi^2} - V(\phi) \right] / \left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{Q^2}{2a^6\phi^2} + V(\phi) \right]. \quad (2-52)$$

明显可以看出当 $\dot{\phi}^2 \geq Q^2/(a^6\phi^2)$ 时， $\omega_{he} \geq -1$ ；而 $\dot{\phi}^2 \leq Q^2/(a^6\phi^2)$ 时， $\omega_{he} \leq -1$ 。而过渡点发生在 $\dot{\phi}^2 = Q^2/(a^6\phi^2)$ 的时候。当 $Q = 0$ 的时候，Hessence转化成普通的Quintessence模型，因此我们可以把Quintessence看作Hessence的一种特殊情况。如果定义有效势

$$V_{\text{eff}} \equiv V - \frac{Q^2}{2a^6\phi^2}, \quad (2-53)$$

则运动方程 (2-50) 变成

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + dV_{\text{eff}}/d\phi = 0. \quad (2-54)$$

这正好是具有势能 $V(\phi) \equiv V_{\text{eff}}(\phi)$ 的Quintessence场的Klein-Gordon方程。因此在演化过程中，场 ϕ 将趋向于滚向势能 V_{eff} 的最低点，但这并不意味着它也将滚向势能 V 的最低点。这是Hessence和普通的Quintessence模型最大的区别。那么场 ϕ 具体将怎样演化，以及其状态方程有什么关系？这是我们后面将讨论的主要问题之一。

♣ Hantom模型

现在我们讨论另一种情况 $\phi_1^2 < \phi_2^2$ 。其作用量为

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{\mathcal{R}}{16\pi G} + \mathcal{L}_{ha} + \mathcal{L}_m \right). \quad (2-55)$$

由此可以得到场的演化方程

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{Q^2}{a^6\phi^3} - \frac{dV}{d\phi} = 0, \quad (2-56)$$

其中 $Q = a^3\phi^2\dot{\theta}$ ，对应于守恒荷。Hantom的压强、能量密度和状态方程分别为

$$p_{ha} = -\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{Q^2}{2a^6\phi^2} - V(\phi), \quad \rho_{ha} = -\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{Q^2}{2a^6\phi^2} + V(\phi),$$

$$\omega_{ha} = \left[-\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{Q^2}{2a^6\phi^2} - V(\phi) \right] / \left[-\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{Q^2}{2a^6\phi^2} + V(\phi) \right]. \quad (2-57)$$

容易发现：当 $\dot{\phi}^2 \leq Q^2/(a^6\phi^2)$ 时， $\omega_{ha} \geq -1$ ；而 $\dot{\phi}^2 \geq Q^2/(a^6\phi^2)$ 时， $\omega_{ha} \leq -1$ ，正好和Hessence模型相反。当 $Q = 0$ 的时候，Hantom回到了普通的Phantom模型。可以定义有效势能

$$V_{\text{eff}} \equiv V + \frac{Q^2}{2a^6\phi^2}, \quad (2-58)$$

运动方程变成了

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - dV_{\text{eff}}/d\phi = 0. \quad (2-59)$$

这是普通的Phantom场的Klein-Gordon方程。因此场 ϕ 趋向于滚向有效势能 V_{eff} 的极大值，但并不意味着 ϕ 将滚向真实势能 V 的极大值，同样地，我们在后面将着重讨论场 ϕ 的演化行为。以及它与状态方程及其演化行为的关系。

在这里有两点需要说明：首先当场演化到 $\phi_1^2 = \phi_2^2$ 的时候，我们必须回到拉氏量 (2-38)，而不能用Hessence和Hantom模型来研究。因此在后面的讨论中我们将尽量避免这种情况。其次，容易发现如果将Hantom模型中的 ϕ 用 $i\phi$ 来代替，则Hantom模型就变成了Hessence模型。因此如果将场 ϕ 的允许值扩展到复数域，仅仅Hessence模型就可以描述所有的Quintom，只要其势能函数具有形式 $V(\phi_1^2 - \phi_2^2)$ 。

§ 2.2.3 状态方程的演化

目前最主要的研究暗能量的方法还是来自于对其状态方程 ω 及其演化行为 ω' ($\omega \equiv d\omega/d\ln a$) 的观测。对于最简单的宇宙学常数模型，其在

$\omega - \omega'$ 相空间是一个固定点, $\omega = -1, \omega' = 0$ 。一般的动力学暗能量模型对应于相空间的一条演化曲线。一些作者研究发现简单的标量场模型只能处于相空间的一些很窄的区域 [Caldwell&Linder, 2005; Chiba, 2006]。例如 $\omega \geq -1$ 的Quintessence模型, 必须满足 $\omega' > -3(1 - \omega)(1 + \omega)$ 。如果该Quintessence具有跟踪行为, 在相空间的允许区域将减小为 $\omega' > -(1 - \omega)(1 + \omega)$ 。如果要能够从物理上要区分不同类型的Quintessence, 必须要求对暗能量的演化有非常精确的观测, $\sigma(\omega') \sim 2(1 + \omega) \leq 0.1$ 。而 $\omega \leq -1$ 的Phantom场, 一般都满足条件 $\omega' < -3(1 - \omega)(1 + \omega)$, 并且当该Phantom具有跟踪行为, 该限制条件变成 $\omega' < 3\omega(1 - \omega)(1 + \omega)$ 。对于具有跟踪行为的K-essence模型, 在相空间中, 必须满足条件 $\omega' > \frac{3\omega}{1-2\omega}(1 - \omega)(1 + \omega)$ 。

为了证实Quintom模型, 必须观测到 ω 跨越 -1 的现象, 因此对 ω 动力学的观测, 尤其是对高红移 ω 的观测是非常重要的。SNAP计划预计可以工作3年以上, 每年可以观测到2000个左右的Ia型超新星, 其红移范围为 $z \in [0.2, 1.2]$ [SNAP, 2005]。结合SNIa和弱引力透镜的方法, 预计可以限制现在的暗能量物态 ω_0 到5%的精度, 而对 ω' 的限制预计可以达到0.11的水平。这将大大提高我们区分各种暗能量模型的能力。在这里我们将相空间的分析推广到Quintom模型。首先我们考虑**Hessence**, 其运动方程为

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{Q^2}{a^6\phi^3} + \frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (2-60)$$

考虑 $\omega \neq -1$ 的情况, 我们定义函数

$$x \equiv \left| \frac{1 + \omega}{1 - \omega} \right| = \left| \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{Q^2}{2a^6\phi^2}}{V} \right|. \quad (2-61)$$

由运动方程 (2-60) 可以得到

$$1 + \frac{1}{6} \frac{d \ln x}{d \ln a} = -\frac{1}{3HV} \frac{\dot{V}}{V}. \quad (2-62)$$

这里我们固定了现在的宇宙尺度因子 $a_0 = 1$ 。当 $Q \equiv 0$ 时, Hessence回到通常的Quintessence场, 由公式 (2-62) 可以得到 [Caldwell&Linder, 2005]

$$\mp \frac{V'}{V} = \sqrt{\frac{3\kappa^2(1 + \omega)}{\Omega_\phi}} \left(1 + \frac{1}{6} \frac{d \ln x}{d \ln a} \right), \quad (2-63)$$

其中 $\kappa^2 = 8\pi G$, Ω_ϕ 是Quintessence场的能量密度, $V' \equiv dV/d\phi$ 。这里的负号对应于 $\dot{\phi} > 0$ ($V' < 0$), 而正号对应于 $\dot{\phi} < 0$ ($V' > 0$)的情况。由此可以得到对 ω' 的限制,

$$\omega' > -3(1 - \omega)(1 + \omega), \quad (2-64)$$

这个限制适用于任何的Quintessence模型, 只要其场 ϕ 在势能函数上运动是单调的。

这里我们回到普遍的Hessence模型 ($Q \neq 0$)。定义一个函数 $c_a^2 \equiv \dot{p}/\dot{\rho}$ 。需要指出的是如果研究对象是理想流体, 那么该函数就表示该流体的绝热声速。但是对膨胀宇宙中的标量场模型, 该函数并不代表声速, 其物理意义我们在后面的讨论中会提到。对于Hessence场, 该函数可以写为

$$c_a^2 = \frac{2\dot{V}}{3H(1 + \omega)\rho} + 1, \quad (2-65)$$

这里 ρ 和 ω 分别表示Hessence的能量密度和状态方程。当Hessence回到Quintessence模型时, 由于 ($\dot{V} < 0$) 和 $\omega > -1$ 总是满足的, 因此必然有 $c_a^2 < 1$ 。对于Phantom模型, 由于 ($\dot{V} > 0$) 和 $\omega < -1$, 因此 $c_a^2 < 1$ 也是满足的。但是对于Hessence模型, $c_a^2 > 1$ 是有可以存在的, 只要条件 $\dot{V}(1 + \omega) > 1$ 成立。需要指出的是, 这里的 c_a^2 并不是真正的物理速度, 因此 $c_a^2 > 1$ 并不和相对论原理矛盾。明显可以看出这里 c_a^2 表征Hessence势能函数的演化行为: 如果Hessence的状态方程满足 $\omega > -1$, 即Quintessence-like行为, 那么 $c_a^2 > 1$ ($c_a^2 < 1$) 表示 $\dot{V} > 0$ ($\dot{V} < 0$), 场 ϕ 正在爬上(滚下)其势能; 如果Hessence的状态方程满足 $\omega < -1$, 即Phantom-like行为, 那么 $c_a^2 > 1$ ($c_a^2 < 1$) 表示 $\dot{V} < 0$ ($\dot{V} > 0$), 场 ϕ 正在滚下(爬上)其势能。将该函数代入方程 (2-62), 可以得到

$$1 + \frac{1}{6} \frac{d \ln x}{d \ln a} = \frac{1 - c_a^2}{2V} \rho, \quad (2-66)$$

该方程可以改写为

$$\left(1 + \frac{1}{6} \frac{d \ln x}{d \ln a}\right) / (1 - c_a^2) = \frac{\rho}{2V} > 0. \quad (2-67)$$

利用关系

$$\frac{d \ln x}{d \ln a} = \frac{2\omega'}{(1 + \omega)(1 - \omega)}, \quad (2-68)$$

方程 (2-67) 可以得出

$$\frac{\omega'}{(1+\omega)(1-\omega)(1-c_a^2)} > \frac{-3}{(1-c_a^2)}. \quad (2-69)$$

根据这个性质, 可以将相空间分成四个部分:

- I:** $c_a^2 < 1$ & $\omega > -1$, $\omega' > -3(1-\omega)(1+\omega)$;
- II:** $c_a^2 > 1$ & $\omega < -1$, $\omega' > -3(1-\omega)(1+\omega)$;
- III:** $c_a^2 < 1$ & $\omega < -1$, $\omega' < -3(1-\omega)(1+\omega)$;
- IV:** $c_a^2 > 1$ & $\omega > -1$, $\omega' < -3(1-\omega)(1+\omega)$.

这可以在图 (2-3) 中清晰地看到。从方程 (2-65) 可以发现, 在区域 **I** 和区域 **II**, $\dot{V} < 0$ 是满足的, 场 ϕ 滚下其势能; 而在区域 **III** 和 **IV**, $\dot{V} > 0$ 是满足的, 场 ϕ 爬上其势能。因此我们只要考察函数 $\omega' + 3(1-\omega)(1+\omega)$ 的值是正的或者负的, 就可以知道场的演化情况。当 $Q = 0$ 时, Hessece 回到普通的 Quintessence, $c_a^2 < 1$ 和 $\omega > -1$ 是满足的, 因此只有区域 **I** 时允许的, 即限制条件 $\omega' > -3(1-\omega)(1+\omega)$ 是成立的, 这和方程 (2-64) 的结论是一致的。但是对于普遍的 Hessece 模型, 这四个区域都是允许存在的。

现在我们考察一个现象: 在相空间中, Hessece 场的状态方程 ω 时如何跨越 -1 的? 假设初始时刻 Hessece 处于区域 **I**, 那么有两种可能的方法跨越 -1 : 一种是越过临界点 $(\omega, \omega') = (-1, 0)$, 而到达区域 **II** 或者 **III**。但是容易证明跨越临界点需要无穷长的时间, 因此不可能在有限时间内完成; 另一种方法是跨越图中的虚线而到达区域 **II**, 这是唯一可行的方法。方程 (2-65) 可以改写为

$$c_a^2 = \omega - \frac{\omega'}{3(1+\omega)}. \quad (2-70)$$

从中可以发现: 当 $\omega = -1$ 和 $\omega' \neq 0$ 满足时, 函数 c_a^2 是发散的。但是从后面的讨论中我们将会看到, 这个发散不会导致任何物理上的发散。

最后我们讨论 Hessece 模型晚期吸引子解。吸引子解如果存在的话, 有三种可能: 其一是 Phantom-like 解, 即 $\omega < -1$ 。对于吸引子解 $\omega' = 0$ 总是成立的, 因此该解只能存在于区域 **III**; 其二是 Quintessence-like 解, 同样的原因, 该解只能在区域 **I**; 其三是 Λ -like 解, 在这种情况下, Hessece 场将滚向临界点 $(\omega, \omega') = (-1, 0)$ 。但是第一种情况时很难达到的, 从压强和能量密度的表达式可以看出, 只有 $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 < \frac{Q^2}{2a^6\phi^2}$ 成立时, phantom-like 的吸引子才存在。对于该解, 如果 $|\dot{\phi}| > 0$ 成立, 函数

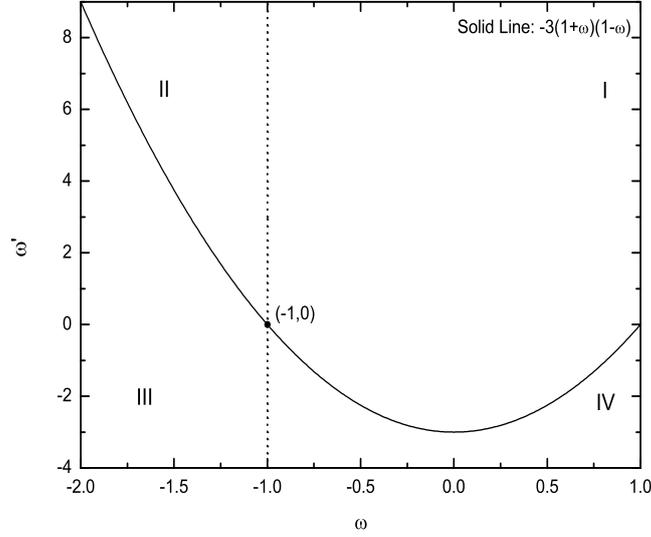


图 2-3: Hesse模型的 $\omega - \omega'$ 相空间被分成了四个部分 [Zhao&Zhang, 2006a]。

$\frac{Q^2}{2a^6\dot{\phi}^2}$ 的值将快速衰减，最终将不可避免地达到 $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 < \frac{Q^2}{2a^6\phi^2}$ ，这时该解变成了 phantom-like 行为；另一方面，如果 $|\dot{\phi}| < 0$ ，那么将不可避免地出现 $|\phi| = 0$ ，这是Hesse的定义所不允许的。因此对于Hesse模型，宇宙的“大撕裂”是自动避免的。

现在我们用类似的方法讨论 **Hantom** 模型。Hantom的压强、能量密度和状态方程分别是

$$p = -\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{Q^2}{2a^6\phi^2} - V, \quad \rho = -\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{Q^2}{2a^6\phi^2} + V, \quad (2-71)$$

$$\omega = \left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{Q^2}{2a^6\phi^2} + V \right] / \left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{Q^2}{2a^6\phi^2} - V \right]. \quad (2-72)$$

场的运动方程为

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{Q^2}{a^6\phi^3} - \frac{dV}{d\phi} = 0, \quad (2-73)$$

由此可以得到

$$\frac{\omega'}{(1+\omega)(1-\omega)(1-c_a^2)} > \frac{-3}{1-c_a^2}, \quad (2-74)$$

其中 c_a^2 的定义仍然是 $c_a^2 \equiv \dot{p}/\dot{\rho}$, 因此(2-65)仍然是成立的。因此Hantom的 $\omega - \omega'$ 相空间可以被分为同样的四个部分, 如图(2-3)所示。容易看出, 在区域 I 和区域 II, $\dot{V} > 0$ 是成立的, 场 ϕ 爬上其势能函数; 而在区域 III 和区域 IV, 场 ϕ 滚下其势能函数。当 $Q = 0$ 时, Hantom回到通常的Phantom场, 只有区域 III 是允许的, 即限制条件 $\omega' < -3(1-\omega)(1+\omega)$ 总是满足的。和前面类似的讨论可以发现, Hantom的晚期吸引子解只可能是phantom-like (区域 III) 或者 Λ -like (临界点), 而前者会导致宇宙未来的“大撕裂”, 这是我们应该尽量避免的。因此后面的讨论中, 如果不作特殊说明, 我们将只讨论Hessence模型。

§ 2.2.4 两类特殊的Hessence模型

下面我们讨论两类特殊的Hessence模型: 一类模型具有指数形式的势能函数

$$V(\phi) = V_0 e^{-\lambda\kappa\phi}, \quad (2-75)$$

其中 λ 是一个无量纲的常数; 另一类具有幂函数势能

$$V(\phi) = V_0(\kappa\phi)^n, \quad (2-76)$$

其中 n 是无量纲的正的常数。这两种形式的模型是人们最常用的、讨论最多的模型 [Wei,Cai&Zeng, 2005]。这里对这两种模型, 我们数值求解其运动方程, 研究其在 $\omega - \omega'$ 相空间的演化行为, 从而验证我们前面的一些结论。我们主要讨论四个模型:

Model a1: $\dot{\phi}_0 > 0$, $V(\phi) = V_0 e^{-\lambda\kappa\phi}$ with $\lambda = 1.0$, $Q^2/(\rho_t\phi_0^2) = 5$, $\omega_0 = -1.4$;

Model a2: $\dot{\phi}_0 < 0$, $V(\phi) = V_0 e^{-\lambda\kappa\phi}$ with $\lambda = 1.0$, $Q^2/(\rho_t\phi_0^2) = 0.5$, $\omega_0 = -0.7$;

Model b1: $\dot{\phi}_0 > 0$, $V(\phi) = V_0(\kappa\phi)^n$ with $n = 2$, $Q^2/(\rho_t\phi_0^2) = 5$, $\omega_0 = -1.4$;

Model b2: $\dot{\phi}_0 < 0$, $V(\phi) = V_0(\kappa\phi)^n$ with $n = 2$, $Q^2/(\rho_t\phi_0^2) = 0.5$, $\omega_0 =$

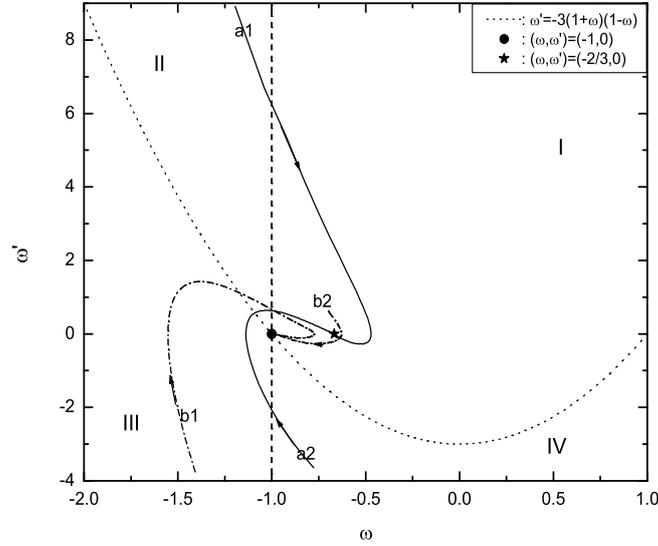


图 2-4: Hesse模型在相空间的演化, 其中箭头表征了随时间演化的方向 [Zhao&Zhang, 2006a]。

-0.7,

其中 ϕ_0 是场 ϕ 在现在时刻的值, ρ_t 是现在宇宙中总的能量密度, 而 ω_0 是Hesse场现在的状态方程。对于这四个模型, 我们都取初始条件 $\Omega_{he0} = 0.7$, $\Omega_{m0} = 0.3$ 。对于Models *a1*和*b1*, 其现在的状态方程是 Quintessence-like, 而Models *a2*和*b2*是 Phantom-like。Hesse场的状态方程为

$$\omega = \left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{Q^2}{2a^6\phi^2} - V(\phi) \right] / \left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{Q^2}{2a^6\phi^2} + V(\phi) \right]. \quad (2-77)$$

图 (2-4) 画出了模型在 $\omega - \omega'$ 中的演化行为。容易发现: 除了Model *b2*, 其余所有的模型都有 ω 跨越-1的现象, 因此都存在 c_a^2 的发散现象。Models *a1*和*a2*朝相同的吸引子解 $(\omega, \omega') = (-2/3, 0)$ 演化, 该吸引子解是一个Quintessence-like解; 而Models *b1*和*b2*朝相同的吸引子解 $(\omega, \omega') = (-1, 0)$ 演化, 该吸引子解是一个 Λ -like 解。

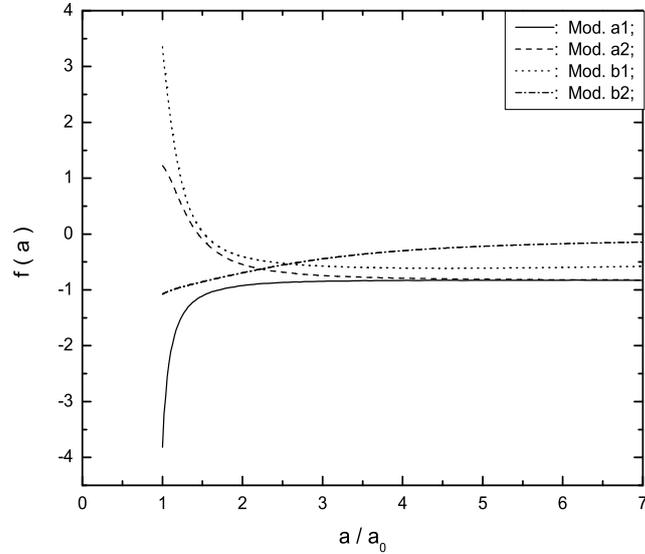


图 2-5: 四种Hessence模型中 \dot{V} 的演化行为。其中无量纲的函数 $f(a)$ 的定义为 $f \equiv \frac{\dot{V}}{H\rho}$ [Zhao&Zhang, 2006a]。

在相空间中, Models $a1$ 和 $b2$ 始终处于区域 **I** 和 **II**, 因此 $\dot{V} < 0$ 总是满足的; 而Models $b1$ 和 $a2$ 在演化过程中, 却是从 $\omega' < -3(1+\omega)(1-\omega)$ 满足的区域演化到 $\omega' > -3(1+\omega)(1-\omega)$ 满足的区域, 因此Hessence场在势能函数上的演化行为是: 先爬上去再滚下来。这些可以从图 (2-5) 中清晰地看到, 那里我们画出了函数 $f \equiv \dot{V}/H\rho$ 随尺度因子的演化行为。

§ 2.2.5 Hessence势能函数的重建

通常在暗能量的观测中, 可观测的状态方程是红移 z 的函数, 并且 $\omega(z)$ 的函数形式还依赖于具体的参数化模型。那么, 如何从能直接观测的 $\omega(z)$ 来反过来研究暗能量的暗能量模型呢? 这就涉及到暗能量的模型重建问题。对于Quintessence, K-essence等等模型, 已经有很多作者对其作了比较详细的研究 [Guo et al., 2005b]。这里我们将这种方法推广到Hessence模

型中去，来研究Hessence暗能量的重建问题。

考虑 FRW 宇宙中，起主导作用的是非相对论性物质和Hessence暗能量。Friedmann方程为

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3} (\rho_m + \rho_{he}) , \quad (2-78)$$

其中 ρ_m 和 ρ_{he} 分别是物质和Hessence的能量密度。从Hessence压强、能量密度和状态方程的表达式，可以得到关系

$$V(\phi) = \frac{1}{2} (1 - \omega_{he}) \rho_{he} , \quad (2-79)$$

$$\dot{\phi}^2 = \frac{Q^2}{a^6 \phi^2} + (1 + \omega_{he}) \rho_{he} . \quad (2-80)$$

这两个方程将 V 和 ϕ 与密度函数 ρ_{he} 联系起来。因此下面主要的任务是如何从参数化的状态方程来求解函数 $\rho_{he}(z)$? Hessence的能量守恒方程为

$$\dot{\rho}_{he} + 3H(\rho_{he} + p_{he}) = 0 , \quad (2-81)$$

由此可以得到

$$\rho_{he}(z) = \rho_{he0} \exp \left[3 \int_0^z (1 + \omega_{he}) d \ln(1 + z) \right] \equiv \rho_{he0} E(z) , \quad (2-82)$$

其中下标“0”为相应的物理量对应今天 ($z = 0$) 的值。考虑到 $\rho_m = \rho_{m0}(1 + z)^3$ ，利用方程 (2-78)，(2-79)，(2-80)，(2-82)，我们可以得到方程组

$$V[\phi(z)] = \frac{1}{2} (1 - \omega_{he}) \rho_{he0} E(z) . \quad (2-83)$$

$$\frac{d\phi}{dz} = \mp \frac{\left[\frac{Q^2}{a^6 \phi^2} + (1 + \omega_{he}) \rho_{he} \right]^{1/2}}{(1 + z)H(z)} . \quad (2-84)$$

这里负（正）号对应于 $\dot{\phi} > 0$ ($\dot{\phi} < 0$)，我们选择正号，以避免出现 $\phi = 0$ 的情况。为了方便起见，我们可以定义三个无量纲的量 $\tilde{\phi}$, \tilde{V} 和 C ,

$$\tilde{\phi} \equiv \kappa \phi , \quad \tilde{V} \equiv V / \rho_{he0} , \quad C \equiv \kappa^2 Q^2 / \rho_{he0} . \quad (2-85)$$

因此方程 (2-79) 和 (2-80) 可以改写成形式

$$\frac{d\tilde{\phi}}{dz} = \frac{\sqrt{3}}{(1+z)} \left[\frac{C(1+z)^6 \tilde{\phi}^{-2} + (1+\omega_{he})E(z)}{r_0(1+z)^3 + E(z)} \right]^{1/2}, \quad (2-86)$$

$$\tilde{V}[\phi] = \frac{1}{2}(1-\omega_{he})E(z), \quad (2-87)$$

其中 $r_0 \equiv \Omega_{m0}/\Omega_{he0}$ 。这两个方程将参数化的 $\omega_{he}(z)$ 与Hessence模型直接联系起来。对于给定的 $\omega_{he}(z)$ ，我们可以从中建立起Hessence的理论模型。需要指出的是，由于Quintessence是Hessence的一种特殊情况，因此，这里的结论可以直接应用到Quintessence模型。这里我们考虑五种常用的参数化模型：

Model *a* [Hannestad&Morstell, 2002]: $\omega_{he} = \omega_0$ 。这时函数 $E(z)$ 的形式非常简单，

$$E(z) = (1+z)^{3(1+\omega_0)}; \quad (2-88)$$

Model *b* [Cooray&Huterer, 1999]: $\omega_{he} = \omega_0 + \omega_1 z$ ，对应于

$$E(z) = (1+z)^{3(1+\omega_0-\omega_1)} e^{3\omega_1 z}, \quad (2-89)$$

Model *c* [Chevallier&Polarski, 2001]: $\omega_{he} = \omega_0 + \omega_1 \frac{z}{1+z}$ ，对应于

$$E(z) = (1+z)^{3(1+\omega_0+\omega_1)} e^{-3\omega_1 \frac{z}{1+z}}, \quad (2-90)$$

Model *d* [Gerke&Efstathiou, 2002]: $\omega_{he} = \omega_0 + \omega_1 \ln(1+z)$ ，对应于

$$E(z) = (1+z)^{3(1+\omega_0) + \frac{3}{2}\omega_1 \ln(1+z)}. \quad (2-91)$$

对这些模型，我们选择初始条件 $\omega_0 = -1.2$ ， $\omega_1 = 0.5$ 。最后考虑一种振荡的状态方程：

Model *e* [Dodelson et al., 2000; Huterer&Cooray, 2005; Free et al., 1990]: $\omega_{he} = \omega_0 + \omega_1 \sin(\frac{1+z_c}{1+z})$ 。选择初始条件 $\omega_0 = -0.7$ ， $\omega_1 = 0.5$ ， $z_c = 10$ 。

图 (2-6) 中画出了这五种参数化模型，可以发现除Model *a* 以外，其余四个模型都存在 ω_{he} 跨越 -1 的现象。将这些模型代入方程 (2-86) 和 (2-87)，可以求得Hessence场和势能函数 $V(\phi)$ 随红移的演化，见图 (2-7) 和 (2-8)。容易看出这些模型在低红移时非常类似，但是在高红移时有非常明显的差别。尤其是Model *e*，其势能函数具有振荡行为。在图

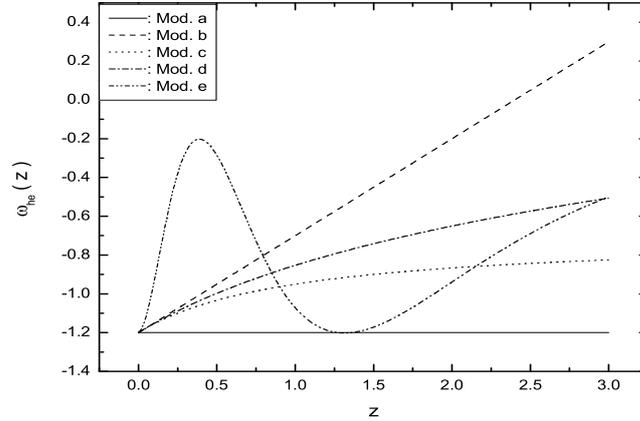


图 2-6: 五种参数化模型 [Zhao&Zhang, 2006a]。

(2-9) 中，我们画出了五种模型在相空间中的演化，发现第一个模型在相空间是一个区域 **III** 中的一个孤立的点，因此其势能函数一定是一个单调函数，见图 (2-10)，并且Hessence场 ϕ 一定是爬上其势能函数，见图 (2-8)。而后面四个模型都曾跨越临界线 $\omega' = -3(1 + \omega)(1 - \omega)$ 。因此势能函数都不可能是单调的。例如Model *b*，高红移时，处于临界线以上，因此场 ϕ 是滚下其势能函数；而低红移时，处于临界线以下，因此场 ϕ 是爬上其势能函数。这和Quintessence, K-essence模型都有很大的区别。对于Model *e*，其势能函数也是一个振荡函数，并且振荡的振幅也是随Hessence变化的，而不是一个简单的正余弦函数。

§ 2.2.6 Quintom的扰动

如果暗能量是一种流体或者动力学场，就有必要讨论它的扰动行为。对于很多暗能量模型，例如Quintessence, Phantom, K-essence等，已经有不少工作对其进行了比较细致的研究。有一些模型预言了太大的暗能量扰动或者度规扰动。例如 Generalized Chaplygin Gas (GCG) 模型预言了振荡或者指数增长的物质功率谱 [Sandvik et al., 2004]，这和观测是不相符

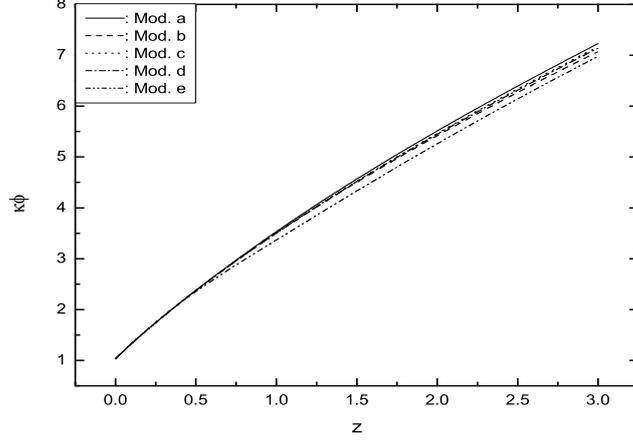


图 2-7: 五种模型中场 ϕ 随红移的演化 [Zhao&Zhang, 2006a]。

的；而矢量场模型也会使得宇宙度规的扰动在近期指数增长 [Zhao&Zhang, 2005a]；对于一些允许状态方程跨越 -1 的模型，暗能量的扰动有可能会出出现发散现象 [Zhao et al., 2005]。那么我们这里讨论的模型有没有扰动发散现象呢？我们下面主要针对这个现象进行研究。

在共形牛顿规范下，有标量扰动的度规可以写为

$$ds^2 = a^2(\tau) [(1 + 2\Phi)d\tau^2 - (1 - 2\Psi)dx^i dx_i] , \quad (2-92)$$

这里我们引进了共形时间 τ ，其定义为 $dt \equiv a d\tau$ 。规范不变得度规扰动 Ψ 称为牛顿势，而 Φ 对应于固有空间曲率的扰动。通常考虑的宇宙中的背景物质都没有各向异性的压力（anisotropic stress），这时 $\Psi = \Phi$ 。因此度规（2-92）中的扰动部分只有一个分量 Φ 。利用通常的记号 [Ma&Bertschinger, 1995]，暗能量（包括Quintom暗能量）的扰动满足方程

$$\delta'_{de} = -(1 + \omega_{de})(\theta_{de} - 3\Phi') - 3\mathcal{H}(c_s^2 - \omega_{de})\delta_{de} , \quad (2-93)$$

$$\theta'_{de} = -\mathcal{H}(1 - 3\omega_{de})\theta_{de} + 3\mathcal{H}(c_a^2 - \omega_{de})\theta_{de} + k^2 \left(\frac{c_s^2}{1 + \omega_{de}} \delta_{de} + \Phi \right) , \quad (2-94)$$

其中 $\mathcal{H} \equiv a'/a$ ，上撇表示 $d/d\tau$ 。 c_s 是暗能量的声速，其定义为 $c_s^2 \equiv \delta p_{de}/\delta \rho_{de}$ ，因此不能大于光速。 $\delta_{de} \equiv \delta \rho_{de}/\rho_{de}$ 代表暗能量的扰动，而 θ_{de} 代

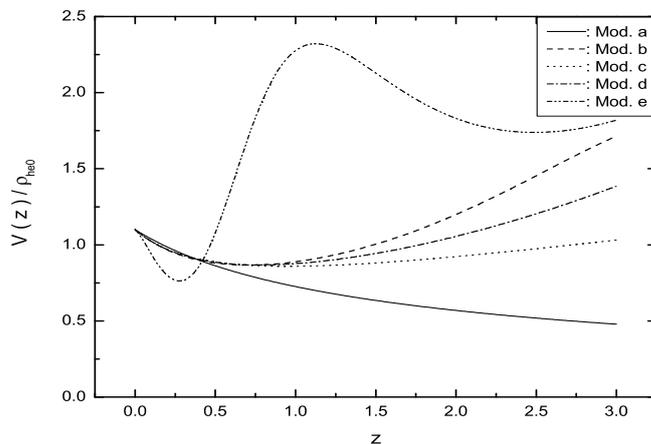


图 2-8: 五种模型中势能 $V(\phi)$ 随红移的演化 [Zhao&Zhang, 2006a]。

表示了暗能量速度的散度，并不是一个直接的物理可测量。从方程容易发现当 $c_a^2 \rightarrow \infty$ 的时候，对应于 $\omega_{de} = -1$ 并且 $\omega'_{de} \neq 0$ ， θ'_{de} 是发散的。但是这种发散并不会导致 δ_{de} 的发散。为了看清这一点，我们定义函数

$$\vartheta_{de} \equiv (1 + \omega_{de})\theta_{de} , \quad (2-95)$$

因此方程 (2-93) 和 (2-94) 变成了

$$\delta'_{de} = -\vartheta_{de} + 3\Phi'(1 + \omega_{de}) - 3\mathcal{H}(c_s^2 - \omega_{de})\delta_{de} , \quad (2-96)$$

$$\vartheta'_{de} = -\mathcal{H}(1 - 3\omega_{de})\vartheta_{de} + k^2 c_s^2 \delta_{de} + k^2(1 + \omega_{de})\Phi . \quad (2-97)$$

我们发现 $\omega_{de} = -1$ 时候的发散消失了。对于Hessence模型，我们有

$$\delta\rho_{he} = \dot{\phi}(\delta\dot{\phi}) + \frac{Q^2\delta\phi}{a^6\phi^3} + \frac{dV}{d\phi}\delta\phi - \Phi\dot{\phi}^2 , \quad (2-98)$$

$$\delta p_{he} = \dot{\phi}(\delta\dot{\phi}) + \frac{Q^2\delta\phi}{a^6\phi^3} - \frac{dV}{d\phi}\delta\phi - \Phi\dot{\phi}^2 . \quad (2-99)$$

考虑标量场的扰动 $\delta\phi$ 和 $(\delta\dot{\phi})$ 可以忽略的情况，暗能量的声速 $c_s^2 \simeq 1$ ，因此方程 (2-96) 和 (2-97) 简化为

$$\delta'_{he} = -\vartheta_{he} + 3\Phi'(1 + \omega_{he}) - 3\mathcal{H}(1 - \omega_{he})\delta_{he} , \quad (2-100)$$

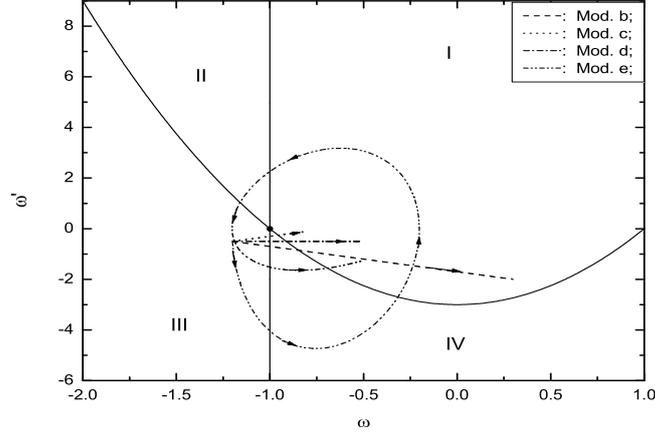


图 2-9: 五种模型在相空间中的演化 [Zhao&Zhang, 2006a]。

$$\vartheta'_{he} = -\mathcal{H}(1 - 3\omega_{he})\vartheta_{he} + k^2\delta_{he} + k^2(1 + \omega_{he})\Phi. \quad (2-101)$$

通常情况下，该扰动方程组可以通过数值求解，它依赖于宇宙中的物质构成，以及具体的暗能量模型。为了对扰动有个更为完整的研究，宇宙度规扰动 Φ 的演化也应该考虑，它满足演化方程 [Zhao et al., 2005; Peebles&Ratra, 1988]

$$\begin{aligned} \Phi'' + 3\mathcal{H}\left(1 + \frac{p'_t}{\rho'_t}\right)\Phi' + \frac{p'_t}{\rho'_t}k^2\Phi + \left[\left(1 + 3\frac{p'_t}{\rho'_t}\right)\mathcal{H}^2 + 2\mathcal{H}'\right]\Phi \\ = 4\pi G a^2 \left(\delta p_t - \frac{p'_t}{\rho'_t}\delta\rho_t\right). \end{aligned} \quad (2-102)$$

其中压强 $p_t \equiv \sum_i p_i$ ，而能量密度 $\rho_t \equiv \sum_i \rho_i$ ，它们应该包含宇宙中所有成分的贡献，包括：重子，光子，暗物质以及暗能量，特别是在宇宙晚期，暗能量的影响是非常重要的。通过方程 (2-100)，(2-101) 和 (2-102)，针对具体的Hessence模型，可以数值求解 Φ 的演化行为。这里对这方面我们不作详细的讨论，只是需要指出只要 p'_t/ρ'_t 函数的值是有限的， Φ 就不会发散，因此 $c_a^2 \equiv p'_{de}/\rho'_{de}$ 发散， Φ 也不会出现发散现

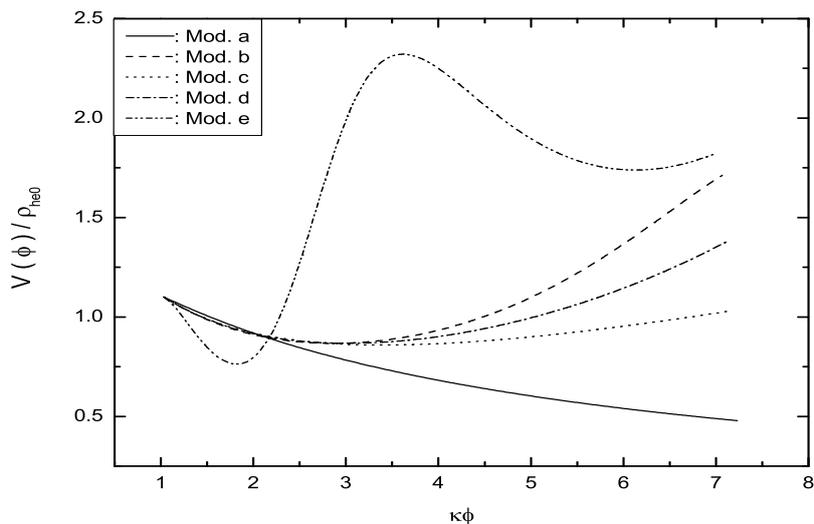


图 2-10: 五种参数化模型对应的势能函数 [Zhao&Zhang, 2006a]。

象。对于Hantom模型，不难证明上面的讨论仍然成立，只需要做如下替换 $\delta_{he} \rightarrow \delta_{ha}$, $\vartheta_{he} \rightarrow \vartheta_{ha}$, $\omega_{he} \rightarrow \omega_{ha}$ 。

我们知道度规扰动 Φ 和 Ψ 直接和CMB的温度各向异性功率谱相联系，具体是通过 integral-Sachs-Wolfe (ISW) 效应 [Sachs&Wolfe, 1967]，

$$C_l^{ISW} \propto \int \frac{dk}{k} \left[\int_0^{\chi_{LSS}} d\chi (\Phi' + \Psi') j_l(k\chi) \right]^2, \quad (2-103)$$

其中 χ_{LSS} 宇宙最后散射面上的共形距离， j_l 是 l 阶的球Bessel函数。ISW效应简单说就是当光子经过随时间变化的引力势井的时候能够获得能量。该功率谱可以数值求解 [Seljak&Zaldarriaga, 1996; Lewis et al., 2000]，并能够直接与观测比较 [Bennett et al., 2003]，从而对暗能量作出限制。这也是目前探测暗能量最重要的方法之一。

§ 2.3 Yang-Mills 场暗能量模型

§ 2.3.1 Yang-Mills 场暗能量模型的基本性质

我们前面讨论过的标量场暗能量模型面临着两个重要的问题：其

一、普通的Quintessence模型不能实现小于 -1 的物态。虽然Phantom和K-essence模型可以实现，但是这两类模型在理论上都存在一些其他更严峻的困难 [Armendariz-Picon et al., 1999; Bonvic et al., 2006]。其二、目前标量场模型的物理本质不是很清楚。在粒子物理中，标量场描述的Higgs粒子至今仍然没有发现。因此有必要考虑暗能量的其他的一些可能的理论模型。我们提出Yang-Mills (YM) 场模型正是其中之一，这个模型最早是被Zhang 引入宇宙学研究 [Zhang, 1994]。该模型认为宇宙中的暗能量可以用一种均匀并且各向同性的YM场来描述。和普通的标量场模型相比，该模型有以下两个优点：首先，YM模型能够很容易实现大于或者小于 -1 的物态，而不需要引入其他比较奇怪的场；而且从物理上来说，YM场是传播相互作用的媒介场，这对于任何一种场论模型都是不可缺少的。而且我们将要讨论的YM场的拉氏量是从基本理论出发，考虑了单圈修正以后得到的，模型几乎没有可以随意调节的参数，因此减少了模型构造的随意性。

我们所考虑的YM场，其有效的拉氏量密度为 [Pagel&Tomboulis, 1978; Adler, 1981]

$$\mathcal{L}_{eff} = \frac{1}{2}bF \left(\ln \left| \frac{F}{\kappa^2} \right| - 1 \right), \quad (2-104)$$

这里Callan-Symanzik系数 $b = (11N - N_f)/24\pi^2$ ，其中 N 表示SU(N)规范场，而 N_f 表示夸克的味数目。当费米子的贡献可以忽略时，对SU(2)规范场有 $b = 2 \cdot 11/24\pi^2$ 。 κ 是重整化能标，具有质量平方的量纲，这是唯一的一个可调参数，它的值必须由观测来确定。 $F = -(1/2)F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} = E^2 - B^2$ 代表了YM凝聚的序参数。这里我们有必要对该拉氏量的来源作一简单说明。经典的YM场具有拉氏密度

$$\mathcal{L} = -\frac{F}{2g_0^2},$$

其中 g_0 是一个固定的耦合常数。我们知道如果考虑到单圈图的量子修正，该耦合常数将被一个跑动的耦合参数 g 所取代，即

$$g_0^2 \rightarrow g^2 = \frac{4}{11N} \frac{12\pi^2}{\ln \left(\frac{k^2}{k_0^2} \right)}.$$

我们可以构造有效理论，其中我们可以用场强 F 来代替动量转移 (momentum transfer) k ，即

$$\ln \left(\frac{k^2}{k_0^2} \right) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{F}{e\kappa^2} \right|,$$

这样我们就得到了有效拉氏量密度 (2-104)。我们将有效 YM 凝聚引入宇宙学，其物理动机来源于 SU(3) YM 凝聚给出了强子中夸克凝聚的一个唯象描述，并且在还保持了一些很好的物理特性，例如洛伦茨不变性，规范对称性，以及正确的 trace anomaly [Pagel&Tomboulis, 1978]。夸克在强子中在实验上表现存在一个袋常数 B ，它等效于一个能量密度 B 和一个负压强 $-B$ ，因此夸克感觉到一个真空的能量-动量张量 $T_{\mu\nu} = B \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ 。这种非平凡的真空可能是由 YM 凝聚或者强子间可能的相互作用造成的。我们的想法是：认为强子中的真空态是由 YM 凝聚造成的，如果类似的 YM 凝聚也充满宇宙空间会有什么宇宙后果呢？这正是我们的 YM 凝聚的暗能量模型。该模型势能函数的行为非常类似于 Coleman-Weinberg 标量势 [Coleman&Weinberg, 1973] 和 Parker-Raval 有效引力的拉氏量 [Parker&Raval, 1999]。

可以直接将该模型推广到 FRW 度规中，考虑与引力最小耦合的 YM 场的作用量为

$$S = \int \sqrt{-\tilde{g}} \left[-\frac{R}{16\pi G} + \mathcal{L}_{eff} \right] d^4x, \quad (2-105)$$

这里 $\tilde{g} \equiv -\text{Det } g_{\mu\nu}$ 。通过作用量对度规 $g^{\mu\nu}$ 的变分可以得到 Einstein 场方程 $G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$ ，其中 YM 场的能量-动量张量为

$$T_{\mu\nu} = \sum_a \frac{g_{\mu\nu}}{4g^2} F_{\sigma\delta}^a F^{a\sigma\delta} + \epsilon F_{\mu\sigma}^a F_{\nu}^{a\sigma}. \quad (2-106)$$

这里的介电常数的定义为 $\epsilon \equiv 2\partial\mathcal{L}_{eff}/\partial F$ ，在单圈修正下有

$$\epsilon = b \ln \left| \frac{F}{\kappa^2} \right|. \quad (2-107)$$

需要指出的是，这里的能量-动量张量是由三部分组成，即 $T_{\mu\nu} = \sum_a {}^{(a)}T_{\mu\nu}$ 。而每一部分都不可能是各向同性的，这是矢量场模型的一个基本特征。如果这导致总的暗能量也是各向异性的，则可能导致宇宙的各向异性膨胀，这与观测到的均匀各向同性的 CMB 是矛盾的 [Bunn et al., 1996]。但是这里我们可以假设规范场只是时间的函数，并且 $A_\mu = \frac{i}{2}\sigma_a A_\mu^a(t)$ (σ_a 是 Pauli 矩阵)，因此可以得到 $A_0 = 0$ ， $A_i^a = \delta_i^a A(t)$ 。按照通常的定义

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad (2-108)$$

其中 f^{abc} 是规范场的结构常数，对于 $SU(2)$ 规范场，有 $f^{abc} = \epsilon^{abc}$ 。规范场的场强可以用电场和磁场来表示

$$F_{\nu}^{a\mu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ -E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2-109)$$

从这里容易看出 $E_1^2 = E_2^2 = E_3^2$, $B_1^2 = B_2^2 = B_3^2$ 。因此 $F = E^2 - B^2$ ，其中 $E^2 = \sum_{i=1}^3 E_i^2$ 和 $B^2 = \sum_{i=1}^3 B_i^2$ 。在这种情况下，能动张量的每一个分量分别为

$${}^{(a)}T_{\mu}^0 = \frac{1}{6g^2}(B^2 - E^2)\delta_{\mu}^0 + \frac{\epsilon}{3}E^2\delta_{\mu}^0, \quad (2-110)$$

$${}^{(a)}T_j^i = \frac{1}{6g^2}(B^2 - E^2)\delta_j^i + \frac{\epsilon}{3}E^2\delta_j^i\delta_j^a - \frac{\epsilon}{3}B^2\delta_j^i(1 - \delta_j^a). \quad (2-111)$$

虽然单个分量仍然是各向异性的，其 $j = a$ 方向上的值与其他方向明显不同。但是总的能动张量 $T_{\mu\nu} = \sum_{a=1}^3 {}^{(a)}T_{\mu\nu}$ 却是各向同性的。其相应的能量密度和压强分别为（这里我们考虑一种简单情况，假设磁场为零或很小，只有电场起主导作用），

$$\rho = \frac{E^2}{2}(\epsilon + b), \quad p = \frac{E^2}{2}\left(\frac{\epsilon}{3} - b\right), \quad (2-112)$$

而状态方程为

$$\omega = \frac{\epsilon - 3b}{3\epsilon + 3b}. \quad (2-113)$$

明显可以发现：在临界状态 $\epsilon = 0$ ，物态 ω 是严格等于 -1 的，宇宙是严格的 de Sitter 膨胀。在该临界态附近，如果 $\epsilon < 0$ ，则 $\omega < -1$ ；而 $\epsilon > 0$ 将导致 $\omega > -1$ 。因此在我们的模型中物态 $-1 < \omega < 0$ 和 $\omega < -1$ 都可以自然地实现，取决于介电常数的大小。

为了研究暗能量的演化行为，我们来求解 YM 场方程，它和能量守恒方程是等价的 [Zhao&Zhang, 2005a]。通过作用量 S 对 A_{μ}^a 的变分，可以得到有效 YM 场方程：

$$\partial_{\mu}(a^4\epsilon F^{a\mu\nu}) + f^{abc}A_{\mu}^b(a^4\epsilon F^{c\mu\nu}) = 0. \quad (2-114)$$

由于我们已经假设了暗能量是均匀并且各向同性的，因此从 $F_{\mu\nu}^a$ 可以知道 $\nu = 0$ 的YM 场方程是个恒等式，而其 $i = 1, 2, 3$ 分量为

$$\partial_\tau(a^2\epsilon E) = 0. \quad (2-115)$$

需要指出的是这个方程在磁场存在的情况下也是成立。如果 $\epsilon = 0$ ，该方程变成了一个恒等式；而 $\epsilon \neq 0$ 时，可以得到

$$\beta e^{\beta/2} \propto a^{-2}. \quad (2-116)$$

这里 $\beta \equiv \epsilon/b$ 。该方程直接决定了 β 的演化，而 β 直接决定了状态方程 ω 。因此综合方程 (2-113) 和 (2-116)，就可以求解YM 暗能量的演化。在图 (2-11) 中我们画出了暗能量的状态方程随时间的演化行为，其中 Model 1，我们选择了初始条件 $\omega_0 = -1.2$ (Phantom-like)，而 Model 2 为 $\omega_0 = -0.8$ (Quintessence-like)。随着宇宙的膨胀，他们都趋于同一个吸引解 $\omega = -1$ 。因此在该模型中，宇宙的“大撕裂”是自然避免的，即使初始条件选为小于 -1 ，这是该模型最重要的特征之一。

在该模型中，方程 (2-116) 唯一的一个未确定参数可以等价于另一个参数，即初始条件 ω_0 ，它的值必须由观测来定。这里我们只简单显示一下不同的 ω_0 对 CMB 功率谱的影响。这里的暗能量仍然是通过 ISW 效应来影响 CMB 的各向异性功率谱。这个效应主要在大尺度上比较明显。利用前面讨论过的公式 (2-102) 和 (2-103) 我们可以数值求解功率谱 C_l 。在图 (2-12) 中我们画出了不同模型对大尺度 CMB 功率谱的影响，其中我们选择的宇宙学参数为： $h = 0.72$ ， $\Omega_b h^2 = 0.024$ ， $\Omega_{dm} h^2 = 0.14$ ，再电离光深 $\tau = 0.17$ ，原初谱指数 $n_s = 0.99$ 并且不考虑其跑动，原初涨落的振幅 $A = 0.9$ ，这里我们没有考虑暗能量自身的扰动。从图中，我们发现对于不同的模型，CMB 的功率谱是非常不同的。和 Λ CDM 模型相比，Model 1 预言了比较大的功率谱，而 Model 2 预言了比较小的功率谱，特别是在 $l < 10$ 的极大尺度上。因此原则上可以通过观测值来确定参数 ω_0 的值。但是我们从图中发现，目前 WMAP 的观测在大尺度上还比较粗糙。因此直接由该方法确定 ω_0 的值还有一定的困难。预期下一代 Planck 的观测结果将大大改进观测精度。另外通过其他的方法，例如 Ia 型超新星，也可以限制 ω_0 的值。在这里我们对此不作详细讨论了。

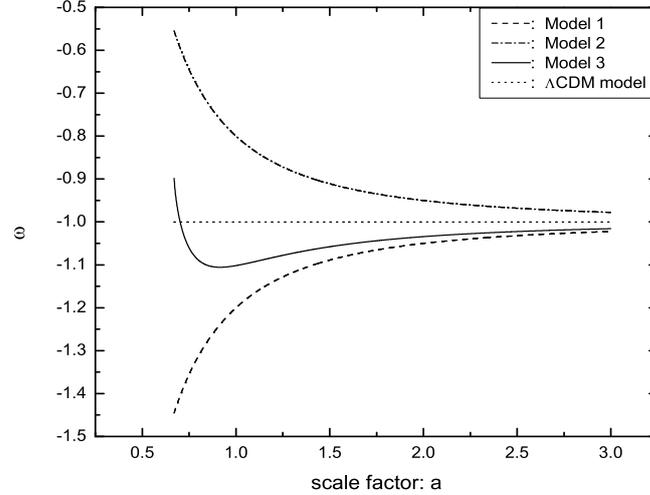


图 2-11: 暗能量的状态方程随尺度因子的演化。这里 Model 1 表示初始条件为 $\omega_0 = -1.2$ 单场模型；Model 2 表示初始条件为 $\omega_0 = -0.8$ 单场模型；Model 3 表示双场模型，其初始条件为 $\kappa_1^2 = 1.5\kappa_2^2$, $\beta_1 = -0.4$, $\beta_2 = 0.2$ ，现在的尺度因子设定位 $a_0 = 1$ [Zhao&Zhang, 2006b]。

§ 2.3.2 Yang-Mills 暗能量模型的物态跨越 -1 的可能性

这一小节里，我们集中讨论一个问题：既然 YM 场模型既能实现 $\omega > -1$ ，又能实现 $\omega < -1$ ，那么有没有可能使 YM 暗能量模型的物态跨越 -1 呢？

我们首先回到 ω 的演化行为。从图（2-11）中我们可以发现，无论我们取什么样的初始条件，单个的 YM 场都不可能实现 ω 跨越 -1 。为了更清楚地研究这个问题，我们假设在某一时刻，暗能量的状态方程满足 $|\omega + 1| \ll 1$ ，它等价于 $|\beta| \ll 1$ ，因此方程（2-116）变成了：

$$\beta \propto a^{-2}. \quad (2-117)$$

该方程表示：随着宇宙的膨胀 β 的值将无限趋近于 0，但却不可能跨越 0。这意味着场强 E 将趋近于临界状态 $E^2 = \kappa^2$ 。而 YM 场的状态方程为

$$\omega + 1 \simeq \frac{4\beta}{3} \propto a^{-2}. \quad (2-118)$$

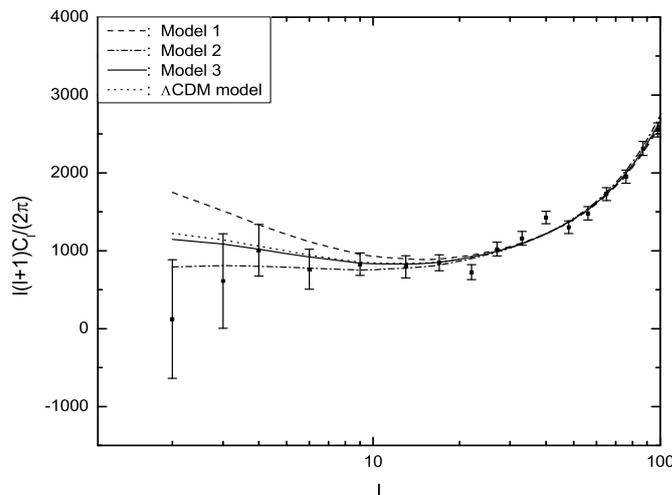


图 2-12: 在不同的YM暗能量模型中的 CMB 各向异性功率谱。这里 Model 1 表示初始条件为 $\omega_0 = -1.2$ 单场模型；Model 2 表示初始条件为 $\omega_0 = -0.8$ 单场模型；Model 3 表示双场模型，其初始条件为 $\kappa_1^2 = 1.5\kappa_2^2$, $\beta_1 = -0.4$, $\beta_2 = 0.2$ 。图中的孤立点来自于WMAP第一年的观测。我们用了CMBFAST 程序 [Zhao&Zhang, 2006b]。

由此可以发现两个重要的性质：其一，随着宇宙的膨胀， ω 将无限趋近于临界状态 $\omega = -1$ ，即暗能量无限趋近于宇宙学常数，这是该模型最重要的特征。其二， $\omega > -1$ 和 $\omega < -1$ 的物态都有可能存在，但是 ω 却不可能跨越 -1 ，这一点和标量场模型是类似的。

那么人们不禁要问这样一个问题：其他形式的拉氏量的 YM 场模型是否可能出现物态跨越 -1 呢？这里我们讨论一种比较普遍的拉氏量形式：

$$\mathcal{L}_{eff} = G(F)F/2, \quad (2-119)$$

其中 $G(F)$ 是跑动的耦合常数，它可以是场强 F 的任意函数。如果取 $G(F) = b \ln \left| \frac{F}{e\kappa^2} \right|$ ，那么就回到我们前面的形式 (2-104)。这里介电常数的定义为 $\epsilon = 2\partial\mathcal{L}_{eff}/\partial F$ ，其函数形式为

$$\epsilon = G + FG_F. \quad (2-120)$$

这里 G_F 表示 dG/dF 。我们考虑均匀并且各向同性的电场模型，与前面类似的讨论，可以得到能量密度和压强的表达式

$$\rho = E^2 \left(\epsilon - \frac{G}{2} \right), \quad (2-121)$$

$$p = -E^2 \left(\frac{\epsilon}{3} - \frac{G}{2} \right) \quad (2-122)$$

条件 $\rho > 0$ 要求 $G > -2FG_F$ 必须是满足的。因此 YM 场的状态方程为

$$\omega = -\frac{3-2\gamma}{3-6\gamma}, \quad (2-123)$$

这里我们定义了 $\gamma = \epsilon/G$ 。当 $\gamma = 0$ ，并且 $E^2 \neq 0$ ， $G(F) \neq 0$ （后面将会看到这些条件都是很容易满足的）的时候，可以得到临界状态 $\omega = -1$ 。在临界点附近如果 $\gamma > 0$ ，必然有 $\omega < -1$ ；相反 $\gamma < 0$ ，必然有 $\omega > -1$ 。如果考虑一种最简单的模型 $G = \text{constant}$ ，这就是经典模型的拉氏量，我们有 $\gamma \equiv 1$ ，可以得到 $\omega \equiv 1/3$ 。这正是普通辐射的状态方程。很明显，这时不可能出现负的物态。

为了研究状态方程的演化，我们仍然需要讨论 YM 场方程

$$\partial_\mu (a^4 \epsilon F^{a\mu\nu}) + f^{abc} A_\mu^b (a^4 \epsilon F^{c\mu\nu}) = 0. \quad (2-124)$$

从场强 $F_{\mu\nu}^a$ 的定义，可以将其简化为一个简单的方程：

$$\partial_\tau (a^2 \epsilon E) = 0 \quad (2-125)$$

这里 $E^2 = \sum_{i=1}^3 E_i^2$ 。如果 $\epsilon = 0$ ，该方程就变成一个恒等式了，由方程（2-123）可以发现此时 $\omega = -1$ ，它和宇宙学常数是难以区分的。当 $\epsilon \neq 0$ ，该方程可以写为

$$a^2 \epsilon E = \text{constant}. \quad (2-126)$$

我们仍然考虑临界点附近的行为。设初始条件为 $\omega \sim -1$ 。从 p 和 ρ 的表达式可以得到 $\epsilon \sim 0$ ，而 E 和 $G(F)$ 都近似保持常数，并且 $\rho \sim -G(F)E^2/2$ 非常类似于宇宙学常数。因此从 YM 场方程可以得到：

$$\epsilon \propto a^{-2}. \quad (2-127)$$

由此可以得到

$$\omega + 1 \propto a^{-2}. \quad (2-128)$$

这和我们前面所讨论的模型完全一样，因此 ω 是不可能跨越 -1 的。为了更明显地看出这一点，我们可以考虑另外两个具体模型。首先考虑模型，其跑动耦合常数为

$$G(F) = A(F^n - F_c^n), \quad (2-129)$$

这里 A 和 F_c 都是正的常量，而 n 是一个正数。条件 $\rho > 0$ 要求

$$F > \frac{F_c}{\sqrt[n]{1+2n}}. \quad (2-130)$$

同时可以得到介电常数和 γ 函数

$$\epsilon = G + FG_F = A(n+1)F^n - AF_c^n, \quad \gamma = (n+1) + \frac{nF_c^n}{F^n - F_c^n}. \quad (2-131)$$

很明显当 $F = F_c/\sqrt[n]{n+1}$ 并且 $\gamma = 0$ 时，暗能量处于临界状态 $\omega = -1$ 。在该临界状态附近 $E \sim \sqrt[n]{F_c^n/(n+1)}$ 。因此 YM 场方程 (2-126) 变成了

$$\frac{An}{n+1} \sqrt[n]{\frac{F_c^{3n}}{n+1}} \gamma \propto a^{-2}, \quad (2-132)$$

这导致了 $\gamma \propto a^{-2}$ ，并且

$$\omega + 1 \simeq -\frac{4\gamma}{3} \propto a^{-2}. \quad (2-133)$$

而这正是前面得到的结果。另外我们可以考虑模型

$$G(F) = 1 - \exp\left(1 - \frac{F}{F_c}\right), \quad (2-134)$$

这里 $F_c \neq 0$ 。当 $F \gg F_c$ 时，该拉氏量回到经典形式 $G(F) = 1$ 。但是当 F 的值 F_c 时，非线性效应是非常明显的。这时

$$\epsilon = 1 + \left(\frac{F}{F_c} - 1\right) \exp\left(1 - \frac{F}{F_c}\right).$$

因此当 $F = 0.433F_c$ 时有 $\gamma = 0$ ，并且 $\omega = -1$ 。类似的讨论可以得到临界点附近 $\gamma \propto a^{-2}$ ，即 $\omega + 1 \propto a^{-2}$ 。

从上面的讨论中我们发现单个的 YM 场模型是不能跨越 $\omega = -1$ 的。但是通过前面的分析，我们同时发现对于 YM 场， $\omega > -1$ 和 $\omega < -1$ 都能够自然地实现。前者类似于 Quintessence 模型，而后者类似于 Phantom 模型。因此我们有可能构造一个双 YM 场模型，其中一个为 Quintessence-like，另一个为 Phantom-like。该模型有可能实现物态跨越 -1 的情况。这种思想类似于前面讨论过的 Quintom 模型 [Hu, 2005]，并且我们的模型中不含有物理上存在困难的 Phantom 场。原则上该模型的构造可以是多种多样的，其多样性来源于两种 YM 场可能存在的耦合。这里我们讨论一种最简单的模型，即考虑两个自由的 YM 场，而不考虑他们的耦合情况。其有效拉氏量为 [Zhao&Zhang, 2006b]

$$\mathcal{L}_i = \frac{1}{2} b F_i \ln \left| \frac{F_i}{e \kappa_i^2} \right|, \quad (i = 1, 2) \quad (2-135)$$

这里 $F_i = E_i^2 (i = 1, 2)$ ，并且要求 $\kappa_1 \neq \kappa_2$ 。其介电常数分别为

$$\epsilon_i \equiv \frac{2\partial\mathcal{L}_i}{\partial F_i} = b \ln \left| \frac{F_i}{\kappa_i^2} \right|. \quad (2-136)$$

从 YM 场方程可以得到

$$a^2 \epsilon_i E_i = C_i, \quad (2-137)$$

这里 $C_i (i = 1, 2)$ 都是积分常数，它们的值可以由初始条件来确定。如果要求 $\omega_i < -1$ ，必须有 $\epsilon_i < 0$ 和 $C_i < 0$ 。同样如果要求 $\omega_i > -1$ ，必须有 $\epsilon_i > 0$ 和 $C_i > 0$ 。这里我们选择 $C_1 < 0$ (Phantom-like field)， $C_2 > 0$ (Quintessence-like field)。其能量密度和压强分别为

$$\rho_i = \frac{E_i^2}{2} (\epsilon_i + b), \quad p_i = \frac{E_i^2}{2} \left(\frac{\epsilon_i}{3} - b \right), \quad (2-138)$$

因此总的状态方程为：

$$\omega \equiv \frac{p_1 + p_2}{\rho_1 + \rho_2} = \frac{E_1^2 \left(\frac{\beta_1}{3} - 1 \right) + E_2^2 \left(\frac{\beta_2}{3} - 1 \right)}{E_1^2 (\beta_1 + 1) + E_2^2 (\beta_2 + 1)}, \quad (2-139)$$

这里 $\beta_i \equiv \epsilon_i/b$ 。从 β_i 与 E_i 的关系，可以将该状态方程简化为

$$\omega + 1 = \frac{4}{3} \frac{e^{\beta_1} \beta_1 \alpha + e^{\beta_2} \beta_2}{e^{\beta_1} (\beta_1 + 1) \alpha + e^{\beta_2} (\beta_2 + 1)}, \quad (2-140)$$

其中 $\alpha \equiv \kappa_1^2/\kappa_2^2$ 。我们希望该暗能量的初始状态为 $\omega > -1$ ，这就要求初始时 ρ_2 是起主导作用的。但是从 YM 场的运动方程可知：随着宇宙的膨胀， ρ_1 是不断增大的，并且 β_1 的值也将增大并将趋近于零，即场强 $E_1 \rightarrow \kappa_1$ ；同时 ρ_2 是不断减小的，并且 β_2 的值也将减小并将趋近于零，即场强 $E_2 \rightarrow \kappa_2$ 。这可以从图（2-13）和（2-14）中清楚地看到。由于 ρ_1 增大，而 ρ_2 减小，因此随着宇宙的膨胀，在某一时刻就有可能使得 $\rho_1 > \rho_2$ ，并且导致总的状态方程 $\omega < -1$ 。这样就自然实现了跨越 -1 的物态。由于 YM 场自身的演化规律，最终暗能量还是要无限趋近于临界状态 $\omega = -1$ 。因此在这样的模型中宇宙“大撕裂”仍是不会发生的。下面我们根据这个思想构造一个简单的模型：选取 $\alpha = 1.5$ 保证场 1 的重整化能标大于场 2。选取现在时刻的值 $\beta_1 = -0.4 < 0$ ， $\beta_2 = 0.2 > 0$ ，这样得到目前总的物态为：

$$\omega = -1 + \frac{4}{3} \frac{e^{\beta_1} \beta_1 \alpha + e^{\beta_2} \beta_2}{e^{\beta_1} (\beta_1 + 1) \alpha + e^{\beta_2} (\beta_2 + 1)} = -1.10 < -1, \quad (2-141)$$

而积分常数 C_1 和 C_2 的比值也可以得到

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{\beta_1 e^{\beta_1/2}}{\beta_2 e^{\beta_2/2}} = -1.48.$$

这样就可以来数值求解 YM 场方程，从而求得状态方程的演化行为。在图（2-11）中我们画出了状态方程随尺度因子的演化行为，可以看出 ω 确实可以跨越 -1 ，并且在宇宙晚期趋近于临界状态 $\omega = -1$ 。在图（2-12）中我们还画出了该模型对 CMB 各向异性功率谱的影响。

§ 2.3.3 Yang-Mills 暗能量模型和宇宙巧合性问题

我们前面已经提到宇宙的巧合性问题是暗能量模型必须面对的两个疑难之一 [Steinhardt, 1997]。这个问题在最简单的宇宙学常数模型中变得尤其尖锐。但是动力学暗能量模型却有可能对该问题作出比较好的回答。例如某些 Quintessence 模型，如果有跟踪行为就可以大大缓解该疑难 [Zlatev et al., 1999]。其基本思想是：在宇宙早期辐射为主阶段，暗能量可以取某种类类似于辐射一样的物态，因而能够跟踪辐射的演化，这时暗能量在宇宙中不起主导作用，但是当宇宙进入物质为主阶段，暗能量的物态慢慢变成负值，最终起主导作用并推动最近宇宙的加速膨胀。在这样的模型中，在宇宙早期暴涨结束了以后，暗能量的密度取值范围可以有很大的跨度，

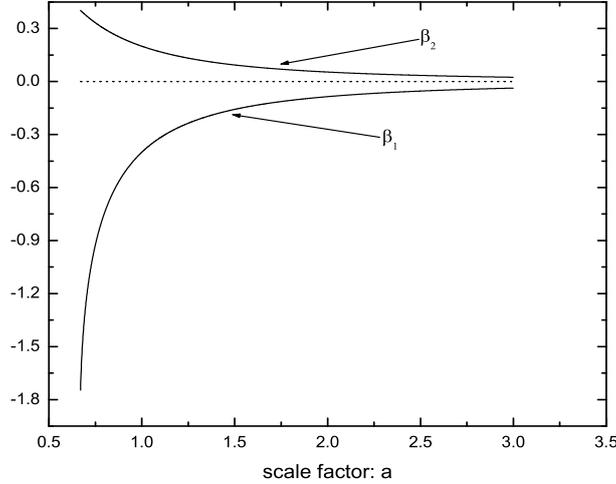


图 2-13: β_1 和 β_2 随宇宙尺度因子的演化, 这里我们取了条件 $\kappa_1^2 = 1.5\kappa_2^2$, 以及现在时刻的值 $\beta_1 = -0.4$, $\beta_2 = 0.2$ [Zhao&Zhang, 2006b]。

而不影响现在暗能量的状态。类似的思想也可以应用到Phantom模型和K-essence模型 [Malquarti et al., 2003]。下面我们主要以跟踪的Quintessence模型为例, 来简要介绍一下该模型。这里考虑模型: $V(Q) = M^{4+\alpha}Q^{-\alpha}$, 其中 M 是自由参量, 它的值必须由观测来决定。考虑早期宇宙中背景的组分的物态为 ω_B 。对于辐射为主时期有 $\omega_B = 1/3$, 而物质为主时期有 $\omega_B = 0$ 。可以证明, 这时Quintessence场 Q 的状态方程满足

$$\omega_Q \simeq \frac{\frac{\alpha}{2}\omega_B - 1}{1 + \frac{\alpha}{2}}. \quad (2-142)$$

这个关系只适用于 $\rho_B \gg \rho_Q$ 的情况。可以看出该模型具有跟踪行为, 尤其是当 $\alpha \gg 1$ 的时候。在辐射为主时期, 暗能量能够近似地跟踪辐射的演化, 进入物质为主时期以后, 又能近似跟踪物质的演化, 并慢慢变成宇宙中的主要成分。另外一类常用的跟踪模型具有势能函数: $V(Q) = M^4[\exp(m_{\text{Pl}}/Q) - 1]$, 这里 m_{Pl} 是Planck质量。在图 (2-15) 中画出了该模型在不同的初始条件下, 宇宙中各个组分的演化情况, 而图 (2-16) 中画出了暗能量状态方程的演化情况。需要指出的是, 为了使得暗能量只有

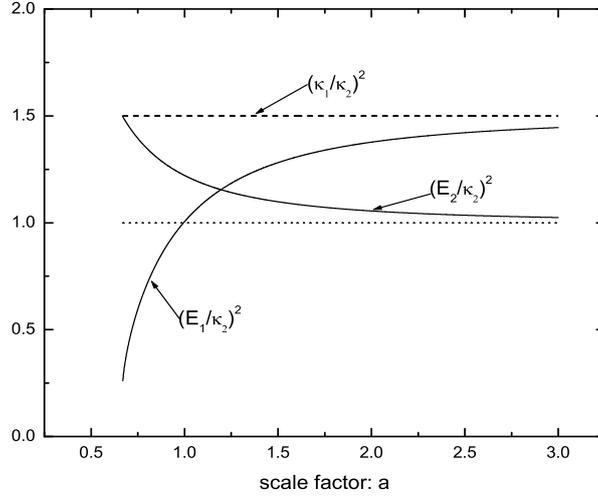


图 2-14: E_1 和 E_2 随宇宙尺度因子的演化, 这里我们取了条件 $\kappa_1^2 = 1.5\kappa_2^2$, 以及现在时刻的值 $\beta_1 = -0.4$, $\beta_2 = 0.2$ [Zhao&Zhang, 2006b]。

在宇宙近期才起主导作用, 现在暗能量状态方程不能小于 -0.8 , 而这一点却与观测严重不符 [Seljak et al., 2005]。

下面着重讨论在YM 场暗能量模型中对宇宙巧合问题的回答。暗能量的能量密度和压强分别是

$$\rho_y = \frac{E^2}{2} (\epsilon + b), \quad p_y = \frac{E^2}{2} \left(\frac{\epsilon}{3} - b \right), \quad (2-143)$$

其中介电常数

$$\epsilon = b \ln \left| \frac{F}{\kappa^2} \right|. \quad (2-144)$$

相应的状态方程为

$$\omega = \frac{p_y}{\rho_y} = \frac{\beta - 3}{3\beta + 3}, \quad (2-145)$$

这里 $\beta \equiv \epsilon/b = \ln \left| \frac{E^2}{\kappa^2} \right|$ 。可以发现当 $\beta \gg 1$ 的时候, 即 $F \gg \kappa^2$ (高能) 有 $\omega \simeq 1/3$, 类似于一种相对论性物质; 而当 $\beta \rightarrow 0$ 时, 即 $F \rightarrow \kappa^2$ (低

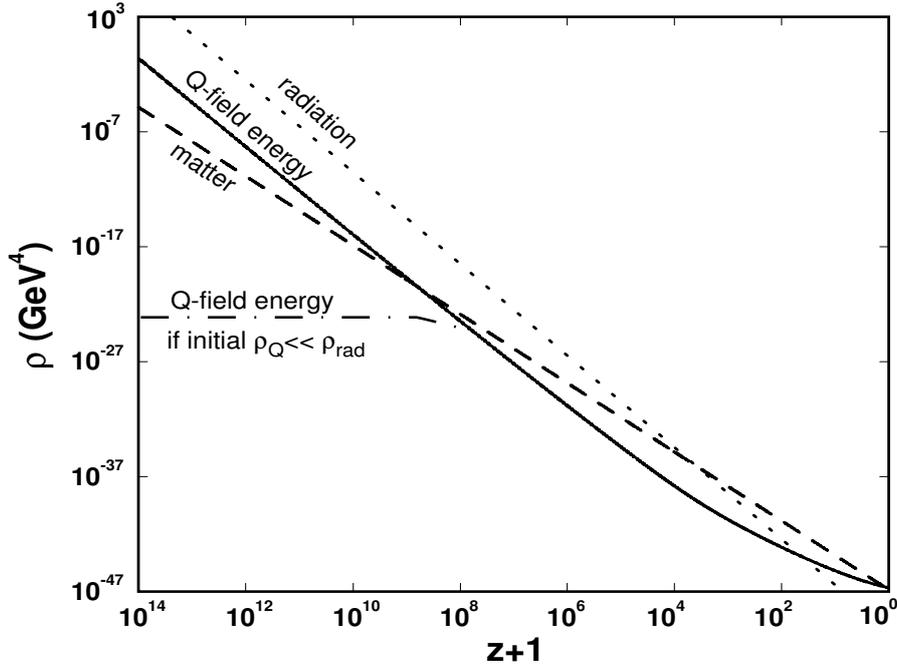


图 2-15: 宇宙中各种组分的能量密度随红移的演化, 这里的Quintessence场具有势能 $V(Q) = M^4[\exp(m_{\text{Pl}}/Q) - 1]$ 。这里对暗能量取了两种非常不同的初始条件, 发现它们现在的状态几乎是没有区别的 [Zlatev et al., 1999]。即目前宇宙中 $\Omega_m = 0.4$, $\omega_Q = -0.65$ 。

能) $\omega \rightarrow -1$, 类似于宇宙学常数。我们知道一般有效理论只能在低能的时候比较好用, 而在高能的时候则不一定适用, 而我们的模型在低能时候自动回到经典的辐射模型, 因此我们的理论不但在低能是适用的, 而且在高能仍然适用 [Zhao&Zhang, 2006III]。如前所知, 有效的YM 场方程为

$$\partial_\tau(a^2 \epsilon E) = 0. \quad (2-146)$$

由此可得

$$\beta e^{\beta/2} \propto a^{-2}, \quad (2-147)$$

比例系数可以由初始条件来确定。由于目前的暗能量的物态 $\omega \simeq -1$, 而在早期宇宙中, $a \rightarrow 0$, 方程 (2-147) 告诉我们, 此时 $\beta \gg 1$, 而方程 (2-145) 则告诉我们此时 $\omega \rightarrow 1/3$, 即 YM 场非常类似一种辐射物质。暗能量物态的演化可以通过数值求解方程 (2-147) 而得到。但是首先我们必

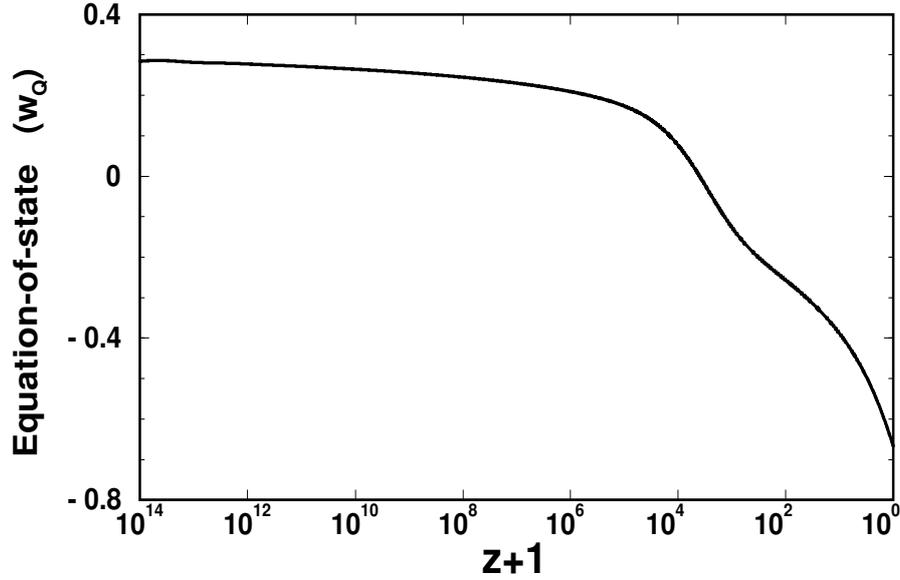


图 2-16: 势能 $V(Q) = M^4[\exp(m_{\text{Pl}}/Q) - 1]$ 的 Quintessence 场的状态方程随红移的演化 [Zlatev et al., 1999]。

须从观测上确定 YM 场的重整化能标 κ ，这也是唯一的一个模型参数。由于现在时刻

$$\rho_y = \frac{bE^2}{2}(\beta + 1) \simeq \frac{b\kappa^2}{2}, \quad (2-148)$$

同时我们知道暗能量的能量密度可以由观测来确定 $\rho_0 \times \Omega_y$ ，这里 $\rho_0 \approx 8.099 h^2 \times 10^{-11} \text{eV}^4$ 是宇宙中总的物质密度。观测发现 $\Omega_y = 0.73$ ，因而可以得到

$$\kappa = 3.57 h \times 10^{-5} \text{eV}^2. \quad (2-149)$$

我们发现该能变远远低于已知的所有物理能标（中微子质量除外），因而在该模型中，精细调节问题仍然存在。但是从另一方面考虑，我们可以把该能标看作一种极低的新物理的能标。而这里的 YM 场正是这种新物理的反映。

我们目前所能观测到的最早的时间是宇宙的核合成（BBN）时期，对应的红移 $z \sim 10^{10}$ ，相应的能标 $\sim 1 \text{MeV}$ 。这里我们选择此时作为我们讨论

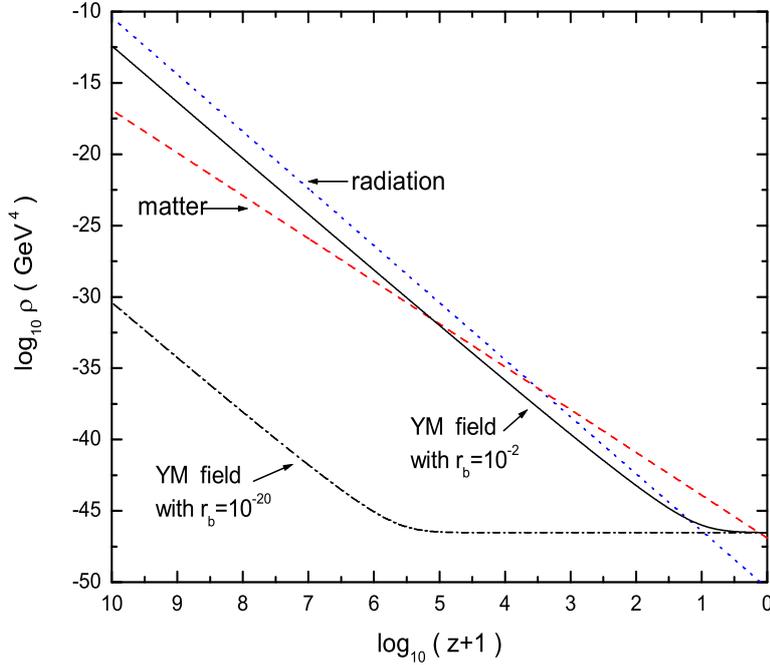


图 2-17: 宇宙中各个组分随红移的演化。其中点线表示辐射组分, 虚线表示物质组分, 实线表示 $r_b = 10^{-2}$ 的 YM 场, 而虚-点线表示 $r_b = 10^{-20}$ 的 YM 场 [Zhao&Zhang, 2006c]。

的初始时刻。为了描述此时 YM 场在宇宙中所占的比例, 我们定义一个比例函数

$$r_b \equiv \left. \frac{\rho_y}{\rho_r} \right|_{z=10^{10}}, \quad (2-150)$$

其中 ρ_r 是辐射的能量密度。我们只考虑 $r_b < 1$ 的情况, 即此时 YM 场并不起主导作用。很明显不同的 r_b 模型中, YM 场的演化是非常不同的, 但是后面我们会发现, r_b 在一个相当相当宽泛的范围内取值时, 现在 YM 凝聚都处于同样一个状态, 即 $\Omega_y \sim 0.73$, $\omega \simeq -1$, 而这与观测很好地符合。

图 (2-17) 中画出了 ρ_y 随红移的演化规律。作为特例, 这里考虑

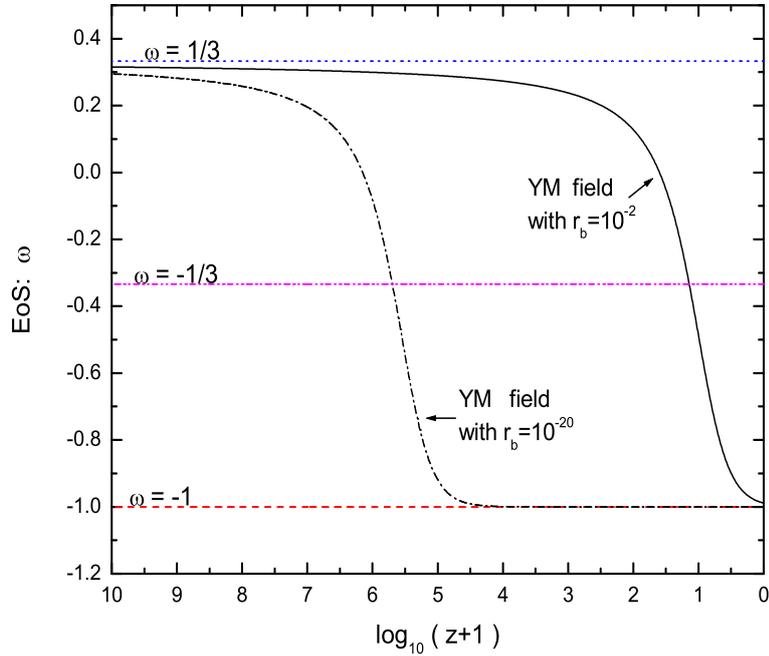


图 2-18: 初始条件为 $r_b = 10^{-2}$ 和 $r_b = 10^{-20}$ 的 YM 模型的物态随红移的演化 [Zhao&Zhang, 2006c]。

了两个模型，一个我们取了 $r_b = 10^{-2}$ ，另一个取了 $r_b = 10^{-20}$ 。作为比较我们同时画出了辐射和物质密度随红移的演化。可以发现辐射密度以 $\rho_y \propto a^{-4}$ 减小，因此在宇宙早期 YM 场能够跟踪辐射的演化，而并不起主导作用。在 (2-18) 中我们画出了暗能量的物态随红移的演化，发现此时 $\omega \rightarrow 1/3$ 。而在宇宙晚期，随着宇宙的膨胀， β 减小到接近于零，相应地状态方程逐渐减小到 $\omega \rightarrow -1$ 。并且该渐近行为会在现在时刻以前的某一红移处达到，对于不同的模型， r_b 不同，到达的红移也不相同。 r_b 越小，渐近区域越早到达。YM 场一旦进入渐进区域，其能量密度就基本保持不变，其演化就非常类似于宇宙学常数。我们发现至少 r_b 的取值在相当广泛的范围 (10^{-20} , 10^{-2}) 内取值时，演化到现在都能够达到相同的状态，

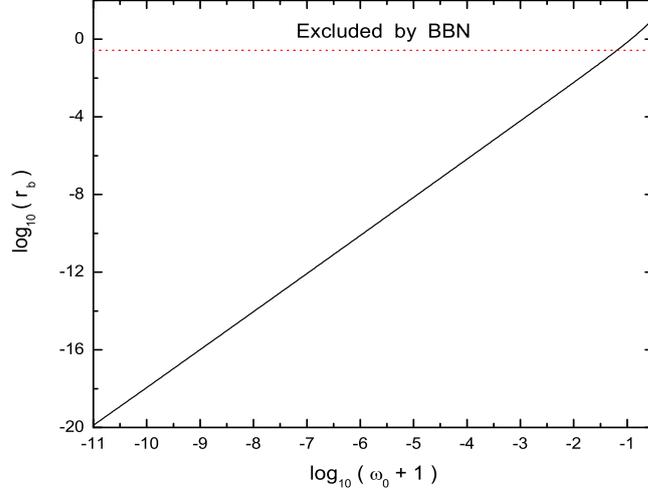


图 2-19: 现在的 YM 场状态方程对 r_b 的依赖关系。其中虚线以上的部分被 BBN 的观测所排除 [Zhao&Zhang, 2006c]。

$\Omega_y \simeq 0.73$ 。因而宇宙的巧合性问题在 YM 凝聚的暗能量模型中是不存在的。

图 (2-19) 中画出了现在的暗能量物态对初始条件 r_b 的依赖关系。我们发现函数 $\log_{10}(r_b)$ 和 $\log_{10}(\omega_0 + 1)$ 几乎呈线性关系。对初始条件 $r_b = 10^{-2}$, 我们得到 $\omega_0 = 0.99$, 而对 $r_b = 10^{-20}$, 我们发现 ω_0 的值与 -1 只有 10^{-11} 的差别, 与宇宙学常数几乎完全无法区分。

公式 (2-147) 可以改写为

$$z = \sqrt{\frac{\beta}{\beta_0}} \exp\left[\frac{\beta - \beta_0}{4}\right] - 1, \quad (2-151)$$

其中 β_0 是 β 函数在现在时刻的值, 依赖于初始条件。对于一个固定的 β_0 , 该公式显示了 YM 场的状态方程 ω 与红移 z 的一一对应关系。为了描述 YM 场的物态从 $1/3$ 到 -1 的演化, 我们定义一个相变红移, z_t 为 $\omega = -1/3$, 即 $\beta = -1$ 时所对应的红移, 此时强能量条件被破坏, YM 场

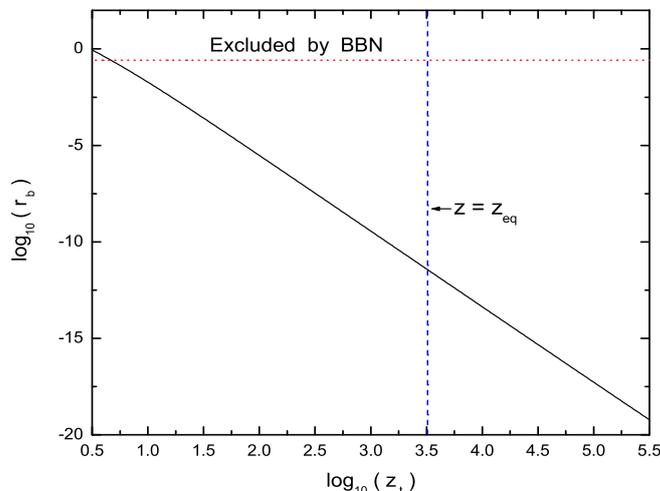


图 2-20: 相变红移 z_t 对 r_b 的依赖关系。其中虚线以上的部分被 BBN 的观测所排除。这里 z_{eq} 表示辐射/物质密度相等时刻的红移 [Zhao&Zhang, 2006c]。

才变成真正的暗能量。因此可以得到

$$z_t = \sqrt{\frac{1}{\beta_0}} \exp\left[\frac{1 - \beta_0}{4}\right] - 1. \quad (2-152)$$

这直接给出了一个依赖关系 $z_t = z_t(r_b)$ 。图 (2-20) 中画出了这种依赖关系。需要指出的是, 和跟踪的 Quintessence 模型不同, YM 场模型的相变红移既可以在辐射为主时期, 又可以在物质为主时期, 这取决于初始条件的选择。例如对模型 $r_b = 10^{-2}$, $z_t \simeq 12.4 \ll z_{eq}$ (z_{eq} 表示辐射/物质密度相等时刻的红移), 相变发生在物质为主时期; 而对于模型 $r_b = 10^{-20}$, $z_t \simeq 5.0 \times 10^5 \ll z_{eq}$, 相变发生在辐射为主时期。

最后我们讨论 BBN 的观测对 r_b 的限制。我们知道在核合成时刻, 暗能量的存在会加速宇宙的膨胀速率, 因而有效中微子的代数 N_ν 会增加 [Birkel&Sarkar, 1997]。最近的观测表明 $\Delta N_\nu \equiv N_\nu - 3 < 1.60$ [Cyburt et al., 2005]。在我们的模型中, 暗能量由 YM 凝聚来充当。通过类似的分析可以将 r_b 和 ΔN_ν 联系起来: $r_b = \frac{7\Delta N_\nu/4}{10.75}$, 因此可以得到 r_b 的一个限制

$r_b < 0.26$ 。相应的对状态方程的限制为 $\omega_o < -0.94$ 图 (2-19)，对相变红移的限制为 $z_t > 5.8$ 图 (2-20)。

§ 2.3.4 耦合的 Yang-Mills 暗能量和宇宙巧合性问题

我们前面的讨论中一直都是假设 YM 暗能量在宇宙是自由演化的，即不存在与其它物质的相互作用。我们知道规范场是一种传递相互作用的媒介场，通常对于规范场，我们必须考虑其与宇宙中其他物质粒子的相互作用。这是我们这一节的基本内容，我们来研究有相互作用 YM 暗能量可能的宇宙学后果，以及对宇宙恰好性问题的回答。但是和已知的相互作用 QED, QCD, 以及弱电作用不同，我们这里没有一个模型来描述 YM 场与物质粒子的相互作用，因此只能对相互作用作一些简单的唯象描述。

首先我们建立有相互作用存在时，宇宙中各组分演化的基本方程组。考虑空间平直的 FRW 度规，我们有 Friedmann 方程组（我们这里考虑到宇宙中存在物质，辐射和 YM 暗能量）[Zhang, 1994; Xia,Zhang&Zhao, 2006]:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho_y + \rho_m + \rho_r), \quad (2-153)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho_y + 3p_y + \rho_m + \rho_r + 3p_r), \quad (2-154)$$

这里上标点表示对宇宙时间求导，下标 y 表示暗能量；下标 r 表示辐射；下标 m 表示物质。可见宇宙尺度因子的演化决定于宇宙中各个组分的大小。三种组分各自的演化规律可以用能量守恒方程来描述：

$$\dot{\rho}_y + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho_y + p_y) = -Q_m - Q_r, \quad (2-155)$$

$$\dot{\rho}_m + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho_m = Q_m, \quad (2-156)$$

$$\dot{\rho}_r + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho_r + p_r) = Q_r, \quad (2-157)$$

这里 Q_m 表示暗能量与物质之间的能量转化，而 Q_r 表示暗能量与辐射之间的能量转化，在自然单位制中，他们都是 [energy]⁵ 的量纲。这里需要指出 $Q_m > 0$ 表示暗能量转化为物质，而 $Q_m < 0$ 表示物质转化为暗能量；

对于 Q_r 也类似。只要给定了 Q_r 和 Q_m 的具体形式，通过求解方程组 (2-153)，(2-155)，(2-156)，(2-157)，就可以得到宇宙中各个组分的演化规律。而本节中我们就是要考虑各种不同的耦合模型对宇宙演化的影响。下面我们考虑具体的耦合模型，我们主要讨论三类模型：只有暗能量转化为物质的模型；只有物质转化为暗能量的模型，暗能量转化为物质和辐射的模型。需要说明的是我们这里的辐射可以是中微子（而不需要是光子），这样就不会与观测直接冲突。

♣ Model 1: 在该模型中我们只考虑 $Q_m > 0$ 并且 $Q_r = 0$ 的情况，即只存在暗能量向物质的转化。我们可以将其写为一种普遍的形式

$$Q_m = \Gamma \rho_y, \quad (2-158)$$

即认为耦合形式直接正比于暗能量的能量密度，其中 $\Gamma > 0$ 具有时间倒数的量纲描述了暗能量的衰减（物质产生）的速率。通常对于已知的模型它的函数形式应该从量子场论中推导出来。但是这里我们对基本物理几乎一无所知，因而只能讨论一些唯象模型。为了提高讨论的普遍性，在这一类模型中我们考虑三种完全不同的耦合情况：

$$\heartsuit: \quad \Gamma/H = 0.5; \quad (2-159)$$

$$\heartsuit: \quad \Gamma/H = 0.6e^{-y}; \quad (2-160)$$

$$\heartsuit: \quad \frac{\Gamma}{H} = 0.25 \frac{2+y}{1+y} e^{\frac{y}{4}}. \quad (2-161)$$

这是三种完全不同的唯象模型。其中耦合系数的选择都是为了能够得到现在的宇宙状态： $\Omega_m \simeq 0.3$ ， $\Omega_y \simeq 0.7$ 。

利用前面的方程组，我们可以得到宇宙中各个组分的演化行为。我们分别对这三个完全不同的耦合模型进行了求解，发现他们的演化规律非常类似。下面列举一些研究的结论：

- a: 在宇宙早期，暗能量的演化仍然能够追踪辐射物质；
- b: 暗能量的状态方程只有在宇宙晚期才开始变成负值；
- c: 只有在非常接近现在的时刻，暗能量才开始占主导作用，宇宙开始加速膨胀；
- d: 我们取的两个YM 模型具有非常不同的初始条件，却发现演化到现在，宇宙的状态是非常类似的，即至少初始条件在一个很宽泛的范

围 $\Omega_{yi} \in (10^{-10}, 10^{-2})$ 取值的时候, 我们会得到相同的宇宙现状 $\Omega_y \simeq 0.7$, $\Omega_m \simeq 0.3$, $\Omega_r \simeq 10^{-5}$, $\omega_y \simeq -1$ 。因此在该模型中宇宙的巧合性问题仍然是不存在的。

这些性质和前面的自由YM 模型中的结论都是一样的。不同的地方有主要两点:

e: 由于物质与暗能量的耦合, 使得在宇宙演化晚期物质的密度不再下降而保持为一个常数, 即未来宇宙会进入一个平衡态, 其中各个组分的比例满足 scaling 行为: $\Omega_y \sim 0.85$, $\Omega_m \sim 0.15$, $\Omega_r \sim 0$;

f: 在该模型中暗能量的状态方程是可以跨越并小于 -1 的, 而在最后的平衡态 $\omega_y \sim -1.2$, 但是宇宙总的物态 ω_t 却不会跨越并小于 -1 , 在最后的平衡态 $\omega_t \sim -1$, 宇宙膨胀为 de Sitter 膨胀。

♣♣ Model 2: 在该模型中我们只考虑 $Q_m < 0$ 并且 $Q_r = 0$ 的情况, 即只存在物质向暗能量的转化。我们可以将其写为一种普遍的形式

$$Q_m = -\Gamma\rho_m, \quad (2-162)$$

在这一类模型中我们考虑两种完全不同的耦合情况:

$$\heartsuit: \quad \Gamma/H = 0.02; \quad (2-163)$$

$$\heartsuit: \quad \Gamma/H = 0.02e^{-x}; \quad (2-164)$$

利用前面的方程组, 我们可以得到宇宙中各个组分的演化行为。我们分别对这两个完全不同的耦合模型进行了求解, 发现他们的演化规律非常类似。发现宇宙中各个组分的演化与自由YM 模型中的情况几乎完全一样, 而且宇宙巧合性问题在这里也是不存在的。

最后我们讨论更为普遍模型, 其中暗能量与物质和辐射都有耦合。

♣♣♣ Model 3: 在该模型中我们只考虑 $Q_m > 0$ 并且 $Q_r > 0$ 的情况。我们可以将其写为一种普遍的形式

$$Q_m = \Gamma\rho_y, \quad Q_r = \Gamma'\rho_y, \quad (2-165)$$

即认为耦合形式直接正比于暗能量的能量密度, 其中 $\Gamma > 0$, 并且 $\Gamma' > 0$ 表示暗能量可以向物质和辐射转化。在这一类模型中我们考虑两种完全不同的耦合情况:

$$\heartsuit: \quad \Gamma/H = 0.5, \quad \Gamma'/H = 0.00018; \quad (2-166)$$

$$\heartsuit: \quad \Gamma/H = 0.25 \frac{2+y}{1+y} e^{\frac{y}{4}}, \quad \Gamma'/H = 0.00009 \frac{2+y}{1+y} e^{\frac{y}{4}}; \quad (2-167)$$

利用前面的方程组，我们可以得到宇宙中各个组分的演化行为。在该模型中宇宙最终会进入一个 scaling 行为： $\Omega_y \sim 0.8$ ， $\Omega_m \sim 0.2$ ， $\Omega_r \sim 10^{-5}$ 。而宇宙巧合性问题在这里仍然是自然不存在的。有意思的是这正类似于稳态宇宙学模型。即在我们的模型中，早期宇宙是大爆炸模型，晚期则是稳态模型 [Hoyle, 1948]，而暗能量于物质和辐射的耦合则提供了连接两个模型的桥梁。

§ 2.3.5 有磁场的 Yang-Mills 模型

前面的讨论中，多数情况下我们都只考虑了一种简单的情况，即不考虑磁场。为了讨论的完整性，我们在这一小节中讨论既有电场又有磁场的普遍模型。研究其状态方程以及电场和磁场的演化规律。

这里我们仍然从有效拉氏量出发：

$$\mathcal{L}_{eff} = \frac{b}{2} F \ln \left| \frac{F}{e\kappa^2} \right|. \quad (2-168)$$

通过对作用量的变分，可以得到暗能量的能量密度和压强分别是

$$\rho = \frac{1}{2} \epsilon (E^2 + B^2) + \frac{1}{2} b (E^2 - B^2), \quad (2-169)$$

$$p = \frac{1}{6} \epsilon (E^2 + B^2) - \frac{1}{2} b (E^2 - B^2), \quad (2-170)$$

其中 $\epsilon \equiv b \ln |(E^2 - B^2)/\kappa^2|$ 。为了方便我们可以定义两个场强量 $F \equiv E^2 - B^2$ ， $Q \equiv E^2 + B^2$ ，以及对应的无量纲量 $f \equiv F/\kappa^2$ ， $q \equiv Q/\kappa^2$ ， $\varepsilon \equiv \epsilon/b = \ln |f|$ 。因此 $E^2 = (Q + F)/2$ ， $B^2 = (Q - F)/2$ 。这样暗能量的能量密度和压强就可以写为一个简单的形式

$$\rho = \frac{1}{2} b \kappa^2 (\varepsilon q + f), \quad p = \frac{1}{2} b \kappa^2 \left(\frac{1}{3} \varepsilon q - f \right), \quad (2-171)$$

我们要求暗能量的密度必须大于零，由此可以对暗能量提出一个限制条件

$$\varepsilon q + f > 0. \quad (2-172)$$

相应的状态方程为

$$\omega = \frac{\frac{1}{3}\varepsilon q - f}{\varepsilon q + f}. \quad (2-173)$$

这里我们对状态方程做一些简单讨论。由上式容易看出当 $\varepsilon > 0$ 时有 $\omega > -1$ ，当 $\varepsilon < 0$ 时有 $\omega < -1$ 。当 $\varepsilon q \gg f$ 时， $\omega \simeq 1/3$ ，暗能量类似一种相对论性辐射，而当 $\varepsilon q \ll f$ 时， $\omega \simeq -1$ ，暗能量类似于宇宙学常数。

在这里我们首先讨论电场大于磁场的情况，即 $E^2 > B^2$ 。此时 $\varepsilon = \ln f$ 。为了研究暗能量的演化行为，我们首先考察 YM 场的运动方程。由前面的讨论可以知道，YM 场方程为

$$\partial_\tau(a^2 \varepsilon E) = \text{constant}. \quad (2-174)$$

在这里该方程可以用无量纲的量来表示，即

$$q + f = c \cdot a^{-4} \varepsilon^{-2}, \quad (2-175)$$

其中 c 是一个积分常数。我们发现这里有两个变量 q 和 f ，因此还需要考虑能量守恒方程。为了讨论方便，首先我们定义一个无量纲量 $\eta \equiv a^3$ ，因此能量守恒方程可以写为

$$d(\rho \eta) = -p d\eta. \quad (2-176)$$

将 ρ 和 p 的表达式代入，可以将该方程简化为

$$\left(1 + \frac{q}{f}\right) f' + \varepsilon q' = -\frac{4}{3} \varepsilon q \eta^{-1}. \quad (2-177)$$

这里 $'$ 表示 $d/d\eta$ 。通过方程 (2-175) 和 (2-177)，我们可以数值求解状态方程的演化。从这两个方程中可以发现，在该模型中，完全可以用尺度因子来代替时间函数。因此可以任意选择 $a = a_i$ (a_i 可以是任意时刻的宇宙尺度因子) 作为初始时刻。此时我们选择初始条件

$$q = q_i, \quad f = f_i, \quad (2-178)$$

而积分常数也可以确定下来

$$c = (q_i + f_i)(\ln f_i)^2. \quad (2-179)$$

首先我们考虑初始时刻 $\omega > -1$ 的情况，这要求

$$q_i > 0, \quad f_i > 0 \quad (2-180)$$

并且由 q 和 f 的定义可知，必须要求 $q_i > f_i$ 。当 f 与 q 的值越接近，表示电场的能量远远大于磁场，当 $q = f$ 的时候，表示只有电场没有磁场，这正是我们前面讨论的情况；相反如果 f 与 q 的值差别越大则表示电场和磁场的能量越接近，如果 $q \gg f$ ，就表示 $E^2 \simeq B^2$ 。当 q 和 f 的值都趋近于 1 的时候，就表示电场能量趋近于重整化能标 κ^2 ，而磁场的能量衰减为零。这里我们考虑三个模型

$$\text{Model } a_1: \quad f_i = 50, \quad q_i = 100;$$

$$\text{Model } a_2: \quad f_i = 5, \quad q_i = 100;$$

$$\text{Model } a_3: \quad f_i = 5, \quad q_i = 10;$$

在图（ 2-21 ）中我们画出了这三个模型中暗能量的状态方程随尺度因子的演化规律，我们发现和前面讨论的情况一样，不管初始条件如何，状态方程都不可能跨越 -1 ，而且随着宇宙的膨胀，都是迅速趋近于 -1 ，因此非常类似宇宙学常数。并且在宇宙早期 YM 场的物态趋近 $1/3$ ，非常类似于辐射，因此暗能量仍然能够很好地避免宇宙的巧合性问题。在图（ 2-22 ）中我们分别画出了这三个模型中电场和磁场随宇宙尺度因子的演化行为。我们发现随着宇宙的膨胀电场能量趋近于重整化能标 κ^2 ，而磁场的能量衰减为零。

下面我们考虑初始时刻 $\omega < -1$ 的情况，考虑到限制条件（2-172）这要求

$$f_i < q_i < -f_i / \ln f_i, \quad f_i < 1, \quad (2-181)$$

因此我们发现，在这种情况下， f_i 必须满足条件 $e^{-1} < f_i < 1$ 。我们同样考虑三个模型

$$\text{Model } b_1: \quad f_i = 0.9, \quad q_i = 2.0;$$

$$\text{Model } b_2: \quad f_i = 0.9999, \quad q_i = 10.0;$$

$$\text{Model } b_3: \quad f_i = 0.5, \quad q_i = 0.6.$$

在图（ 2-23 ）中我们画出了这三个模型中暗能量的状态方程随尺度因子的演化规律，我们发现和前面讨论的情况一样，不管初始条件如何，状态方程都不可能跨越 -1 ，而且随着宇宙的膨胀，都是迅速趋近于 -1 ，因此非常类似宇宙学常数。在图（ 2-24 ）中我们分别画出了这三个模型中电场和磁

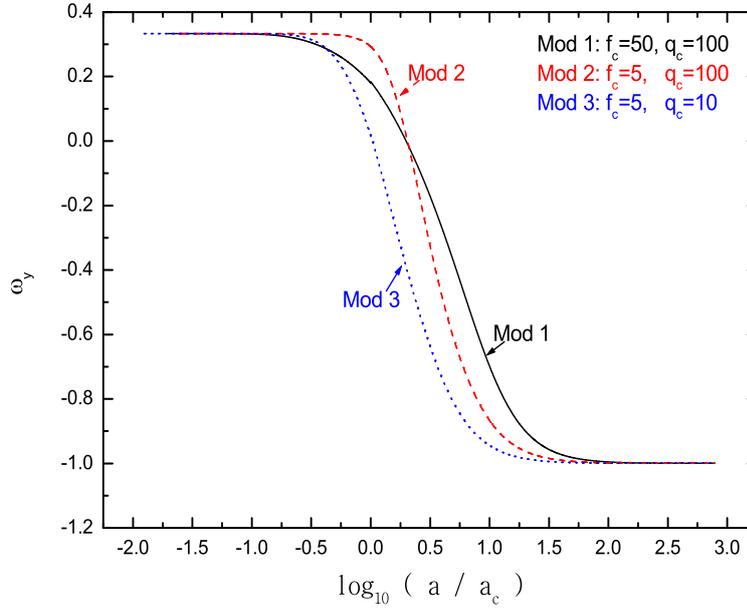


图 2-21: 在模型 a_1, a_2, a_3 中暗能量的状态方程随宇宙尺度因子的演化行为。

场随宇宙尺度因子的演化行为。我们发现随着宇宙的膨胀电场能量趋近于重整化能标 κ^2 ，而磁场的能量衰减为零。因此上面的研究表明：其一，即使考虑了磁场，随着宇宙的膨胀，磁场的能量也是迅速衰减，很快达到了电场为主状态；其二，即使考虑了磁场，暗能量的演化规律仍然和不考虑磁场时候的演化规律一样，并不会带来新的物理结果。

然后我们讨论磁场为主的情况，首先考虑极端情况 $E^2 = 0$ ，即只有磁场的情况。此时YM 场的压强和能量密度分别为

$$p_y = \frac{1}{6}\epsilon B^2 + \frac{1}{2}bB^2, \quad \rho_y = \frac{1}{2}\epsilon B^2 - \frac{1}{2}bB^2, \quad (2-182)$$

其中 $\epsilon = b \ln(B^2/\kappa^2)$ 。定义 $\theta \equiv \epsilon/b = \ln(B^2/\kappa^2)$ 。有限制条件 $\rho_y > 0$ ，我们可以得到

$$\theta > 1. \quad (2-183)$$

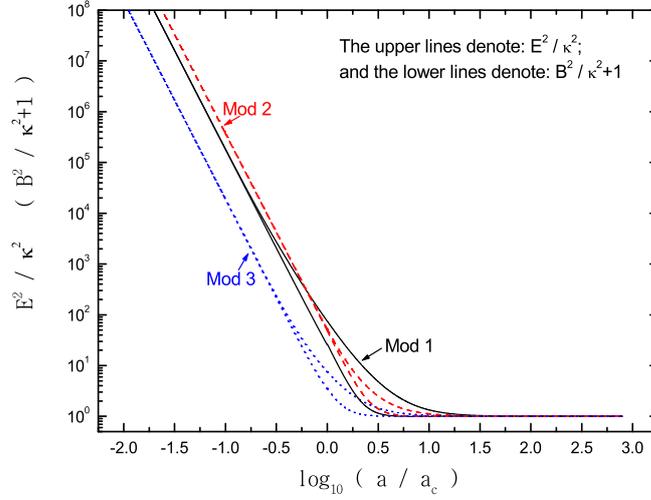


图 2-22: 在模型 a_1, a_2, a_3 中电场和磁场随宇宙尺度因子的演化行为。

YM 场的状态方程为

$$\omega_y = \frac{\frac{1}{3}\theta - 1}{\theta + 1}, \quad (2-184)$$

考虑到条件 (2-183) 我们可以得到

$$\omega_y > \frac{1}{3}. \quad (2-185)$$

即此时YM 场不可能产生负压强，也就不能够充当暗能量。下面讨论 $B^2 > E^2$ 的普遍情况。此时YM 场的压强和能量密度分别为

$$p_y = \frac{1}{2}b\kappa^2\left(\frac{1}{3}\varepsilon q - f\right), \quad \rho_y = \frac{1}{2}b\kappa^2(\varepsilon q + f) \quad (2-186)$$

并且 $f < 0$ ，而状态方程为：

$$\omega_y = \frac{\frac{1}{3}\varepsilon q - f}{\varepsilon q + f} \quad (2-187)$$

限制条件 $\rho_y > 0$ 给出

$$0 > f > -\varepsilon q, \quad (2-188)$$

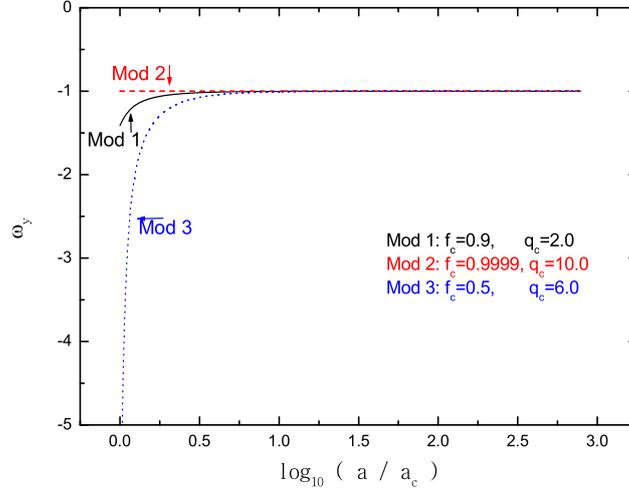


图 2-23: 在模型 b_1, b_2, b_3 中暗能量的状态方程随宇宙尺度因子的演化行为。

因此容易得到 $\frac{1}{3}\epsilon q - f > 0$, $\epsilon q + f$, 即YM 场的物态不可能小于零。那么 $B^2 > E^2$ 的YM 场能不能演化到 $B^2 < E^2$ 的状态, 从而充当暗能量呢? 这也是不可能实现的。如果这种情况可以实现, 那么必然经过转化点 $B^2 = E^2$, 此时 $\epsilon = \infty$ 。从YM 场方程

$$a^2 \epsilon E = \text{constant}, \quad (2-189)$$

我们知道, 在该转化点必须满足 $a = 0$ (不现实) 或者 $E^2 = 0$, 由于此时 $B^2 = E^2$, 因此必然有 $B^2 = E^2 = 0$, 即YM 场消失了, 这也是不可能发生的, 因此该转化点不可能存在, 那么 $B^2 > E^2$ 的YM 场不能演化到 $B^2 < E^2$ 的状态, 从而充当暗能量呢? 总之, 磁场为主的YM 场不能够实现负压强, 因而不能够充当暗能量。

§ 2.3.6 Yang-Mills 暗能量和标量场暗能量的区别

在本章的最后一小节, 我们来简单讨论一下 Yang-Mills 场暗能量和通常的标量场暗能量的区别。在前面的讨论中, 我们知道 Yang-Mills 场最终

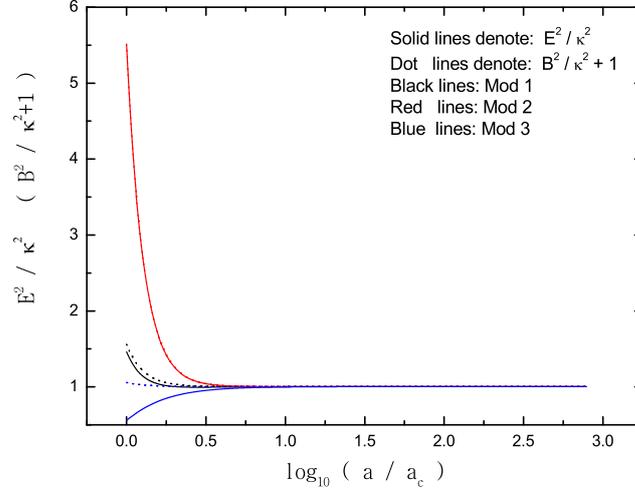


图 2-24: 在模型 b_1, b_2, b_3 中电场和磁场随宇宙尺度因子的演化行为。

都可以用一个标量函数 $A(t)$ 来表示，那么人们不禁要问这样一个问题：如果我们把函数 $A(t)$ 从形式上用另外的函数 $\varphi(t)$ 来代替，那么是否能够将我们的 Yang-Mills 暗能量完全等价于通常的标量场暗能量呢？如果确实能够等价，那么说明我们的 Yang-Mills 暗能量只是标量场暗能量的一种特殊情况；如果不能够等价过去，则说明 Yang-Mills 暗能量与标量场模型具有本质的区别。下面我们分别从拉氏量和运动方程来展示这两类模型。对于标量场模型，我们主要讨论 K-essence 模型，而通常的 Quintessence 模型和 Phantom 模型都是 K-essence 模型的特殊情况。考虑只有暗能量的宇宙，其与引力为最小耦合，因而普遍的作用量的形式为 [Armendariz-Picon et al., 1999]

$$S = S_g + S_\varphi = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{R}{16\pi G} + p(\varphi, X) \right] \quad (2-190)$$

其中 R 为 Ricci 标量，而 $p(\varphi, X)$ 则是标量场 φ 的拉氏量密度，这里 $X \equiv \frac{1}{2} \nabla_\mu \varphi \nabla^\mu \varphi$ 。利用作用量对度规 $g^{\mu\nu}$ 的变分，容易得到它的能量密度为

$$\varepsilon(\varphi, X) = 2X p_{,X}(\varphi, X) - p(\varphi, X), \quad (2-191)$$

而它的压强则正好就是 $p(\varphi, X)$ 。其运动方程可以利用该作用量直接对场 φ 作变分而得到

$$p_{,X}\square_g\varphi + p_{,XX}(\nabla_\mu\nabla_\nu\varphi)\nabla^\mu\varphi\nabla^\nu\varphi + \varepsilon_{,\varphi} = 0, \quad (2-192)$$

其中 $\square_g \equiv g_{\mu\nu}\nabla^\mu\nabla^\nu$ ，而 ∇^μ 则是通常的协变微分。在均匀各向同性的假设下，该运动方程化简为

$$\ddot{\varphi}\varepsilon_{,X} + \dot{\varphi}p_{,X}\sqrt{3\varepsilon} + \varepsilon_{,\varphi} = 0 \quad (2-193)$$

当 $\varepsilon_{,X} \neq 0$ 的时候，可以被改写为

$$\ddot{\varphi} + 3H\frac{p_{,X}}{\varepsilon_{,X}}\dot{\varphi} + \frac{\varepsilon_{,\varphi}}{\varepsilon_{,X}} = 0, \quad (2-194)$$

其中上点号表示对宇宙时间求导， H 为Hubble 常数， $X = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2$ ，而能量密度则被化简为

$$\varepsilon(\varphi, \dot{\varphi}) = \dot{\varphi}p_{,\dot{\varphi}} - p. \quad (2-195)$$

下面我们给出 Yang-Mills 暗能量的拉氏量及运动方程，并将其与 K-essence暗能量作一比较。由前面的讨论可知，我们的有效 Yang-Mills 场的拉氏量密度为

$$\mathcal{L}_y = \frac{1}{2}bF \left(\ln \left| \frac{F}{\kappa^2} \right| - 1 \right), \quad (2-196)$$

其中场量 $F_{\mu\nu}^a$ 的定义为

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + f^{abc}A_\mu^b A_\nu^c, \quad (2-197)$$

利用均匀各向同性假设： $A_0 = 0$ ， $A_i^a = \delta_i^a A(t)$ ，我们可以得到

$$F = -\frac{1}{2}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} = \frac{3}{16a^4}(4a^2\dot{A}^2 + A^4) \quad (2-198)$$

其中 $a(t)$ 为宇宙的尺度因子。因此 Yang-Mills 场的拉氏量可以用 $A(t)$ 表示为

$$\mathcal{L}_y = \frac{3b}{32a^4} \left(4a^2\dot{A}^2 + A^4 \right) \times \left[\ln \left(4a^2\dot{A}^2 + A^4 \right) + \ln \left(\frac{3}{16ea^4\kappa^2} \right) \right], \quad (2-199)$$

容易发现，我们这里的拉氏量仍然只含有函数 $A(t)$ 及其对时间的一阶导数项，这一点和 K-essence 场是相同的，但不同的是我们这里的 Yang-Mills 场

的拉氏量天生地将场 $A(t)$ 与宇宙尺度因子 $a(t)$ 混合在一起，因此密切依赖于宇宙尺度因子的演化行为。这是我们的 Yang-Mills 场暗能量和标量场暗能量最根本的区别，因此不能将我们的 Yang-Mills 场暗能量看作是标量场暗能量的一种特殊情况。也正是由于这个原因，我们可以发现，在我们的模型中暗能量的压强项并正好不等于其拉氏量密度。类似的区别也可以从运动方程中看到。通过作用量对 A_μ^a 求导，我们可以得到有效的 Yang-Mills 场方程

$$\partial_t (a^2 \epsilon \dot{A}) = 0, \quad (2-200)$$

当介电常数不为零的时候，它可以被改写为

$$\ddot{A} + 2H\dot{A} + \frac{\dot{\epsilon}}{\epsilon}\dot{A} = 0, \quad (2-201)$$

其中介电常数为

$$\epsilon = b \ln \left| \frac{F}{\kappa^2} \right| = b \ln (4a^2 \dot{A}^2 + A^4) + b \ln \left(\frac{3}{16a^4 \kappa^2} \right), \quad (2-202)$$

它明显依赖于宇宙尺度因子的演化行为，并且函数 $\dot{\epsilon}/\epsilon$ 也明显含有场量 \ddot{A} , \dot{A} 以及 A 。比较两式 (2-194) 和 (2-201) 我们也发现，两种模型是完全不同，虽然两个运动方程都只含有场量对宇宙时的二阶导数项，但是我们的 Yang-Mills 场方程要远远比 K-essence 的运动方程复杂得多，它对宇宙尺度因子的依赖性也复杂的多。从这里也可以看出，我们的 Yang-Mills 暗能量不能被看作是标量场模型的一种特殊情况。两者是有明显区别的。

第三章

宇宙残余引力波

在本章中，我们首先简单介绍一下宇宙中的几类重要的孤立引力波源，并估算它们产生的引力波的大小以及其探测的可能性。然后我们将着重计算在暗能量主导的宇宙中，宇宙残余引力波的演化行为，分析暗能量对引力波功率谱的影响，以及残余引力波的探测等问题。

§ 3.1 引力波与引力波源

引力波是广义相对论理论所预言的一种物理现象。最早爱因斯坦等在弱场近似下发现了引力波的存在，后来其它人研究也证明了引力辐射带走能量，即引力辐射使得孤立引力源的引力质量下降 [Bondi, 1957]。按照广义相对论，引力场在空间中以光速传播，就形成引力波。这种波是具有两个独立自由度的、自旋为2的波。与其它种类的物理波动类似，引力波也携带能量。在引力波传播所经过的时空点处，发生空间伸缩等物理现象。引力波与电磁波有许多类似的性质，但是电磁波是电磁场在时空中的传播，而引力波是时空度规场自身扰动的传播 [Weinberg, 1972]。引力波可以产生于天体物理、宇宙学的许多物理过程中。引力波的研究和探测对于天体物理、宇宙学具有重要意义。从理论角度来看，广义相对论理论是迄今最为成功的引力理论，它的许多重要预言都得到了观测和实验的验证。然而，它的一项重大预言——引力波，尚未被直接探测到。这阻碍了引力场的量子理论、基本粒子的统一理论和理论物理的发展。引力波探测对于物理学的进一步发展的研究具有重大意义。下面简短地介绍引力波的基本性质，引

力波源，以及探测方面的现状。

通常引力波的能量密度要远远小于电磁波的能量。这就给引力波的探测带来很大困难。引力辐射大致分为三种：周期性的孤立源引力辐射（periodic sources），主要来自中子星自转，双致密星系统的相互绕转以及黑洞的吸积等；突发式的引力波辐射事件（pulsed sources），如超新星爆发等；随机引力波源，例如宇宙背景的残余引力波（relic gravitational waves），它产生于早期宇宙的量子涨落，经过宇宙膨胀的若干阶段（尤其是暴涨），最终演化成现在的宇宙残余背景引力波。我们先简要介绍弱场近似下的引力辐射的性质和产生，更详细的讨论可以参考文献 [Weinberg, 1972]。假设引力场是弱场，背景时空是平直的，用闵可夫斯基度规来描述，而引力波可以看作在背景时空度规的扰动传播，可以用度规张量来描述，

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (3-1)$$

其中 $\eta_{\mu\nu}$ 是闵可夫斯基度规， $h_{\mu\nu}$ ($|h_{\mu\nu}| \ll 1$) 为度规扰动。时空间隔线元为

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + h_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (3-2)$$

$h_{\mu\nu}$ 是一个 4×4 的对称张量，有十个的分量，但是由于引力场方程具有规范不变性和坐标变换下不变的性质，因此实际上引力波只有两个独立的动力学自由度。如果我们假设某一系列引力波沿 z 轴方向传播，在横向无迹（TT）规范下，引力波的度规为

$$h_{\mu\nu}^{TT} dx^\mu dx^\nu = h_+(x^i, t)(dx^2 - dy^2) + 2h_\times(x^i, t) dx dy, \quad (3-3)$$

其中 h_+ 和 h_\times 即为引力波的两个独立的自由度，称为辐射引力场的两个极化自由度。当引力波经过我们的探测仪器时，将导致探测仪器的长度产生伸缩效应。如果仪器原始长度为 L ，当引力波 h_{jk} 经过的时候，仪器长度的变化为 [Weinberg, 1972]

$$\delta L = \frac{1}{2} L h_{jk} \hat{n}^j \hat{n}^k, \quad (3-4)$$

h_+ 分量可以使得探测仪器 x 和 y 方向的长度产生周期振荡，而 h_\times 分量可以使得探测仪器 x 轴与 y 轴夹角方向的长度产生振荡。

引力波辐射的机制和电磁场的产生机制不同，引力波是四极辐射，也就是说引力波源的能动张量的四极矩需随时间变化。假设探测器距离引力波源为 r ，则接收的引力波信号为（取到一阶小量）

$$h_{ij}^{TT}(t, r) = \frac{2G}{r c^5} \frac{d^2}{dt^2} Q_{ij}^{TT}(t - r). \quad (3-5)$$

其中 Q_{ij}^{TT} 为 TT 规范下的引力波源的能动张量的四极矩。如果假设引力波的两个极化分量相当，引力波的能流密度量级为 [Weinberg, 1972]

$$I = \frac{\pi c^3}{4G} h^2 \nu^2, \quad (3-6)$$

距离地球距离为 r 的波源,在时间 $T \approx 1/\nu$ 内辐射的能量为 $\Delta E = 4\pi r^2 I/\nu$, 引力波的振幅为

$$h \approx \frac{1}{r} \left(\frac{G}{\pi^2 c^3} \frac{\Delta E}{\nu} \right)^{1/2}. \quad (3-7)$$

若知道引力波的频率 ν 及引力源的能量损失，就可以对引力波的振幅作出估计。更高极矩所产生的引力辐射非常微弱，通常忽略不计。

本小节简要介绍一下几种孤立的引力波辐射源。对于地面的和空间的引力波探测器来说孤立的引力波源都是极为重要的探测对象。这种波源主要分为两类：周期性波源和突发式波源。实际的引力波发射过程依赖于具体的物理环境和条件，目前人们对这些过程细节还不完全了解，通常只能作量级的估算。

§ 3.1.1 周期性的引力波源 (periodic sources)

♣: 双星系统

两个紧靠的星体互相绕转而形成的体系，具有能动张量的四极矩，可以产生引力辐射。引力辐射带走能量，可以使得该系统的旋转频率增加。这类系统通常包括双中子星系统、双黑洞系统以及一个黑洞和一个中子星组成的系统。目前发现的一千多颗脉冲星中，有六个双中子星系统，分别为PSR J1518+4904，B1913+16，B1534+12，B2127+11c，B2303+46，B1820-11，共同质量在 $M_1 + M_2 \sim 2.6 - 2.8M_\odot$ ，其中PSR B1820-11的伴星可能不是中子星，参见文献 [Nice et al., 1996]。对于地面

干涉仪引力波探测器，致密双星系统是一类最重要的引力波源。如果波源距离地球的距离为 r ，那么我们接收到的引力波的幅度约为 [Grishchuk, 1988]

$$h \approx 10^{-21} \frac{100\text{pc}}{r} \left(\frac{m}{M_{\odot}} \right)^{5/3} \left(\frac{\nu}{10^{-4}\text{Hz}} \right)^{2/3}, \quad (3-8)$$

这里 m 是星体的质量，而引力波的频率和双星系统的旋转频率相当。由上式可见，质量比较大且距离比较近的双星系统才有较强的引力波。

理论计算表明双致密星系统可以被发现的概率 D 与系统并合的速率的关系为 [Grishchuk et al., 2000]

$$\frac{D_{BH}}{D_{NS}} = \frac{R_{BH}}{R_{NS}} \left(\frac{M_{BH}}{M_{NS}} \right)^{5/2}, \quad (3-9)$$

其中下标 BH 和 NS 分别指的是双黑洞系统和双中子星系统。 M_{BH} 和 M_{NS} 分别为系统的啁质量 (chirp mass) $M = (M_1 M_2)^{3/2} / (M_1 + M_2)^{1/5}$ 。如果假设 $M(BH) > M_{cr} = 80M_{\odot}$ ，可以得到结果

$$\frac{D_{BH}}{D_{NS}} = \left(\frac{80M_{\odot}}{10M_{\odot}} \right)^{-1.35} \left(\frac{8.5M_{\odot}}{1.40M_{\odot}} \right)^{5/2} \approx 5.5. \quad (3-10)$$

如果黑洞的质量可以小于 $80M_{\odot}$ ，这个估计值将会更大。可见双黑洞系统是比较普遍的一种引力波源。几个黑洞的可能候选者为，Cyg X-1, LMC X-3, LMC X-1, A0620-00, GS2023+338, GSR1121-68, GS2000+25, GRO J0422+32, GRO J1655-40, XN Oph 1977, 数据来源于 [Grishchuk et al., 2000]。它们的平均质量为 $8.5M_{\odot}$ 。这一类周期性的引力波源是地面上探测最可能直接探测到的。

♣: 旋转的中子星

旋转的中子星是另外一种比较重要的周期性引力波源。当中子星关于旋转轴不对称时，四极矩会随时间变化，可以产生引力辐射。根据四极矩模型不同，其辐射的频率和中子星的自转频率相当，平均幅度为 [Grishchuk et al., 2000; Jaranowski et al., 1998]

$$h = (3 \sim 17) \times 10^{-27} \frac{I_{zz}}{10^{45}\text{g} \cdot \text{cm}^2} \frac{\epsilon}{10^{-6}} \frac{10\text{kpc}}{r} \left(\frac{f}{200\text{Hz}} \right)^2, \quad (3-11)$$

其中 r 为到引力波源的距离, I_{zz} 为惯量张量沿转轴方向的分量, f 为中子星的转动频率, ϵ 为垂直转轴方向的椭率。由该公式可以通过 h 的上限估计星体椭率的上限。最近LIGO 引力波探测器第二次的科学运行 [Abbott et al., 2004] 对28个孤立的脉冲星进行探测, 但是在 $\sim 0.3 \times 10^{-23}$ 的测量精度上仍然没有发现引力波信号, 并由此定出了它们的椭率的上限。例如, 脉冲星 B0021-72C 的频率 $f = 173.71$ Hz, 频率变化率 $\dot{f} = +1.50 \times 10^{-15}$ Hz/s, 引力波上限 $h = 4.3 \times 10^{-24}$, 椭率上限 $\epsilon = 16 \times 10^{-5}$; 脉冲星 B0021-72F 的 $f = 381.16$ Hz, $\dot{f} = -9.37 \times 10^{-15}$ Hz/s, $h = 7.2 \times 10^{-24}$, 椭率上限 $\epsilon = 5.7 \times 10^{-5}$; 椭率最小的是脉冲星 J2124-3358, $f = 202.79$ Hz, $\dot{f} = -8.45 \times 10^{-16}$ Hz/s, 椭率上限 $\epsilon = 0.45 \times 10^{-5}$ 。有关这次观测的敏感度以及对所观测的28个脉冲星的限制, 参见 LIGO 第二次科学运行结果报告 [Abbott et al., 2004]。

♣: R-模式的不稳定性

近年来研究表明转动的相对论星体具有一类不稳定的扰动模式, 称为R-模式 [Andersson, 1998]。当不考虑引力辐射时, 这类模式是稳定的, 但引力辐射可以反作用于该模式, 导致扰动不稳定, 其能量消耗来源于星体的转动能量。这类扰动模式具有以下两个特点: (1) 没有粘性时, 它们对所有的角速度都是不稳定的; (2) 只考虑主要项时, 引力辐射只取决于动量密度的分布以及演化, 而与质量分布无关。

图 (3-45) 给出了低转速星体最低阶辐射模式的流体扰动, 参见 [Finn, 1999]。这种扰动的演化其实就是相应于地球大气和海洋里的Rossby波。图中的线表示了流体的流线。星体低速旋转时, 流体运动几乎没有径向分量。当星体不转动时, 流体会以图示的模式以恒定的角速度循环运动, 流体的动量四极矩具有恒定的振幅。有转动时, 科里奥里 (Coriolis) 力的作用使得循环具有周期性, 四极矩对时间的二阶导数非零, 产生引力辐射。对中子星物质粘性的研究表明, 在中子星刚形成时, 在一段时期内 (可以持续一年左右的时间) R-模式为不稳定的, 产生近周期性的强引力辐射, 此时星体转动频率约为 10^3 到 10^2 Hz 的量级, 引力波的振幅为 [Andersson, 1998]

$$h \approx 2.3 \times 10^{-26}$$

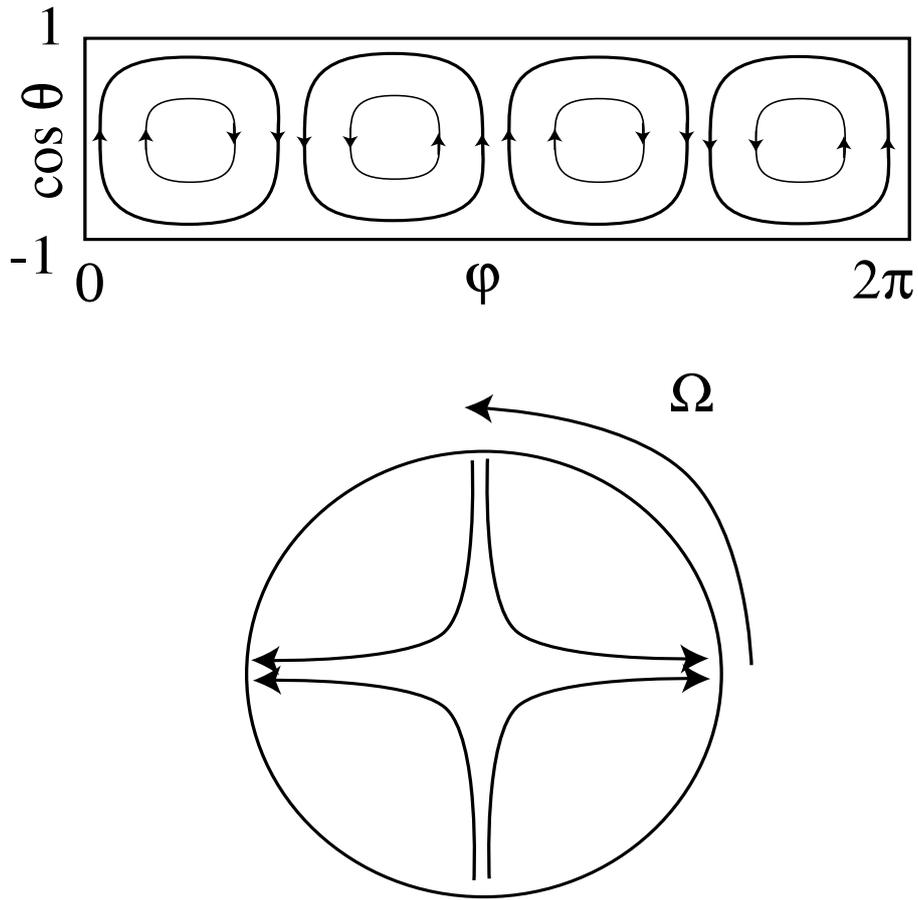


图 3-1: R-模式的低阶扰动, 流体相对于星体转动的流动示意图, 其中下图是赤道剖面图 [Finn, 1998]。

$$\left(\frac{P_c}{1\text{ms}}\right)^{1/2} \left(\frac{M}{1.4M_\odot}\right)^{1/4} \left(\frac{R}{10\text{km}}\right)^{1/4} \left(\frac{\dot{M}}{10^{-8}M_\odot/\text{yr}}\right)^{1/2} \left(\frac{1\text{kpc}}{r}\right), \quad (3-12)$$

其中 P_c 为星体的自转周期, M 为星体质量, R 为半径, \dot{M} 为年质量吸积率。对于星体 $Sco X - 1$, $r = 0.7 \text{ kpc}$, $\dot{M} = 3 \times 10^{-9} M_\odot/\text{yr}$, 有 $h \approx 3.5 \times 10^{-26}$ 。目前直接探测这一类源较困难。

♣: X 射线双星系统中的中子星

近年来, Rossi 卫星X射线探测器发现一类发射X射线的双星系统的功率谱呈准周期性的高频信号 [Finn, 1999], 有些作者认为这种准周期性可能

是两种频率合成的结果，其中一种频率即为中子星的旋转频率。观测发现中子星的旋转频率都集中在250 – 350Hz 左右的一个极窄的范围内。我们知道，一颗中子星诞生时可以具有比较高的频率（几百 Hz 左右），但会很快减缓至几十Hz的正常频率。但是在一个双星系统中，当其伴星变成一颗红巨星时，中子星开始吸积它的质量和角动量，虽然该吸积过程非常缓慢（ $\dot{M} = 10^{-10} M_{\odot}/\text{yr}$ ），但吸积的角动量可以使得中子星旋转速度加快并加热其壳层。一般认为毫秒脉冲星就是这样形成的。但是为什么X射线双星系统中的中子星的转动频率都集中在300Hz 附近呢？也有人认为由于缺乏有效的导热机制，使得中子星的吸积盘上可能存在一个温度梯度，只要该温度分布具有大尺度的不对称性，就可以产生质量的四极距（ $\sim 10^{-7} MR^2$ ），从而可以以引力辐射的形式带走吸积盘上的角动量，从而限制星体的旋转频率。该机制只适用于吸积过程，当吸积结束以后，过程就会很快停止。只要知道脉冲星的转动频率，进一步可以分析出引力波的频率。有些研究者认为 [Bildsten, 1998]，在一些源中，引力波的振幅可以达到 $h \sim (0.5 - 3) \times 10^{-26}$ 的量级。这一类源的直接探测比较困难。

§ 3.1.2 突发式的引力波源 (pulsed sources)

♣: 超新星爆发

核塌缩超新星爆发使得星体物质以极高的速度（可以达到0.001c的量级）爆发，最后在其中心形成一个致密的核，一般为一个中子星或者黑洞。由于超新星的前身星具有几十个太阳质量的巨大质量，而且具有致密的核球以及极大的加速度，因此它可能是一个理想的引力波源。但是如果超新星爆发为完全的球对称，就不会有引力辐射产生。下面的几个可能的物理过程被认为将导致超新星非球对称爆发：

- (1) 原初的密度和温度的扰动可能使得星体不均匀地塌缩；
- (2) 高速旋转可以导致压力不稳定性 (bar instability)；
- (3) 流体动力学不稳定性可以产生很大的对流，它可以影响星体的原初爆发；
- (4) 遗留的中子星形成时具有很小的激发能量。该过程损失的能量约为

$$|E| \sim 3 \times 10^{53} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^2 \left(\frac{R}{10\text{km}} \right)^{-1} \text{ erg}, \quad (3-13)$$

其中大部分能量以中微子形式带走，只有大约不到 10^{-7} 的能量被引力波带走。而辐射的引力波的振幅为 [Grishchuk, 2000]

$$h \approx 2 \times 10^{-19} \frac{10\text{kpc}}{r} \left(\frac{\Delta E}{10^{-4}M_{\odot}c^2} \right)^{1/2} \left(\frac{10^3\text{Hz}}{\nu} \right)^{1/2}, \quad (3-14)$$

其中 ΔE 为有引力波带走的能量。

♣: 黑洞的形成过程

当中子星吸积到足够多的物质而超过其临界质量的时候，只要存在微小的扰动，一般最终会塌缩成一个黑洞。如果该过程偏离球对称，就会有引力波辐射出来。可以用解析的方法来求解该过程 [Sildel&Moore, 1987]，但由于非线性的爱因斯坦方程非常复杂，可以用数值模拟的方法来解。文献 [Stark&Piran, 1985] 作了一些简单的假设进行拟合，可以描述大质量恒星塌缩成黑洞的过程。结果表明，辐射的引力波的能谱与塌缩星体的初始状态无关，仅由黑洞的质量和角动量决定。塌缩的过程可以作如下描述 [Ferrari, 2000]：当星体总的角动量 $a = J/(GM^2/c^2)$ 大于临界值 a_{crit} 的时候，塌缩不会发生；而当条件不满足的时候，小扰动会急剧增长，最终导致星体的塌缩。该过程辐射的引力波中 h_+ 分量是主要的，而 h_{\times} 分量非常小，可以忽略不计。一般该过程中的能量损失 $\Delta E_{GW}/M_{core}c^2 \leq 7 \times 10^{-4}$ 。辐射引力波的振幅约为

$$h_+ \sim 3.0 \times 10^{-22} \left(\frac{M}{1.5M_{\odot}} \right) \left(\frac{r}{15\text{Mpc}} \right)^{-1}, \quad (3-15)$$

而其持续的时间大概只有 6×10^{-4} 秒。

♣: 并合的致密双星

两颗互相绕转的致密双星系统，由于引力波带走了能量，双星会不断靠近，转动加快，最终将以两星的并合而结束。并合过程中发生的引力辐射也是一种较重要的引力波源。由于这类过程大都在强引力场中进行，详细求解非常复杂。一般采取数值的办法来拟合 [Smarr, 1979]。设距离地球距离为 r 的双星系统，约化质量为 m ，对该过程中作简单的估算给出辐射引力波约为：

$$h \approx 4 \times \frac{G^{5/3}}{c^4} \frac{1}{r} m^{5/3} \nu^{2/3}, \quad (3-16)$$

当两星接触以后，该过程就很快结束了。此时对应于最大的辐射频率 $\nu \approx 10^3 \text{Hz}$ 。在这种情况下，如果取 $r = 10 \text{kpc}$ ，可以得到 $h = 5 \times 10^{-19}$ 。这种双星系统的并合过程是一种非常强的引力波源，但是这种事件发生的频率却非常小 [Grishchuk, 1988]。在银河系中，一般几千年才会发生一次，只有在宇宙学尺度上，事件发生的频率才会变得比较大一些。

除了这些孤立的引力波源，还有一类非常重要的引力波，即暴涨时期产生并残留至今的宇宙背景的残余引力波。这种引力波是本论文讨论的重点之一。在下面我们将对其作详细地讨论。

§ 3.2 暴涨宇宙学与残余引力波的产生

标准的大爆炸宇宙模型是建立在宇宙学原理和广义相对论的基础上。这是目前为止最成功的宇宙学模型，它成功的预言了宇宙的膨胀，宇宙微波背景辐射的存在，以及宇宙核合成的发生。近几年来大量的观测已经对该模型参数提出了比较严格的限制，并最终确立了宇宙学的标准模型：即 ΛCDM 模型。该模型认为，宇宙早期经历了辐射为主阶段，物质为主阶段，最终演化到现在的宇宙学常数为主阶段。但是大爆炸宇宙学也存在着一些与初条件有关的问题，如平坦性疑难，均匀性疑难，超重粒子疑难，结构起源疑难等等。这些问题由来已久，并已经被很多教科书中详细研究过。我们这里不再对其作细致的讨论。我们只是需要指出：这些问题，归根结底都是由于在宇宙漫长的物质和辐射为主阶段，宇宙视界的增长比尺度因子的膨胀要快，造成今天有因果联系的区域在宇宙早期都是没有不可能存在联系。下面我们首先简单介绍一下暴涨模型的基本思想及其动力学描述。然后我们将介绍暴涨所预言的标量和张量扰动的原初功率谱。注意这里的张量扰动正是我们所关心的宇宙残余引力波。

§ 3.2.1 暴涨宇宙学的基本思想与其动力学描述

1981年，Guth提出了暴涨理论 [Guth, 1981]，后来得到了进一步的发展 [Lidde, 1982; Albrecht&Steinhardt, 1982]，尤其是近几年通过对CMB温

度各向异性功率谱 [Bennett et al., 2003] 以及物质功率谱的观测 [Tegmark et al., 2004] 间接证明了该模型。暴涨模型认为：在辐射为主之前，宇宙经历了一个加速膨胀的阶段：

$$\ddot{a}(t) > 0. \quad (3-17)$$

利用Friedmann 方程可知，这要求宇宙中的压强和能量密度满足

$$(\rho + 3p) < 0, \quad (3-18)$$

即只要宇宙中总的状态方程小于 $-1/3$ ，宇宙才能加速膨胀。

为了清晰地看到暴涨模型的性质，我们现以一个极端情况 ($p = -\rho$) 为例来进行分析，这就是人们通常所说的 de Sitter 膨胀。容易得到，在这个阶段

$$\rho = \text{constant} \quad H = \text{constant}, \quad (3-19)$$

这里 H 是暴涨时期的Hubble 常数。因此宇宙尺度因子的变化规律为

$$a = a_i e^{H(t-t_i)}. \quad (3-20)$$

其中 t_i 表示暴涨开始的时刻。我们看到此时宇宙的尺度因子对时间呈指数膨胀，一般模型认为该模型至少要使暴涨在极短的时间内膨胀 10^{20} 倍以上。因此被称为暴涨 (inflation)，而宇宙视界在这时却几乎没有变化。因此在该阶段宇宙的急速膨胀将本来有因果联系的区域迅速推到视界之外，当进入实物为主阶段以后这些区域再慢慢回到视界之内，因而自然地回答了大爆炸模型中的平坦性疑难，均匀性疑难，超重粒子疑难。而且暴涨将早期的量子涨落推出视界变成经典涨落形成了宇宙结构起源的种子，因而也自然回答了宇宙的结构起源疑难，这就是暴涨理论的基本思想。但是大爆炸模型的成功，使得暴涨不能永远持续下去，它必然经历一段时间而及时停止下来。暴涨理论不能代替大爆炸理论，而是对它的合理补充。在暴涨阶段向大爆炸阶段演化时还需要一个宇宙再加热 (reheating) 过程。

这方面的研究已经非常成熟了，可以参考综述性文章 [Sasaki, 1986]。在标准暴涨模型中，暴涨过程通过一个标量场来实现，这个标量场被称为inflaton。inflaton 场的作用量能够被写为

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L} = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + V(\phi) \right), \quad (3-21)$$

这里对于 FRW 度规 $\sqrt{-g} = a^3$ 。从 Euler-Lagrangian 方程

$$\partial^\mu \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\delta\partial^\mu\phi} - \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\delta\phi} = 0 \quad (3-22)$$

我们得到

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - \frac{\nabla^2\phi}{a^2} + V_\phi(\phi) = 0. \quad (3-23)$$

注意这里 $V_\phi \equiv dV/d\phi$ 。由于 $3H\dot{\phi}$ 的出现，我们看到宇宙的膨胀阻碍着 inflaton 沿着势 $V(\phi)$ 的滚动。inflaton 的能动张量是

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - g_{\mu\nu}\mathcal{L}, \quad (3-24)$$

相应的能量密度和压强是

$$T_{00} = \rho_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) + \frac{(\nabla\phi)^2}{2a^2}, \quad (3-25)$$

$$T_{ii} = p_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi) - \frac{(\nabla\phi)^2}{6a^2}, \quad (3-26)$$

注意到如果 ϕ 的梯度项为主，我们有 $p_\phi = -\rho_\phi/3$ ，我们很难得到足够的解决标准模型若干问题的 e-folds 数。通常我们假设 inflaton 是近似均匀各向同性的，并存在很小的扰动成分。我们现在把 inflaton 场写为

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \phi(t) + \delta\phi(\mathbf{x}, t), \quad (3-27)$$

这里 $\phi(t)$ 是经典的背景场，而 $\delta\phi(\mathbf{x}, t)$ 代表 $\phi(t)$ 附近的量子扰动。在这一节中我们只考虑经典场 $\phi(t)$ 的演化，在下面的章节中我们再研究它的量子扰动以及相应的扰动谱的计算。因此能动张量成为

$$\rho_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi), \quad (3-28)$$

$$p_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi). \quad (3-29)$$

当 $V(\phi) \gg \dot{\phi}^2$ 的时候，我们有

$$p_\phi \simeq -\rho_\phi. \quad (3-30)$$

从这里我们看到了一个标量场为主且它的势能远远超过动能的宇宙处于 de Sitter 相中。即我们得到了一个被标量场真空能驱动的暴涨。此时 inflaton 场的运动方程是：

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_{\phi}(\phi) = 0. \quad (3-31)$$

为了有足够长的滚动时间，我们要求 $\ddot{\phi} \ll 3H\dot{\phi}$ 。因此一般地，我们称以下两个条件为慢滚条件：

$$\dot{\phi}^2 \ll V(\phi) \Rightarrow \frac{V_{\phi}^2}{V} \ll H^2, \quad (3-32)$$

$$\ddot{\phi} \ll 3H\dot{\phi} \Rightarrow V_{\phi\phi} \ll H^2. \quad (3-33)$$

当这两个条件满足的时候，inflaton 场将缓慢地沿着势能函数滚下，这段时期通常被称为慢滚动。我们可以定义慢滚动参数

$$\epsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2} = 4\pi G \frac{\dot{\phi}^2}{H^2} \simeq \frac{1}{16\pi G} \left(\frac{V_{\phi}}{V} \right)^2, \quad (3-34)$$

$$\eta \equiv \frac{1}{8\pi G} \left(\frac{V_{\phi\phi}}{V} \right), \quad (3-35)$$

$$\delta \equiv \frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}} \simeq \epsilon - \eta. \quad (3-36)$$

而相应的慢滚条件可以表示为

$$\epsilon \ll 1, \quad \eta \ll 1. \quad (3-37)$$

由于

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H} + H^2 = (1 - \epsilon)H^2, \quad (3-38)$$

可以看出，只有 $\epsilon < 1$ ，暴涨才会发生。最后当慢滚近似被考虑的时候，Hubble 方程和 inflaton 的运动方程变成

$$H^2 \simeq \frac{8\pi G}{3} V(\phi), \quad 3H\dot{\phi} \simeq -V_{\phi}(\phi). \quad (3-39)$$

§ 3.2.2 标量和张量原初扰动谱的解析计算

由于在暴涨期间, inflaton 场支配着宇宙的演化, inflaton 场的任何扰动都将引起相应的能动张量的扰动,

$$\delta\phi \Rightarrow \delta T_{\mu\nu}. \quad (3-40)$$

通过 Einstein 方程, 能动张量的扰动又会带来度规的扰动,

$$\delta T_{\mu\nu} \Rightarrow \delta g_{\mu\nu}. \quad (3-41)$$

反过来通过 inflaton 的扰动的 Klein-Gordon 方程, 度规的扰动又会影响 inflaton 场的扰动

$$\delta g_{\mu\nu} \Rightarrow \delta \left(\partial_\mu \partial^\mu \phi + \frac{\partial V}{\partial \phi} \right) = 0 \Rightarrow \delta\phi \quad (3-42)$$

这种逻辑说明 inflaton 场的扰动和度规的扰动是彼此紧密联系的, 必须一起来研究。

一般地, 我们考虑到 FRW 度规到一阶小量

$$g_{\mu\nu} = {}^{(0)}g_{\mu\nu}(t) + \delta g_{\mu\nu}(\mathbf{x}, t), \quad (3-43)$$

其中 ${}^{(0)}g_{\mu\nu}$ 描述度规的背景部分, $\delta g_{\mu\nu}$ 描述度规的扰动部分。度规的扰动有十个分量。根据自旋的不同, 可以将其分成四个分量的标量扰动, 四个分量的矢量扰动 (它来自场的转速, 相应于 vorticity 模), 和两个分量的张量扰动 (即引力波, 它是引力场自身的自由度)。在线性近似下, 这些自旋不同的扰动彼此独立地演化, 因而能够分别来研究它们。由于矢量扰动在宇宙中迅速衰减, 因此这里我们只研究标量扰动和张量扰动。

♣: 标量原初谱

对标量自由度, 一般的扰动度规可以被写为 [Sasaki, 1986]

$$ds^2 = a^2 \left[(1 + 2A)d\tau^2 - 2\partial_i B dx^i d\tau - ((1 - 2C)\gamma_{ij} + 2\partial_i \partial_j E) dx^i dx^j \right] \quad (3-44)$$

这里 τ 是共形时间, $\gamma_{ij} = \delta_{ij}$ 表示背景空间是平直的。描述标量扰动的四个变量 A, B, C, E 并不都是物理的, 还存在着规范任意性。它们在广义坐标变化下不发生改变。考虑无穷小的坐标变化:

$$x^\mu \longrightarrow \tilde{x}^\mu = x^\mu + \xi^\mu, \quad (3-45)$$

度规也发生相应的变化

$$\delta\tilde{g}_{\mu\nu} \equiv \tilde{g}_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} = -\xi_{\mu;\nu} - \xi_{\nu;\mu}, \quad (3-46)$$

其中 $;$ 好表示在度规 $g_{\mu\nu}$ 下的协变微分。矢量 $\xi^\mu = (\xi^0, \xi^i)$ 的空间分量可以分解成横向和纵向部分:

$$\xi^i = \xi^{\perp i} + \eta^i, \quad (3-47)$$

这里 ξ^i 表示度规 γ_{ij} 下对 ξ 的协变微分。结果参量 x^μ 包含两个标量型分量 (ξ^0, ξ) 和一个矢量型分量 η^i 。把方程(3-46)代入(3-44)可以得到

$$\tilde{A} = A - (a'/a)\xi^0 - \xi', \quad (3-48)$$

$$\tilde{B} = B + \xi^0 - \xi', \quad (3-49)$$

$$\tilde{C} = C + (a'/a)\xi^0, \quad (3-50)$$

$$\tilde{E} = E - \xi, \quad (3-51)$$

这里的撇号表示对共形时间求导。由上面的方程,我们可以构造两个规范不变量 Φ 和 Ψ 来刻画标量场的扰动:

$$\Psi = A + (1/a)[(B - E')a]', \quad \Phi = C - (a'/a)(B - E'). \quad (3-52)$$

在牛顿规范下, $B = E = 0$,因此有:

$$ds^s = a^2(\tau) [(1 + 2\Psi)d\tau^2 - (1 - 2\Phi)\gamma_{ij}dx^i dx^j]. \quad (3-53)$$

而暴涨场能动张量的各分量的一阶扰动的形式为[Sasaki, 1986]:

$$\delta T_0^0 = a^{-2} [\phi' \delta\phi' - \phi'^2 \Phi + 2V_\phi \delta\phi], \quad (3-54)$$

$$\delta T_i^0 = a^{-2} \phi' \delta\phi_{,i}, \quad (3-55)$$

$$\delta T_j^i = a^{-2} [-\phi' \delta\phi' + \phi'^2 \Phi + 2V_\phi \delta\phi] \delta_j^i = -\delta p \delta_j^i \quad (3-56)$$

相应的 Einstein 方程组为

$$\nabla^2 \Phi - 3\mathcal{H}(\Phi' + \mathcal{H}\Phi) = 4\pi G(\phi' \delta\phi' - \phi'^2 \Phi + a^2 V_\phi \delta\phi), \quad (3-57)$$

$$(\Phi' + \mathcal{H}\Phi)_{,i} = 4\pi G \phi' \delta\phi_{,i}, \quad (3-58)$$

$$\Phi'' + 3\mathcal{H}\Phi' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi = 4\pi G(\phi' \delta\phi' - \phi'^2 \Phi - a^2 V_\phi \delta\phi), \quad (3-59)$$

$$\Phi = \Psi, \quad (3-60)$$

其中 $\mathcal{H} \equiv a'/a$ 。利用该方程和背景方程可以得到

$$\Phi'' + 2 \left(\mathcal{H} - \frac{\phi''}{\phi'} \right) \Phi' + 2 \left(\mathcal{H}' - \mathcal{H} \frac{\phi''}{\phi'} \right) \Phi - \nabla^2 \Phi = 0. \quad (3-61)$$

另外线性扰动的 Klein-Gordon 方程为

$$\delta\phi'' + 2\mathcal{H}\delta\phi' - \nabla^2\delta\phi + a^2V_{\phi\phi}\delta\phi = 4\phi'\Phi' - 2a^2V_{\phi}\Phi. \quad (3-62)$$

为了计算原初扰动谱，我们必须先定义新的变量

$$u \equiv a\delta\phi + z\Phi, \quad z \equiv a\frac{\phi'}{\mathcal{H}} = a\frac{\dot{\phi}}{H}, \quad (3-63)$$

这样方程 (3-61) 可以化为：

$$u'' - \nabla^2 u - \frac{z''}{z}u = 0. \quad (3-64)$$

可以得到，在慢滚近似下

$$\frac{z''}{z} = 2a^2H^2 \left(1 + \frac{3}{2}\delta + \epsilon + \frac{1}{2}\delta^2 + \frac{1}{2}\epsilon\delta + \frac{1}{2}\frac{1}{H}\dot{\epsilon} + \frac{1}{2}\frac{1}{H}\dot{\delta} \right). \quad (3-65)$$

对 u 作平面波展开：

$$u(\mathbf{x}, \tau) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \{ u_k(\tau)\hat{a}_{\mathbf{k}}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + u_k^*(\tau)\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \}, \quad (3-66)$$

原初扰动产生于暴涨期间的量子涨落 [Guth&Pi, 1982]。考虑量子对易关系，

$$[u(\mathbf{x}_1, \tau), u'(\mathbf{x}_2, \tau)] = i\delta^3(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2), \quad (3-67)$$

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \delta^3(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2), \quad \hat{a}_{\mathbf{k}}|0\rangle = 0, \dots \quad (3-68)$$

则函数 u_k 满足归一化条件

$$u_k u_k'^* - u_k^* u_k' = i, \quad (3-69)$$

和运动方程[Sasaki, 1986]

$$u_k'' + \left(k^2 - \frac{z''}{z} \right) u_k = 0. \quad (3-70)$$

注意这里 $k = |\mathbf{k}|$ ，我们已经假设标量扰动是各向同性的。这就是暴涨期间的标量扰动方程，它也可以通过系统作用量变分展开到一阶小量并且量子化而得到 [Stewart&Lyth, 1993]。规范不变的 Bardeen 参数 ζ 这里可以表示为：

$$-\zeta = \Phi + \frac{\mathcal{H}}{\phi'} \delta\phi - \frac{\nabla^2 \Phi}{12\pi G \phi'^2}, \quad (3-71)$$

在大尺度上 ζ 是守恒的，它与 u 的关系为：

$$u = -z\zeta, \quad (3-72)$$

而能够与观测直接相关的宇宙早期标量曲率扰动功率谱的定义为

$$P_S(k) \equiv \frac{k^3}{2\pi^2} |\zeta_k|^2, \quad (3-73)$$

这里 ζ_k 是 Bardeen 参量的傅里叶变换系数。给定具体的暴涨势能函数和初始条件我们可以具体求解出 $P_S(k)$ 。对于给定的模，当它在暴涨期被产生时 $k \gg aH$ ， $k^2 \gg z''/z$ ，一般取绝热真空，它对应的模函数为

$$u_k \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{-ik\tau}, \quad (3-74)$$

早期慢滚动近似下解析计算原初谱的普遍方法由 E.D.Stewart 和 D.H.Lyth [Stewart&Lyth, 1993] 给出，这里不再作详细介绍，只给出其结果

$$P_S(k) \simeq \frac{2^{2\nu-3}}{4\pi^2} \frac{\Gamma^2(\nu)}{\Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right)} (1-\epsilon)^{2\nu-1} \frac{H^4}{|\dot{\phi}|^2} \Bigg|_{aH=k}, \quad (3-75)$$

$$= \frac{1}{96\pi^2} 4^\nu \frac{\Gamma^2(\nu)}{\Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right)} (1-\epsilon)^{2\nu-1} \frac{V^3}{V_\phi^2} \Bigg|_{aH=k}, \quad (3-76)$$

这就是所谓的 Stewart-Lyth 公式，其中 $\nu = \frac{1+\epsilon+\delta}{1-\epsilon} + \frac{1}{2}$ 。上式中所有变量都在 $k = aH$ 处取值。当然该公式只有在慢滚近似成立，对于一般情况还需要对方程 (3-70) 作详细的数值求解，这里不作详细讨论。

标量谱指数是表征原初谱的重要参量，其定义为：

$$n_s(k) \equiv 1 + \frac{d \ln P_S}{d \ln k}, \quad (3-77)$$

下面我们看如何解析计算标量谱指数。根据 e-folds 数的定义，

$$N(t) \equiv \ln \left(\frac{a_e}{a} \right) = \int_t^{t_e} H(t) dt, \quad (3-78)$$

可以得到：

$$dN = -H dt (= d \ln a). \quad (3-79)$$

在暴涨的慢滚阶段，

$$\frac{dN}{d\phi} = -\frac{H}{\dot{\phi}} = -\frac{V}{V_\phi}, \quad (3-80)$$

$$d \ln k = d \ln(aH) \simeq d \ln a = H dt = -dN(\phi), \quad (3-81)$$

可以发现：

$$\frac{d\phi}{d \ln k} = -\frac{V_\phi}{V}, \quad (3-82)$$

因而根据标量谱的表达式：

$$\begin{aligned} n_s &= 1 + \frac{d \ln P_S}{d \ln k} \\ &= 1 + \left(3 \frac{V_\phi}{V} - 2 \frac{V_{\phi\phi}}{V_\phi} \right) \left(-\frac{V_\phi}{V} \right) \\ &= 1 - 6\epsilon + 2\eta. \end{aligned} \quad (3-83)$$

其中的 ϵ , η 都是前面定义过的慢滚动参数。相应的谱指数的跑动为

$$\alpha \equiv \frac{dn_s}{d \ln k} = 16\epsilon\eta - 24\epsilon^2 - 2\xi \quad (3-84)$$

其中 ξ 是另外一个慢滚动参数，其定义为

$$\xi = \frac{V_\phi V_{\phi\phi\phi}}{V^2}. \quad (3-85)$$

应当指出的是，由于 P_S 的取值是在 $k = aH$ 处，因而 n_s 和 α 的取值也都是在 $k = aH$ 处。一般满足慢滚近似的暴涨模型预言的原初标量扰动谱是近似尺度不变的，即 $n_s \simeq 1$ ，而谱指数的跑动也是非常小的，大约在 $10^{-4} \sim 10^{-3}$ 的量级，这也为最近的观测所支持。

♣: 张量原初谱

下面我们讨论原初张量扰动，即宇宙残余引力波的原初谱。在 FRW 宇宙中，线性张量扰动的度规一般可以写为

$$ds^2 = a^2(\tau)[d\tau^2 - (\delta_{ij} + h_{ij})dx^i dx^j], \quad (3-86)$$

其中 h_{ij} 是对称、无迹、无散的三维张量，它只有两个独立的物理自由度，用 $\lambda = +, \times$ 来表示。张量扰动的展开式为：

$$h_{ij} = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\lambda=+,\times} \psi_{\mathbf{k},\lambda}(\tau) e_{ij}(\mathbf{k}, \lambda) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad (3-87)$$

这里 $e_{ij}(\mathbf{k}, \lambda)$ 是极化张量，满足关系式：

$$e_{ij} = e_{ji}, \quad e_{ii} = 0, \quad k^i e_{ij} = 0, \quad (3-88)$$

$$e_{ij}(\mathbf{k}, \lambda) e_{ij}^*(\mathbf{k}, \mu) = \delta_{\lambda\mu}, \quad (3-89)$$

$$e_{ij}(-\mathbf{k}, \lambda) = e_{ij}^*(\mathbf{k}, \lambda). \quad (3-90)$$

同样地可以定义张量扰动的功率谱 P_T ：

$$\langle \phi_{\mathbf{k},\lambda}, \phi_{\mathbf{l},\lambda}^* \rangle = \frac{2\pi^2}{k^3} P_T \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{l}), \quad (3-91)$$

与标量扰动的计算类似，我们可以写出二阶张量扰动的作用量：

$$\begin{aligned} {}^{(2)}S &= \frac{1}{8} \int a^2 [(h'_{ij})^2 - (\partial_l h_{ij})^2] d\tau d^3\mathbf{x}, \\ &= \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{k} \sum_{\lambda} \int \left[|v'_{\mathbf{k},\lambda}|^2 - \left(k^2 - \frac{a''}{a} \right) |v_{\mathbf{k},\lambda}|^2 \right] d\tau \end{aligned} \quad (3-92)$$

这里

$$v_{\mathbf{k},\lambda} = \frac{1}{2} a \psi_{\mathbf{k},\lambda}. \quad (3-93)$$

经过量子化：

$$\hat{v}_{\mathbf{k},\lambda}(\tau) = v_{\mathbf{k},\lambda}(\tau) \hat{a}_{\mathbf{k},\lambda} + v_{\mathbf{k},\lambda}^*(\tau) \hat{a}_{-\mathbf{k},\lambda}^\dagger, \quad (3-94)$$

$$\left[\hat{a}_{\mathbf{k}_1,\lambda}, \hat{a}_{\mathbf{k}_2,\sigma}^\dagger \right] = \delta_{\lambda\sigma} \delta^3(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2), \quad \hat{a}_{\mathbf{k},\lambda}|0\rangle = 0, \dots \quad (3-95)$$

因而可以得到 v_k 的运动方程 [Stewart&Lyth, 1993],

$$v_k'' + \left(k^2 - \frac{a''}{a} \right) v_k = 0. \quad (3-96)$$

绝热条件要求

$$v_k \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{-ik\tau}, \quad (3-97)$$

可以得到张量扰动的 Stewart-Lyth 公式:

$$P_T(k) \simeq 2^{2\mu-3} \frac{\Gamma^2(\mu)}{\Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right)} (1-\epsilon)^{2\mu-1} \frac{H^2}{4\pi^2} \Bigg|_{aH=k}, \quad (3-98)$$

$$\simeq 2^{2\mu-3} \frac{\Gamma^2(\mu)}{\Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right)} (1-\epsilon)^{2\mu-1} \frac{V}{12\pi^2} \Bigg|_{aH=k}, \quad (3-99)$$

其中 $\mu = \frac{1}{1-\epsilon} + \frac{1}{2}$ 。通常张量谱指数的定义为

$$n_t \equiv \frac{d \ln P_T}{d \ln k}, \quad (3-100)$$

在慢滚近似下:

$$n_t = \frac{d \ln V}{d \ln k} = -2\epsilon, \quad (3-101)$$

相应的谱指数的跑动为:

$$\alpha_t \equiv \frac{dn_t}{d \ln k} = 4\epsilon\eta - 8\epsilon^2. \quad (3-102)$$

一般地单标量场模型预言的谱指数为 $n_t < \simeq 0$, $\alpha_t \simeq 0$, 即近似尺度不变谱。但是仍然有一些模型能够预言 $n_t > \simeq 0$ 的谱指数 [Liddle&Urena-Lopez, 2006]。

为了联系标量和张量扰动的大小, 我们可以定义一个新的参数: 张量/标量比 r , 它有两种定义办法: 一种是通过原初谱, 即:

$$r \equiv \frac{P_T}{P_S}, \quad (3-103)$$

这种定义显然与 k 的选择有关。但是由于标量和张量原初谱都是近似尺度不变得, 因此选择不同的 k , 对 r 的影响不大; 另外一种定义办法是通过直接的观测量 (两种四极矩):

$$r \equiv \frac{C_2^{\text{tensor}}}{C_2^{\text{scalar}}}, \quad (3-104)$$

其中 C_2^{tensor} 是张量四极矩, C_2^{scalar} 是标量四极矩。这两种定义稍有差别, 具体的关系可以参考文献[Liddle&Lyth, 2000], 这里不再详细讨论。本文中我们将采用第一种定义办法。可以证明单标量场预言的张量/标量比满足一致性关系 (consistence relation) :

$$r = 16\epsilon = -8n_t. \quad (3-105)$$

§ 3.2.3 暴涨模型的分类以及对残余引力波的预言

暴涨的分类有很多种方法, 我们组要参照 WMAP 组[Bennett et al., 2003]以及文献[Dodelson et al., 1997]的方法, 依照不同暴涨模型的观测效应来对它们进行分类, 这种方法只局限于满足慢滚近似的单场暴涨模型, 依照慢滚参数所处的区域不同, 单场慢滚暴涨模型具体可分为如下四类:

- A: 负曲率模型, $\eta < 0$;
- B: 微正 (或零) 曲率模型, $0 \leq \eta \leq 2\epsilon$;
- C: 中正曲率模型, $2\epsilon\eta \leq 3\epsilon$;
- D: 巨正曲率模型, $\eta > 3\epsilon$,

由上节的讨论我们不难发现如下结论:

- A: $n_s < 1$, $0 \leq r < (8/3)(1-n_s)$, $(-2/3)(1-n_s)^2/3 < \alpha + 2\xi < 0$;
- B: $n_s < 1$, $(8/3)(1-n_s) \leq r \leq 8(1-n_s)$, $(-2/3)(1-n_s)^2 \leq \alpha + 2\xi \leq 2(1-n_s)^2$;
- C: $n_s < 1$, $r > 8(1-n_s)$, $\alpha + 2\xi > 2(1-n_s)^2$;
- D: $n_s \geq 1$, $r \geq 0$, $\alpha + 2\xi > 0$ 。

下面我们简要介绍以上四类分别对应的暴涨模型。

♣ A: 负曲率模型, $\eta < 0$;

负曲率模型的势通常来自于一些对称性自发破缺, 比如新暴涨 (new inflation) 模型以及自然暴涨 (natural inflation) 模型 [Lyth&Riotto, 1999], 它们可以参数化为如下形式:

$$V = \Lambda^4[1 - (\phi/\mu)^p], \quad p \geq 2, \quad (3-106)$$

只有 $\phi < \mu$ 时该势才是有效的。自发破缺德超对称理论中考虑单圈修正得到的模型也属于这一类，它的势函数具有如下的形式：

$$V = \Lambda^4 [1 + \alpha \ln(\phi/\mu)], \quad p \geq 2, \quad (3-107)$$

这一类模型的特点是引力波的贡献很小，一般给出红谱 ($n_s < 1$)。

♣ B: 微正（或零）曲率模型， $0 \leq \eta \leq 2\epsilon$ ；

微正（或零）曲率模型对应的势能函数具有多项式或指数形式。前者的形式如下：

$$V = \Lambda^2 (\phi/\mu)^p, \quad p \geq 2, \quad (3-108)$$

它的慢滚参数的关系是： $0 < \eta < 2\epsilon$ ；后者具有形势

$$V = \Lambda^4 \exp(\phi/\mu), \quad (3-109)$$

对于它而言， $\eta = 2\epsilon$ 。而 $\eta = 0$ 对应的模型是线性势： $V = \Lambda(\phi/\mu)$ 。多项式模型通常出现在混沌暴涨（chaotic inflation）模型[Lyth&Riotto, 1999]，其中 $p = 2$ 时暴涨是由质量项驱动的， $p = 4$ 时暴涨是由暴涨自由相互作用项驱动的。指数势可以由Brans-Dicke引力理论共形变换到爱因斯坦系后得到，如扩充暴涨（extended inflation）模型[Lyth&Riotto, 1999]。它预言的原初谱具有严格的幂律形式。这一类模型一般给出红谱，预言的引力波相对较大。

♣ D: 巨正曲率模型， $\eta > 3\epsilon$ ；

在讨论C类模型之前先讨论D类模型是有必要的。巨正曲率模型的代表是杂化暴涨（hybrid inflation）模型[Lyth&Riotto, 1999]。它可以参数化为如下的形式：

$$V = \Lambda^4 [1 + (\phi/\mu)^p], \quad (3-110)$$

其中 $\phi/\mu < 1$ 。在杂化暴涨模型中，需要存在另外一个辅助场，它与 ϕ 耦合并触发暴涨的结束。一般对于暴涨期间的动力学来说，只有暴涨子 ϕ 有贡

献，所以杂化暴涨模型仍然被归类到单场暴涨模型中。超对称框架下的跑质量暴涨模型[Lyth&Riotto, 1999]，也归类于巨正曲率模型，对应的势能函数形式为

$$V = \Lambda^4 \{ 1 + (\phi/\mu)^2 [1 + \alpha \ln(\phi/Q)] \}. \quad (3-111)$$

这一类模型的特点是它预言的原初谱一般都是蓝谱 ($n_s > 1$)，但引力波贡献可以忽略。

♣ C: 中正曲率模型, $2\epsilon\eta \leq 3\epsilon$:

在杂化暴涨方程 (3-110) 中，考虑 $p \geq 2$ ， $\phi \gg \mu$ 时它对应于B类多项式模型 $V \rightarrow \Lambda^4(\phi/\mu)^p$ ，预言 $n_s < 1$ ；当 $\phi \ll \mu$ 时，它对应于杂化暴涨模型 (D类)，预言 $n_s > 1$ ，而当 $\phi \sim \mu$ 、模型的参数位于B和D之间时，它就对应于C类。这一类模型的例子如在超引力杂化暴涨中考虑单圈修正后得到的势[Lyth&Riotto, 1997]，

$$V \simeq \Lambda^4 [1 + \alpha \ln(\phi/Q) + \lambda(\phi/\mu)^4], \quad (3-112)$$

该模型有一个有趣的性质是谱指数 n_s 随着尺度的减小从红往蓝跑，这与WMAP观测到的谱指数的跑动方向正好相反。

§ 3.3 残余引力波的演化

在上一节中我们主要讨论了宇宙的残余引力波如何从宇宙的暴涨阶段产生，这一节我们将详细讨论产生的该引力波如何在宇宙中演化，分别研究宇宙的膨胀，特别是加速膨胀，宇宙中微子以及宇宙相变如何影响引力波的能谱。需要说明的是为了保证讨论的针对性，在这一节的讨论中我们暂时撇开具体的暴涨模型，而用一个极为简单的模型来描述宇宙的暴涨过程。在本章的最后一节中我们将会将前两节讨论的结果结合起来研究残余引力波的探测问题。

§ 3.3.1 宇宙的加速膨胀对引力波的影响

首先我们研究加速膨胀中残余引力波的演化规律。在我们的文章[Zhang et al., 2005a; Zhang et al., 2005b; Zhang et al., 2006]中, 分别用近似解析、数值、以及完全解析的方法分别研究了残余引力波在加速膨胀中的演化。在这里我们以完全解析的方法为主, 来具体研究一下宇宙的残余引力波在膨胀宇宙, 特别是加速膨胀宇宙中的演化规律。其主要结果来自于文章 [Zhang et al., 2006]。

♣: 宇宙尺度因子的演化

在宇宙整个演化过程中, 宇宙的尺度因子 $a(\tau)$ (τ 为共形时间) 分别经历了下面几个阶段的演化 [Grishchuk, 1997; Zhang et al., 2005a; Zhang et al., 2005b; Zhang et al., 2006]。

宇宙的初始阶段 (或暴涨阶段)

$$a(\tau) = l_0 |\tau|^{1+\beta}, \quad -\infty < \tau \leq \tau_1, \quad (3-113)$$

这里 $1 + \beta < 0$, $\tau_1 < 0$ 。当 $\beta = -2$ 的时候表示 de Sitter 膨胀。

宇宙再加热 (reheating) 阶段:

$$a(\tau) = a_z(\tau - \tau_p)^{1+\beta_s}, \quad \tau_1 \leq \tau \leq \tau_s. \quad (3-114)$$

这里给出的表达式能够描述各种再加热模型。

辐射为主阶段:

$$a(\tau) = a_e(\tau - \tau_e), \quad \tau_s \leq \tau \leq \tau_2. \quad (3-115)$$

物质为主阶段:

$$a(\tau) = a_m(\tau - \tau_m)^2, \quad \tau_2 \leq \tau \leq \tau_E, \quad (3-116)$$

其中 τ_E 表示宇宙暗能量的能量密度和物质密度相等的时刻。对应的红移 z_E 为 $1 + z_E = (\Omega_\Lambda/\Omega_m)^{1/3}$ 。如果取宇宙模型 $\Omega_\Lambda \sim 0.7$, $\Omega_m \sim 0.3$, 可以得到 $1 + z_E \sim 1.33$; 而如果取 $\Omega_\Lambda \sim 0.65$, $\Omega_m \sim 0.25$, 那么 $1 + z_E \sim 1.23$ 。

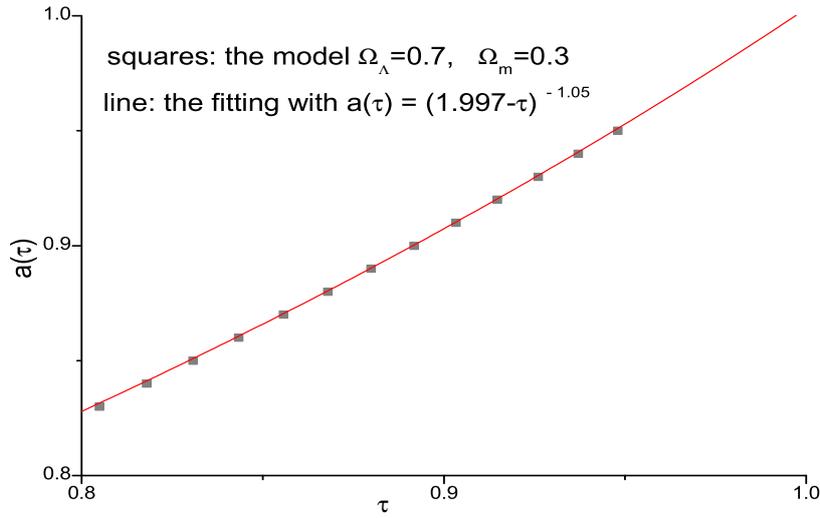


图 3-2: $\Omega_\Lambda = 0.7, \Omega_m = 0.3$ 的宇宙中尺度因子的演化, $\gamma = 1.05$ 的公式 (3-117) 可以很好地拟和该演化模型 [Zhang et al., 2006]。

加速膨胀阶段 (一直到现在时刻 τ_H) :

$$a(\tau) = l_H |\tau - \tau_a|^{-\gamma}, \quad \tau_E \leq \tau \leq \tau_H, \quad (3-117)$$

当 $\gamma = 1.0$ 表示 de Sitter 膨胀, 即 $\Omega_\Lambda = 1, \Omega_m = 0$ 。但是实际上宇宙现在的状态是 $\Omega_\Lambda = 0.7, \Omega_m = 0.3$, 为了减小误差, 我们需要数值求解方程

$$\left(\frac{a'}{a^2}\right)^2 = H^2(\Omega_\Lambda + \Omega_m a^{-3}) \quad (3-118)$$

这里 $a' \equiv da(\tau)/d\tau$ 。图 (3-2) 中画出了在 $\Omega_\Lambda \sim 0.7, \Omega_m \sim 0.3$ 的宇宙学模型中宇宙晚期尺度因子的演化, 我们发现对于公式 (3-117) $\gamma = 1.05$ 能够很好地符合数值计算的结果, 同样的对于 $\Omega_\Lambda = 0.65, \Omega_m = 0.35$ 的宇宙模型, $\gamma = 1.06$ 能够很好地符合数值计算的结果; 对于 $\Omega_\Lambda = 0.75, \Omega_m = 0.25$ 的宇宙模型, $\gamma = 1.048$ 能够很好地符合数值计算的结果; 对于 $\Omega_\Lambda = 0.80, \Omega_m = 0.20$ 的宇宙模型, $\gamma = 1.042$ 能够很好地符合数值计算的结果。因此公式 (3-117) 给出的形式能够很好地描述各种宇宙模型, 而 τ_a 值在各种模型中都是非常相似的, 对 Ω_Λ 和 Ω_m 的值并不敏感。

在上述对宇宙的描述中, 除了模型参数 β, β_s, γ 以外还有 10 个待定参数, 通过在 $\tau_1, \tau_s, \tau_2, \tau_E$ 时刻对宇宙的光滑连接, 我们可以确定其中的 8

个参数，另外需要对尺度因子的归一化以及通过可观测的 Hubble 常数对现在宇宙膨胀速率的限制来确定。不失一般性地，我们可以将现在宇宙的尺度因子归一化为 $a(\tau_H) = l_H$ ，即

$$|\tau_H - \tau_a| = 1, \quad (3-119)$$

而常数 l_H 可以通过下面的关系来确定：

$$\frac{1}{H} \equiv \left(\frac{a^2}{a'} \right)_{\tau_H} = \frac{l_H}{\gamma}. \quad (3-120)$$

我们知道在实际的宇宙模型中 $\gamma \simeq 1.0$ ，因此 l_H 其实就是现在宇宙的 Hubble 半径。这样公式 (3-113) – (3-117) 中的所有参数都已经确定了，例如我们可以得到参数 l_0 的值：

$$l_0 = l_H b \gamma \zeta_E^{-(1+\frac{1+\beta}{\gamma})} \zeta_2^{\frac{\beta-1}{2}} \zeta_s^\beta \zeta_1^{\frac{\beta-\beta_s}{1+\beta_s}}, \quad (3-121)$$

其中 $b \equiv |1 + \beta|^{-(1+\beta)}$ ， $\zeta_E \equiv \tau_E/\tau_H$ ， $\zeta_2 \equiv (\tau_E/\tau_2)^2$ ， $\zeta_s \equiv \tau_2/\tau_s$ ， $\zeta_1 \equiv (\tau_s/\tau_1)^{1+\beta_s}$ 。从该式我们可以看出 β_s 的值可以有 β 和 l_0 的值来确定，前者对应于具体的暴涨模型，而后者对应于初始条件的选择（这一点后面会看到），因此在我们的讨论中并不直接讨论 β_s 的取值，而是通过选择初始条件以及暴涨模型，再利用该公式来间接得到 β_s 的值。

为了后面讨论的方便，我们还需要明显地给出 τ_1 ， τ_2 ， τ_s ， τ_E 的值。对于现实的宇宙学模型[Bennett et al., 2003]，我们有 $a(\tau_H)/a(\tau_E) = 1.33$ ， $a(\tau_E)/a(\tau_2) = 3454$ ， $a(\tau_2)/a(\tau_s) = 10^{24}$ ， $a(\tau_s)/a(\tau_1) = 300$ 。利用这些关系，通过光滑连接宇宙的各个演化阶段我们得到

$$\begin{aligned} |\tau_E - \tau_a| &= (1 + z_E)^{\frac{1}{\gamma}}, \\ |\tau_E - \tau_m| &= \frac{2(1 + z_E)}{\gamma}, \\ |\tau_2 - \tau_m| &= \frac{2(1 + z_E)}{\gamma\sqrt{3454}}, \\ |\tau_2 - \tau_e| &= \frac{(1 + z_E)}{\gamma\sqrt{3454}}, \\ |\tau_s - \tau_e| &= \frac{(1 + z_E) \times 10^{-24}}{\gamma\sqrt{3454}}, \\ |\tau_s - \tau_p| &= (1 + \beta_s) \frac{(1 + z_E) \times 10^{-24}}{\gamma\sqrt{3454}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\tau_1 - \tau_p| &= \frac{(1 + \beta_s)(1 + z_E) \times 10^{-24}}{300^{\frac{1}{\beta_s+1}} \gamma \sqrt{3454}}, \\ |\tau_1| &= \frac{|1 + \beta| (1 + z_E) \times 10^{-24}}{300^{\frac{1}{\beta_s+1}} \gamma \sqrt{3454}}. \end{aligned} \quad (3-122)$$

明显可以看出上述表达式还依赖于三个模型参数 β , β_s , γ , 因此后面的讨论中我们会分别研究不同宇宙学参数对引力波能谱的影响。

在膨胀的 FRW 度规中, 物理尺度 λ 和共动波数 k 的关系为

$$\lambda \equiv \frac{2\pi a(\tau)}{k}. \quad (3-123)$$

因此从 (3-119) 中我们可以得到现在的 Hubble 半径对应的共动波数为 $k_H = 2\pi a(\tau_H)/l_H = 2\pi$, 而 τ_E 时刻的 Hubble 半径对应的共动波数为 $k_E \equiv 2\pi a(\tau_E)H = k_H/(1 + z_E)$ 。

♣: 引力波的演化方程

现在我们讨论引力波在膨胀宇宙中的演化方程。在 FRW 度规中, 引力波 h_{ij} 满足波动方程

$$\partial_\mu(\sqrt{-g}\partial^\mu h_{ij}(\mathbf{x}, \tau)) = 0. \quad (3-124)$$

对于给定波矢 \mathbf{k} 和极化 σ , 该演化方程可以写为

$$h_{\mathbf{k}}^{(\sigma)''} + 2\frac{a'}{a}h_{\mathbf{k}}^{(\sigma)'} + k^2 h_{\mathbf{k}}^{(\sigma)} = 0, \quad (3-125)$$

这里的上撇号表示对共形时间求导。我们假定宇宙残余的引力波的各向同性的, 并且两个极化方向是等价的, 因此下面的讨论中我们用 h_k 来代替 $h_{\mathbf{k}}^{(\sigma)}$ 。一旦模函数 $h_k(\tau)$ 被给出, 那么引力波谱 $h(k, \tau)$ 就可以得到

$$h(k, \tau) = \frac{4l_{Pl}}{\sqrt{\pi}} k |h_k(\tau)|, \quad (3-126)$$

其定义为

$$\int_0^\infty h^2(k, \tau) \frac{dk}{k} \equiv \langle 0 | h^{ij}(\mathbf{x}, \tau) h_{ij}(\mathbf{x}, \tau) | 0 \rangle, \quad (3-127)$$

其中等号右边表示算符 $h^{ij}h_{ij}$ 的真空期望值, 而引力波的能量密度参数, 通常称为引力波的强度 (strength) 的定义为

$$\frac{\rho_g}{\rho_c} = \int \Omega_g(k) \frac{dk}{k},$$

其中 $\rho_g = \frac{1}{32\pi G} h_{ij,0} h^{ij}$ 是引力波的能量密度，而 ρ_c 是宇宙临界密度。由此可以得到

$$\Omega_g(k) = \frac{\pi^2}{3} h^2(k, \tau_H) \left(\frac{k}{k_H} \right)^2, \quad (3-128)$$

这是一个没有量纲的密度参量。这里需要说明的是，该参量对所有波段积分所得到的 ρ_g 可能会出现红外或紫外发散。我们知道，只要引入红外的截断，红外发散就会被避免，这是由于宇宙的暴涨阶段总有一个开始的时刻，因此被推出视界的引力波波长总有一个上限。而如果我们考虑到Parker的绝热定理 [Parker, 1969]，这里的紫外发散也会避免。该定理认为：考虑一个持续时间 Δt 的膨胀过程，它所产生的引力子波数如果满足 $k > 1/\Delta t$ ，那么该波段的引力波能谱将被压低。因此我们这里的引力波在极高频和极低频都应该被扔掉。

♣: 初始条件的选择

对于宇宙的残余引力波，其初始振幅的大小如我们上一节的讨论，是由暴涨的能标决定的。但是暴涨的能标具体是多少呢？不同的模型给出了完全不同的结论。因此我们希望能够从观测来对引力波的初始条件作出限制。我们这一小节来讨论这个问题。对于给定的波数 k 的引力波，假设其出视界的时刻为 τ_i ，即此时引力波的波长 $\lambda_i = 2\pi a(\tau_i)/k$ 和宇宙的哈勃半径 $1/H(\tau_i)$ 大小相等。由方程 (3-113) 可以得到 $H(\tau_i) = l_0^{-1} |1 + \beta| \cdot |\tau_i|^{2+\beta}$ ，对于 de Sitter 膨胀有 $H(\tau_i) = l_0^{-1}$ 。因此不同波模的引力波对应不同的时刻 τ_i 。我们选择初始条件

$$|h_k(\tau_i)| = \frac{1}{a(\tau_i)}. \quad (3-129)$$

这样初始时刻的振幅为 [Grishchuk, 1997; Zhang et al., 2005a]

$$h(k, \tau_i) = A \left(\frac{k}{k_H} \right)^{2+\beta}, \quad (3-130)$$

这里

$$A = 8\sqrt{\pi} b \frac{l_{Pl}}{l_0}. \quad (3-131)$$

引力波的原初功率谱的定义为 $P(k) \propto |h(k, \tau_H)|^2$ ，其谱指数 n_t 的定义为 $P(k) \propto k^{n_t}$ ，可以得到 $n_t = 2\beta + 4$ 。严格的 de Sitter 膨胀对应于 $\beta = -2$ ，可以得到 $n_t = 0$ ，即严格的尺度不变谱。对于其它的 β 值，将偏离尺度不变谱。我们这里先粗略地从 CMB 各向异性的大小对引力波的初始值作一个限制（比较细致的限制我们将在下一节关于引力波的观测的讨论中给出）。由于 CMB 温度各向异性只要是由宇宙中的标量扰动和张量扰动产生的，而且一般认为标量扰动的贡献是主要的。为了描述标量扰动和张量扰动的大小，我们上一节已经定义了一个张量/标量比 r ，目前 WMAP 和 SDSS 给出的现在是 $r < 0.37$ (95% c.l.) [Bennett et al., 2003; Seljak et al., 2005]。而在最大尺度上 CMB 的温度扰动的大小为 $\Delta T/T \simeq 0.37 \times 10^{-5}$ ，它近似等于标量扰动的大小。因此我们可以近似采用下面的方法来选择初始条件

$$h(k_H, \tau_H) = 0.37 \times 10^{-5} r. \quad (3-132)$$

对于 $r = 0.37$ 的极端情况，我们 $h(k_H, \tau_H) \simeq 0.14 \times 10^{-5}$ 。后面的讨论中我们主要就以该极端条件为例来计算残余引力波在膨胀宇宙中的演化。

♣: 解析计算的结果

我们可以定义一个新的函数 $h_k(\tau) = \mu_k(\tau)/a(\tau)$ ，从方程 (3-125) 可知， $\mu_k(\tau)$ 满足的方程为

$$\mu_k'' + \left(k^2 - \frac{a''}{a} \right) \mu_k = 0. \quad (3-133)$$

对于幂律形式的尺度因子 $a(\tau) \propto \tau^\alpha$ ，该方程的通解为

$$\mu_k(\tau) = c_1 (k\tau)^{\frac{1}{2}} J_{\alpha-\frac{1}{2}}(k\tau) + c_2 (k\tau)^{\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2}-\alpha}(k\tau),$$

其中 c_1 和 c_2 是待定参数。在暴涨时期，方程的解为

$$\mu_k(\tau) = x^{\frac{1}{2}} \left[A_1 J_{\beta+\frac{1}{2}}(x) + A_2 J_{-(\beta+\frac{1}{2})}(x) \right], \quad -\infty < \tau \leq \tau_1, \quad (3-134)$$

这里 $x \equiv k\tau$ ，而系数 A_1 和 A_2 是由初始条件来决定的，分别为

$$A_1 = -\frac{i}{\cos \beta\pi} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{i\pi\beta/2}, \quad A_2 = iA_1 e^{-i\pi\beta},$$

都与 k 无关。代入方程 (3-134) 容易得到

$$\mu_k(\tau) = A_1 e^{-i\pi\beta} \sin\left(\beta\pi + \frac{\pi}{2}\right) x^{\frac{1}{2}} H_{\beta+\frac{1}{2}}^{(2)}(x), \quad (3-135)$$

而在高频极限下, 有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k(\tau) \rightarrow e^{-ik\tau}.$$

这正是我们上一节所提到的绝热真空态的定义。在宇宙再加热阶段,

$$\mu_k(\tau) = t^{\frac{1}{2}} \left[B_1 J_{\beta_s+\frac{1}{2}}(t) + B_2 J_{-\beta_s-\frac{1}{2}}(t) \right], \quad \tau_1 < \tau \leq \tau_s, \quad (3-136)$$

这里 $t \equiv k(\tau - \tau_p)$, 而系数 B_1 和 B_2 可通过函数 $\mu_k(\tau)$ 和 $(\mu_k(\tau)/a(\tau))'$ 在 τ_1 时刻的光滑连接来实现, 即

$$\begin{aligned} B_1 = & \sqrt{\frac{x_1}{t_1}} \frac{J_{\beta+\frac{1}{2}}(x_1) J_{-\beta_s-\frac{3}{2}}(t_1) + J_{\beta+\frac{3}{2}}(x_1) J_{-\beta_s-\frac{1}{2}}(t_1)}{J_{\beta_s+\frac{1}{2}}(t_1) J_{-\beta_s-\frac{3}{2}}(t_1) + J_{-\beta_s-\frac{1}{2}}(t_1) J_{\beta_s+\frac{3}{2}}(t_1)} A_1 \\ & + \sqrt{\frac{x_1}{t_1}} \frac{J_{-\beta-\frac{1}{2}}(x_1) J_{-\beta_s-\frac{3}{2}}(t_1) - J_{-\beta-\frac{3}{2}}(x_1) J_{-\beta_s-\frac{1}{2}}(t_1)}{J_{\beta_s+\frac{1}{2}}(t_1) J_{-\beta_s-\frac{3}{2}}(t_1) + J_{-\beta_s-\frac{1}{2}}(t_1) J_{\beta_s+\frac{3}{2}}(t_1)} A_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_2 = & \sqrt{\frac{x_1}{t_1}} \frac{J_{\beta+\frac{1}{2}}(x_1) J_{\beta_s+\frac{3}{2}}(t_1) - J_{\beta+\frac{3}{2}}(x_1) J_{\beta_s+\frac{1}{2}}(t_1)}{J_{\beta_s+\frac{1}{2}}(t_1) J_{-\beta_s-\frac{3}{2}}(t_1) + J_{-\beta_s-\frac{1}{2}}(t_1) J_{\beta_s+\frac{3}{2}}(t_1)} A_1 \\ & + \sqrt{\frac{x_1}{t_1}} \frac{J_{-\beta-\frac{3}{2}}(x_1) J_{\beta_s+\frac{1}{2}}(t_1) + J_{-\beta-\frac{1}{2}}(x_1) J_{\beta_s+\frac{3}{2}}(t_1)}{J_{\beta_s+\frac{1}{2}}(t_1) J_{-\beta_s-\frac{3}{2}}(t_1) + J_{-\beta_s-\frac{1}{2}}(t_1) J_{\beta_s+\frac{3}{2}}(t_1)} A_2 \end{aligned}$$

其中 $x_1 \equiv k\tau_1$, $t_1 \equiv k(\tau_1 - \tau_p)$ 。 $(1 + \beta_s)x_1 = (1 + \beta)t_1$, 这个关系式是通过在 τ_1 光滑连接 $a(\tau)$ 和 $a'(\tau)$ 函数来得到的。

在辐射为主时期, 我们有

$$\mu_k(\tau) = C_1 e^{-iy} + C_2 e^{iy}, \quad \tau_s \leq \tau \leq \tau_2, \quad (3-137)$$

这里 $y \equiv k(\tau - \tau_e)$, 通过类似的方法可以得到 C_1 和 C_2 的值为

$$\begin{aligned} C_1 = & \frac{e^{iy_s} t_s^{\frac{1}{2}}}{2i} B_1 \left[\left(i - \frac{1}{y_s}\right) J_{\beta_s+\frac{1}{2}}(t_s) + J_{\beta_s+\frac{3}{2}}(t_s) \right] \\ & + \frac{e^{iy_s} t_s^{\frac{1}{2}}}{2i} B_2 \left[\left(i - \frac{1}{y_s}\right) J_{-\beta_s-\frac{1}{2}}(t_s) - J_{-\beta_s-\frac{3}{2}}(t_s) \right] \end{aligned}$$

$$C_2 = \frac{-e^{-iy_s t_s^{\frac{1}{2}}}}{2i} B_1 \left[-\left(i + \frac{1}{y_s}\right) J_{\beta_s + \frac{1}{2}}(t_s) + J_{\beta_s + \frac{3}{2}}(t_s) \right] \\ + \frac{-e^{-iy_s t_s^{\frac{1}{2}}}}{2i} B_2 \left[-\left(i + \frac{1}{y_s}\right) J_{-\beta_s - \frac{1}{2}}(t_s) - J_{-\beta_s - \frac{3}{2}}(t_s) \right],$$

其中 $t_s \equiv k(\tau_s - \tau_p)$, $y_s \equiv k(\tau_s - \tau_e)$, $t_s = (1 + \beta_s)y_s$ 。

在物质为主时期

$$\mu_k(\tau) = \sqrt{\frac{\pi z}{2}} \left[D_1 J_{\frac{3}{2}}(z) + D_2 J_{-\frac{3}{2}}(z) \right], \quad \tau_2 \leq \tau \leq \tau_E, \quad (3-138)$$

其中 $z \equiv k(\tau - \tau_m)$, 而系数 D_1 , D_2 分别为

$$D_1 = \left[-e^{iy_2} - \frac{i}{2y_2} e^{iy_2} + \frac{e^{iy_2} + e^{-3iy_2}}{8y_2^2} \right] C_1 + \left[-e^{-iy_2} + \frac{i}{2y_2} e^{-iy_2} + \frac{e^{-iy_2} + e^{3iy_2}}{8y_2^2} \right] C_2, \\ D_2 = \left[i e^{iy_2} - \frac{e^{iy_2}}{2y_2} - \frac{i}{8y_2^2} (e^{iy_2} - e^{-3iy_2}) \right] C_1 - \left[i e^{-iy_2} + \frac{e^{-iy_2}}{2y_2} + \frac{i}{8y_2^2} (e^{3iy_2} - e^{-iy_2}) \right] C_2,$$

这里 $y_2 \equiv k(\tau_2 - \tau_e)$ 。

在加速膨胀阶段

$$\mu_k(\tau) = \sqrt{\frac{\pi s}{2}} \left[E_1 J_{\gamma + \frac{1}{2}}(s) + E_2 J_{-\gamma - \frac{1}{2}}(s) \right], \quad \tau_E \leq \tau \leq \tau_H, \quad (3-139)$$

其中 $s \equiv k(\tau - \tau_a)$, 而系数 E_1 , E_2 分别为

$$E_1 = \Delta^{-1} \frac{z_E}{s_E} \left\{ J_{\frac{3}{2}}(z_E) \left[-\frac{J_{-\gamma - \frac{1}{2}}(s_E)}{s_E} - J_{-\gamma - \frac{3}{2}}(s_E) \right] - J_{\frac{5}{2}}(z_E) J_{-\gamma - \frac{1}{2}}(s_E) \right\} D_1 \\ + \left\{ J_{-\frac{3}{2}}(z_E) \left[-\frac{J_{-\gamma - \frac{1}{2}}(s_E)}{s_E} - J_{-\gamma - \frac{3}{2}}(s_E) \right] + J_{-\frac{5}{2}}(z_E) J_{-\gamma - \frac{1}{2}}(s_E) \right\} D_2,$$

$$E_2 = \Delta^{-1} \frac{z_E}{s_E} \left\{ J_{\frac{5}{2}}(z_E) J_{\gamma + \frac{1}{2}}(s_E) - J_{\frac{3}{2}}(z_E) \left[-\frac{J_{\gamma + \frac{1}{2}}(s_E)}{s_E} + J_{\gamma + \frac{3}{2}}(s_E) \right] \right\} D_1 \\ + \left\{ -J_{-\frac{5}{2}}(z_E) J_{\gamma + \frac{1}{2}}(s_E) - J_{-\frac{3}{2}}(z_E) \left[-\frac{J_{\gamma + \frac{1}{2}}(s_E)}{s_E} + J_{\gamma + \frac{3}{2}}(s_E) \right] \right\} D_2.$$

$$\Delta = J_{\gamma + \frac{1}{2}}(s_E) \left[-\frac{J_{-\gamma - \frac{1}{2}}(s_E)}{s_E} - J_{-\gamma - \frac{3}{2}}(s_E) \right] - J_{-\gamma - \frac{1}{2}}(s_E) \left[-\frac{J_{\gamma + \frac{1}{2}}(s_E)}{s_E} + J_{\gamma + \frac{3}{2}}(s_E) \right]$$

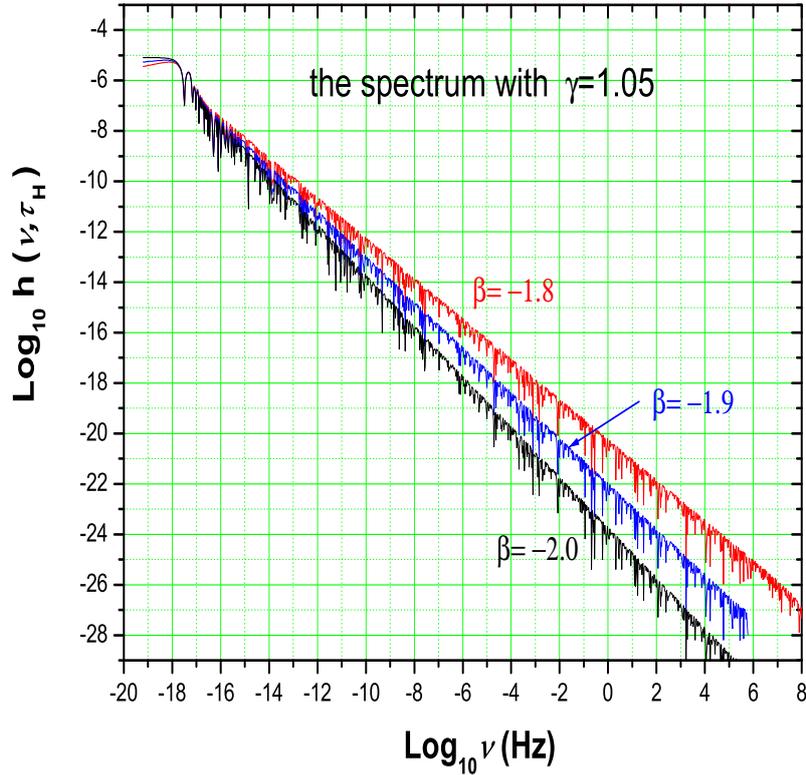


图 3-3: 对于固定的加速膨胀模型 $\gamma = 1.05$, 不同的暴涨模型 $\beta = -1.8, -1.9, -2.0$ 对应的引力波谱 $h(\nu, \tau_H)$ [Zhang et al., 2006]。

其中 $z_E \equiv k(\tau_E - \tau_m)$, $s_E \equiv k(\tau_E - \tau_a)$, $\gamma z_E = -2s_E$ 。

这样所有的系数都被确定了, 现在时刻的 $h_k(\tau_H)$ 的值只依赖于波数 k , 那么由定义 (3-126), 我们可以得到

$$h(k, \tau_H) = \frac{4l_{Pl}}{\sqrt{\pi}} k |h_k(\tau_H)|, \quad (3-140)$$

当然在具体计算的时候还要用到公式 $h_k(\tau_H) = \mu_k(\tau_H)/a(\tau_H)$ 。对于选定的初始条件, 还有两个模型参数 β 和 γ 待定。

在图 (3-3) 和 (3-4) 中我们分别给出了不同的 β 和 γ 是所给出的引力波的波谱, 注意这里的物理频率 $\nu = k/2\pi a$ 。从图中可以看出只有当 $\nu \leq 10^{-18}\text{Hz}$ 的时候引力波是一个近似的尺度不变谱, 而当 $\nu \geq 10^{-18}\text{Hz}$

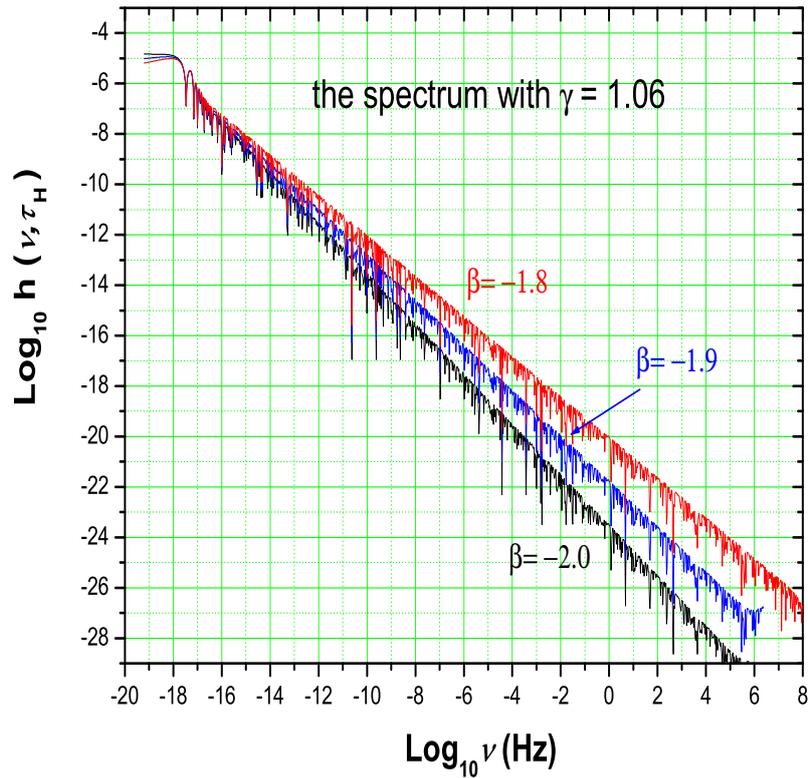


图 3-4: 对于固定的加速膨胀模型 $\gamma = 1.06$, 不同的暴涨模型 $\beta = -1.8, -1.9, -2.0$ 对应的引力波谱 $h(\nu, \tau_H)$ [Zhang et al., 2006]。

时, 引力波的振幅随着频率的增长而降低, 而且在此阶段随着频率的变化, 引力波的振幅还是一个振荡极快的函数, 这是由于我们上述计算中 Bessel 函数引起的, 但是一般我们并不十分关心这种振荡行为。同时在图 (3-5) 和 (3-6) 中我们分别给出了不同的 β 和 γ 是所给出的引力波的能量强度 $\Omega_g(\nu, \tau_H)$ 的值, 我们发现不同的 β 的影响是非常明显的, 尤其是在高频阶段。对于 $\beta > -2$, (对应于超 de Sitter 暴涨), $\Omega_g(\nu, \tau_H)$ 会随着频率的增长而迅速增长。同样的道理, 对于亚 de Sitter 暴涨, $\Omega_g(\nu, \tau_H)$ 会随着频率的增长而衰减。而加速膨胀模型的影响却比较小, 其效应我们在后面再详细讨论。

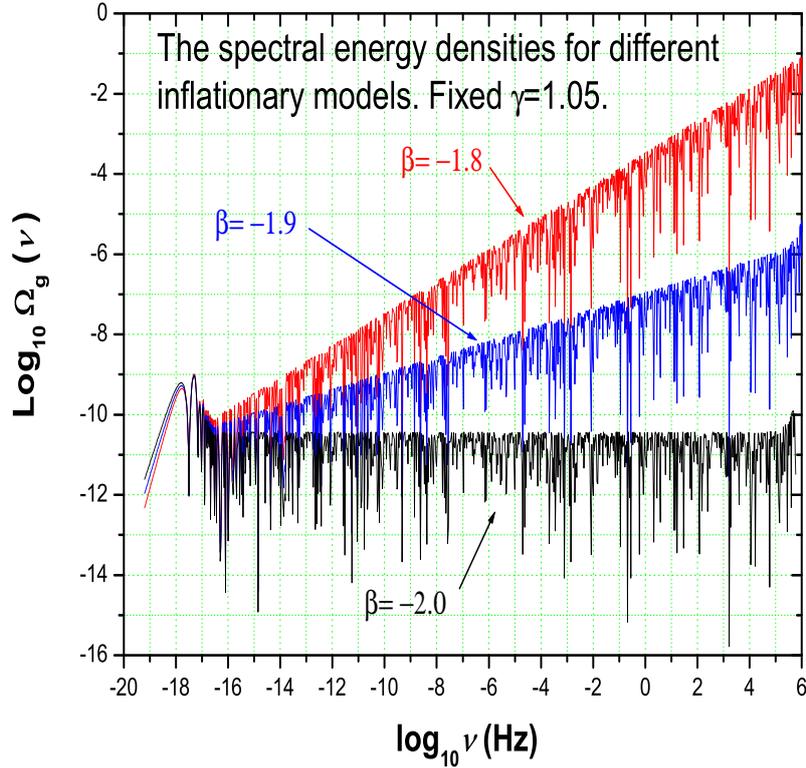


图 3-5: 对于固定的加速膨胀模型 $\gamma = 1.05$, 不同的暴涨模型 $\beta = -1.8, -1.9, -2.0$ 对应的引力波谱能量强度 Ω_{ν, τ_H} [Zhang et al., 2006]。

♣: 解析近似的结果

为了更好地研究宇宙的膨胀历史对引力波能谱的影响, 我们对前面所给出的结论作解析近似处理。而这样的处理也可以直接通过解析近似求解引力波的演化方程而得到 [Zhang et al., 2005a]。在下面的近似求解中我们主要用到下面两个数学关系

$$J_{\mu}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\mu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad x \gg 1, \quad (3-141)$$

$$J_{\mu}(x) \approx \frac{1}{\Gamma(\mu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\mu}, \quad x \ll 1. \quad (3-142)$$

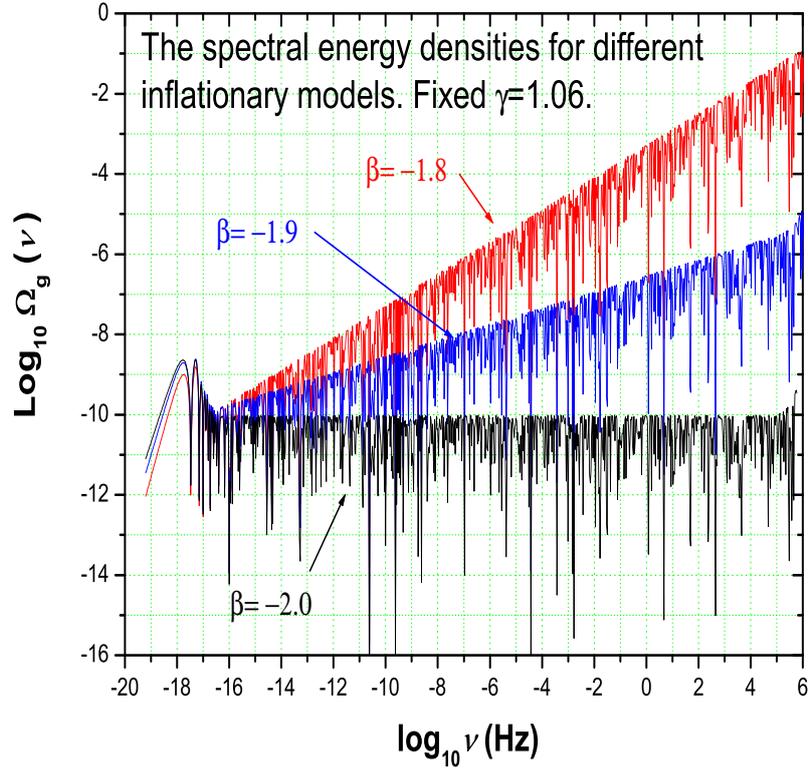


图 3-6: 对于固定的加速膨胀模型 $\gamma = 1.06$, 不同的暴涨模型 $\beta = -1.8, -1.9, -2.0$ 对应的引力波谱能量强度 Ω_{ν, τ_H} [Zhang et al., 2006]。

来对系数 $D_1, D_2, B_1, B_2, C_1, C_2, E_1, E_2$ 进行化简。因为这些系数都依赖于波数 k , 因而对于不同的 k , 其结果是不一样的。通过一些简单的计算, 忽略其中的小量, 我们可以将引力波的波谱

$$h(k, \tau_H) = A \left[\gamma (\zeta_E)^{-(1+\frac{1+\beta}{\gamma})} \zeta_2^{\frac{\beta-1}{2}} \zeta_s^\beta \zeta_1^{\frac{\beta s - \beta}{1+\beta s}} \right] \frac{k}{k_H} \sqrt{\frac{\pi s_H}{2}} \left| E_1 J_{\gamma+\frac{1}{2}}(s_H) + E_2 J_{-\gamma-\frac{1}{2}}(s_H) \right|.$$

写为下面的分段形式:

$$h(k, \tau_H) = A \left(\frac{k}{k_H} \right)^{2+\beta}, \quad k \leq k_E; \quad (3-143)$$

$$h(k, \tau_H) \approx A \left(\frac{k}{k_H} \right)^{\beta-1} \frac{1}{(1+z_E)^{3+\epsilon}}, \quad k_E \leq k \leq k_H; \quad (3-144)$$

$$h(k, \tau_H) \approx A \left(\frac{k}{k_H} \right)^\beta \frac{1}{(1+z_E)^{3+\epsilon}}, \quad k_H \leq k \leq k_2; \quad (3-145)$$

$$h(k, \tau_H) \approx A \left(\frac{k}{k_H} \right)^{\beta+1} \frac{k_H}{k_2} \frac{1}{(1+z_E)^{3+\epsilon}}, \quad k_2 \leq k \leq k_s; \quad (3-146)$$

$$h(k, \tau_H) \approx A \left(\frac{k_s}{k_H} \right)^{\beta_s} \frac{k_H}{k_2} \left(\frac{k}{k_H} \right)^{\beta-\beta_s+1} \frac{1}{(1+z_E)^{3+\epsilon}}, \quad (3-147)$$

$$k_s \leq k \leq k_1,$$

计算中我们还用到了公式 (3-126), (3-139), (3-121) 以及关系式 $|(\tau_H - \tau_a)/(\tau_E - \tau_2)| = 1/(1+z_E)$ 。这里的小参量 $\epsilon \equiv (1+\beta)(1-\gamma)/\gamma$ 依赖于具体的加速膨胀模型。当 $\gamma = 1$ 时对应于 $\epsilon = 0$ 。除了极低频的波模 $k < k_E$ (还没有进入宇宙视界) 以外, 对其他所有的模式的引力波, 加速膨胀对引力波 $h(k, \tau_H)$ 的影响主要体现在因子 $1/(1+z_E)^{3+\epsilon}$ 上。对于特定的暴涨模型 $\beta \approx -2$, 模型 $\gamma = 1.05$ ($\Omega_\Lambda = 0.7$) 给出 $1/(1+z_E)^{3+\epsilon} = 0.423$; 而模型 $\gamma = 1.06$ ($\Omega_\Lambda = 0.65$) 给出 $1/(1+z_E)^{3+\epsilon} = 0.533$ 。注意到当 $\gamma = 1.05$ 时, $1/(1+z_E)^\epsilon = 0.987$, 而当 $\gamma = 1.06$ 时, $1/(1+z_E)^\epsilon = 0.989$, 都与 1 偏离很小, 因而可以近似用 1 来代替。因此加速膨胀对引力波的影响可以归结到一个因子 $1/(1+z_E)^3$ 上。由于 $z_E = 0$ 正好对应于减速膨胀的模型, 因此和没有暗能量的模型相比, 加速膨胀对引力波波谱的影响可以简单地表现为一个 damping 因子:

$$t_{acc} = \frac{1}{(1+z_E)^3} = \frac{\Omega_m}{\Omega_\Lambda}, \quad (3-148)$$

其中 Ω_m, Ω_Λ 分别是现在宇宙中物质和暗能量各自地能量比重。这个因子我们后面的讨论中会用到。而对于引力波 $\Omega_g(k)$ 的影响是 t_{acc}^2 , 这个也不难得到。这里我们还应该指出, 从这里的近似解析表达式我们还能够发现, 宇宙的再加热过程对引力波的影响 (通过 β_s), 只对极高频 $k > k_s$ 的引力波有贡献, 而不影响其它频段的引力波。

♣: 数值计算的结果

为了求解膨胀宇宙中的引力波演化, 我们也可以数值求解引力波的演化方程 [Zhang et al., 2005b]

$$h_k''(\tau) + 2\frac{a'}{a}h_k'(\tau) + k^2h_k = 0. \quad (3-149)$$

而宇宙尺度因子的演化以及初始条件的选择都与上节讨论的一样。这里的困难在于，在数值引力波求解的过程中引力波频率和宇宙时间的跨度都太大，均超过 20 个量级。为了计算的方便，我们定义一个变量 \hat{t} ，

$$e^{\hat{t}} = |\tau - \tau_0|, \quad (3-150)$$

因此引力波的演化方程被改写成

$$\ddot{h}_k + \left(\frac{2\dot{a}}{a} - 1 \right) \dot{h}_k + k^2 e^{2\hat{t}} h_k = 0, \quad (3-151)$$

这里的上标点表示对 \hat{t} 求导。这样我们用 Runge-Kutta 方法数值求解该方程一直从暴涨期间积分到现在时刻就可以目前引力波的波谱。在图 (3-7) 中我们画出了在加速膨胀宇宙中，对不同的暴涨模型 (不同的 β 值) 所得到的引力波能谱，而在图 (3-8) 中则画出了没有加速膨胀时候的引力波能谱。其中能谱的振荡行为是由 Bessel 函数引起的。这和前面解析计算的结果是一样的。为了显示加速膨胀的影响，在图 (3-9) 中同时给出了加速和非加速膨胀宇宙中的引力波能谱。其中我们忽略了能谱的振荡效应。我们发现加速膨胀确实对引力波的振幅产生一个压低效应，进一步证明了我们前面的结论。同时我们可以发现， β 值的大小对引力波的影响非常明显，特别是在高频段， β 的值越大，引力波的幅度也就越大。这和前面解析计算的结果也是一样的。在图 (3-10) 中我们画出了宇宙再加热过程对引力波的影响，其中虚线表示存在宇宙再加热阶段时候的引力波，而实线则表示不存在宇宙再加热时候的能谱。我们发现，两者的区别仅仅在于极高频 ($\nu > 10^8 \text{Hz}$) 的引力波，宇宙再加热可以使得该频段的引力波能谱急剧变大。这和我们前面解析计算的结果也是自洽的。而该频段的引力波可以被电磁引力波探测器探测到 [Li,Tang&Shi, 2003]，它敏感的频段正好是 $\nu \in (10^9 \sim 10^{11}) \text{Hz}$ 。因此提高该探测器的灵敏度有可能对宇宙再加热阶段的物理提出限制，这对于早期宇宙学的研究也是极为重要的。

§ 3.3.2 宇宙中微子和宇宙相变的影响

在前面的讨论中我们讨论引力波的演化的时候一直都用的是引力波在真空中的演化方程。因为引力波与物质的耦合很弱，这个方程能够比较好

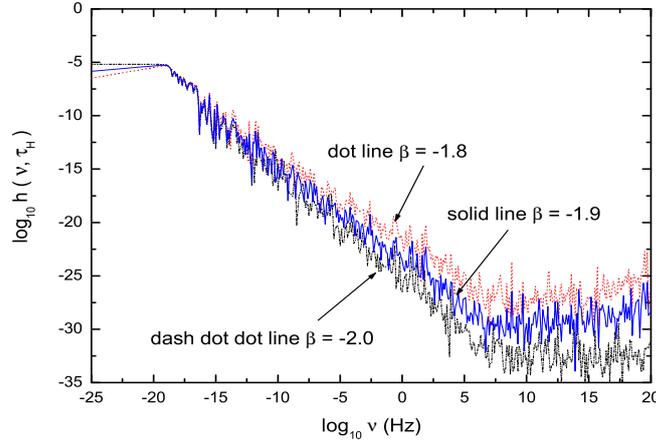


图 3-7: 数值计算得到的引力波波谱 $h(k, \tau_H)$, 初始条件我们选择了 $r = 1.0$, 对于现阶段的加速膨胀我们选择了 $\gamma = 1$ 的近似模型 [Zhang et al., 2005b]。

地描述引力波的演化。但是要想更精细地描述引力波的演化，我们需要考虑更一般的方程，即有相互作用项的演化方程。其中在宇宙演化中，对引力波影响比较显著的是宇宙中的只有中微子流。另外在我们上面的考虑中，我们一直认为宇宙在辐射为主时期，尺度因此严格满足 $\rho \propto a^{-4}$ 的演化行为。但是实际上在宇宙演化过程中，尤其是辐射为主的宇宙早期，一直发生着各种相变过程，例如 e^+e^- 湮灭相变，QCD 相变，弱电相变，超对称相变等等。这些相变过程的存在能够影响宇宙在短时间内的演化规律，使其暂时偏离 $\rho \propto a^{-4}$ 的演化行为，从而影响引力波的能谱。我们在这一节中主要来讨论这两个效应对引力波的影响。我们的思路是：由于这两个效应的影响都比较小，因而我们仍然以上一节讨论的结论为基本框架，而将这两个效应分别归结为两个比较小的 damping 因子，将该因子乘到原来的能谱上就可以考虑这些效应以后的引力波能谱。下面我们分别考虑这两个效应。

♣: 自由中微子流对引力波的影响

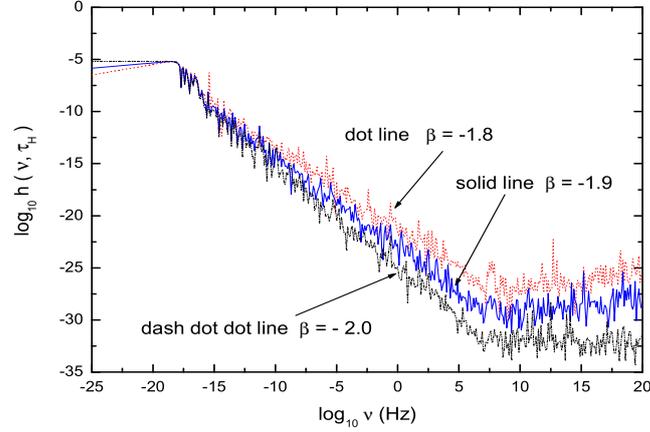


图 3-8: 数值计算得到的引力波波谱 $h(k, \tau_H)$, 初始条件我们选择了 $r = 1.0$, 注意该图表示的是没有加速膨胀的宇宙模型中的引力波谱 [Zhang et al., 2005b]。

在考虑横向无迹的各向异性应力张量的时候, 普遍的引力波演化方程应该写为

$$\ddot{h}_{ij} + \left(\frac{3\dot{a}}{a}\right) \dot{h}_{ij} - \left(\frac{\nabla^2}{a^2}\right) h_{ij} = 16\pi G \pi_{ij} \quad (3-152)$$

这里的上点号表示对宇宙时间 t 求导。而右边的 π_{ij} 正是我们考虑的横向无迹的各项异性应力张量。在宇宙演化中, 该应力张量主要是由当中微子退耦以后形成的自由运动的中微子流来贡献的。这是一个比较复杂的过程, 最早是 S.Weinberg 研究在文献[Weinberg, 2004]中研究过, 我们这里并不准备对该工作作详细介绍, 而只是给出其结果。可以证明该方程可以被改写为一个微分-积分方程

$$\begin{aligned} h_k''(u) + \frac{2a'(u)}{a(u)} h_k'(u) + h_k(u) \\ = -24f_\nu(u) \left(\frac{a'(u)}{a(u)}\right)^2 \int_0^u K(u-U) h_k'(U) dU, \end{aligned} \quad (3-153)$$

其中 h_k 是引力波 h_{ij} 的傅里叶分量, 上撇表示对 u 求导, 其定义为

$$u \equiv k \int_{t_1}^t \frac{dt'}{a(t')}, \quad (3-154)$$

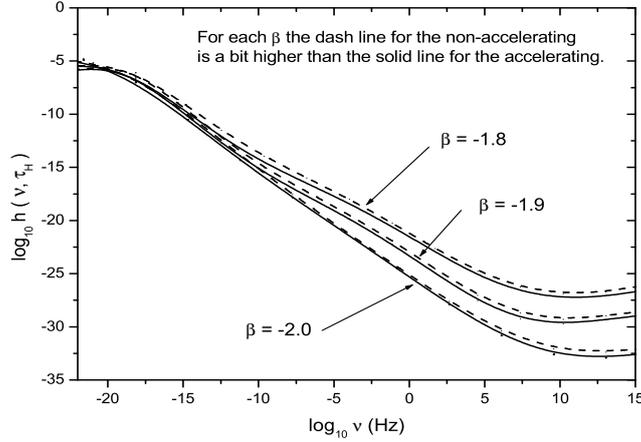


图 3-9: 数值计算得到的引力波波谱, 注意这里我们忽略掉了振荡因子的影响, 初始条件我们选择了 $r = 1.0$, 对于现阶段的加速膨胀我们选择了 $\gamma = 1$ 的近似模型 [Zhang et al., 2005b]。

函数 $K(s)$ 表示

$$K(s) \equiv \frac{1}{16} \int_{-1}^{+1} dx (1-x^2)^2 e^{ixs} = -\frac{\sin s}{s^3} - \frac{3 \cos s}{s^4} + \frac{3 \sin s}{s^5}, \quad (3-155)$$

t_1 表示中微子退耦的时刻, 而 $f_\nu \equiv \rho_\nu / \rho_c$, 表示自由中微子占宇宙密度的比重。初始条件为

$$h'_k(0) = 0. \quad (3-156)$$

然后我们就可以具体地求解该方程。这还是一个比较复杂的方程, 在文献 [Dicus&Repko, 2005; Boyle&Steinhardt, 2005] 中, 作者还给出了一个近似求解该方程的技巧。将 h_k 做展开

$$h_k(u) = h_k(0) \sum_{n=0}^{\infty} a_n j_n(u), \quad (3-157)$$

这里 $j_n(u)$ 是球 Bessel 函数, 将其代入方程 (3-153), 可以得到展开系数:

$$a_0 = 1, \quad (3-158)$$

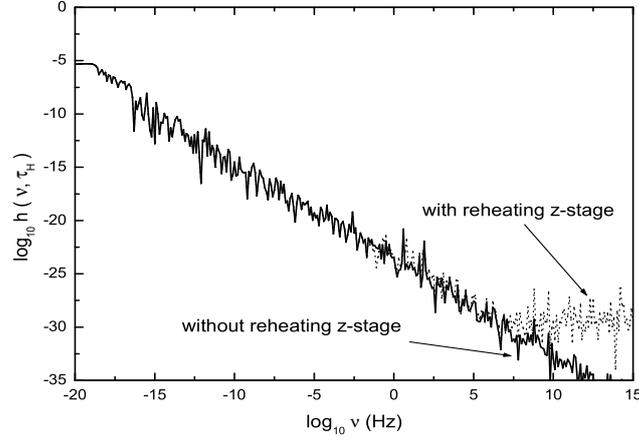


图 3-10: 宇宙再加热阶段对引力波谱的影响。这里初始条件我们选择了 $r = 1.0$, $\beta = -1.9$, 对于现阶段的加速膨胀我们选择了 $\gamma = 1$ 的近似模型 [Zhang et al., 2005b]。

$$a_2 = \frac{10f}{(15 + 4f)}, \quad (3-159)$$

$$a_4 = \frac{18f(3f + 5)}{(15 + 4f)(50 + 4f)}, \quad (3-160)$$

$$a_6 = \frac{130f(14f^2 + 92f + 35)}{7(15 + 4f)(50 + 4f)(105 + 4f)}, \quad (3-161)$$

$$a_8 = \frac{85f(4802f^3 + 78266f^2 + 161525f - 29400)}{343(15 + 4f)(50 + 4f)(105 + 4f)(180 + 4f)}, \quad (3-162)$$

$$(3-163)$$

这里只给出了前五项，这已经可以在 0.1% 的精度上与完全数值的结果相符。而奇次项的系数都为零。由于引力波在视界之外的時候，其振幅是不变的，因而也不受中微子的影响，只有进入视界 $u > 1$ 的时候，宇宙的膨胀以及中微子流才会影响引力波的演化。我们利用公式

$$j_{2n}(u) \rightarrow (-1)^n \frac{\sin u}{u}, \quad u \rightarrow \infty, \quad (3-164)$$

并考虑到 $f = 0$ （即不考虑中微子的影响）时 $\tilde{h}_k(u) = h_k(0)j_0(u)$ ，因而我

们可以将自由中微子的影响归结为一个 damping 因子;

$$t_{neu} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_{2n}, \quad (3-165)$$

当考虑到前五项的时候, 该因子为

$$t_{neu} = \frac{15(14406f^4 - 55770f^3 + 3152975f^2 - 48118000f + 324135000)}{343(15 + 4f)(50 + 4f)(105 + 4f)(180 + 4f)}. \quad (3-166)$$

该因子只依赖于函数 f 的值, 对于频率高于 10^{-10}Hz 的波模 (进入视界时中微子还处于热平衡中, 即没有自由的中微子流) 和频率低于 10^{-16}Hz 的波模 (进入视界的时候, 宇宙处于物质为主或暗能量为主时期, 中微子的密度可以忽略), 都有 $t_{neu} \simeq 1$, 即没有影响。而只有对于频率处于两者之间的引力波模, 中微子的影响才比较明显。我们在图 (3-11) 中给出了该 damping 因子对 f 的依赖关系。可以看出对于两个极端情况 $f = 0$ 有 $t_{neu} = 1$; $f = 1$ 有 $t_{neu} = 0.59$; 而对于三代中微子 $f = 4052$, 有 $t_{neu} = 0.80313$ 。需要指出的是这个 damping 效应不仅适用于自由中微子流, 而且适用于宇宙的各种自由粒子流。因此如果我们能够通过观测引力波的能谱而确定 f 在不同宇宙时期的值, 我们就可以知道在宇宙演化过程的各个时期中, 自由粒子流分别有多少, 这也将为研究宇宙中的粒子物理找到一条新的途径。

♣: 宇宙相变对引力波的影响

下面我们讨论宇宙相变对引力波演化的影响。这个效应是由于宇宙在辐射为主时期的一系列相变引起宇宙中的相对论的自由度发生连续的变化而引起的。这里的相变包括 QCD相变, e^+e^- 湮灭相变, 弱电相变以及超对称相变等等 [Kampfner, 2000; Watanabe&Komatsu, 2006]。在前面的讨论中我们一直假设在宇宙的辐射为主阶段 $\rho \propto a^{-4}$ 。但是当考虑到这些宇宙学相变得时候, 这个规律就会被破坏, 这是由于相变过程前后总有一些粒子由相对论辐射粒子变成了非相对论粒子, 而使得总的辐射密度在很短的时间内发生比较明显的变化。考虑宇宙是一个绝热系统, 其总熵必须是守恒的, 即

$$S(T) = s(T)a^3(T) = \text{constant}, \quad \text{and} \quad s(T) = \frac{2\pi^2}{45}g_{*s}(T)T^3, \quad (3-167)$$

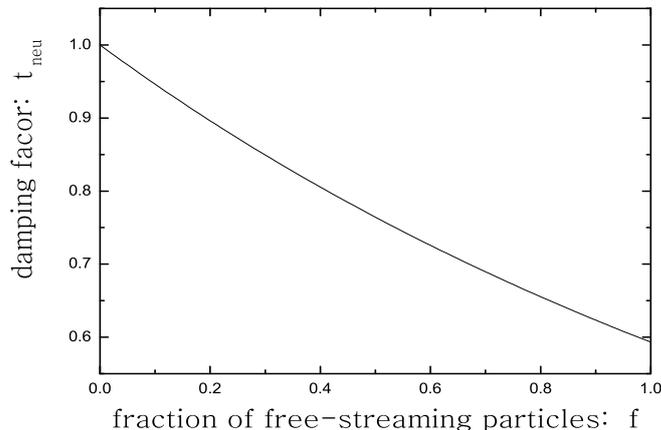


图 3-11: t_{neu} 对 f 的依赖关系 [Boyle&Steinhardt, 2005]。

其中温度为 T 时候的熵密度 $s(T)$ 是由宇宙中总的能量密度和压强决定的: $s = (\rho + p)/T$ 。而在一个由等离子体主导的宇宙中, 能量密度和压强分别为

$$\rho(T) = \frac{\pi^2}{30} g_*(T) T^4, \quad p(T) = \frac{1}{3} \rho(T). \quad (3-168)$$

这里我们根据文献 [Kolb&Turner, 1990] 中的定义给出了两个相对论的有效数: g_* and g_{*s} 。这两个量分别表示了相对论粒子对宇宙中辐射能量密度和熵的贡献。因此根据公式 (3-167) 和 (3-168) 立即可以得到

$$\rho \propto g_* g_{*s}^{-4/3} a^{-4}, \quad (3-169)$$

因此只要 g_* 和 g_{*s} 的数值随时间而变化, $\rho \propto a^{-4}$ 的关系必然会被偏离。因而 g_* 和 g_{*s} 数值随时间的变化会通过影响宇宙尺度因子的变化规律来影响引力波的演化。利用公式 (3-167) 和 (3-168), 我们可以得到 Friedmann 方程

$$\left(\frac{H(\tau)}{H_0} \right)^2 = \left(\frac{g_*}{g_{*0}} \right) \left(\frac{g_{*s}}{g_{*s0}} \right)^{-4/3} \Omega_r \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-4} + \Omega_m \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3} + \Omega_\Lambda, \quad (3-170)$$

其中下标 0 表示现在时刻的值。将该方程带入引力波的演化方程 (3-149)，我们就可以通过数值计算来求解引力波的演化。这在文献 [Watanabe&Komatsu, 2006] 中已经详细讨论过了，我们这里不再作细致地介绍。在本文中我们给出一种简单的近似方法来描述该相变的影响，最后我们会把该影响归结为一个 damping 因子。我们考虑一个模数为 k 的引力波模 h_k ，当它正好进入视界的时候，宇宙的尺度因子我们计为 $a = a_k$ ，相应的 Hubbel 参数为 H_k ，因此正好穿越视界的时候满足 $k = a_k H_k / a_0$ 。我们知道在视界内部的引力波的振幅满足 $h_k(\tau) \propto 1/a(\tau)$ ，而视界外则满足 $h_k = \text{constant}$ 。因此可以定义一个函数

$$F_k \equiv \frac{h_k(\tau_0)}{h_k(\tau_i)} = \frac{a_k}{a_0} . \quad (3-171)$$

这里 τ_i 表示辐射为主开始的时刻。在辐射为主时期

$$H = B \left(\frac{g_*}{g_{*0}} \right)^{1/2} \left(\frac{g_{*s}}{g_{*s0}} \right)^{-2/3} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-2} , \quad (3-172)$$

这里 $B \equiv H_0 \Omega_r^{1/2}$ ，是一个常数。利用关系 $k = a_k H_k / a_0$ ，我们可以得到

$$F_k = \frac{B}{k} \left(\frac{g_*(T_k)}{g_{*0}} \right)^{1/2} \left(\frac{g_{*s}(T_k)}{g_{*s0}} \right)^{-2/3} , \quad (3-173)$$

其中 T_k 表示 h_k 正好跨越视界的时候对应的宇宙温度。首先我们假定 $g_* = g_{*0}$ 和 $g_{*s} = g_{*s0}$ 一直都成立，这正好对应于不考虑宇宙相变得情况，这时有 $\tilde{F}_k = B/k$ 。而宇宙相变的影响正好对应于

$$t_{tr} = \frac{F_k}{\tilde{F}_k} = \left(\frac{g_*(T_k)}{g_{*0}} \right)^{1/2} \left(\frac{g_{*s}(T_k)}{g_{*s0}} \right)^{-2/3} , \quad (3-174)$$

其中 $g_{*0} = 3.3626$ ， $g_{*s0} = 3.9091$ 。这个因子决定于宇宙演化过程中 g_* 和 g_{*s} 数值。

在图 (3-12) 中我们给出了标准模型和最小超对称模型中 g_* 和 g_{*s} 随温度的演化行为。这里我们考虑一个极端情况 $T_k > 10^6 \text{MeV}$ ，对应的引力波频率 $\nu > 10^{-4} \text{Hz}$ ，这时标准模型中 $g_* = g_{*s} = 106.75$ （在 MSSM 中， $g_* = g_{*s} = 228.75$ ），我们可以得到 $t_{tr} = 0.62$ （ $t_{tr} = 0.55$ in MSSM）。值得一提的是我们的简单近似方法在 10% 的精度上能够和数值计算的结果符合得很好，见图 (3-13)。

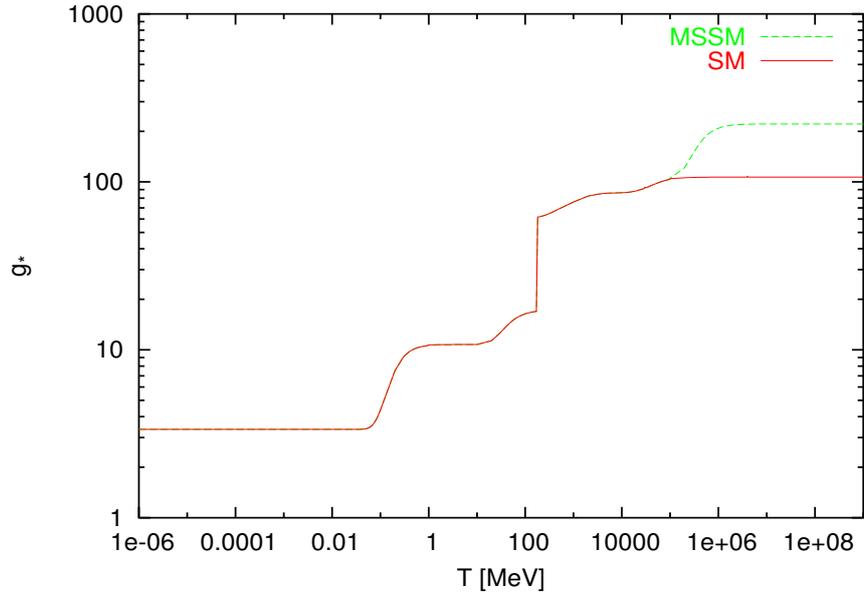


图 3-12: g_* 随温度 T 的演化。其中实线和虚线分别表示粒子物理的标准模型 (SM) 和最小超对称模型 (MSSM) 的情况。 g_{*s} 和 g_* 的区别仅仅存在于 $T < 0.1\text{MeV}$, 此时 $g_{*0} = 3.3626$, $g_{*s0} = 3.9091$, 在高温时两者没有区别 [Watanabe&Komatsu, 2006]。

§ 3.4 残余引力波的探测

由于研究引力波的极为重要的意义, 尤其是上世纪七八十年代通过对脉冲双星 PSR B1913+16 轨道周期的观测间接证明引力波存在以来, 引力波一直是人们研究的一个焦点问题。最近由于技术方面的进步, 使得目前引力波的探测无论对物理学还是天文学都是极为热门的领域。探测的方法和探测仪器也是多种多样。我们这里简要讨论探测宇宙残余引力波的几种主要的方法, 主要包括 CMB 极化的探测方法; pulsar timing 的探测方法; 干涉仪直接探测方法以及宇宙核合成的限制方法。

§ 3.4.1 各种探测残余引力波的方法

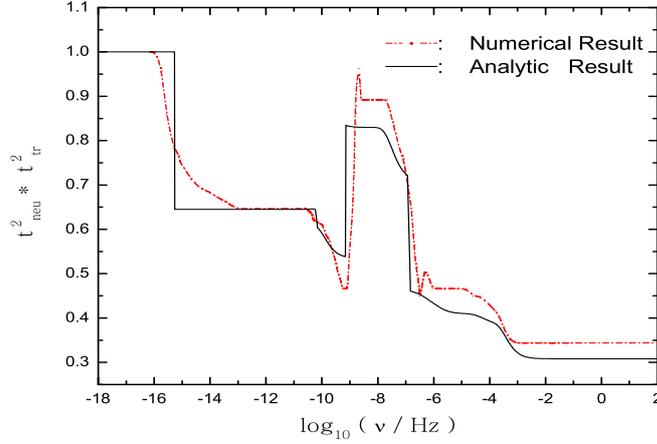


图 3-13: 数值和解析近似的 damping 因子 $t_{neu}^2 \times t_{tr}^2$ 对引力波频率的依赖关系。注意这里我们用的是 Standard Model。

♣: CMB 极化对残余引力波的探测

CMB 的研究近二十年以来无论是理论上还是观测上都取得了巨大的成功。尤其是最近几年 WMAP 观测结果的出现，极大地推动了宇宙的研究。通过观测 CMB 的温度各向异性功率谱以及极化功率谱来限制各种宇宙学参数和检验各种宇宙学模型已经是目前宇宙学最热门的研究领域之一。关于宇宙的残余引力波如何产生 CMB 的极化，我们在下一章会专门作详细的讨论和计算。在这里我们主要对 CMB 的物理图像，对目前以及未来探测器的探测能力作简单介绍。

CMB 光子在宇宙演化过程中，受到暴涨时期产生的密度扰动和残余引力波的影响，由于 Sachs-Wolfe 效应的影响，会出现微小 ($\sim 10^{-5}$) 的密度涨落。这些密度涨落的关联函数就是我们通常所说的 CMB 光子的温度各向异性功率谱。由于该功率谱在宇宙演化中会受到各种因素的影响，例如暗物质，暗能量，重子物质，中微子，宇宙复合过程，宇宙再电离过程等的影响，因此通过观测 CMB 的温度各向异性功率谱成为目前限制宇宙学以及宇宙学参数的最重要的方法。我们前面已经讨论过，暴涨宇宙学模

型最重要的两个预言就是存在近似尺度不变的密度扰动功率谱和引力波功率谱。而这两种扰动功率谱都会对 CMB 的温度各向异性产生影响。由于原初扰动谱的存在，宇宙度规会产生一些非常小的引力势井，当 CMB 光子从势井的能量高处跑到能量低处的时候，光子的能量会增大；相反当光子从势井的能量低处跑到能量高处的时候，光子的能量会减小。这就是所谓的 Sachs-Wolfe 效应。这是 CMB 温度各向异性产生的主要原因。虽然 CMB 光子在引力势井中运动时能量会发生变化，但是在宇宙中光子和电子退耦之前，由于光子与电子频繁的碰撞会抹掉早期的记忆。只有当光子退耦那一时刻，电子与光子的碰撞消失了，从而在 CMB 光子的扰动谱中保留了退耦时刻宇宙度规的扰动信息。在以后宇宙的演化过程中，由于引力势井的变化，会通过 integral-Sachs-Wolfe 效应在大尺度进一步地产生 CMB 光子的各向异性功率谱。在实际计算中我们要求解复杂的 Boltzmann 方程，并且结合宇宙重子，暗物质，中微子以及暗能量的运动方程，最后才能得到 CMB 温度各向异性的功率谱，关于这方面的计算可以参考文献[Seljak&Zaldarriaga, 1996; Hu&Sugiyama, 1995]，我们这里不再作详细介绍。我们知道引起 CMB 温度各向异性功率谱的主要包括原初的密度扰动功率谱和引力波功率谱。由于两种谱在宇宙演化过程中的演化行为是不同的：密度扰动由于和物质的紧密耦合使得其进入视界以后，扰动的幅度增大（这里不考虑一些其他的效应，例如 Silk damping 效应等等），因而它产生的 CMB 扰动功率谱的峰值在相对比较小的尺度上（ $l \sim 200$ ），而引力波由于没有和其它物质的强烈耦合，在进入视界以后，其振幅会不断减小，因而它产生的 CMB 扰动功率谱的峰值在最大的尺度上（ $l \sim 2$ ），见图（3-14）。我们知道 CMB 的温度各向异性功率谱可以由密度扰动和残余引力波产生，但是一般认为密度扰动远远大于引力波，因此引力波的贡献在该功率谱中被掩盖住了，往往难以观测。

当背景的 CMB 光子中存在微小的密度涨落，并且宇宙存在大量的自由电子的时候，由于汤姆孙散射作用，CMB 光子的分布中会出现线偏振（极化）成分。首先考虑入射一束极化方向为上下的线偏振光，入射到电子上，电子在电场的作用下作受迫振动，电偶极矩方向恰与电场方向平行反向，电偶极子发出的电磁辐射，由电动力学理论可知

$$\vec{E}' = \frac{e^{ikR}}{4\pi\epsilon_0 c^2 R} \left(\ddot{\vec{d}} \times \vec{k} \right) \times \vec{k}, \quad (3-175)$$

由上面的表达式可以看出，出射光在与 \vec{d} 垂直的平面内（赤道面内）最

强，且在此平面内 \vec{E}' 的方向与偶极子的方向平行。

其次，我们来考虑从某个方向入射自然光的情况。假定观测者在垂直于入射光传播方向的方向上。自然光可看作平面中各个方向线偏振光的叠加，且这些线偏振光振幅相同。对于一个入射平面自然光，光矢量所在的平面和光的传播方向垂直，经汤姆孙散射后，在赤道平面上散射光的方向与入射光相同，也即散射光的光矢量所在平面也垂直于入射光传播方向。那么在垂直于入射光传播方向的方向上的观测者就只能看到线偏振光。可见自然光入射经汤姆孙散射，在垂直于入射光传播方向的方向上得到振动方向平行于入射光光矢量所在平面的线偏振光。

如果，自然光不仅从这一个方向入射，而是空间各个方向都有自然光入射，且各个方向入射的自然光的强度都相同，显然经汤姆孙散射后得到的是各向强度都相同的自然光，即不会产生极化。正是由于最后一次散射之前，温度分布不均匀，也即各个方向入射到电子上的光子数不同，经汤姆孙散射后，散射光子也即不是各向同性的自然光，而是偏振光。这就是 CMB 极化产生的基本图像。这种极化的相关函数就是我们所说的极化功率谱，该极化功率谱通常被分为两个部分：有散无旋的电场型极化和有散无旋的磁场型极化。由于密度扰动天生的具有角度旋转不变性，因此它只能产生电场型极化。而引力波却不具有这个性质，因此它既可以产生电场型极化又可以产生磁场型极化。而通过探测该磁场型极化，就可以探测到宇宙背景的残余引力波。由于在小尺度上受到很多非线性效应的影响，因此该方法只对极低频 ($10^{-15} \sim 10^{-17}$ Hz) 的引力波敏感。在图 (3-14) 中我们给出了一个标准宇宙学模型中，密度扰动和引力波产生的 CMB 温度各向异性功率谱和极化功率谱的形状和大小，其中我们取了张量/标量比 $r = 0.38$ 。很明显， r 越小，磁场型极化也就越小。目前的观测给出的限制为 $r < 0.22$ (95% C.L.) [Seljak et al., 2005]。在图 (3-15) 中我们给出了目前对各种功率谱的观测情况。未来的一些主要观测计划包括：Planck ($r > 0.1$) [http:Planck]; Clover ($r > 0.005$) [Taylor et al., 2004]; CMBPol ($> 10^{-3}$) [http:inflation]。在图 (3-16) 中我们给出了目前以及未来的一些计划对磁场型极化功率谱的观测情况。

♣: 毫秒脉冲星残差的探测方法

利用毫秒脉冲星的信号残差来探测引力波的方法已经被很多作者深入

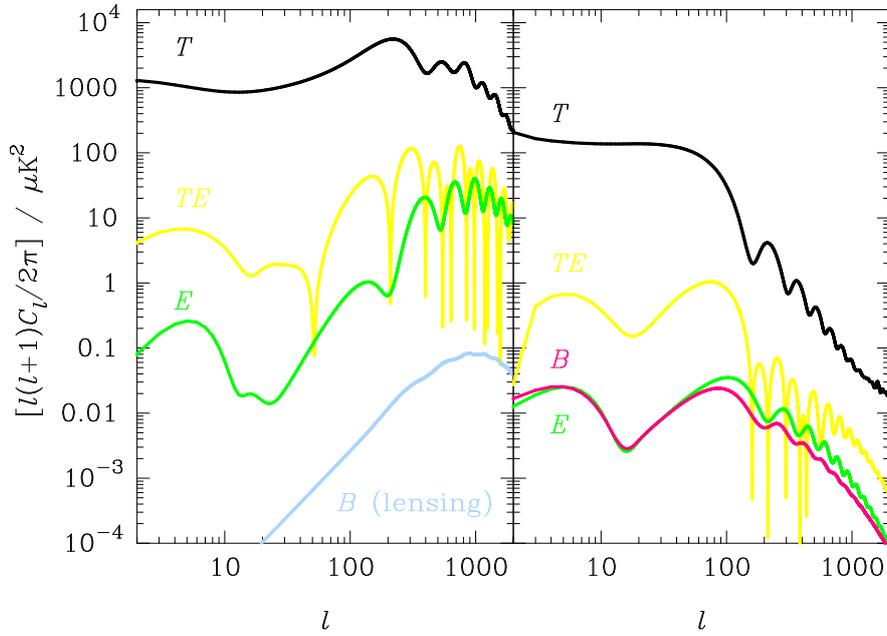


图 3-14: 密度扰动和引力波产生的 CMB 温度各向异性功率谱 (T) 和极化功率谱 (E, B) 的形状和大小, 其中我们取了张量/标量比 $r = 0.38$ 。其中我们还给出了弱引力透镜效应产生的磁场型极化功率谱 [Challinor, 2006]。

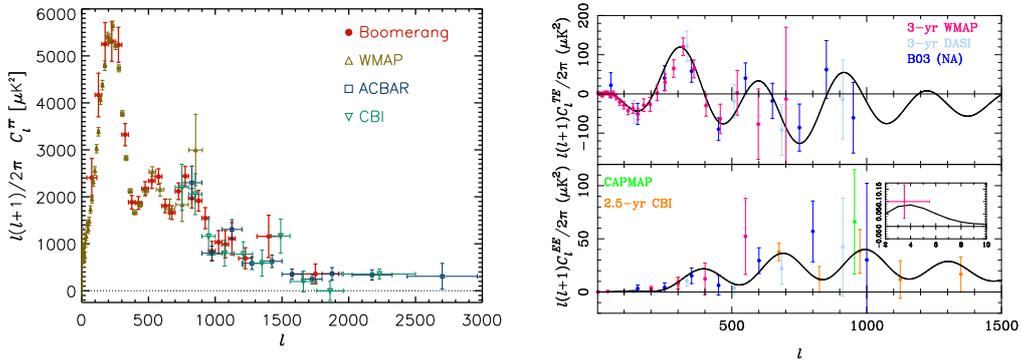


图 3-15: 目前 CMB 的温度各向异性 (左图) 和极化 (右图上 C_l^{TE} , 下 C_l^{EE}) 功率谱的观测情况。其中实线表示再电离光深 $\tau = 0.08$ 时候的拟和功率谱。注意这里的温度功率谱没有包括 WMAP 第三年的观测结果 [Challinor, 2006]。

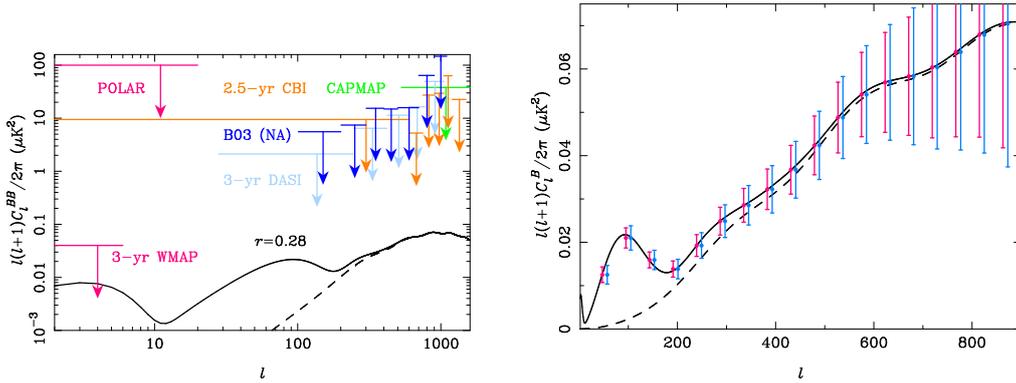


图 3-16: 左: 95% 置信度下, 目前磁场型极化的探测上限 [Challinor, 2006]。实线表示 $r = 0.28$ 时候的理论预言的极化谱, 而虚线表示引力透镜效应所产生的极化谱。右: Clover 探测器经过两年的观测预计得到的对极化谱的限制。实线和虚线的物理意义和左图一样。

地研究过了。由于毫秒脉冲星的周期非常稳定, 因此可以当作天然的时钟。在观测脉冲星发出的脉冲信号的时候, 无论是观测者还是被观测者都会受到宇宙残余引力波的影响, 从而改变信号到观测者之间的距离。这样观测到信号的周期就会不断地振荡。而这种振荡的信号周期 (频率) 对标准信号的偏离通常被称为信号残差 $R(t)$ 。引力波的能量密度和脉冲星信号残差的自相关函数之间的关系最早在文献 [Delweiler, 1979] 中被得到。假设背景引力波在频段 $[\frac{1}{2}f, \frac{3}{2}f]$ 之内是平谱, 则可以得到

$$\langle R_0^2(t) \rangle = \frac{208G\rho}{243\pi^3 f^4} \quad (3-176)$$

其中 $R_0(t)$ 正是毫秒脉冲星的信号残差, f 是引力波的频率, ρ 是引力波的能量密度。因此通过观测信号残差 R_0 就可以得到引力波的能量上限。目前 Lommen 通过对脉冲星 PSR J1713+0747, B1855+09, B1937+21 的观测给出了引力波的上限:

$$\frac{\rho}{\rho_c} = 2 \times 10^{-9} h^{-2}, \quad f = 1.9 \times 10^{-9} \text{Hz}. \quad (3-177)$$

和其它宇宙学观测一样, 该观测会受到各种随即噪音的影响, 这将和残余引力波的信号叠加在一起。利用多个脉冲星交叉相关的方法可以减少噪音从而得到更为精确的引力波上限 [Helling&Downs, 1983; Zhao&Zhang, 2003]。

通常有两个效应能产生脉冲星的信号残差.一个是残余引力波,另外一个 是噪音。因此所考虑的第 i 颗脉冲星的频率改变量可以写为

$$\frac{\Delta\nu_i(t)}{\nu_i} = \alpha h(t) + N_i(t), \quad (3-178)$$

其中 $N_i(t)$ 包含脉冲星处所有的随机噪音 (包括那里的残余引力波)。而 $h(t)$ 则是观测者所在位置引力波的大小; α_i 代表因子 $\frac{1}{2} \cos 2\phi(1 - \cos \theta)$, 其中的 (θ, ϕ) 代表脉冲星所在的位置。对于多颗脉冲星的观测,我们可以定义交叉相关函数

$$R_{12\dots n}^2 \equiv \sum_{i \neq j}^n R_{ij}^2 \quad (3-179)$$

其中 R_{ij} 代表脉冲星 i 和 j 的交叉相关残差

$$R_{ij}^2 \equiv \frac{1}{2} \langle R_i(t)R_j(t + \tau) + R_i(t)R_j(t - \tau) \rangle. \quad (3-180)$$

通过计算可以得到 [Zhao&Zhang, 2003]

$$R_{12\dots n}^2 = \frac{104G\rho}{81\pi^3 f^4} \sum_{i \neq j}^n \alpha_{ij}. \quad (3-181)$$

其中

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{4} \oint \alpha_i \alpha_j d\Omega = \frac{1 - \cos \gamma_{ij}}{2} \ln \left(\frac{1 - \cos \gamma_{ij}}{2} \right) - \frac{1 - \cos \gamma_{ij}}{2} + \frac{1}{3} \quad (3-182)$$

这里 γ_{ij} 为两颗脉冲星之间的夹角。与自相关方法比较,该方法能够大大地降低噪音。目前有很多长期的研究计划正在开展这项研究,比较著名的有 Don Backer 领导的 Berkeley 的脉冲星小组 [http: mpulsar], 他们有望把脉冲星的信号周期精确到 $5\mu s$ 的水平。

♣: 激光干涉仪直接探测方法

最早提出直接探测引力波的是 1957 年马里兰大学物理学家 J.Wely。他制作的探测器的关键部位是一根圆柱形棒,有7吨重,用钢索悬挂在真空室内,当引力波到来时,观测钢棒的伸缩。现在发现,这种探测器有一个难以克服的困难,被称为“布拉金斯基标准量子极限” [Grishchuk, 1992]。

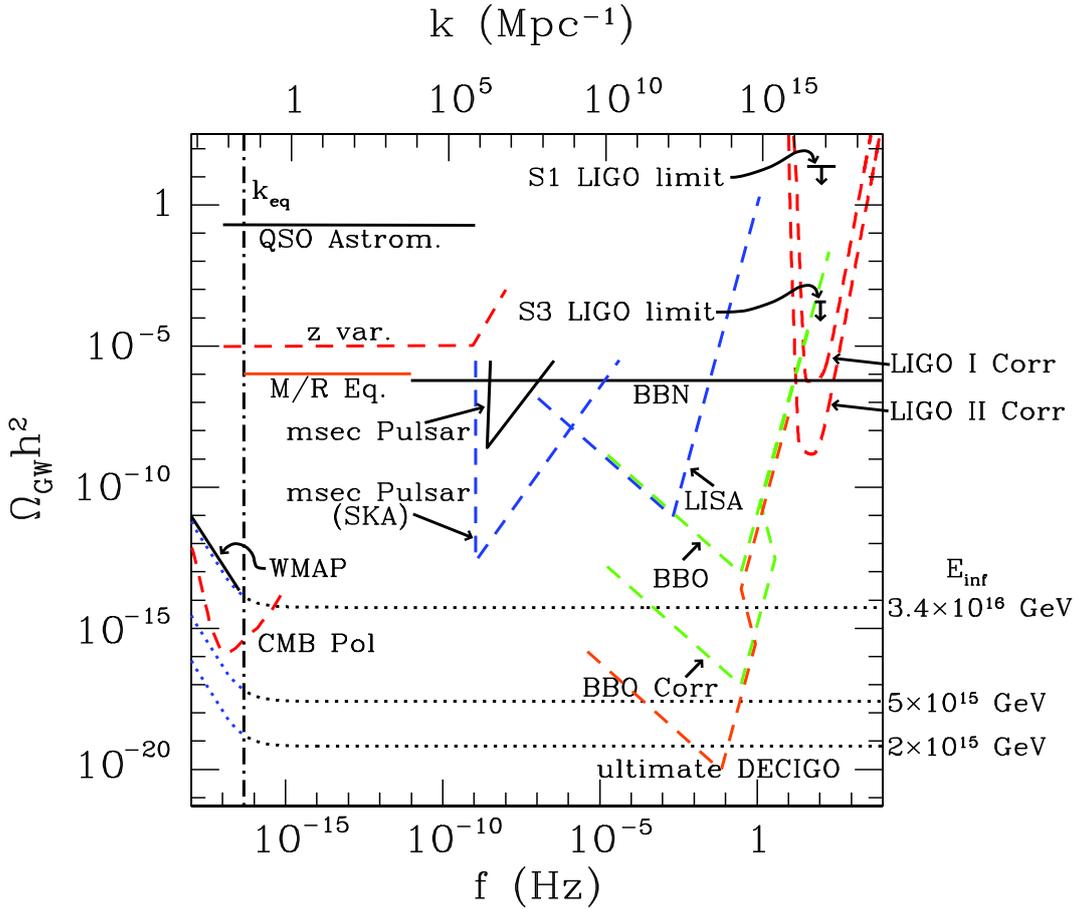


图 3-17: 目以及未来的各种观测手段对残余引力波的探测能力, 该图来自于 [Smith et al., 2006]

为了克服这个困难, 随后人们建造了应用激光光束的引力波探测器。其基本原理和上面的差不多, 三块物体由绳子吊在天花板上“L”型的两个端点和拐角的支点上。当引力波的第一个波峰从屋顶或地板进入实验室时, 潮汐力将沿L的一臂把两个物体拉开, 而沿另一臂将两个物体拉近。结果第一臂的长度将增大, 第二臂的长度将减小, 当第一个波峰过去, 波谷到来时,伸长的缩短的方向将改变。通过测量臂长差, 我们就能发现引力波。1991年, 美国政府批准的“引力波激光干涉仪 (LIGO)”是这方面最主要的工作之一, 其敏感频率在几个赫兹到几千个赫兹。目前经过三年的观测, 其观测能力已经达到其预期的结果, 它给出了宇宙残余引力波上限为

[Abbot et al., 2005]

$$\Omega_g h^2 < 8.4 \times 10^{-4}, \quad 69\text{Hz} < \nu < 156\text{Hz}, \quad (3-183)$$

其它的类似的观测站还有日本的TAMA, 法国和意大利 VIRGO, 德国和英国的 GEO 等等。

由于该方法的敏感频段和探测器的臂长有关。为了能够探测频率比较低的引力波, 必须更长臂长的探测器, 目前比较有希望的是 LISA 计划 [http: lisa]。这个仪器由三对宇宙飞船组成, 每组位于太空中一个大三角形的一角。当引力波通过系统时, 会扭曲三角形, 挤压一边而拉伸另一边。它的敏感频段为 $10^{-4} \sim 10^0\text{Hz}$ 。类似的计划还有中国的 ASTROD [Ni et al., 2004], 美国的 BBO [http: bbo]; 日本的 DECIGO [Kawamura&Nakamura, 2001] 等等。在图 (3-17) 中我们给出了各种激光干涉仪的探测灵敏度曲线。

♣: 宇宙核合成的限制

最后我们简单说明一下宇宙核合成的观测对残余引力波的限制。在宇宙核合成时期之前进入宇宙视界的引力波在宇宙核合成时候是宇宙中的一种辐射成分, 该辐射成分的存在会加快宇宙的膨胀速率, 从而改变宇宙中的元素丰度。因此通过对宇宙中元素丰度的观测, 我们可以对当时引力波的能量密度给出一定的限制。在实际计算的过程中, 我们通常把宇宙核合成时期其它的一些辐射成分 (包括引力波以及可能的暗能量) 的贡献归结为一个量 ΔN_ν , 即中微子代数的变化, 它与引力波的能量密度的关系为 [Kolb&Turner, 1990; Allen, 1996]

$$\int d(\ln f) \Omega_{g, \text{ at nuclepsynthesis}}(f) \leq \frac{\frac{7}{8} \Delta N_\nu}{1 + 3 \times \frac{7}{8} + 2 \times \frac{7}{8}} \left(\frac{\rho_r}{\rho_c} \right)_{\text{ at nuclepsynthesis}} \quad (3-184)$$

利用最新的对 ΔN_ν 的观测 $\Delta N_\nu < 1.6$ [Allen, 1996], 我们可以得到残余引力波一个上限, 见图 (3-17)

$$\int d(\ln f) \Omega_{g, \text{ at nuclepsynthesis}} \leq 8.9 \times 10^{-6}. \quad (3-185)$$

§ 3.4.2 各种探测方法的比较

在本节中我们首先将对上面关于暴涨期间引力波的产生，在宇宙后续过程中引力波的演化，以及引力波的探测方法和精度作一简单综述。然后通过现在的观测数据对引力波的上限作出一定的限制，并预言各个探测器对其探测能力。然后我们将利用暴涨流方程研究暴涨预言的引力波能谱在相空间的分布，并对目前各个探测结果作出评价，以及未来的一些探测方法作出比较等等。

♣: 引力波的原初扰动谱:

目前暴涨模型是一种为多数人所接受的早期宇宙模型，其预言的近似尺度不变得密度扰动谱已经为 CMB 以及大尺度等各方面的观测所证实。单场暴涨模型是最简单的一类模型，其预言的谱指数以及跑动也与最近的观测能够很好地符合。在这里我们只考虑慢滚动的单场暴涨模型，它预言的可观测量主要依赖于三个慢滚参数:

$$\epsilon_V \equiv \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \left(\frac{V'}{V} \right)^2, \quad \eta_V \equiv M_{\text{Pl}}^2 \left(\frac{V''}{V} \right), \quad \xi_V \equiv M_{\text{Pl}}^4 \left(\frac{V'V'''}{V^2} \right), \quad (3-186)$$

其中 $M_{\text{Pl}} \equiv (8\pi G)^{-1/2} = m_{\text{Pl}}/\sqrt{8\pi}$ 是约化的 Planck 质量， $V(\phi)$ 是暴涨的势函数，这里的上撇号表示对暴涨场 ϕ 求导。这里， ϵ_V 描述了势能的“steepness”， η_V 描述了势能的“curvature”，而 ξ_V 则描述了势能的“jerk”，在暴涨期间这三个参数都必须小于 1。暴涨预言的原初密度扰动谱可以用其谱指数以及跑动来表示为一个简单的幂律形式

$$P_S(k) = P_S(k_0) \left(\frac{k}{k_0} \right)^{n_s(k_0) - 1 + \frac{1}{2}\alpha \ln(k/k_0)}, \quad (3-187)$$

其中 n_s 就是谱指数， $\alpha \equiv dn_s/d \ln k$ 就是谱指数的跑动，而 k_0 是我们选择的“pivot”波数。在这里如不作特殊说明我们都选择 $k_0 = 0.05 \text{Mpc}^{-1}$ 。最近 WMAP 为扰动振幅的观测结果为 $P_S(k_0) \simeq 2.95 \times 10^{-9} A(k_0)$ ， $A(k_0) = 0.9 \pm 0.1$ [Bennett et al., 2003]。而暴涨所预言的引力波的原初谱为也可以写为一个简单的幂律形式

$$P_T(k) = P_T(k_0) \left(\frac{k}{k_0} \right)^{n_t(k_0) + \frac{1}{2}\alpha_t \ln(k/k_0)}, \quad (3-188)$$

其中 $n_t(k)$ 就是张量扰动的谱指数，而 $\alpha_t \equiv dn_t/d\ln k$ 则是其跑动。在单场暴涨模型中，有下面关系：

$$n_t = -\frac{r}{8}, \quad \alpha_t = \frac{r}{8} \left[(n_s - 1) + \frac{r}{8} \right], \quad r = \frac{8}{3}(1 - n_s) + \frac{16}{3}\eta_V, \quad (3-189)$$

其中 $r(k) \equiv P_T(k)/P_S(k)$ 就是我们前面所介绍的张量/标量比。这些关系不难从我们前面关于暴涨的讨论中得到。这些关系将观测上难以得到的 n_t 和 α_t 与观测上比较容易得到的量 n_s , r 联系起来。从这些关系中我们不难发现， n_s 和 r 的关系直接依赖于参数 η_V ，而它的取值则依赖于具体的暴涨模型。将这些关系代入方程 (3-188)，可以得到

$$P_T(k) = P_S(k_0) \times r \times \left(\frac{k}{k_0} \right)^{-\frac{r}{8} + \frac{r}{16}[(n_s - 1) + \frac{r}{8}] \ln(k/k_0)}. \quad (3-190)$$

通常张量/标量比的具体大小依赖于波数 k 的选择。在本节中如不作特殊说明，我们都约定 $r \equiv r(k_0)$ 。现在我们看到引力波的原初谱可以有参数 n_s 和 r 完全确定。最近 WMAP, SDSS, SNIa 和星系团的观测给出 [seljak et al., 2006]

$$n_s = 0.965 \pm 0.012, \quad (68\% \text{ C.L.}) \quad (3-191)$$

$$r < 0.22, \quad (95\% \text{ C.L.}). \quad (3-192)$$

和前面一样，我们可以定义引力波的能量强度

$$\Omega_g(k) = \frac{1}{\rho_c} \frac{d\rho_g}{d\ln k}, \quad (3-193)$$

其中 $\rho_c = 3H_0^2/8\pi G$ 是宇宙的临界密度， $H_0 = 100h \text{ km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$ 是现在的 Hubble 常数。在本节的讨论中我们取 $h = 0.72$ 。不难证明，引力波的能量强度可以用下面的公式来描述 [Boyle et al., 2005]

$$\Omega_g(k) = \frac{1}{12H_0^2} k^2 P_T(k) \mathcal{T}^2(k), \quad (3-194)$$

其中转移函数 $\mathcal{T}(k)$ 需要包含前面章节所讨论各种 damping 效应。

♣: 各种 damping 效应:

如我们前面所讨论的，当原初的引力波在宇宙后续过程中演化的时候，会受到宇宙膨胀，暗能量，中微子以及宇宙相变的影响。在这里我们对前面这四个效应分别所以小结，并将其分别归结为一个 damping 因子。首先我们考虑由于宇宙的膨胀而产生的红移压低效应。这个效应在我们前面的解析计算中已经详细讨论过了。该效应的简单地可以这样描述：当引力波的波长大于宇宙视界的时候，引力波的振幅是不随时间变化的，即保持一常数；而当引力波进入视界以后其振幅将随着宇宙尺度因子的膨胀成下面的关系衰减：

$$h_k \propto \frac{1}{a(\tau)} . \quad (3-195)$$

我们前面的解析计算有两个缺点，一是形式过于复杂难以看出各个物理参数的影响，二是我们当时考虑宇宙在辐射为主和物质为主时间转化的时候用了一个直接转变的方法，而实际演化是这两段是慢慢转化的，因而我们的方法可能会引起一定的误差。在这里我们用一个数值拟和得到的一个非常好地近似公式。在文献 [Turner et al., 1993] 中作者发现在不考虑暗能量影响的时候，宇宙膨胀对引力波的红移压低效应可以用下面的公式来很好地描述：

$$t_1(k) = \frac{3j_1(k\tau_0)}{k\tau_0} \sqrt{1.0 + 1.36 \left(\frac{k}{k_{eq}}\right) + 2.50 \left(\frac{k}{k_{eq}}\right)^2} , \quad (3-196)$$

其中 $k_{eq} = 0.073\Omega_m h^2 \text{Mpc}^{-1}$ 对应于正好在辐射/物质相等时刻进入视界的波模对应的波数。注意在本节中我们对波数 k 地定义和前面的定义略有不同，这里我们定义波数和物理频率的关系为 $k = 2\pi\nu$ ，并设定现在宇宙的尺度因子为 $a_0 = 1$ 。而 $\tau_0 = 1.41 \times 10^4 \text{Mpc}$ 是现在的共形时间。很明显 t_1 对于波数 k 是一个关于剧烈的振荡函数。我们这里只关系其振幅，而并不关系其振荡的相位，因此在 $k\tau_0 \gg 1$ 的时候，这个 damping 因子可以写为

$$t_1(k) = \frac{3}{(k\tau_0)^2} \sqrt{1.0 + 1.36 \left(\frac{k}{k_{eq}}\right) + 2.50 \left(\frac{k}{k_{eq}}\right)^2} . \quad (3-197)$$

下面我们再简单讨论一下宇宙最近的加速膨胀的影响。关于这个问题，我们前面已经作了非常细致的讨论。这里只作简单的总结。在 ΛCDM 宇宙模型中，引力波的振幅会被宇宙近期的加速膨胀所扭曲。和没有加速膨胀的模型相比，加速膨胀的影响为，对于极低频率的波模 $k\tau_0 < 1$ 没有

影响，引力波保持其原初谱，而对于比较高频的波模 $k\tau_0 \gg 1$ ，暗能量的影响可以用一个damping 函数 t_{acc} 很好地描述，我们这里将其记为 t_2 ：

$$t_2 = \frac{\Omega_m}{\Omega_\Lambda} . \quad (3-198)$$

对于 $\Omega_m = 0.27$, $\Omega_\Lambda = 0.73$ 的模型，该因子为 $t_2 \simeq 0.37$ 。

第三个我们简单总结中微子的影响。由前面的讨论可以知道当中微子作为自由粒子流在宇宙中所占比重不可以忽略的时候，会对这期间进入宇宙视界的引力波波模 ($10^{-16}\text{Hz} \sim 10^{-10}\text{Hz}$) 产生一个比较小的 damping 效应，即前面提到的 t_{neu} ，这里我们将其记为 t_3 ，

$$t_3 = \frac{15(14406f^4 - 55770f^3 + 3152975f^2 - 48118000f + 324135000)}{343(15 + 4f)(50 + 4f)(105 + 4f)(180 + 4f)} . \quad (3-199)$$

对于三代中微子的宇宙模型，它可以近似写为

$$t_3 \simeq \begin{cases} 1, & \nu < 10^{-16}\text{Hz} \\ 0.80313, & 10^{-16}\text{Hz} < \nu < 10^{-10}\text{Hz} \\ 1, & \nu > 10^{-10}\text{Hz} \end{cases} . \quad (3-200)$$

第四个我们考虑前面提到的宇宙相变对引力波的影响。会对相变时刻以及相变之前时刻进入宇宙视界的引力波产生影响。由于宇宙相变主要发生在大于 1MeV 的能标，因此它主要影响非常高频 ($\nu > 10^{-10}\text{Hz}$) 的引力波。该效应也可以用一个简单的 damping 函数 t_{tr} 来很好地描述，这里我们将其记为 t_4 ：

$$t_4 = \left(\frac{g_*(T_k)}{g_{*0}} \right)^{1/2} \left(\frac{g_{*s}(T_k)}{g_{*s0}} \right)^{-2/3} . \quad (3-201)$$

因此总的转移函数可以从这四个 damping 函数的乘积来表示，即

$$\mathcal{T}(k) = t_1 \times t_2 \times t_3 \times t_4 . \quad (3-202)$$

这四个因子中 t_1 是最主要的，它大致描述了引力波在膨胀宇宙中的演化行为。其它三个效应是对这个效应在不同频段上的补充。它们对各个宇宙学参数，如 Ω_m , Ω_Λ , f , g_* , g_{*s} 等的影响在这里被明显地表现了出来。下面我们对这三个效应的大小做一个估计：在 $\Omega_m = 0.27$, $\Omega_\Lambda = 0.73$ 的模型中， $t_2 \simeq 0.37$ 它对引力波强度的影响将近一个量级；对于 $f = 0.4502$ 的三代中微子模型 $t_3 \simeq 0.80313$, $t_3^2 \simeq 0.645$ ；而对于 $g_* = g_{*s} = 106.75$ 的粒子物

理标准模型, $t_4 \simeq 0.62$, $t_4^2 \simeq 0.38$ 。可见后面两个效应对引力波能谱的影响都远远小于一个量级。当然极早期宇宙的再加热过程也会影响引力波的能谱。但是正如我们前面的分析, 它只能影响极高频 ($\nu \gg 10^8 \text{Hz}$) 的引力波, 而这个频段目前还没有比较好地方法观测, 因此这里我们不考虑它的效应。

♣: Ω_g 的上限与未来探测器的灵敏度

未来探测宇宙残余引力波的探测器主要有两类: 一类是 CMB 探测计划, 而另一类主要是激光干涉仪。对于极低频 ($10^{-17} \sim 10^{-15} \text{Hz}$) 的引力波, CMB 的方法是比较敏感的。例如未来不久的 Planck 卫星预计能够探测到 $r > 0.1$ 的水平 [http:Planck], 而地面探测器 Clover 的灵敏度预计可以达到 $r > 0.005$ [Taylor, 2004]; CMBPol 预计的灵敏度甚至可以达到 $r > 10^{-3}$ [http:inflation]; 我们知道 CMB 极化的方法探测引力波有一个极限, 当 $r < 10^{-4}$ 的时候, 由于引力透镜产生的磁场型极化会掩盖引力波产生的极化, 因此不能再通过该方法来探测 [Zaldarriaga et al., 1998]。直接探测引力波的干涉仪主要敏感于高频引力波 ($10^{-4} \sim 10^4 \text{Hz}$)。对 $\nu > 10-14 \text{Hz}$ 的高频波段, 我们有 $t_3 = 1$, $t_4 = 0.62$ (SM), 利用公式 (3-194), (3-197) - (3-201) 可以得到引力波的能量强度为

$$\Omega_g(k) \simeq 4.15 \times 10^{-7} P_T(k) . \quad (3-203)$$

将公式 (3-190) 代入, 可以得到

$$\Omega_g(k) \simeq 1.09 \times 10^{-15} r \left(\frac{k}{k_0} \right)^{-\frac{r}{8} + \frac{r}{16} [(n_s - 1) + \frac{r}{8}] \ln(k/k_0)}, \quad (3-204)$$

这里我们已经取了 $A(k_0) = 0.9$ 。我们发现该能量强度依赖于三个参数: 波数 k , 张量/标量比 r , 标量谱指数 n_s 。

下一步 LIGO 预计能够探测的灵敏度为 $\Omega_g h^2 > 10^{-9}$, 在 $\nu \simeq 100 \text{Hz}$ 的频率 [http:advLIGO]; 而 LISA 预计可以探测到 $\Omega_g h^2 > 10^{-11}$ 在 $\nu \simeq 0.005 \text{Hz}$ 的频率 [http:Lisa]; 空间探测计划 ASTROD 预计最终可以达到 $\Omega_g h^2 > 10^{-15}$ 在 $\nu \simeq 5 \times 10^{-4} \text{Hz}$ 的频率 [Ni, 2004]; 非常重要的一个探测计划 BBO 的灵敏度预计可以达到 $\Omega_g > 2.2 \times 10^{-17}$ 在 $\nu \simeq (0.1-1) \text{Hz}$ 频段 [http:bbo]; 目前预计的最敏感的 DECIGO 探测计划, 如果能够实施, 其预

计的灵敏度甚至可以达到 $\Omega_g h^2 > 10^{-20}$ 在 $\nu \simeq 0.1\text{Hz}$ 频率附近 [Kawamura et al., 2001]。

首先我们根据公式 (3-204) 来估算引力波能量强度的上限。这里我们假设 $n_s \leq 1$, $r < 0.22$, 这和目前的观测是相符的 [Seljak et al., 2005]。因此公式 (3-204) 给出了在 $\nu = 0.1\text{Hz}$ 的上限:

$$\Omega_g < 1.48 \times 10^{-16}. \quad (3-205)$$

并且当 $n_s = 1$ 并且 $r = 0.22$ 的时候可以达到极大值。我们可以发现该极大值远远小于 LIGO, LISA, ASTROD 的预期灵敏度。在图 (3-18) 中我们画出频率为 $\nu = 0.1\text{Hz}$ 能量强度对张量/标量比 r 的依赖关系。其中纵轴正好能够描述干涉仪的探测能力, 横轴正好能够描述 CMB 极化探测器的探测能力。在这样的相图中我们能够明显地对两类探测器的探测能力进行比较。从该图中我们发现不同的 n_s 只影响 r 比较大时候的引力波能量强度。并且 n_s 越大, 引力波能量强度也越大; 但是当 $r < 0.01$ 的时候, n_s 的影响却可以忽略。从该图中我们还可以发现, BBO 探测器的灵敏度等价于 $r > 8.3 \times 10^{-3}$, 此灵敏度低于 Planck, 却高于 Clover 和 CMBPol; 而 DECIGO 的灵敏度其实等价于 $r > 6.8 \times 10^{-6}$, 这样的灵敏度远远低于比所有 CMB 探测器, 甚至低于 CMB 极化探测器的探测极限 ($r > 10^{-4}$)。

♣: 暴涨模型的预言

从公式 (3-204) 中我们可以看到, 对于确定的波模 Ω_g 的值主要依赖于 n_s 和 r 。目前我们对 n_s 的值已经有了比较好的观测, 但是对 r 的值却还没有最终确定下来, 而只是给出了一个上限。这里我们希望通过具体的暴涨模型将 n_s 和 r 的值联系起来。从我们前面的公式 (3-189) 中我们不难发现, n_s 和 r 的关系主要依赖于暴涨的慢滚参数 η_V 的值。因此我们利用 η_V 的值得大小对暴涨模型进行分类。这正好就是我们前面提到的分类方法: 负曲率模型、微正 (或零) 曲率模型、中正曲率模型、巨正曲率模型。正如我们前面所讨论的, 这些模型分别对应于不同的暴涨物理, 并预言不同的引力波大小。下面我们分别对这几类模型进行讨论:

Case A: 负曲率模型, $\eta_V < 0$

我们知道负曲率模型多来自于自发对称破缺德暴涨势能, 其代表为 $V = \Lambda^4 [1 - (\phi/\mu)^p]$, $p \geq 2$ 。这种模型一般都预言的密度扰动谱为红谱,

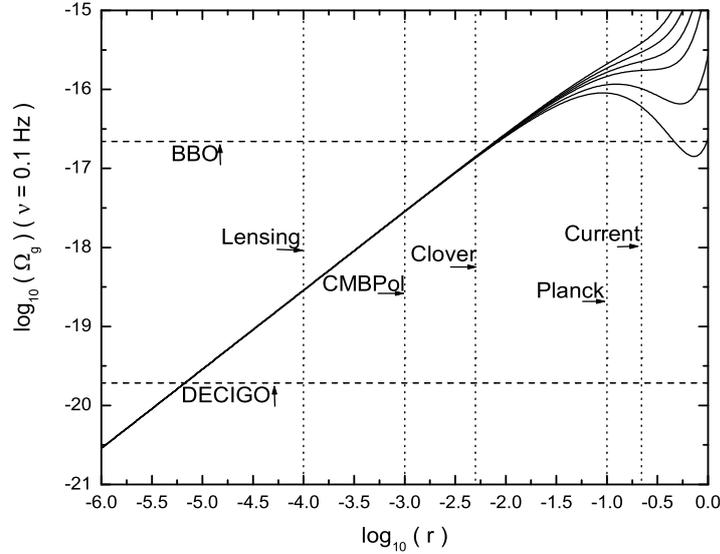


图 3-18: 频率为 0.1Hz 的引力波能量强度对暴涨参数 n_s 和 r 的依赖关系。这里的竖线从右到左分别为目前的限制以及 Planck, Clover, CMBPol, 以及极化探测的极限灵敏度；而横线从上到下分别是 BBO 和 DECIGO 的灵敏度。而实线从上到下分别对应于 $n_s = 1.00, 0.98, 0.96, 0.94, 0.90, 0.86$ 。注意在该图中的能量强度我们没有考虑宇宙相变的影响 [Zhao&Zhang, 2006d]。

这和目前的观测是相符的。同时这一类模型预言的引力波都比较小。例如对于上述 $p = 2$ 的模型：

$$r \simeq 8(1 - n_s)e^{-N(1-n_s)}, \quad (3-206)$$

其中 N 是 e-folds 的数值，一般认为在范围 $N \in [40, 70]$ 之内。这里我们取 $N = 70$ 。利用观测对 n_s 的限制 (3-191)，我们发现

$$r \in [0.014, 0.037]. \quad (3-207)$$

从图 (3-18) 中我们发现这已经低于 Planck 的探测灵敏度，但却高于 Clover, CMBPol, 以及 BBO 和 DECIGO 的探测灵敏度。而对于其它 $p > 2$ 的模型，其预言的引力波会更小，其探测也就更加困难。

Case B: 微正（或零）去模型， $0 \leq \eta_V \leq 2\epsilon_V$

这一类模型的两个典型的形式为幂律谱 $V = \Lambda^4(\phi/\mu)^p$, $p \geq 2$ ($0 < \eta_V < 2\epsilon_V$) 和指数谱 $V = \Lambda^4 \exp(\phi/\mu)$ ($\eta_V = 2\epsilon_V$)。这类模型预言的都是红谱，这也与观测相符。但是它预言的引力波较大

$$\frac{8}{3}(1 - n_s) \leq r \leq 8(1 - n_s). \quad (3-208)$$

利用观测对 n_s 的约束 (3-191)，我们可以发现

$$r \in [0.061, 0.376], \quad (3-209)$$

这个区域在 Clover, CMBPol, BBO, 以及 DECIGO 的灵敏度范围之内，但是 Planck 的敏感区域却正好在这区间之内,因此它也有可能探测到。

Case C: 中正曲率模型， $2\epsilon_V < \eta_V \leq 3\epsilon_V$

我们知道这一类模型大都是一些过渡模型，其预言为：

$$n_s < 1, \quad r > 8(1 - n_s), \quad (3-210)$$

利用观测对 n_s 的约束 (3-191)，我们可以发现

$$r > 0.184. \quad (3-211)$$

这和目前的上限 $r < 0.22$ 非常接近了。而且正好在 Planck 的敏感度范围之内。

Case D: 巨正曲率模型， $\eta_V > 3\epsilon_V$

这一类模型义演预言的都是蓝谱，这和目前的限制 (3-191) 是不一致的。但是我们需要指出的是，这并不是说这一类模型完全被目前的观测排除。在拟和 CMB 数据的时候，如果考虑 n_s 的跑动以及引力波的贡献，那么目前最好的拟和结果为 $n_s(k = 0.002\text{Mpc}^{-1}) = 1.21_{-0.16}^{+0.13}$, $\alpha(k = 0.002\text{Mpc}^{-1}) = -0.102_{-0.043}^{+0.050}$ [Hinshaw et al., 2006]。我们发现这正好是一个蓝谱，其跑动为负值。因此从这个意义上讲，要想彻底排除这一类模型还需要更多的观测数据和更精确的拟和。

♣: 暴涨流方程及其对残余引力波的预言

在我们上面的讨论中主要有两个不足：其一我们的讨论依赖于具体的暴涨模型，我们也看到的不同的暴涨模型预言的引力波大小是非常不同

的，但是我们又不能对每个模型都进行讨论；其二，我们上面的讨论中对于引力波的原初扰动谱，我们用了一个近似幂律的形式。这个形式是一个非常好的近似，如果我们讨论的频段离 k_0 不是太远的话。但是我们上面所感兴趣的频率约为 0.1Hz 的引力波，其频率比 k_0 大 15 个量级以上，这样我们的幂律近似可能会产生比较明显地误差。对这个误差的估算，我们在文章 [Zhao, 2006] 中已经有了比较详细的讨论，这里不在介绍。为了弥补这两个缺陷，我们现在利用另外一种方法来估算暴涨产生的引力波的大小。

♡: 暴涨流方程

暴涨流方程首先是被 Hoffman 和 Turner [Hoffman&Turner, 2001] 提出来的。这种方法可以产生一系列的暴涨模型（这里我们称其为暴涨模型实现）并能够和观测量直接相比较。这种方法能够适用于任何的慢滚动单场暴涨模型，它能够使我们不纠缠于具体的暴涨细节，而对暴涨的一些预言做出统计上的分析。在本节中我们也将利用该方法来统计分析暴涨预言的引力波能谱的分布，以及探测器的探测能力。这种方法的描述依赖于一系列的 Hubble 慢滚参数，其定义为

$$\epsilon(\phi) \equiv \frac{m_{\text{Pl}}^2}{4\pi} \left(\frac{H'(\phi)}{H(\phi)} \right)^2, \quad \lambda_l(\phi) \equiv \left(\frac{m_{\text{Pl}}^2}{4\pi} \right)^l \frac{(H')^{l-1}}{H^l} \frac{d^{(l+1)}H}{d\phi^{(l+1)}} \quad (l \geq 1), \quad (3-212)$$

这里的上撇号表示暴涨场 ϕ 求导。而 $H(\phi)$ 是以 ϕ 为变量的 Hubble 参数，它与暴涨势函数 $V(\phi)$ 可以通过所谓的 Hamilton-Jacobi 方程来联系

$$[H'(\phi)]^2 - \frac{12\pi}{m_{\text{Pl}}^2} H^2(\phi) = -\frac{32\pi^2}{m_{\text{Pl}}^4} V(\phi). \quad (3-213)$$

这些 Hubble 慢滚参数满足一个无限阶的阶梯方程：

$$\frac{d\epsilon}{dN} = \epsilon(\sigma + 2\epsilon), \quad (3-214)$$

$$\frac{d\sigma}{dN} = -\epsilon(5\sigma + 12\epsilon) + 2(\lambda_2), \quad (3-215)$$

$$\frac{d}{dN} \lambda_l = \left[\frac{l-1}{2} \sigma + (l-2)\epsilon \right] \lambda_l + \lambda_{l+1}, \quad (l \geq 2) \quad (3-216)$$

这里的 N 表示暴涨的 e-folds 数，而 $\sigma \equiv 2\lambda_1 - 4\epsilon$ 。这个方程组对任何的慢滚动的单标量场模型都是适用的，只要对 Hubble 慢滚参数给定一个初始

条件，就对应于一个暴涨模型。但是在实际的求解过程中需要对方程组进行截断。在本文中，我们解方程组的时候我们截断在第十阶，同时参照文献 [Smith et al., 2006; Kinney, 2002] 选择初始条件为

$$\epsilon|_i \in [0, 0.8], \quad (3-217)$$

$$\sigma|_i \in [-0.5, 0.5], \quad (3-218)$$

$$\lambda_2|_i \in [-0.05, 0.05], \quad (3-219)$$

$$\lambda_l|_i \in [-0.025 \times 5^{-l+3}, 0.025 \times 5^{-l+3}], \quad (3 \leq l \leq 10), \quad (3-220)$$

其它的参数为零。该暴涨流方程有两个固定解：一个是 $\epsilon = 0$, $\lambda_l = 0$ ($l \geq 2$), $\sigma = \text{constant}$; 另外一个解是 $\epsilon = \text{constant}$, $\sigma = -2\epsilon$, $\lambda_2 = \epsilon^2$, and $\lambda_l = \epsilon\lambda_{l-1}$ ($l \geq 3$)。在我们的文章 (Zhao&Zhang, 2006d) 中我们证明了对于截断模型而言，后一个解释不稳定的。这一点与我们这里的关系不大，所以不再做详细讨论。

有一点我们在这里不得不指出：当暴涨流方程组没有被截断的时候，它可以描述所有的暴涨势函数。但是当我们一旦对方程组截断以后，这种普遍性就丧失了，这一点在文献 [Liddle, 2003] 中已经指出。作者发现对于截断到 M 阶的暴涨流方程，其实只能代表了一类暴涨势

$$V(\phi) = \frac{3m_{\text{Pl}}^2}{8\pi} H_0^2 (1 + A_1\phi + \cdots + A_{M+1}\phi^{M+1})^2 \times \left[1 - \frac{1}{3} \frac{m_{\text{Pl}}^2}{4\pi} \left(\frac{A_1 + \cdots + (M+1)A_{M+1}\phi^M}{1A_1\phi + \cdots + A_{M+1}\phi^{M+1}} \right)^2 \right]. \quad (3-221)$$

而不能代表全部的暴涨势函数。这种势函数其实相当于对任意一个暴涨势在 $\phi = 0$ 附近作一种近似泰勒展开一样的展开方法。因此它仍然能够描述任意暴涨势函数的一些普遍性质。

♡♡: 暴涨参数和引力波的能量强度

在暴涨流方程中，很多可观测的物理量都可以与 Hubble 慢滚参数联系起来。这里我们只对下面的参数感兴趣：张量/标量比 r ，标量谱指数 n_s ，

及其跑动 α 。这些参数可以写为 [Liddle et al., 1994] (精确到二阶慢滚近似) :

$$r \simeq 16\epsilon[1 - c(\sigma + 2\epsilon)], \quad (3-222)$$

$$n_s \simeq 1 + \sigma - (5 - 3c)\epsilon^2 - \frac{1}{4}(3 - 5c)\sigma\epsilon + \frac{1}{2}(3 - c)\lambda_2, \quad (3-223)$$

$$\alpha = -\frac{1}{1 - \epsilon} \frac{dn_s}{dN}, \quad (3-224)$$

这里的常数 $c = 4(\ln 2 + \gamma) - 5 \simeq 0.0814514$ (γ 是 Euler-Mascheroni 常数)。因此只要我们数值解出了暴涨流方程 (3-214) - (3-216), 这些慢滚参数就可以得到, 再通过上面这些关系式就可以得到这些可观测量的值。在慢滚动的暴涨模型中, 引力波的原初扰动谱为 [Stewart&Lyth, 1993]

$$P_T(k) = \frac{16}{\pi} \left[1 - \frac{c+1}{4}\epsilon \right]^2 \frac{H^2}{m_{\text{Pl}}^2} \Big|_{k=aH}, \quad (3-225)$$

这里 H 是当波数为 k 的引力波正好出视界的时候, 即 $k = aH$ 对应的 Hubble 参数。如果我们忽略小量 ϵ , 那么 $P_T(k)$ 只依赖于 Hubble 参数 H , 这正是 de Sitter 暴涨的情形。公式 (3-225) 可以被改写为

$$P_T(k) = \left(\frac{4 - (c+1)\epsilon}{4 - (c+1)\epsilon_i} \right)^2 \frac{H^2}{H_i^2} P_T(k_0), \quad (3-226)$$

其中 ϵ_i 和 H_i 分别是 k_0 的波模出视界的时候 ($a = k_0/H_i$) 对应的 ϵ 和 H 对应的值。和前面一样的讨论, 引力波谱可以和密度扰动谱联系起来 $P_T(k_0) = P_S(k_0)r(k_0)$ 。而 Hubble 参数 $H(N)$ 可以表示为

$$H(N) = H_i \exp \left[- \int_{N_i}^N \epsilon(n) dn \right], \quad (3-227)$$

其中 N_i 为 $H = H_i$ 的时候对应的暴涨 e-folds。将公式 (3-226) 和 (3-227) 代入公式 (3-194), 可以得到引力波的能量强度

$$\Omega_g(k) = 0.84 \times 10^{-10} r \left(\frac{k}{H_0} \right)^2 \times \mathcal{T}(k)^2 \left(\frac{4 - (c+1)\epsilon}{4 - (c+1)\epsilon_i} \right)^2 \exp \left[-2 \int_{N_i}^N \epsilon(n) dn \right], \quad (3-228)$$

这里 $\mathcal{T}(k)$ 是 damping 因子, 而 H_0 为现在的 Hubble 常数, 将 damping 因子和 r 的表达式代入, 我们得到对于 $\nu > 10^{-10}\text{Hz}$ 的引力波的能量强度为

$$\begin{aligned} \Omega_g(k) &\simeq 4.59t_4 \times 10^{-14} [\epsilon_i - c(\sigma_i\epsilon_i + 2\epsilon_i^2)] \\ &\times \left(\frac{4 - (c+1)\epsilon}{4 - (c+1)\epsilon_i} \right)^2 \exp \left[-2 \int_{N_i}^N \epsilon(n) dn \right], \end{aligned} \quad (3-229)$$

对于固定的波数, t_4 的值是一定的。因此该强度只依赖于慢滚参数 ϵ 和 σ , 而这些可以通过求解暴涨流方程来得到。在具体求解之前我们先来估算一下引力波的上限。因为在暴涨期间 $0 \leq \epsilon < 1$ 是满足的, 因此当我们取 $\epsilon = 0$ 的时候可以得到一个不等式

$$\Omega_g(k) < 7.34t_4^2 \times 10^{-13} \frac{\epsilon_i - c(\sigma_i\epsilon_i + 2\epsilon_i^2)}{(4 - (c+1)\epsilon_i)^2}, \quad (3-230)$$

它只依赖于参数 ϵ_i 和 σ_i 。当 $\epsilon_i = 1$, 方程右边可以取到极大值, 因此我们可以得到一个非常粗略的上限

$$\Omega_g(k) < 8.62t_4^2 \times 10^{-14}, \quad (0.62 \leq t_4 \leq 1) \quad (3-231)$$

这里我们利用到了近似关系 $r \simeq 16\epsilon$, 忽略了其中二阶小量的影响。这个上限适用于任何的单场慢滚暴涨模型, 而不依赖于任何的观测限制。而且对于一个广泛的频段 $\nu > 10^{-10}\text{Hz}$, 因此可以广泛地应用。很明显这里的上限比我们前面得到的上限 (3-205) 大了很多。需要注意的是我们这里得到的上限远远小于 LIGO 和 LISA 的灵敏度极限, 但是大于 ASTROD, BBO 和 DECIGO 的灵敏度极限。当然对于频率在 $\nu \in (10^{-16}, 10^{-10})\text{Hz}$ 范围内的引力波, 由于 $t_4 = 1$, $t_3 = 0.80313$, 引力波能量强度的上限变成了 $\Omega_g(k) < 5.56 \times 10^{-14}$ 。这是对 $\nu \in (10^{-16}, 10^{-10})\text{Hz}$ 频段内的所有引力波都适用的。

♡♡♡: 目前观测对宇宙学参数的限制

上面的讨论中, 我们发现参数 n_s , α , r , Ω_g 直接是由 Hubble 慢滚参数决定的。这里针对目前的观测对这些参数的限制, 我们对给一个简要综述。现在的观测对参数 n_s , α , r 的限制主要来自于大尺度方面的

观测，例如 CMB 和 LSS 的观测，这里我们称之为“大尺度限制”，简称 LSC。我们可以综合目前第一年和第三年的 WMAP 的观测限制，以及考虑 SDSS, WMAPext, 2dFGRS, SNIa 等观测数据的拟和结果而给出一个最松散的限制条件

$$n_s \in [0.86, 1.00], \quad \alpha \in [-0.087, 0.007], \quad r < 0.22, \quad (3-232)$$

我们发现这些限制给出的密度扰动谱是一个红谱，并且其跑动是非常小的，这些和单场暴涨模型的预言是相符的。

而目前观测对 Ω_g 的直接限制多来自于小尺度上的一些观测证据，这里我们称之为“小尺度限制”，简称 SSC。主要包括下面几个：pulsar timing 的限制 [Detweiler, 1979]

$$\Omega_g h^2 < 2 \times 10^{-9}, \quad \nu = 1.9 \times 10^{-9} \text{Hz}; \quad (3-233)$$

目前 LIGO 的限制 [Abbott et al., 2005]

$$\Omega_g < 8.4 \times 10^{-4}, \quad 69 \text{Hz} < \nu < 156 \text{Hz}; \quad (3-234)$$

和宇宙核合成的限制 [Allen, 1996; Maggiore, 2000]

$$w_g h^2 < 8.9 \times 10^{-6}, \quad (3-235)$$

这里 $w_g \equiv \int \Omega_g(\nu) d \ln \nu$ 。和我们前面得到的上限 (3-205) 和 (3-231) 相比，这些限制都太粗糙了。因此我们可以公平地说：目前的 SSC 太粗糙而不能对单场暴涨模型作出任何限制。这个结论我们会在下面的数值计算中进一步验证。

♡♡♡♡: 物理实现在相空间的分布

在这一小节中，我们数值求解暴涨流方程 (3-214) - (3-216)，并采用 (3-217) - (3-220) 作为初始条件。其中每一种物理条件的选择代表一种暴涨模型。

首先我们考察前面提到的 LSC 和 SSC 对暴涨模型的限制。我们在上述初始条件的限制下随机选择 10^7 个物理实现，然后求解暴涨流方程，发现：所有的 10^7 个物理实现都满足 SSC，这就证明了乐我们前面的结论：目前小尺度上限制太粗糙而不能对暴涨模型作出任何限制。在所有的这些

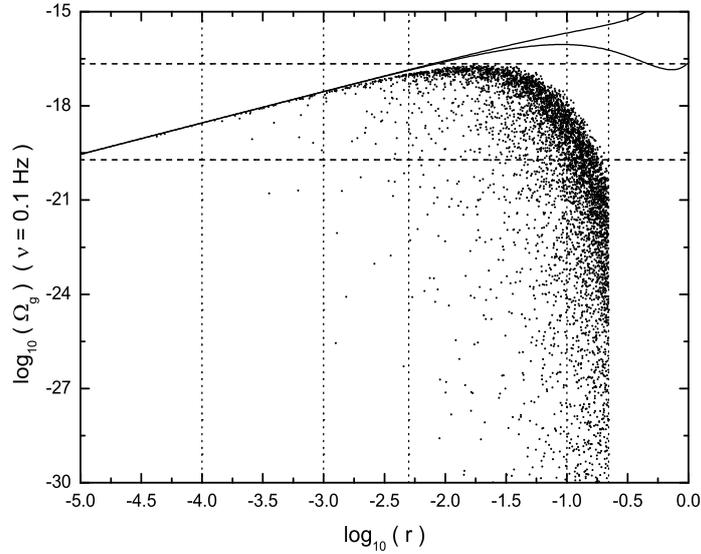


图 3-19: 5523 个物理实现在相空间的分布。其中上、下两条实线分别对应于 $n_s = 1.00$ 和 $n_s = 0.86$ 的解析曲线。而横线和竖线的物理意义和图 (3-18) 中的完全一样。注意在该图中的能量强度我们没有考虑宇宙相变效应的影响 [Zhao&Zhang, 2006d]。

物理实现中，只有 5523 ($\sim 5\%$) 个满足 LSC，因此相比较 SSC 而言，目前的 LSS 的限制还是比较强的。

在数值计算过程中，暴涨可以通过两种方式结束：一种是慢滚条件 $\epsilon < 1$ 被破坏，这样暴涨能够自然地结束。很多暴涨模型都属于这一类，例如大场多项式模型和小场多项式模型。另外一种办法是由于暴涨持续演化下去，因而需要其它机制（例如引入辅助场）来突然截止。很多模型，例如混合暴涨，线性暴涨，指数暴涨都属于这一类。这里我们选择 $N = 70$ 作为截止点。我们发现在这 5523 个物理实现中，有 5509 个属于第一类，而只有 14 个属于第二类。这也和以前工作中的结论是相符的 [Smith et al., 2006; Kinney, 2002]。而且这 14 个物理实现的 e-folds 都在 $N \in [40, 70]$ 的范围内，与观测也是相符的。在图 (3-19) 中我们给出了这 5512 个物理

实现在相空间中的分布，可以发现如下特点：

a. 对于一个给定的 r ， Ω_g 的分布非常弥散的，特别是在 r 较大的时候。例如对于 $r = 0.22$ ， Ω_g 可以在 $\Omega_g \in (10^{-45}, 10^{-20})$ 的广泛区间内取值；

b. 对于一个给定的 r ， Ω_g 有一个上限，并且多数物理实现都分布在该上限附近的一个小区域内；

c. 对于一个给定的 r ， Ω_g 的上限和我们前面解析的结果 (3-204) 比较偏小，特别是在 $r > 0.01$ 的时候；

d. 当 $r \simeq 0.03$ ，引力波的能量强度可以达到它的最大值 $\Omega_g \simeq 1 \times 10^{-17}$ ，该上限比我们前面解析得到的结果小了一个量级以上。这个最大值小于 LIGO, LISA, ASTROD 和 BBO 的灵敏度极限；

e. 几乎所有的物理实现都集中在 r 较大的地方，而且 r 越大，分布越密。超过 90% 的实现都在 $r > 0.01$ 的区域。需要指出的是这个现象完全是由于我们对初始条件的选择办法决定的。为了看到这一点，我们还选取了另外一种初始条件， ϵ_i 在下面范围内随即取值，

$$\log_{10} \epsilon_i |_{i} \in [-8, 0], \quad (3-236)$$

而其他条件和前面的完全类似，计算发现：上述所说的前四个特点还是保持的，只是最后一个特点不再成立，将近一半的物理实现都分布在 $r < 10^{-3}$ 的区域内。

在这 5523 个物理实现中，50.21% 的分布在 Planck 的探测能力之内，97.11% 的分布在 Clover 的探测能力之内，99.29% 的分布在 CMBPol 的探测能力之内；42.91% 的分布在 DECIGO 的探测能力之内。相比较于 CMB 探测器，干涉仪虽然能够探测的物理实现较少，但是它却能够完全探测 $r \in (10^{-4}, 6.7 \times 10^{-6})$ 所有物理实现。因此从这个意义上来讲，对于宇宙残余引力波的探测，激光干涉仪和 CMB 极化探测器是相互补充的。

最后我们需要指出，我们上述所有的计算都是在单场慢滚暴涨模型中进行的，因此上面所有的结论都只对这一类模型成立。而对于其它的诸如多场暴涨模型，膜暴涨模型则需要另外的讨论。

第四章

宇宙残余引力波与CMB 极化

在本章中我们解析计算在加速膨胀的宇宙中，残余引力波产生的CMB的极化功率谱，研究宇宙学参数：重子密度，暗能量密度，原初谱幅度和谱指数等对功率谱的影响，并讨论该极化谱的探测等问题。

§ 4.1 简介

近年来宇宙微波背景辐射（CMB）温度各向异性和极化功率谱的研究近几年来已经取得了非常巨大的成功。尤其是最近几年 WMAP 观测的功率谱与暴涨模型的预言能够很好地符合 [Bennett et al., 2003]，从而大大促进了宇宙的发展。

暴涨预言的两种扰动功率谱：密度扰动功率谱和引力波功率谱都可以通过描述光子演化的 Boltzmann 方程，从而影响 CMB 的扰动和极化功率谱。但是两者造成的 CMB 功率谱是有区别的，例如峰值位置不同，正负相关有区别等等 [Baskaran et al., 2006]，但是最明显地区别是，引力波能够产生 CMB 的磁场型极化功率谱，而密度扰动却不行（不考虑二级效应），这就提供了一条从 CMB 极化谱来直接探测宇宙残余引力波的方法。

CMB 的极化功率谱通常可以通过复杂的程序进行数值计算 [Seljak&Zaldarriaga, 1996; Lewis et al, 2000]，这种方法的特点是计算得比较精确，而且目前它计算的速度也已经非常快了。但是半解析的方法却有利

于研究其物理并揭示功率谱对各个宇宙学参数的依赖关系 [Hu&Sugiyama, 1995]。通常求解这种复杂的 Boltzmann 方程有两种方法：一种是直接对其作球协函数展开，化为一个关于多极矩无限阶的阶梯方程组。然后采取截断分别求解每一个方程 [Seljak&Zaldarriaga, 1996; Zaldarriaga&Harari, 1995; Grishchuk, 1993; Pritchard&Kamionkowski, 2005]。另外一种方法首先被 Polnarev 提出 [Polnarev, 1985]，它首先利用极化矢量将 Boltzmann 方程分解，最后将其变成关于两个标量 ζ 和 β 的演化方程，其中前者正好代表了 CMB 的温度扰动，后者正好代表了 CMB 的极化。这种方法提出来以后也得到了很快的发展 [Harari&Zaldarriaga, 1993; Ng&Ng 1995; Kosowsky, 1996; Kamionkowski et al., 1997; Keating et al., 1998; Cabella&Kamionkowski, 2004; Zhang,Hao&Zhao, 2005]。在这里我们也采用后面的方法来处理 Boltzmann 方程，从而彻底解析地求解引力波产生的 CMB 极化功率谱。其中对于引力波的演化我们分别利用了直接过渡的方法、WKB近似方法以及完全数值的方法，对于光子退耦时期的可视函数函数我们采用了 Gaussian 近似和 half-gaussian 近似，在求解方程的时候我们精确到了二阶紧耦合近似，最后得到了一个关于极化功率谱的解析公式。并进一步我们利用该公式分析了宇宙学参数， Ω_b , Ω_Λ , r , n_t 以及宇宙再电离过程对功率谱的影响。

§ 4.2 CMB 极化的 Boltzmann 方程

光子的极化分布通常可以用一个矢量 $f = (I_l, I_r, U, V)$ 来描述，其分量正好对应于 Stokes 参量 $I = I_l + I_r$, $Q = I_l - I_r$ 。Stokes 参量的一个重要性质是,在沿着传播方向的一个角度为 δ 的旋转变换下， I 和 V 是不变的，而 Q 和 U 则满足下面的变换关系 [Chandrasekhar, 1960]

$$\begin{pmatrix} Q' \\ U' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\delta & \sin 2\delta \\ -\sin 2\delta & \cos 2\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q \\ U \end{pmatrix}.$$

一次 (Q,U) 组成了一个在坐标变换下自旋为 2 的矢量场。它可以写成一个 2×2 的极化矩阵 P_{ab} 。对于实际的观测方面往往需要处理一个来自二维球

面的各个方向的光子，其度规为

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (4-1)$$

其中 (θ, ϕ) 为相应的球坐标, 而光子的极化张量为 [Kamionkowski et al., 1997]

$$P_{ab}(\hat{n}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} Q(\hat{n}) & -U(\hat{n}) \sin \theta \\ -U(\hat{n}) \sin \theta & -Q(\hat{n}) \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (4-2)$$

满足关系 $P_{ab} = P_{ba}$, $g^{ab}P_{ab} = 0$ 。

由于在宇宙退耦时刻以前, 自由电子对辐射各向异性的 Thompson 散射只会产生线性极化成分, 而不会产生圆极化成分, 因此我们考虑 CMB 的极化一般都不考虑圆极化部分, 这样描述光子极化分布的矢量化简为 $f = (I_l, I_r, U)$ 。对于一个均匀各向同性的无极化辐射场, 其分布是一个简单的黑体分布 $f = f_0(\nu)(1, 1, 0)$, 其中 $f_0(\nu) = \frac{1}{e^{h\nu/kT}-1}$ 是通常在温度 T 的标准 Planck 分布。当考虑到 Thompson 散射效应和背景度规的扰动效应, 将在该黑体分布上产生线性极化分量。光子分布函数的演化是由辐射转移方程决定的, 即 Boltzmann 方程 [Chandrasekhar, 1960]

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} + \hat{n}^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = -\frac{d\nu}{d\eta} \frac{\partial f}{\partial \nu} - q(f - J), \quad (4-3)$$

这里 \hat{n}^i 沿着光子传播方向 (θ, ϕ) 的单位矢量, $q = \sigma_T n_e a$ 是我们熟悉的微分光深, 反映里光子的散射速率, 其中 $\sigma_T = 6.65 \times 10^{-25} \text{cm}^2$ 是散射截面。 n_e 是自由电子的数密度。方程 (4-3) 碰撞项为

$$J = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 d\mu' \int_0^{2\pi} d\phi' P(\mu, \phi, \mu', \phi') f(\eta, x^i, \nu, \mu', \phi'), \quad (4-4)$$

其中 $\mu = \cos \theta$, $\mu' = \cos \theta'$ 并且

$$P = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} \mu^2 \mu'^2 \cos 2(\phi' - \phi) & -\mu^2 \cos 2(\phi' - \phi) & \mu^2 \mu' \sin 2(\phi' - \phi) \\ -\mu'^2 \cos 2(\phi' - \phi) & \cos 2(\phi' - \phi) & -\mu' \sin 2(\phi' - \phi) \\ -2\mu \mu'^2 \sin 2(\phi' - \phi) & 2\mu \sin 2(\phi' - \phi) & 2\mu \mu' \cos 2(\phi' - \phi) \end{pmatrix} \quad (4-5)$$

是相矩阵 (phase-matrix)。方程 (4-3) 中的散射项 $q(f - J)$ 描述了与自由电子的散射效应, 而项 $-\frac{d\nu}{d\eta} \frac{\partial f}{\partial \nu}$ 则描述了由于 Sachs-Wolfe 效应而造成的 CMB 光子频率的改变 [Sachs&Wolfe, 1967], 满足 Sachs-Wolfe 公式

$$\frac{1}{\nu} \frac{d\nu}{d\eta} = \frac{1}{2} \frac{\partial h_{ij}}{\partial \eta} \hat{n}^i \hat{n}^j.$$

在考虑到度规扰动 h_{ij} (标量的和张量的), 辐射的分布函数可以写为下面的形式

$$f(\theta, \phi) = f_0 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + f_1 \right], \quad (4-6)$$

这里 f_1 代表扰动部分。

带有扰动的 FRW 度规为

$$ds^2 = a^2(\eta) [d\eta^2 - (\delta_{ij} + h_{ij})dx^i dx^j], \quad (4-7)$$

这里 η 表示共形时间, h_{ij} 代表小扰动, 满足 $|h_{ij}| \ll 1$ 。这里我们只考虑横向无迹对称张量扰动成分, 即引力波成分。它有两个独立的极化模式

$$h_{ij} = h_{ij}^+ + h_{ij}^\times = h^+ \epsilon_{ij}^+ + h^\times \epsilon_{ij}^\times.$$

考虑沿 \hat{z} 方向传播的引力波, 即 $\hat{k} = \hat{z}$, 那么引力波的极化矢量满足关系

$$\epsilon_{ij}^+ \hat{n}_i \hat{n}_j = \sin^2 \theta \cos 2\phi, \quad \epsilon_{ij}^\times \hat{n}_i \hat{n}_j = \sin^2 \theta \sin 2\phi.$$

在宇宙学讨论中我们一般都假设引力波的两个极化分量是等价的, 具有同样的统计性质。因此下面的讨论中我们首先只考虑 $h_{ij} = h^+ \epsilon_{ij}^+$ 部分的贡献, 在最后的結果中我们只需要简单地乘因子 2 就可以了。为了简化 Boltzmann 方程 (4-3), 我们可以将光子的分布函数写成下面的形式 [Polnarev, 1985]

$$f_1 = \frac{\zeta}{2} (1 - \mu^2) \cos 2\phi \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\beta}{2} \begin{pmatrix} (1 + \mu^2) \cos 2\phi \\ -(1 + \mu^2) \cos 2\phi \\ 4\mu \sin 2\phi \end{pmatrix}. \quad (4-8)$$

而对于另外一个引力波极化成分 $h_{ij} = h^\times \epsilon_{ij}^\times$, 则需要写为形式

$$f_1 = \frac{\zeta}{2} (1 - \mu^2) \sin 2\phi \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\beta}{2} \begin{pmatrix} (1 + \mu^2) \sin 2\phi \\ -(1 + \mu^2) \sin 2\phi \\ -4\mu \cos 2\phi \end{pmatrix}, \quad (4-9)$$

这里 $\zeta \propto I_l + I_r = I$ 代表光子分布的各向异性部分, 而 $\beta \propto I_l - I_r = Q$ 则代表极化部分, ζ 和 β 的演化都满足 Boltzmann 方程。对于 $h_{ij} = h^+ \epsilon_{ij}^+$ 极

化的引力波部分，利用公式 (4-3)，我们可以得到这两个寒暑的演化方程 [Polnarev, 1985; Cabella&Kamionkowski, 2004; Zhang,Hao&Zhao, 2005]

$$\dot{\xi}_k + [ik\mu + q] \xi_k = \frac{d \ln f_0}{d \ln \nu_0} \dot{h}_k^+, \quad (4-10)$$

$$\dot{\beta}_k + [ik\mu + q] \beta_k = \frac{3q}{16} \int_{-1}^1 d\mu' \left[(1 + \mu'^2)^2 \beta_k - \frac{1}{2} (1 - \mu'^2)^2 \xi_k \right]. \quad (4-11)$$

其中我们已经对其中的各个相关函数作了 Fourier 展开，并取了单个的 Fourier 分量。其中 $\xi_k \equiv \zeta_k + \beta_k$ 这里上标点表示对共形时间求导。我们后面的讨论中都记 h_k^+ 为 h_k 。从这两个方程中我们可以发现引力波是作为各向异性分量 ξ_k 的源出现的，而 ξ_k 同时又是极化部分 β_k 的源。我们的目的就是求解这两个方程。如果我们得到了这两个函数的表达式，可以对其作 Legendre 展开

$$\xi(\eta, \mu) = \sum_l (2l + 1) \xi_l(\eta) P_l(\mu),$$

$$\beta(\eta, \mu) = \sum_l (2l + 1) \beta_l(\eta) P_l(\mu),$$

而得到其 Legendre 分量。

$$\xi_l(\eta) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu \xi(\eta, \mu) P_l(\mu), \quad (4-12)$$

$$\beta_l(\eta) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu \beta(\eta, \mu) P_l(\mu). \quad (4-13)$$

因此关于函数 $\xi(\eta, \mu)$ ， $\beta(\eta, \mu)$ 的微分方程 (4-10) 和 (4-11)，可以转化为关于一组关于 $\xi_l(\eta)$ 和 $\beta_l(\eta)$ 的无限阶的微分方程组。

§ 4.3 CMB 极化的电场和磁场分量

从方程 (4-8) 中 ζ 和 β 的定义我们可以知道, Stokes 参量 Q 和 U 可以表示为 [Kamionkowski et al., 1997; Cabella&Kamionkowski, 2004]

$$Q(\theta, \phi) = \frac{T_0}{4} \sum_l (2l+1) P_l(\cos \theta) (1 + \cos^2 \theta) \cos 2\phi \beta_l; \quad (4-14)$$

$$U(\theta, \phi) = \frac{T_0}{4} \sum_l (2l+1) P_l(\cos \theta) 2 \cos \theta \sin 2\phi \beta_l. \quad (4-15)$$

对于定义在二维球面上的标量场, 我们通常可以用球谐函数 $Y_{(lm)}$ 对其进行展开, 但是对于定义在上面 2×2 的张量, 一般需要用到下面的张量球谐函数进行完全展开 [Kamionkowski et al., 1997]

$$Y_{(lm)ab}^G = N_l \left(Y_{(lm):ab} - \frac{1}{2} g_{ab} Y_{(lm):c}^c \right), \quad (4-16)$$

$$Y_{(lm)ab}^C = \frac{N_l}{2} \left(Y_{(lm):ac} \epsilon^c_b + Y_{(lm):bc} \epsilon^c_a \right), \quad (4-17)$$

其中“:”表示二维球面上的协变微商, $N_l \equiv \sqrt{2(l-2)!/(l+2)!}$,

$$\epsilon^a_b = \begin{pmatrix} 0 & \sin \theta \\ -1/\sin \theta & 0 \end{pmatrix}. \quad (4-18)$$

它们满足关系

$$\int d\hat{n} Y_{(lm)ab}^{G*}(\hat{n}) Y_{(l'm')}^{G ab}(\hat{n}) = \int d\hat{n} Y_{(lm)ab}^{C*}(\hat{n}) Y_{(l'm')}^{C ab}(\hat{n}) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \quad (4-19)$$

$$\int d\hat{n} Y_{(lm)ab}^{G*}(\hat{n}) Y_{(l'm')}^{C ab}(\hat{n}) = 0. \quad (4-20)$$

通过这样的构造我们可以发现 $Y_{(lm)ab}^G$ 是二维球面上的球谐函数的散度部分 (电场型), 而 $Y_{(lm)ab}^C$ 是它的旋度部分 (磁场型)。因此极化张量可以分解为电场部分和磁场部分

$$\frac{P_{ab}(\hat{n})}{T_0} = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l [a_{lm}^G Y_{(lm)ab}^G(\hat{n}) + a_{lm}^C Y_{(lm)ab}^C(\hat{n})]. \quad (4-21)$$

而相应的展开系数为

$$a_{lm}^G = \frac{1}{T_0} \int d\hat{n} P_{ab}(\hat{n}) Y_{(lm)ab}^{G*}(\hat{n}), \quad a_{lm}^C = \frac{1}{T_0} \int d\hat{n} P_{ab}(\hat{n}) Y_{(lm)ab}^{C*}(\hat{n}), \quad (4-22)$$

通过一些计算可以得到 [Kamionkowski et al., 1997; Cabella&Kamionkowski, 2004]

$$a_{lm}^G = \frac{1}{8}(\delta_{m,2} + \delta_{m,-2})\sqrt{2\pi(2l+1)} \quad (4-23)$$

$$\times \left[\frac{(l+2)(l+1)\beta_{l-2}}{(2l-1)(2l+1)} + \frac{6(l-1)(l+2)\beta_l}{(2l+3)(2l-1)} + \frac{l(l-1)\beta_{l+2}}{(2l+3)(2l+1)} \right], \quad (4-24)$$

$$a_{lm}^C = \frac{-i}{4} \sqrt{\frac{2\pi}{(2l+1)}} (\delta_{m,2} - \delta_{m,-2}) [(l+2)\beta_{l-1} + (l-1)\beta_{l+1}]. \quad (4-25)$$

可以发现这两个函数完全依赖于辐射场的极化部分 β 。需要指出的是，这里的 β_l 指的是波数为 k 的引力波所产生的极化分量，因此它相应的电场极化功率谱为

$$C_l^{GG}(k) = \frac{1}{2l+1} \sum_m |a_{lm}^G|^2 \quad (4-26)$$

$$= \frac{\pi}{16} \left| \frac{(l+2)(l+1)\beta_{l-2}}{(2l-1)(2l+1)} + \frac{6(l-1)(l+2)\beta_l}{(2l+3)(2l-1)} + \frac{l(l-1)\beta_{l+2}}{(2l+3)(2l+1)} \right|^2 \quad (4-27)$$

磁场型部分也可以类似地得到。这样我们对所有的 k 积分，并考虑到引力波的两个极化模式，最终可以得到

$$C_l^{GG} = \frac{1}{16\pi} \int k^2 dk \quad (4-28)$$

$$\times \left| \frac{(l+2)(l+1)\beta_{l-2}}{(2l-1)(2l+1)} + \frac{6(l-1)(l+2)\beta_l}{(2l+3)(2l-1)} + \frac{l(l-1)\beta_{l+2}}{(2l+3)(2l+1)} \right|^2, \quad (4-29)$$

$$C_l^{CC} = \frac{1}{4\pi} \int \left| \frac{(l+2)\beta_{l-1}}{2l+1} + \frac{(l-1)\beta_{l+1}}{2l+1} \right|^2 k^2 dk. \quad (4-30)$$

而它们的交叉相关谱为

$$C_l^{GC} = \sum_{m=-l}^{m=l} \frac{a_{lm}^{G*} a_{lm}^C}{2l+1} = 0, \quad (4-31)$$

这是因为 $a_{lm}^G \propto (\delta_{m,2} + \delta_{m,-2})$ ，而 $a_{lm}^C \propto (\delta_{m,2} - \delta_{m,-2})$ 。即电场部分是偶宇称，而磁场部分是奇宇称。

§ 4.4 引力波的演化

从方程 (4-10)，我们发现引力波 \dot{h} 是产生 CMB 极化的源。因此在求解 Boltzmann 方程之前，我们首先要求解引力波的演化方程，特别是求解在宇宙退耦时刻的演化情况。对于模数为 k 的引力波满足演化方程

$$\ddot{h} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{h} + k^2 h = 0, \quad (4-32)$$

其初始条件为一般选定为

$$h(\eta = 0) = h(k), \quad \dot{h}(\eta = 0) = 0, \quad (4-33)$$

其中

$$\frac{k^3}{2\pi^2} |h(k)|^2 = P_h(k) = A_T \left(\frac{k}{k_0} \right)^{n_T}, \quad (4-34)$$

这里我们用 $P_h(k)$ 来表示引力波的原初扰动谱。 A_T 为原初扰动谱的振幅，并且选定 $k_0 = 0.05 \text{ Mpc}^{-1}$ 作为 pivot 波数， n_T 为原初谱的谱指数。暴涨模型一般预言的是 $n_T \simeq 0$ 的近似尺度不变谱。后面我们还会专门讨论该谱指数对极化功率谱的影响。这里不作特殊说明我们都取 $n_T = 0$ 。在本文的讨论中我们忽略自由中微子流的影响，它可以略微压低小尺度上的极化功率谱 [Princharad&Kamionkowski, 2005]。

引力波的演化方程 (4-32) 依赖于宇宙尺度因子的演化，它是由 Friedmann 方程决定的：

$$\dot{a}^2 = H_0^2 [\Omega_r + a\Omega_m + a^4\Omega_\Lambda], \quad (4-35)$$

其中 Ω_r , Ω_m , Ω_Λ 分别对应于现在时刻宇宙中的辐射（光子和中微子），物质（重子物质和暗物质）和暗能量的能量比重。我们选择 $\Omega_r = 8.36 \times 10^{-5}$, $\Omega_m = \Omega_b + \Omega_{dm} = 0.044 + 0.226$, $\Omega_\Lambda = 0.73$ 。然后通过求解上述的 Friedmann 方程就可以得到宇宙尺度因子随共形时间 η 的演化。代入方程 (4-32)，就可以数值地求解而得到引力波随时间的变化。在图 (4-1) 和 (4-2) 中，我们分别画出了在光子的退耦时刻 η_d ， h 和 \dot{h} 随波数 k 的变化关系。

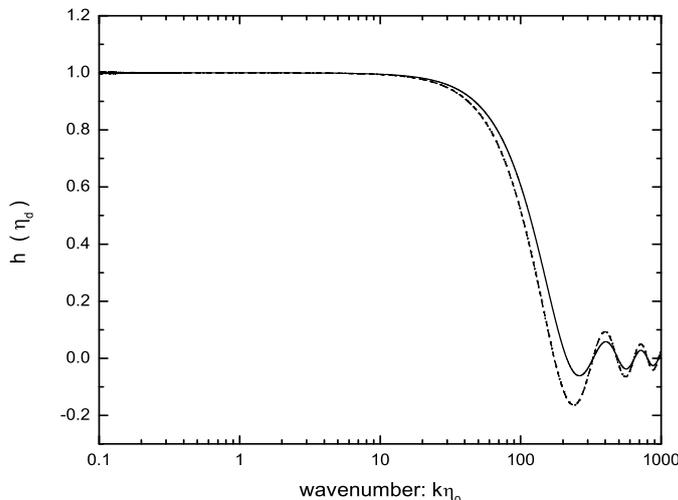


图 4-1: 三种方法得到的引力波 $h(\eta_d)$, 其中实线表示纯数值的结果, 虚线表示纯解析地结果, 点线表示WKB近似的结果, 它与虚线重合。注意这里为了显示方便, 我们对引力波的初始条件作了重新定义 $h(\eta = 0) = h(k) = 1$ [Zhao&Zhang, 2005b]。

除了这种完全数值的方法以外, 我们还可以利用完全的解析近似方法来求解引力波。我们假设宇宙尺度因子的演化为

$$a(\eta) = \begin{cases} a_r \eta, & \eta \leq \eta_e \quad (\text{radiation dominant}), \\ a_m \eta^2, & \eta_e < \eta \leq \eta_E \quad (\text{matter dominant}), \\ a_l \eta^{-1}, & \eta > \eta_E \quad (\Lambda \text{ dominant}) \end{cases} \quad (4-36)$$

这里 a_r , a_m , a_l 都是常数, 可以通过尺度因子在 η_e , η_E 光滑连接来得到。在标准的 Λ CDM 模型 $\Omega_b = 0.044$, $\Omega_{dm} = 0.226$, $\Omega_\Lambda = 0.73$, 以及辐射/物质相等时刻的红移 $z_e = 3234$ (在本节我们都选定现在的 Hubble 常数为 $h_0 = 0.72$), 计算可以得到 $\eta_e/\eta_0 = 0.007$, 其中 η_0 为现在的共形时间。选取 $z_E = 0.39$, 可以得到 $\eta_E/\eta_0 = 0.894$ 。我们设定 $\eta_d/\eta_0 = 0.0195$, 对应于退耦红移为 $z_d = 1089$ 。因此可以得到引力波的解析解 [Grishchuk, 1993; Grishchuk, 1974; Zhang et al., 2005]

$$h(\eta) = A_0 j_0(k\eta), \quad (\eta \leq \eta_e), \quad (4-37)$$

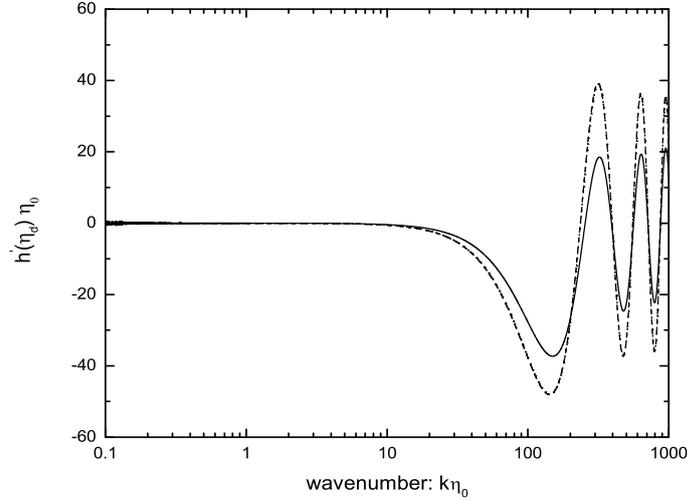


图 4-2: 三种方法得到的引力波 $\dot{h}(\eta_d)$, 其中实线表示纯数值的结果, 虚线表示纯解析地结果, 点线表示WKB近似的结果, 它与虚线重合。注意这里为了显示方便, 我们对引力波的初始条件作了重新定义 $h(\eta = 0) = h(k) = 1$ [Zhao&Zhang, 2005b]。

$$h(\eta) = A_0(\eta_e/\eta)[A_1 j_1(k\eta) + A_2 y_1(k\eta)], \quad (\eta_e < \eta \leq \eta_E), \quad (4-38)$$

系数分别为

$$A_0 = \left[2\pi^2 A_T k^{-3} \left(\frac{k}{k_0} \right)^{n_T} \right]^{1/2}, \quad (4-39)$$

$$A_1 = \frac{3k\eta_e - k\eta_e \cos(2k\eta_e) + 2 \sin(2k\eta_e)}{2k^2\eta_e^2}, \quad (4-40)$$

$$A_2 = \frac{2 - 2k^2\eta_e^2 - 2 \cos(2k\eta_e) - k\eta_e \sin(2k\eta_e)}{2k^2\eta_e^2}. \quad (4-41)$$

注意我们的记号 $h(\eta) \dot{h}(\eta)$ 中省略掉了下标 k 。在图 (4-1) 和 (4-2) 中, 我们同时分别画出了在光子的退耦时刻, 该解析解得到的结果。和数值解相比, 该解析的结果只有在很大尺度上才于数值结果相符, 而在小尺

度上两者有着明显地差别。因此在实际计算中我们不应该采用这个解析解。但是这个解析解比较简单而有利于分析问题，因此我们最后的定性分析中我们还会用到它。

前面的完全数值解计算比较复杂，但是完全解析解精确度有比较差。解析方法的缺点主要在于不能很好地描述宇宙尺度因子在辐射和物质转变时期的行为。为了取长补短，我们这里采用另外一种 WKB 近似的方法来描述辐射/物质宇宙中尺度因子的演化 [Ng&Speliotopoulos, 1995]。我们后面会看到，影响 CMB 极化谱的主要是光子退耦时刻的引力波，而当时暗能量的密度非常小，完全可以忽略。在该方法中，宇宙的尺度因子可以表示为

$$a(\tau) = a_e \tau(\tau + 2), \quad (4-42)$$

其中 $\tau \equiv (\sqrt{2} - 1)\eta/\eta_e$ ，而 a_e 是由 $a_0/a_e = 1 + z_e$ 来决定的。可以看出当 $\tau \ll 2$ 的时候， $a(\tau) \rightarrow \tau$ 表示辐射为主时期，而当 $\tau \gg 2$ 的时候， $a(\tau) \rightarrow \tau^2$ 表示物质为主时期。而且辐射和物质时期的转化是比较光滑的。因此引力波的演化方程变成了

$$h'' + 2\frac{a'}{a}h' + r^2h = 0, \quad (4-43)$$

这里 $r \equiv k\eta_e/(\sqrt{2} - 1)$ ，而上撇号表示 $d/d\tau$ 。虽然这个方程可以得到解析解 [Pritchard&Kamionkowski, 2005]，但是这个解仍然比较复杂，而且更为致命的是该解的系数仍然需要数值求解。所以这里我们就干脆直接数值求解方程 (4-43)。

WKB方法得到的 $h(\eta_d)$ $\dot{h}(\eta_d)$ 也在图 (4-1) 和 (4-2) 中画出来了。这种方法得到的结果完全与纯数值地结果重合，其精确度非常高 ($\ll 1\%$)，而且计算起来也比纯数值方法简单的多。因此在后面极化功率谱的计算和分析过程中，我们都采用这种方法来求解引力波函数。

§ 4.5 可视函数模型

考虑宇宙的退耦历史。在退耦之前，电离的重子能够通过 Thompson 散射与光子进行强烈的耦合。但是随着宇宙的膨胀，一旦宇宙的温度降到

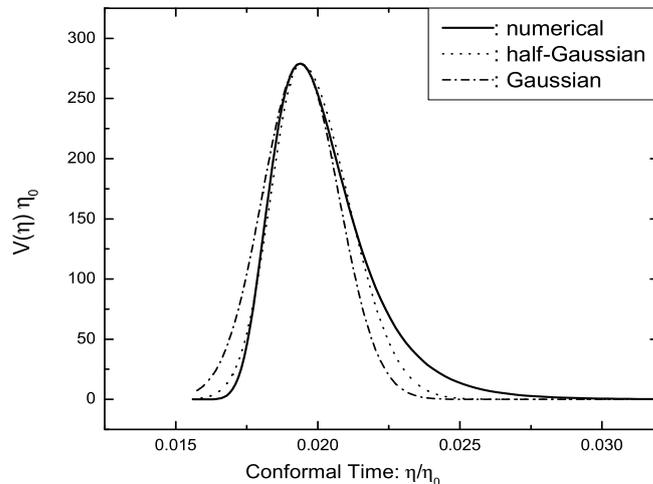


图 4-3: 三种方法得到的可视函数行为。其中实线为数值解的行为, 点线表示我们的半高斯拟和曲线, 而虚点线表示高斯拟和得结果。容易发现我们的半高斯拟和远远好于高斯拟和。这里 $\eta_d/\eta_0 = 0.020$ [Zhao&Zhang, 2005b].

几个电子伏特以下的时候, 电子将与质子结合形成氢原子。随着宇宙中带电粒子数目的减少, 光子的自由程增大, 并逐渐变得可以和宇宙视界相比拟。当光子的自由程最终大于宇宙视界的时候, 光子不再有机会和电子发生碰撞, 因此电子与光子脱耦。宇宙中的形成背景光子。而当光子最后一次和电子发生散射时的宇宙, 我们称为最后散射面。而这一次散射我们称之为最后散射。我们可以通过求解宇宙复合过程中的电离方程而求得此时的可视函数 $V(\eta)$, 它描述了在 η 时刻光子发射最后散射的几率 [Peebles, 1968; Jones&Wyse, 1985]。可视函数的形式依赖于具体的模型参数, 特别是重子的能量密度 Ω_b 和 Hubble 常数 H_0 的大小 [Hu&Sugiyama, 1995]。用光深函数 κ 来表示的可视函数为

$$V(\eta) = q(\eta)e^{-\kappa(\eta_0, \eta)}, \quad (4-44)$$

它满足归一化条件

$$\int_0^{\eta_0} V(\eta)d\eta = 1. \quad (4-45)$$

这里的光深函数 $\kappa(\eta_0, \eta)$ 和微分光深函数 $q(\eta)$ 的关系为 $q(\eta) = -d\kappa(\eta_0, \eta)/d\eta$ 。在图 (4-3) 中我们给出了数值求解出来的可视函数 $V(\eta)$ ，该函数在最后散射面上有一个峰值。在实际的解析计算过程中，通常用一个高斯函数来拟和它

$$V(\eta) = V(\eta_d) \exp\left(-\frac{(\eta - \eta_d)^2}{2\Delta\eta_d^2}\right), \quad (4-46)$$

这里 $V(\eta_d)$ 是可视函数在退耦时刻的峰值大小， $\Delta\eta_d$ 是最后散射面的厚度。WMAP 数据分析显示 [Spergel et al., 2003]， $\Delta z_d = 195 \pm 2$ ，对应于 $\Delta\eta_d/\eta_0 = 0.00143$ 。这样利用 $V(\eta_d)\eta_0 = 279$ ，我们可以得到一个高斯拟和曲线。在图 (4-3) 我们也给出了这个拟和曲线。但是我们发现这个拟和曲线无论是在 η_d 左边还是右边都不能拟和得很好。这里我们提出一种新的拟和方法，我们称之为半高斯拟和：由两段不同的高斯函数来分别拟和 η_d 的左边和右边。并让其满足归一化条件，即

$$V(\eta) = V(\eta_d) \exp\left(-\frac{(\eta - \eta_d)^2}{2\Delta\eta_{d1}^2}\right), \quad (\eta \leq \eta_d); \quad (4-47)$$

$$V(\eta) = V(\eta_d) \exp\left(-\frac{(\eta - \eta_d)^2}{2\Delta\eta_{d2}^2}\right), \quad (\eta > \eta_d); \quad (4-48)$$

其中 $\Delta\eta_{d1}/\eta_0 = 0.00110$ ， $\Delta\eta_{d2}/\eta_0 = 0.00176$ ，满足 $(\Delta\eta_{d1} + \Delta\eta_{d2})/2 = \Delta\eta_d$ ，即归一化条件仍然成立。在图 (4-3) 中我们也画出了这种半高斯的拟和曲线，可以发现我们的半高斯比高斯拟和好得多。在后面的讨论中我们会发现，这里的不同拟和曲线会对 CMB 得极化功率谱产生明显地影响。并且我们后面还会发现，在这两个半高斯部分中前半个部分的作用是主要的，原因在于 $\Delta\eta_1 < \Delta\eta_2$ 。我们在文献 [Zhang,Hao&Zhao, 2005] 中还详细地讨论了另外一种更为精确的可视函数下 CMB 极化的计算。但是那里用到了很多的特殊函数，其计算比较繁琐，不适合于我们这里进一步的计算，所以在这里不再详细介绍了。

§ 4.6 极化功率谱的解析计算

在我们求解了引力波 $\dot{h}(\eta)$ 和可视函数 $V(\eta)$ 的基础上, 我们现在可以求解方程 (4-10) 和 (4-11) 从而求解极化的功率谱。因为黑体谱 $f(\nu_0)$ 在 Rayleigh-Jeans 散射区域满足 $\frac{d \ln f_0(\nu_0)}{d \ln \nu_0} \approx 1$, 因此这两个方程简写为

$$\dot{\xi} + [ik\mu + q]\xi = \dot{h}, \quad (4-49)$$

$$\dot{\beta} + [ik\mu + q]\beta = \frac{3q}{16} \int_{-1}^1 d\mu' \left[(1 + \mu'^2)^2 \beta - \frac{1}{2}(1 - \mu'^2)^2 \xi \right]. \quad (4-50)$$

在方程 (4-49) 中, \dot{h} 相当于各向异性 ξ 的源, 而 $q\xi$ 则会使得 ξ 产生一个 damping。公式 (4-49) 的形式解为

$$\xi(\eta) = \int_0^\eta \dot{h}(\eta') e^{-\kappa(\eta, \eta')} e^{ik\mu(\eta' - \eta)} d\eta'. \quad (4-51)$$

在方程 (4-50) 含有对 ξ 和 β 函数对角度 μ' 的积分, 利用方程 (4-12) 和 (4-13) 的定义我们可将该方程改写为

$$\dot{\beta} + [ik\mu + q]\beta = qG, \quad (4-52)$$

其中

$$G(\eta) \equiv \frac{3}{35}\beta_4 + \frac{5}{7}\beta_2 + \frac{7}{10}\beta_0 - \frac{3}{70}\xi_4 + \frac{1}{7}\xi_2 - \frac{1}{10}\xi_0.$$

这样我们可以写出该方程的形式解

$$\beta(\eta) = \int_0^\eta G(\eta') q(\eta') e^{-\kappa(\eta, \eta')} e^{ik\mu(\eta' - \eta)} d\eta', \quad (4-53)$$

设定上式中的时间为现在时刻 η_0 , 即得到

$$\beta(\eta_0) = \int_0^{\eta_0} G(\eta') V(\eta') e^{ik\mu(\eta' - \eta_0)} d\eta', \quad (4-54)$$

这里 $V(\eta') = q(\eta') e^{-\kappa(\eta_0, \eta')}$ 是可视函数。但是对该积分求解的困难在于其源项包含有 β_l 和 ξ_l 到 $l = 4$, 而这些函数目前还没有求出来。

这里我们利用 Legendre 函数对方程 (4-49) 和 (4-50) 进行展开可以得到一个无限阶的阶梯方程组

$$\dot{\xi}_0 = -q\xi_0 - ik\xi_1 + \dot{h}, \quad (4-55)$$

$$\dot{\beta}_0 = -\frac{3}{10}q\beta_0 - ik\beta_1 + q \left(\frac{3}{35}\beta_4 + \frac{5}{7}\beta_2 - \frac{3}{70}\xi_4 + \frac{1}{7}\xi_2 - \frac{1}{10}\xi_0 \right), \quad (4-56)$$

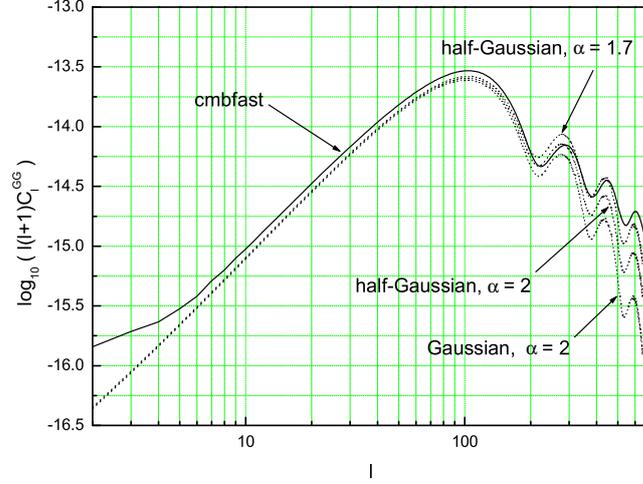


图 4-4: 电场型极化功率谱 C_l^{GG} , 这里取了 $r = 1$ 。其中实线为CMBFAST数值计算的结果 [Seljak&Zaldarriaga, 1996], 而虚线从上到下分别是我们的解析计算的结果, 其参数分别取为: $\alpha = 1.7$, 半高斯近似; $\alpha = 2$, 半高斯近似; $\alpha = 2$, 高斯近似。在大尺度上这些模型都是重合的, 在小尺度上半高斯结果要好于高斯近似的结果 [Zhao&Zhang, 2005b]。

$$\dot{\xi}_l = -q\xi_l - \frac{ik}{2l+1} [l\xi_{l-1} + (l+1)\xi_{l+1}], \quad \text{for } l \geq 1, \quad (4-57)$$

$$\dot{\beta}_l = -q\beta_l - \frac{ik}{2l+1} [l\beta_{l-1} + (l+1)\beta_{l+1}], \quad \text{for } l \geq 1. \quad (4-58)$$

注意这里 $1/q$ 表示光子的平均自由程。在紧耦合极限下 $q \rightarrow \infty$, 这个方程组被简化为

$$\dot{\xi}_0 + q\xi_0 = \dot{h}, \quad (4-59)$$

$$\dot{\beta}_0 + \frac{3}{10}q\beta_0 = -\frac{1}{10}q\xi_0, \quad (4-60)$$

$$\xi_l = \beta_l = 0, \quad l \geq 1. \quad (4-61)$$

因此源函数 $G(\eta)$ 也被化简为 $G = (7\beta_0 - \xi_0)/10$ 。它满足微分方程

$$\dot{G} + \frac{3}{10}qG = -\frac{1}{10}\dot{h}, \quad (4-62)$$

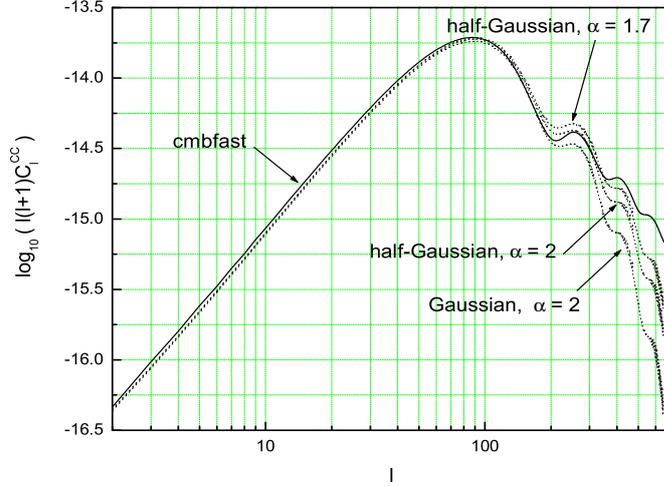


图 4-5: 磁场型极化功率谱 C_l^{CC} , 这里取了 $r = 1$ 。其中实线为CMBFAST数值计算的结果 [Seljak&Zaldarriaga, 1996], 而虚线从上到下分别是我们的解析计算的结果, 其参数分别取为: $\alpha = 1.7$, 半高斯近似; $\alpha = 2$, 半高斯近似; $\alpha = 2$, 高斯近似。在大尺度上这些模型都是重合的, 在小尺度上半高斯结果要好于高斯近似的结果 [Zhao&Zhang, 2005b]。

容易得到其形式解为

$$G(\eta) = -\frac{1}{10} \int_0^\eta \dot{h}(\eta'') e^{-\frac{3}{10}\kappa(\eta, \eta'')} d\eta'' \quad (4-63)$$

将该解代入方程 (4-54), 我们可以得到紧耦合极限下的极化函数解

$$\begin{aligned} \beta(\eta_0) &= \int_0^{\eta_0} V(\eta') \left[-\frac{1}{10} \int_0^{\eta'} \dot{h}(\eta'') e^{-\frac{3}{10}\kappa(\eta', \eta'')} d\eta'' \right] e^{ik\mu(\eta' - \eta_0)} d\eta' \\ &= -\frac{1}{10} \int_0^{\eta_0} d\eta' V(\eta') e^{ik\mu(\eta' - \eta_0)} \int_0^{\eta'} d\eta'' \dot{h}(\eta'') e^{-\frac{3}{10}\kappa(\eta'') + \frac{3}{10}\kappa(\eta')} \end{aligned} \quad (4-64)$$

其中 $\kappa(\eta', \eta'') = \kappa(\eta'') - \kappa(\eta')$, 我们还用到了 $\kappa(\eta) \equiv \kappa(\eta_0, \eta)$ 。

注意我们上面的结果是在紧耦合极限下得到的, 它只适用于自由程大于光子自由程的尺度。在小尺度上光子的扩散并减小 CMB 的温度各向异

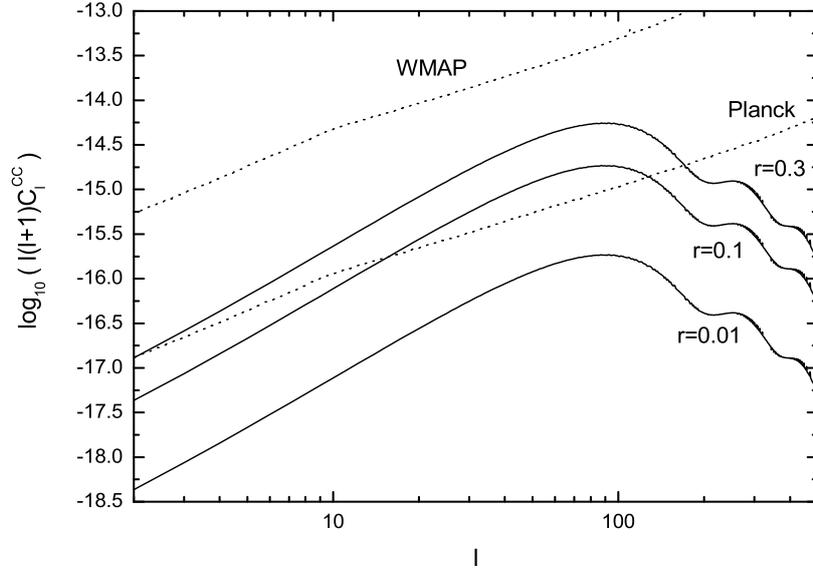


图 4-6: WMAP 和 Planck 卫星对 CMB 磁场型极化功率谱的探测能力。三条实线从上到下分别取了 $r = 0.3, 0.1, 0.01$, 其它的模型参数分别为 $\Omega_b = 0.044$, $\Omega_{de} = 0.226$, $\Omega_\Lambda = 0.73$ [Zhao&Zhang, 2005b]。

性和极化。为了考虑这个效应，我们需要将阶梯方程 (4-55) - (4-58) 展开到二阶紧耦合近似，这样我们得到

$$\dot{\xi}_0 = -q\xi_0 - ik\xi_1 + \dot{h}, \quad (4-65)$$

$$\dot{\xi}_1 = -q\xi_1 - \frac{ik}{3}\xi_0, \quad (4-66)$$

$$\xi_l = 0, \quad l \geq 2. \quad (4-67)$$

假设 $\xi_0 \propto e^{i \int \omega d\eta}$ 并且 $\xi_1 \propto e^{i \int \omega d\eta}$, 将其代入上述方程组, 并忽略 ω 对 \dot{a}/a 的依赖, 以及假设 $\dot{h} = 0$, 如图 (4-2) 所示, 我们可以得到

$$\omega = \pm \frac{k}{\sqrt{3}} + iq.$$

这样 ξ_0 获得了一个 damping 因子 $e^{-\int q d\eta}$, 该因子不依赖于波数 k 。这与处理标量扰动谱遇到的情况不同 [Hu&Segiyama, 1996]。对于极化部分 β , 我

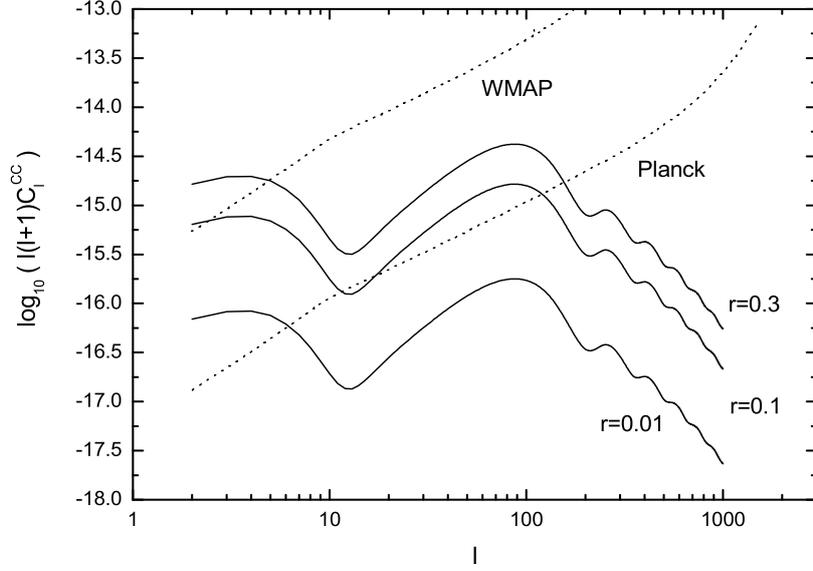


图 4-7: WMAP 和 Planck 卫星对 CMB 磁场型极化功率谱的探测能力。三条实线从上到下分别取了 $r = 0.3, 0.1, 0.01$, 其它的模型参数分别为 $\Omega_b = 0.044$, $\Omega_{de} = 0.226$, $\Omega_\Lambda = 0.73$. 这里我们考虑了宇宙再电离的影响, 其再电离光深为 $\kappa_r = 0.09$, 这里的实线是由 CMBFAST 数值计算的结果 [Zhao&Zhang, 2005b]。

们仍然只保留到紧耦合近似, 这样我们得到

$$\dot{\beta}_0 = -\frac{3q}{10}\beta_0 - \frac{q}{10}\xi_0,$$

即 β_0 也获得了同样的一个 damping 因子。当考虑这个效应时我们只需要将公式 (4-64) 中的源 G 变成 $\exp(-\kappa(\eta))G$ 即可。这样公式 (4-64) 变成了

$$\beta(\eta_0) = -\frac{1}{10} \int_0^{\eta_0} d\eta' V(\eta') e^{ik\mu(\eta' - \eta_0)} \int_0^{\eta'} d\eta'' \dot{h}(\eta'') e^{-\frac{3}{10}\kappa(\eta'') - \frac{7}{10}\kappa(\eta')}, \quad (4-68)$$

其中 $\exp[-\frac{7}{10}\kappa(\eta')]$ 代替了原来的 $\exp[\frac{3}{10}\kappa(\eta')]$ 。由于 $\eta'' < \eta_d$ 的时候, $\exp(-\frac{7}{10}\kappa(\eta'')) \simeq 0$; 而 $\eta'' > \eta_d$ 的时候, $\exp(-\frac{7}{10}\kappa(\eta'')) \simeq 1$; 因此我们可以用一个阶梯函数近似, 即 $\exp(-\frac{7}{10}\kappa(\eta'')) \approx \theta(\eta'' - \eta_d)$, 而且可视函数 $V(\eta)$ 也是在 $\eta = \eta_d$ 达到极大值。这样我们可以将函数 $\dot{h}(\eta'')$ 提到积分 $\int d\eta''$ 从而得到

$$\beta(\eta_0) = -\frac{1}{10} \int_0^{\eta_0} d\eta V(\eta) e^{ik\mu(\eta - \eta_0)} \dot{h}(\eta) \int_0^\eta d\eta' e^{-\frac{3}{10}\kappa(\eta') - \frac{7}{10}\kappa(\eta)}. \quad (4-69)$$

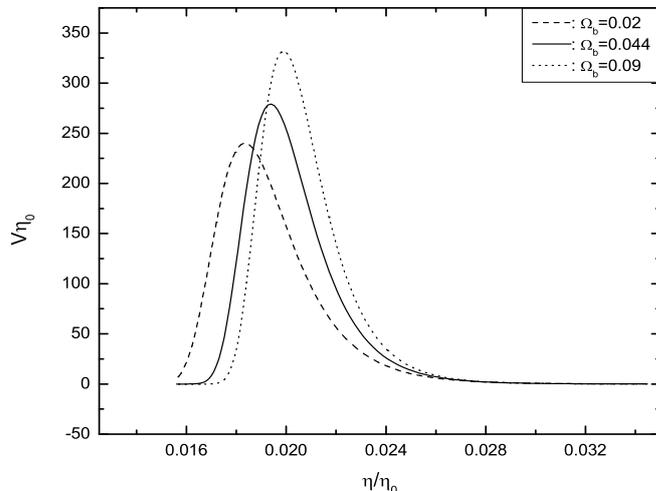


图 4-8: 重子密度 Ω_b 对可视函数的影响。这里我们取得模型参数为 $\Omega_\Lambda = 0.73$, $\Omega_b = 0.02, 0.044, 0.09$, $\Omega_{dm} = 1 - \Omega_\Lambda - \Omega_b$ [Zhao&Zhang, 2005b].

这里我们定义一个新的变量 $x \equiv \kappa(\eta')/\kappa(\eta)$, 并利用近似关系 $d\eta' = \frac{dx}{x} \Delta\eta_d$, 我们得到了

$$\beta(\eta_0) = \frac{1}{10} \Delta\eta_d \int_0^{\eta_0} d\eta V(\eta) e^{ik\mu(\eta-\eta_0)} \dot{h}(\eta) \int_1^\infty \frac{dx}{x} e^{-\frac{3}{10}\kappa(\eta)x} e^{-\frac{7}{10}\kappa(\eta)}. \quad (4-70)$$

再利用一个数学公式

$$e^{ikr\mu} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l j_l(kr) P_l(\mu),$$

我们得到了极化部分的Legendre 分量的解析表达式

$$\beta_l(\eta_0) = \frac{1}{10} \Delta\eta_d i^l \int_0^{\eta_0} d\eta V(\eta) \dot{h}(\eta) j_l(k(\eta-\eta_0)) \int_1^\infty \frac{dx}{x} e^{-\frac{3}{10}\kappa(\eta)x} e^{-\frac{7}{10}\kappa(\eta)}. \quad (4-71)$$

其中对 η 的积分的函数部分包括 V , \dot{h} , j_l 。而可视函数无论是高斯近似还是我们的半高斯近似, 都具有这样的形式 $e^{-\gamma(\eta-\eta_d)^2}$ 。作为一个随机量, $\dot{h}(\eta)$ 通常时一个正频模 ($e^{-ik\eta}$) 和负频模 ($e^{ik\eta}$) 的复杂的混合, 而且 spherical

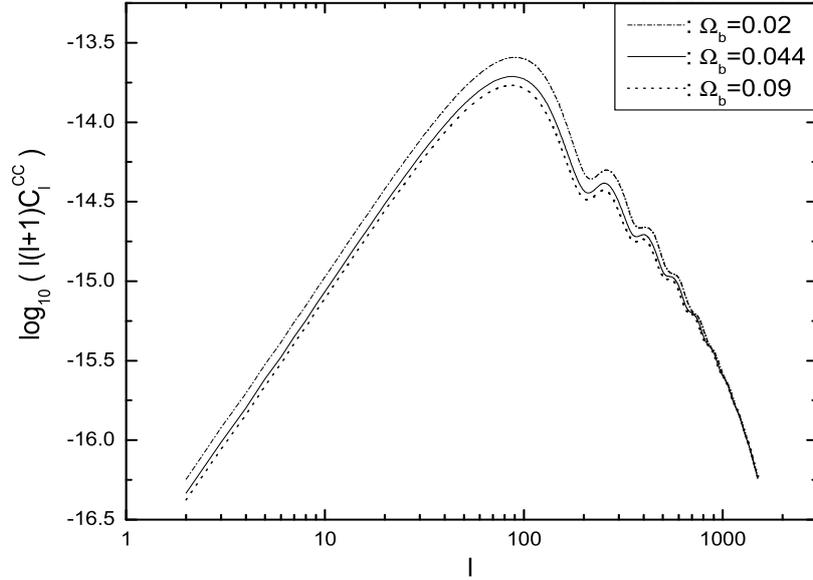


图 4-9: 重子密度 Ω_b 对 CMB 极化功率谱的影响。模型参数的选择和图 (4-8) 中的一样 [Zhao&Zhang, 2005b]。

Bessel 函数 $j_l(k(\eta - \eta_0))$ 也是一样。这样他们的乘积 $\dot{h}(\eta)j_l(k(\eta - \eta_0))$ 就会包含有这样的成分 $\propto e^{-ibk(\eta - \eta_0)}$, 其中常数 $b \in [-2, 2]$ 。将半高斯的可视函数代入上式, 并利用公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma y^2} e^{ibky} dy = e^{-\frac{(bk)^2}{4\gamma}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma y^2} dy,$$

可以得到积分的结果

$$\int_0^{\eta_0} d\eta V(\eta) \dot{h}(\eta) j_l(k(\eta - \eta_0)) \approx D(k) \dot{h}(\eta_d) j_l(k(\eta_d - \eta_0)) \int_0^{\eta_0} d\eta V(\eta). \quad (4-72)$$

其中

$$D(k) \equiv \frac{1}{2} \left[e^{-\alpha(k\Delta\eta_{d1})^2} + e^{-\alpha(k\Delta\eta_{d2})^2} \right]. \quad (4-73)$$

如果利用高斯近似的可视函数, 则 $D(k) = e^{-\alpha(k\Delta\eta_d)^2}$ 。这里 α 的数值可以在 $[0, 2]$ 的范围内取值, 这依赖于函数 $\dot{h}(\eta)j_l(k(\eta - \eta_0))$ 的具体表达式。粗略地将 $D(k)$ 函数形式上像对可视函数作傅里叶变换得到的结果, 代表由

于光子的散射造成的压低效应。在宇宙的复合时期，可视函数 $V(\eta_d)$ 是一个在 η_d 附近有峰值的函数，其峰值的宽度为 $\Delta\eta_d$ ，因此统计上讲光子也就在这个时间段内发生最后一次散射。因此 Thompson 散射对 CMB 温度各向异性的平滑作用也就被有效地限制在 $\Delta\eta_d$ 时间段之内。这样一个形式为 $e^{ik\eta}$ 的各向异性辐射场将得到一个 damping 因子 $e^{-(k\Delta\eta_d)^2}$ 。而且 $\Delta\eta_d$ 的值越大，压低效应越明显。事实上 $\Delta\eta_d$ 也可以看作是最后散射面的厚度。对波长 λ 下于散射厚度的，其 damping 效应可以用因子 $e^{-(2\pi\Delta\eta_d/\lambda)^2}$ 来描述，波场越短，压低效应越明显。公式 (4-71) 剩下的积分部分可以直接算出来

$$\begin{aligned} & \int_0^{\eta_0} d\eta V(\eta) \int_1^\infty \frac{dx}{x} e^{-\frac{3}{10}\kappa(\eta)x} e^{\frac{7}{10}\kappa(\eta)} = \\ & \int_0^\infty d\kappa e^{-\frac{17}{10}\kappa} \int_1^\infty \frac{dx}{x} e^{-\frac{3}{10}\kappa x} = \frac{10}{17} \ln \frac{20}{3}. \end{aligned} \quad (4-74)$$

这样我们得到了

$$\beta_l(\eta_0) = \frac{1}{17} \ln \frac{20}{3} i^l \Delta\eta_d \dot{h}(\eta_d) j_l(k(\eta_d - \eta_0)) D(k). \quad (4-75)$$

将其代入公式 (4-29) 和公式 (4-30)，则得到极化功率谱

$$C_l^{XX} = \frac{1}{16\pi} \left(\frac{1}{17} \ln \frac{20}{3} \right)^2 \int P_{Xl}^2(k(\eta_d - \eta_0)) |\dot{h}(\eta_d)|^2 \Delta\eta_d^2 D^2(k) k^2 dk, \quad (4-76)$$

其中 X 代表“G”或者“C”，对应于电场极化和磁场计划，而其中的函数 $P_{Xl}(x)$ 为

$$\begin{aligned} P_{Gl}(x) &= \frac{(l+2)(l+1)}{(2l-1)(2l+1)} j_{l-2}(x) \\ &- \frac{6(l-1)(l+2)}{(2l-1)(2l+3)} j_l(x) + \frac{l(l-1)}{(2l+3)(2l+1)} j_{l+2}(x), \end{aligned} \quad (4-77)$$

$$P_{Cl}(x) = \frac{2(l+2)}{2l+1} j_{l-1}(x) - \frac{2(l-1)}{2l+1} j_{l+1}(x). \quad (4-78)$$

需要指出的是我们本节中的记号和以前的记号，以及文献 [Pritchard&Kamionkowski, 2005] 中的记号的关系为 $C_l^{GG} = C_{El}/2$ ， $C_l^{CC} = C_{Bl}/2$ 。

为了彻底确定 C_l^{XX} 的值，我们需要固定引力波的原初谱的初始条件。和以前的确定办法一样，我们定义张量/标量比为

$$r = \frac{P_h(k_0)}{P_R(k_0)}. \quad (4-79)$$

$P_h(k_0)$ 的值已经有了很好地观测结果,

$$P_R(k_0) = 2.95 \times 10^{-9} A(k_0), \quad (4-80)$$

其中 $k_0 = 0.05 \text{Mpc}^{-1}$, 而 $A(k_0) \simeq 0.8$ 。但是观测还没有对参数 r 的值做出很好的限制, 而只是给出了它的上限: $r < 0.22$ (95% C.L.), $r < 0.37$, (99.9% C.L)。而我们前面提到的原初引力波的振幅为 $A_T = 2.95 \times 10^{-9} A(k_0)r$, 依赖于 r 的值。如果取 $r = 1$, 则得到 $A_T = 2.36 \times 10^{-9}$ 。后面我们会专门讨论 r 对极化功率谱的影响, 以及将来的观测对 r 的限制等问题。

§ 4.7 主要结论及其讨论

♣: 可视函数造成的 *damping* 效应

我们在图 (4-4) 和 (4-5) 中分别画出了我们的计息计算以及熟知计算得到的极化功率谱 C_l^{GG} 和 C_l^{CC} 。这两个功率谱的峰值都在 $l \sim 100$ 附近。我们的近似解析结果能够比较好地拟和数值计算的结果, 特别是对于可观测的前三个峰, 我们发现 $\alpha = 1.7 \sim 2.0$ 和半高斯的可视函数计算的结果比较理想。但是在非常小的尺度上还是有一定的偏离, 这是由于我们的解析计算无法确定参数 α 的值而导致的。在小尺度上 C_l^{XX} 敏感于可视函数 $V(\eta)$, 即 $D(k)$ 。高斯拟和的结果明显偏低, 这是因为对于高斯拟和, 其 *damping* 因子为 $D(k) = e^{-\alpha(k\Delta\eta_d)^2}$, 而对于半高斯拟和则为 $D(k) = \frac{1}{2} \left[e^{-\alpha(k\Delta\eta_{d1})^2} + e^{-\alpha(k\Delta\eta_{d2})^2} \right]$, 而且 $\Delta\eta > \delta\eta_1$ 引起的。

♣: 功率谱的峰值高度

从方程 (4-76) 可以看出, C_l^{XX} 的大小直接依赖于引力波 $|\dot{h}(\eta_d)|$ 的振幅。如前所论, 对于近似尺度不变得原初谱 $n_T \simeq 0$, $|\dot{h}(\eta_d)|$ 决定于 r 的大小。很明显 r 越大, $|\dot{h}(\eta_d)|$ 越大。在图 (4-6) 中我们画出了不同的 r 对极化功率谱的影响, 其中我们还画了 WMAP 运行八年以后预计所能达到的精度以及 Planck 卫星的预期精度 [Bock et al, 2006; [http: map](http://map); Planck

Collaboration, 2006]。该图明显地可以看出当 $r > 0.1$ 的时候可以 Planck 卫星观测到。但是 WMAP 想测量到极化功率谱却是比较困难的。

在我们上面的讨论中我们一直都没有考虑宇宙再电离过程对极化功率谱的影响，宇宙的在电离和星系形成过程紧密相关最近 WMAP 观测的结果认为目前宇宙的再电离光深为 $\kappa_r = 0.09 \pm 0.03$ [Spergel et al., 2006]。这样可视函数 $V(\eta)$ 就会在 η 非常接近于 η_0 的时候出现另外一个波峰，这也将产生 CMB 的极化谱。目前观测对再电离的观测还不是非常确定，而且再电离产生的可视函数的波峰不可能用高斯或者半高斯函数来近似处理，因此很难对其产生的 CMB 极化功率谱做出解析计算。在图 (4-7) 中我们画出了数值得到的包含宇宙再电离过程的磁场型极化功率谱。我们发现，这种再电离使得极化谱在非常大的尺度上 ($s \simeq 6$) 又出现了一个峰值。在观测方面很多观测极化的项目都已经在运行了，例如 CBI [http: CBI], DASI [http: dasi], CAPMAP [http: capmap], BOOMERANG [http: boomerang]。未来的一些观测实验例如 CLOVER [http: clover], QUIET [http: quiet] 的预计精度可以达到 $r > 0.01$ 。而 CMBPOL 计划的预计精度甚至可以达到 10^{-3} [http: inflation]。

♣ 最后散射面厚度的影响

除了引力波， C_l^{XX} 还直接依赖于 $\Delta\eta_d$ 。这个还是在公式 (4-76) 中通过两个效应来影响极化功率谱。一个是通过函数 $\Delta\eta_d^2$ ，另外一个 $D(k)$ 函数。在大尺度上由于 $D(k)$ 非常接近于 1，因此这时主要通过前者影响。很明显 $\Delta\eta_d$ 越大， C_l^{XX} 也越大。而在小尺度上的影响比较复杂，这时两个效应都会起作用。而 $D(k)$ 的形式决定了：对于一个固定的波数 k ， $\Delta\eta_d$ 越小， $D(k)$ 越大。最后散射面的厚度主要与宇宙中的重子密度 Ω_b 有关。在平直的 Λ CDM 宇宙模型中，增加 Ω_b 的值将略微增加宇宙退耦的速度，从而使得 $\Delta\eta_d$ 的值变小 [Jones&Wyse, 1985]。例如在 Λ CDM 模型中一个非常好的关于光深函数的拟和公式 [Hu&Sugiyama, 1995]

$$\kappa(z) = \Omega_b^{c_1} \left(\frac{z}{1000} \right)^{c_2}, \quad 800 < z < 1200, \quad (4-81)$$

其中 $c_1 = 0.43$, $c_2 = 16 + 1.8 \ln \Omega_b$ 。这个公式只依赖于 Ω_b 。可视函数 $V(\eta) = -\frac{d\kappa}{d\eta} e^{-\kappa}$ 的峰值位置在 η_d 附近。一个大的 Ω_b 对应于一个窄的 V 函数，即一个小的 $\Delta\eta_d$ 的值，见图 (4-8)，那里我们分别画出了

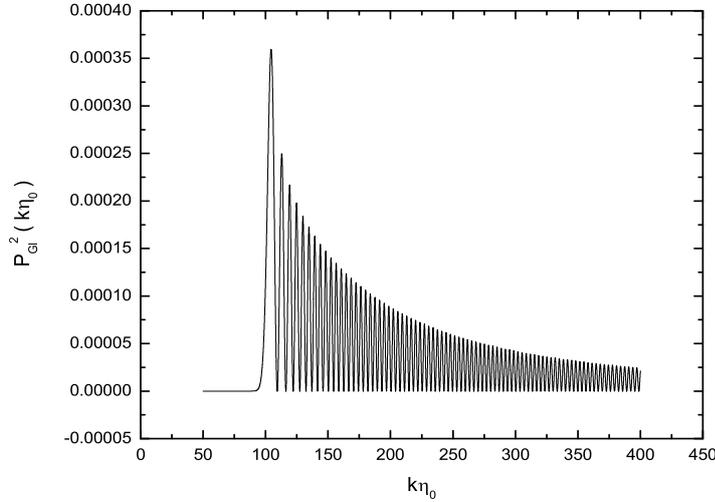


图 4-10: 函数 P_{Cl}^2 对波数 k 的依赖关系, 这里取了 $l = 100$, 其峰值在 $k\eta_0 \sim 100$ 附近 [Zhao&Zhang, 2005b]。

$\Omega_b = 0.02, 0.044, 0.09$ 对应的可视函数。但是总的效应仍然表明 Ω_b 越大, C_l^{CC} 越小, 尤其是在大尺度上其效应更为明显, 见图 (4-9)。

♣ 峰值的位置

从公式 (4-76) 中我们还可以分析功率谱峰值的位置。公式 (4-77) 中的函数 $P_{Cl}^2(k(\eta_d - \eta_0))$ 和公式 (4-78) 中的函数 $P_{Cl}^2(k(\eta_d - \eta_0))$ 都是 spherical Bessel 函数 $j_l(k(\eta_d - \eta_0))$ 组合而成。当 $l \gg 1$ 的时候, 该函数的峰值大约在 $l \simeq k(\eta_0 - \eta_d) \simeq k\eta_0$ 。在图 (4-10) 和 (4-11) 中我们分别画出了函数 P_{Cl} 和 P_{Cl} ($l = 100$)。我们发现其峰值确实都在 $k\eta_0 \simeq l$ 附近。因此极化功率谱的峰值位置可以由下式确定:

$$C_l^{XX} \propto \left| \dot{h}(\eta_d) \right|^2 k^2 D^2(k) \Big|_{k=l/\eta_0}, \quad (4-82)$$

其中因子 $D(k)$ 会对 l 比较大时候的功率谱产生一个大大的压低效应。因此功率谱的第一个峰值必然具有最大的峰值高度 (不考虑再电离造成的峰

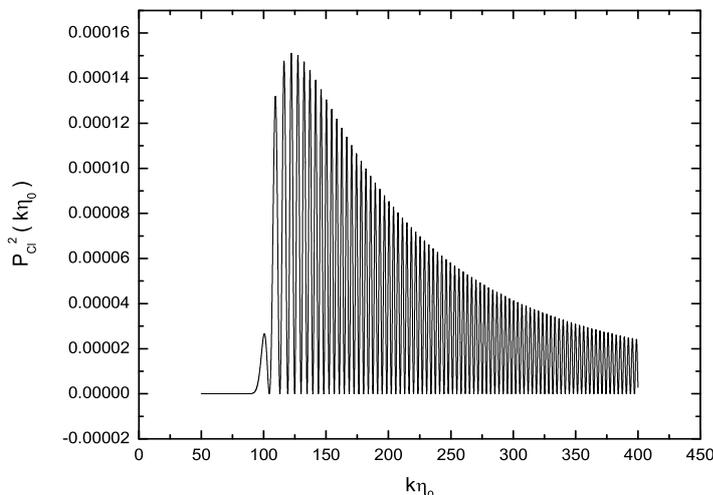


图 4-11: 函数 P_{Cl}^2 对波数 k 的依赖关系, 这里取了 $l = 100$, 其峰值在 $k\eta_0 \sim 100$ 附近 [Zhao&Zhang, 2005b]。

值)。现在我们来看看第一个峰值大概在什么位置。在大尺度上 $D(k) \simeq 1$ 是近似成立的。而方程 (4-38) 给出 $|\dot{h}(\eta_d)|^2 = A_0^2 k^2 (\eta_e/\eta_d)^2 |A_1 j_2(k\eta_d) + A_2 y_2(k\eta_d)|^2$, 其中 $j_2(k\eta_d)$ 是增长模式, 而 $y_2(k\eta_d)$ 是下降模式, 因此我们只保持其增长模式, 即 $|\dot{h}(\eta_d)|^2 \propto |A_1 j_2(k\eta_d)|^2$ 。而 $j_2(x)$ 的峰值在 $x \simeq 3$, 因此 $|\dot{h}(\eta_d)|^2$ 的峰值在 $k\eta_d \simeq 3$ 。这样极化功率谱的峰值就会出现在

$$l \simeq k\eta_0 \simeq 3\eta_0/\eta_d. \quad (4-83)$$

引力波的解析解能够近似描述引力波的演化行为, 如果我们用 WKB 近似, 那么在 Λ CDM 模型中有 $\eta_d/\eta_0 = 0.0195$, 并且在图 (4-12) 中我们可以发现函数 $|\dot{h}(\eta_d)|^2 k^2$ 的峰值在 $k\eta_0 \sim 127$ 。而公式 (4-83) 中的解析计算解析计算给出的结果为 $k\eta_0 \sim 154$, 两者基本相符, 因此我们利用公式 (4-83) 的估算是基本成立的。我们知道 η_0/η_d 的比值主要与宇宙中的重子密度 Ω_b 和暗能量密度 Ω_Λ 有关。例如对于模型 $\Omega_b = 0.044$, $\Omega_{dm} = 1 - \Omega_\Lambda - \Omega_b$, $\Omega_\Lambda = 0.65, 0.73, 0.80$, 其给出的比值分别为 $\eta_0/\eta_d \simeq 50.1, 51.3, 53.6$ 。引力波 $\dot{h}(\eta_d)$ 也依赖于 Ω_Λ 的大小, 如图 (4-14) 所示, Ω_Λ 变小会使得引力波

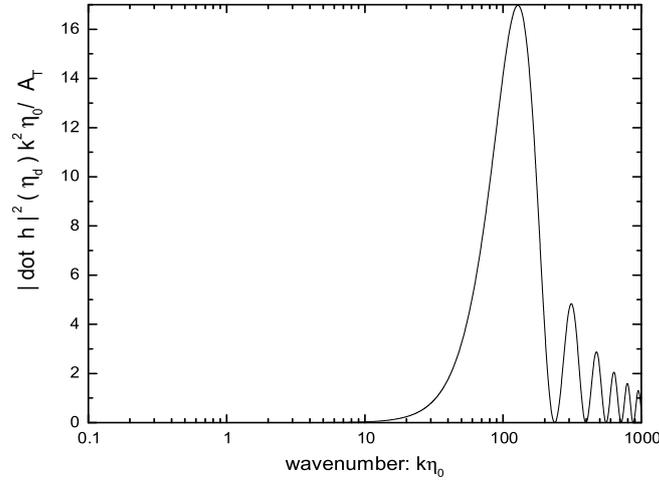


图 4-12: WKB 得到的引力波函数 $|\dot{h}(\eta_0)|^2 k^2 \eta_0 / A_T$, 其峰值在 $k\eta_0 \simeq 127$, 这里乘上因子 η_0 / A_T 完全是为了画图的方便 [Zhao&Zhang, 2005b]。

的振幅略微向大尺度移动, 相应的 Ω_Λ 越小, C_l^{XX} 的峰值位置越偏向于大尺度。

宇宙中的重子密度也会影响 η_d 的值, Ω_b 越大相应于宇宙退耦越慢, 脱耦时刻越晚, 即 η_d 越大, 因此 $l \simeq 3\eta_0/\eta_d$ 越小。在图 (4-8) 中我们选取了 $\Omega_\Lambda = 0.73$, $\Omega_{dm} = 1 - \Omega_\Lambda - \Omega_b$, $\Omega_b = 0.02, 0.044, 0.09$, 相应的 $\eta_0/\eta_d = 54.9, 51.3, 50.1$, 因此我们可以得出结论: 增大 Ω_b 的值将使得极化功率谱的峰值向大尺度方向移动, 正如图 (4-9) 所示。

♣ 原初谱指数的影响

在本节的最后一部分, 我们讨论一下引力波的原初谱指数 n_T 对 CMB 极化功率谱的影响。引力波的原初谱不仅与 r 的大小有关, 而且还依赖于谱指数 n_T 。为了显示 n_T 对极化功率谱的影响, 我们在图 (4-15) 中画出了对于不同的谱指数 $n_T = -0.1, 0.0, 0.1$ 对应的功率谱, 其余的参数选

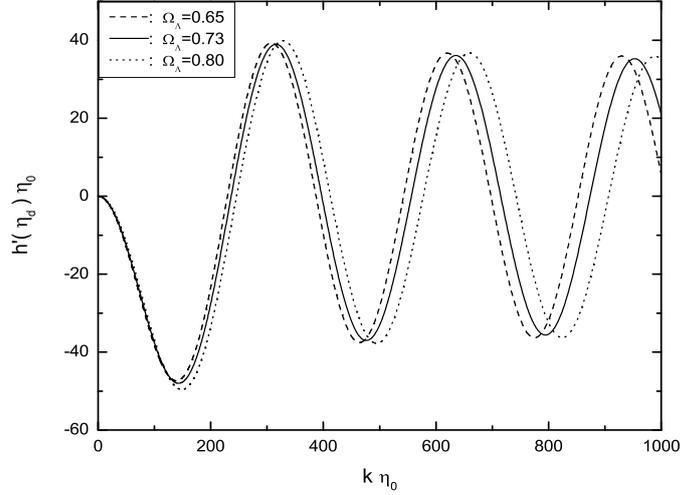


图 4-13: 暗能量的能量密度 Ω_Λ 对引力波 $\dot{h}(\eta_d)$ 的影响 [Zhao&Zhang, 2005b]。

择为 $r = 1$, $\alpha = 2$ 和半高斯的可视函数。我们发现谱指数越大, 对应的功率谱也就越大。其原因也很简单, $C_l^{CC} \propto |\dot{h}(\eta_d)|^2$, 并且 $|\dot{h}(\eta_d)|$ 只有在 $k\eta_0 > 50$ 的时候才不为零, 如图 (4-2) 所示, 并且 $|\dot{h}(\eta_d)| \propto k|h(\eta_d)|$ 。由于 $k^3|h(\eta_d)|^2 \propto k^{n_T}$, 因此在 k 比较大的区域, n_T 越大, $|h(\eta_d)|^2$ 也越大, 同时 C_l^{CC} 也越大。对于电场型极化的讨论也类似。

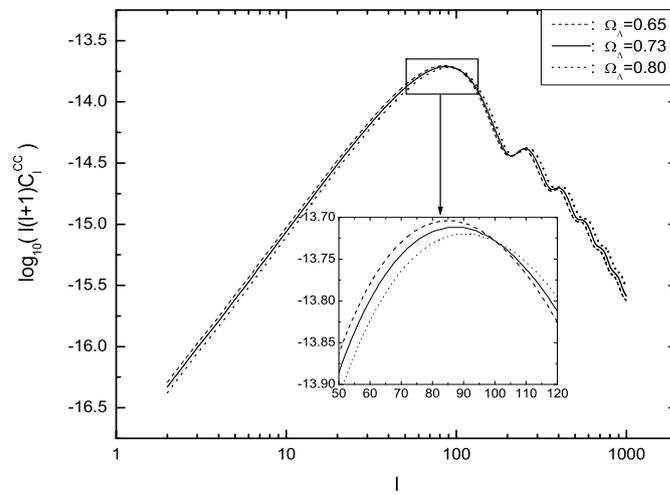


图 4-14: 暗能量的能量密度 Ω_Λ 对极化功率谱 C_l^{CC} 的影响 [Zhao&Zhang, 2005b]。

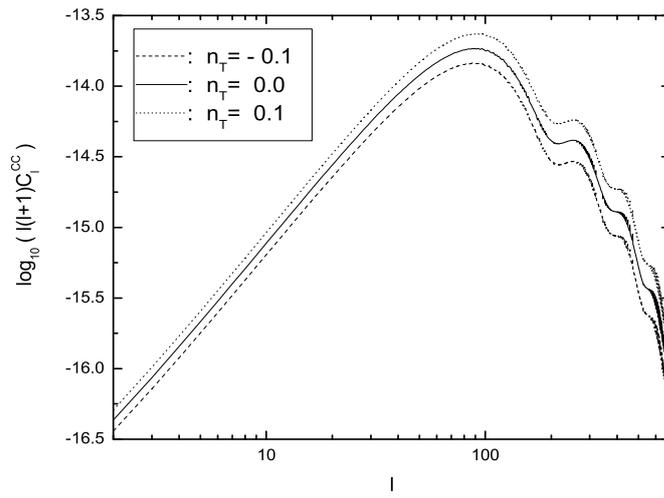


图 4-15: 引力波的原初谱指数 n_T 对极化功率谱 C_l^{CC} 的影响 [Zhao&Zhang, 2005b]。

第五章

总结与展望

§ 5.1 总结

在本论文中，我们主要讨论了三个方面的内容：宇宙中的暗能量，宇宙残余引力波和CMB极化。下面我们对这三个方面的内容以及主要结论分别总结如下：

首先我们讨论了宇宙学的暗能量问题。简要地介绍了暗能量的观测基础和模型研究的现状。然后着重介绍了我们的两个主要的工作。首先我们介绍了一种比较简单的Quintom暗能量模型，该模型能够比较容易地实现状态方程跨越 -1 的情况，从而与观测符合。我们在文章中主要集中讨论了该模型的几个主要的性质：首先我们讨论了该模型的运动方程，并且根据其本身具有的超几何变换下的不变性，将其运动方程化简，并将该模型分成两大类：Hessence场和Hantom场。我们发现通常的Quintessence场和Phantom场分别是这两类模型的特殊情况，因此我们讨论的很多性质对Quintessence场和Phantom场也是适用的。然后我们讨论了该类模型在 $\omega - \omega'$ 相空间中的演化行为，发现可以将相空间分成四个不同的区域，不同的区域内暗能量的状态方程和势能的演化分别具有不同的行为。在此基础上我们讨论了在该类模型中，状态方程如何跨越 -1 ，以及其可能存在的晚期吸引子解的行为，我们发现，Hessence场只能存在Quintessence-like或者 Λ -like的晚期吸引子解，因此在该类模型中，宇宙的大撕裂是自动避免的；而Hantom场只能存在Phantom-like或者 Λ -like的晚期吸引子解。然后我们讨论了两类具体的Hessence模型，对上述的性质进行了验证。我们还

讨论Hessence 模型势能函数的重建问题，给出了重建势能函数的方程，并将其应用到五类常用的参数化模型中。在最后一部分我们讨论了该暗能量的扰动问题，给出了扰动演化以及影响CMB 温度各向异性功率谱的方程组，发现在我们的模型中不存在扰动发散的问题。

然后我们着重讨论了一类新的暗能量模型：Yang-Mills 场暗能量模型。对该模型我们主要讨论了它以下几个方面的性质：首先讨论了提出该模型的基本思想，拉氏量的物理起源，以及其演化方程。我们发现该模型和标量场模型相比，其演化行为比较简单，物理基础比较扎实，只有很少的可调参数；而且该模型能够自然地实现状态方程大于 -1 和小于 -1 ，并且随着宇宙的膨胀，该模型能够自动地变成一种状态方程非常接近 -1 的物态，因而能够比较好地与观测符合。然后我们讨论了该模型的状态方程跨越 -1 的可能性。我们发现，对于单个自由的Yang-Mills 暗能量不管其拉氏量是什么形式，都是不可能跨越 -1 的。这和通常的标量场模型是一样的。但是利用两个Yang-Mills 场，却很容易实现，其思想和Quintom 模型非常类似：其中一个Yang-Mills 场是Quintessence-like，另一个是Phantom-like。然后我们给出一个简单的实例，发现状态方程跨越 -1 的情况确实可以实现。上面我们讨论的时候都假设了一种比较简单的情况，即考虑只有“电场”的情况。为了讨论的完整性，我们还讨论了既有“电场”，又有“磁场”的普遍情况。我们发现在该普遍模型中，随着宇宙的膨胀，磁场将迅速衰减，而且状态方程的演化行为非常类似于只有“电场”的简单模型，因此我们前面讨论的简单模型是具有代表性的，能够描述Yang-Mills 场暗能量模型的普遍性质。最后我们讨论了在我们的模型中宇宙的巧合性问题。首先讨论了自由场模型中的巧合性问题，我们发现该暗能量的状态方程在宇宙早期非常类似于辐射，因而能够跟踪辐射的演化行为。而只有在晚期才很快地变成一种暗能量，其状态方程非常接近于 -1 ，从而与观测相符。这种奇妙的演化行为决定了我们的模型中，宇宙的巧合性问题是存在的：宇宙早期暗能量的能量密度可以千差万别，但是在最后，其状态都是一样的，这是我们模型最大的优点之一。然后我们将该讨论推广到存在暗能量和物质以及辐射耦合的情况，我们分别讨论了不同的可能的耦合行为，发现在这些所有的模型中，宇宙巧合性问题也都是自动避免的。而且我们发现，在有些耦合模型中，暗能量的物态是可以跨越并小于 -1 的，但是宇宙中物质总的物态却总是大于并接近于 -1 的，这样既能与观测有比较好地符合，又自然地避免了宇宙的“大撕裂”命运。最后我们还讨论了Yang-Mills

暗能量和标量场模型的区别，发现我们的Yang-Mills 模型不能等价于普通的标量场模型，两者有着本质的区别。

然后我们讨论了宇宙中的引力波问题，尤其是宇宙中残余的背景引力波。在讨论中，我们首先简要介绍了宇宙中的各类孤立的引力波源，讨论了其发出的引力波的大小，存在的几率，以及探测的现状等问题。然后着重讨论了宇宙残余引力波问题。首先介绍了宇宙残余引力波的起源问题，其中主要讨论了暴涨宇宙学模型的基本思想，其演化方程，以及对密度和引力波原初扰动谱的预言。我们发现：对于慢滚动的单场暴涨模型，其预言的引力波谱通常比密度扰动谱小一些，这和观测是相符合的。而且引力波原初谱的振幅直接正比于暴涨时期的哈勃常数，因此直接决定了暴涨的能标，对于暴涨物理的研究具有极为重要的意义。然后我们讨论了引力波在膨胀宇宙中的演化行为。首先着重讨论了在加速膨胀宇宙中，引力波的演化行为，我们分别利用完全解析的方法，近似解析的方法和数值的方法分别研究了引力波的演化行为，发现了同样的结论：引力波在宇宙视界之外的時候，其振幅是不变的，但是一旦进入视界，其振幅将随着宇宙的膨胀而衰减。这和以前作者的研究结果是一样的。我们发现宇宙的加速膨胀能够对引力波产生明显的影响，尤其是对于加速膨胀之前进入视界的引力波 ($\nu > 10^{-18}\text{Hz}$)，其效应可以用一个简单的damping 因子 $t_{acc} = \Omega_m/\Omega_\Lambda$ 来表示。然后还讨论了宇宙中微子和宇宙相变对引力波的影响，发现他们分别可以对不同频段的引力波产生比较小的影响，而且这两个效应也可以用两个damping 因子 t_{neu} 和 t_{tr} 来描述，这两个因子清晰地表明了各种宇宙学参数的影响。在最后一节中我们主要讨论了宇宙残余引力波的探测问题。首先简要介绍了目前的主要探测手段：微波背景辐射极化的探测方法，其敏感于极低频的引力波；毫秒脉冲星信号残差的探测方法，其敏感于中等频段的引力波，激光干涉仪直接探测的方法，它主要敏感于较高频段的引力波；宇宙核合成的限制方法，它是对各个频段引力波积分效应的一个限制。我们分别介绍了目前这些方法的研究现状，以及未来的主要研究计划和探测能力。然后针对具体的暴涨模型，考虑了通常的红移压低效应，加速膨胀效应，中微子压低效应，宇宙相变的压低效应以后，我们对目前引力波的观测限制以及未来的观测方法和探测能力作了比较和分析。在计算过程中，对引力波原初谱的处理，我们首先利用了近似的幂指数功率谱，并将其应用到具体的四大类暴涨模型，考察其对引

力波的预言，然后应用了暴涨流方程进行数值模型的方法，考察了其预言的引力波能量密度的大小。用这两种方法分别考察目前各种观测的限制发现：目前LIGO，毫秒脉冲星以及宇宙核合成的限制都太松散，不能对暴涨模型提出任何限制，而WMAP对 r , n_s , α 的限制却相对较强。对未来的观测计划，最有希望看到引力波的有两种：一种是CMB探测器，包括Planck, Clover, CMBPol等；另一种是激光干涉仪，主要包括BBO和DECIGO。我们考察了暴涨模型预言的引力波在 $r - \Omega_g$ 相空间中的分布，发现CMB探测器能够非常有希望探测到引力波，只要 r 的值比较大；而激光干涉仪更有利于观测到引力波，如果 r 的值比较小。这两种方法是相互补充的。

在文章的最后一章，我们讨论了残余引力波产生的CMB极化功率谱的解析计算，其中我们采用了Polnarev的解析方法。对引力波的计算，我们分别采用了完全数值的计算方法，完全的解析近似方法和WKB的近似方法，对于可视函数的处理，我们采用了高斯和半高斯的近似方法，对于光子的Boltzmann方程，我们精确到了二阶紧耦合近似。最后我们得到了关于CMB极化功率谱的解析公式，在该公式中，各种宇宙学因素的影响都清楚地表现出来了。在此基础上，我们分析了各种宇宙学参数对CMB功率谱的影响：张量/标量比 r 越大，功率谱的幅值越大；重子物质 Ω_b 的值越大，功率谱的幅值越小，并且峰值位置向大尺度移动；宇宙暗能量 Ω_Λ 越大，并且峰值位置偏向于小尺度；原初谱指数 n_T 的值越大，功率谱的幅值越大。

§ 5.2 展望

暗能量的发现是最近十年以来，宇宙学研究最重要的进展之一，目前各种不同的观测证据都直接或者间接地证明了暗能量的存在，并且倾向于暗能量具有 $\omega \simeq -1$ 的物态。如何理解暗能量的物理本质，以及如何从观测上更好地限制暗能量的状态方程以及其演化行为仍然是目前宇宙学研究的最重要的课题之一。在我们以前的研究工作中，虽然初步研究了一些暗能量模型，主要是Quintom模型和Yang-Mills场模型，但是还是有很多更为深入的问题需要研究：例如Quintom暗能量模型是否有可能回答宇宙的巧合性问题，甚至精细调节问题？Quintom暗能量与物质耦合，及其对宇宙演化的影响如何？如何更好地从观测上证实Quintom模型？Yang-Mills

场暗能量模型更为普遍的形式是什么，例如考虑更高阶圈图修正以后的模型，这些模型分别有什么物理后果？是否能够比较好地解决宇宙的暗能量问题？如何从观测上限制Yang-Mills 暗能量模型？Yang-Mills 暗能量的扰动行为以及其对CMB 功率谱的影响如何？如何从观测上区分各种暗能量模型？等等这些问题都是我们以后可能的研究课题。

最近几年CMB 功率谱的研究取得了举世瞩目的成就，尤其是WMAP 观测结果的出现，大大提高了对暴涨和其它宇宙学参数的限制。虽然目前还没有从观测上最终发现宇宙残余引力波存在的证据，但是下一代望远镜，特别是Planck 将再次大大提高观测精度，完全有可能最终并首次发现宇宙的残余引力波，这对暴涨模型的确认将具有决定性的意义。其他的一些观测计划，例如毫秒脉冲星观测，激光干涉仪观测等等，在未来的十年之内也将取得重要的进展，尤其是LISA 计划的实施，也将大大促进引力波，特别是残余引力波的探测。在我们更为关心的理论研究方面，也将有更多的工作需要作，例如孤立的引力波源对残余引力波的污染如何？其它的一些非单场暴涨所预言的引力波大小如何？目前以及未来的一些观测可能对其有何限制？其它的一些宇宙学现象，例如宇宙的CPT 破坏，引力透镜效应对残余引力波的污染如何？宇宙再电离过程对CMB 极化的影响如何？等等这些问题也可能是我们将来的研究课题。

参考文献

- [1] Abbott R., et al., Phys.Rev.D **72** (2005) 062001;
- [2] Abbott B. et al., Phys.Rev.Lett. **94** (2005) 181103;
- [3] Abbott B., et al., Phys.Rev.Lett. **95** (2005) 221101;
- [4] Abbott B., et al., Phys.Rev.D **72** (2005) 102004;
- [5] Abbott L.F. and Harari D.D., Nucl.Phys.B **264** (1986) 487;
- [6] Adler S., Phys.Rev.D **23** (1981) 2905; Nucl.Phys.B **217** (1983) 3881;
- [7] Albrecht A. and Steinhardt P.J., Phys.Rev.Lett. **48** (1982) 1220;
- [8] Alabidi L. and Lyth D., JCAP **0605** (2006) 016; Alabidi L. and Lyth D., arXiv:astro-ph/0603539;
- [9] Allen B., Phys.Rev.D **37** (1988) 2078;
- [10] Allen B., arXiv:gr-qc/9604033; Cyburt R.H., Ellis J., Fields B.D. and Olive K.A., Phys.Rev.D **67** (2003) 103521; Cyburt R.H., Fields B.D., Olive K.A. and Skillman E., Astropart.Phys. **23** (2005) 313; Smith T.L., Pierpaoli E. and Kamionkowski M., arXiv:astro-ph/0603144;
- [11] Andersson N., Astrophys.J. **502** (1998) 708; Andersson N. et al., Astrophys.J. **516** (1999) 307; Friedman J.L. and Morsink S.M., Astrophys.J. **502** (1998) 714;
- [12] Aref'eva I.Ya., Koshelev A.S. and Vernov S.Yu., Phys.Rev.D **72** (2005) 064017;
- [13] Armendariz-Picon C., JCAP **0407** (2004) 007; Kiselev V.V., Class.Quantum Grav. **21** (2004) 3323; Wei H. and Cai R.G., Phys.Rev.D **73** (2006) 083002;
- [14] Armendariz-Picon C., Damour T. and Mukhanov V., Phys.Lett.B **458** (1999) 209; Chiba T., Okabe T. and Yamaguchi M., Phys.Rev.D **62** (2000) 023511; Armendariz-Picon C., Mukhanov V. and Steinhardt P.J., Phys.Rev.D **63** (2001) 103510; Chimento L.P., Phys.Rev.D **69** (2004) 123517; Gonzalez-Diaz P.F., Phys.Lett.B **586** (2004) 1;

-
-
- [15] Bahcall N.A., Ostriker J.P., Perlmutter S. and Steinhardt P.J., *Science* **284** (1999) 1481;
- [16] Baskaran D., Grishchuk L.P. and Polnarev, A.G., arXiv:gr-qc/0605100;
- [17] Bennett C.L. et al., *Astrophys.J.Suppl.* **148** (2003) 1; Spergel D.N. et al., *Astrophys.J.Suppl.* **148** (2003) 175; Peiris H.V. et al., *Astrophys.J.Suppl.* **148** (2003) 213; Spergel D.N. et al., arXiv:astro-ph/0603449;
- [18] Bildsten L., *Astrophys.J.* **501** (1998) 89;
- [19] Birkel M. and Sarkar S., *Astropart.Phys.* **6** (1997) 197; Ferreira P.G. and Joyce M., *Phys.Rev.D* **58** (1998) 023503; Kneller J.P. and Steigman G., *Phys.Rev.D* **67** (2003) 063501;
- [20] Bock J., et al., arXiv:astro-ph/0604101;
- [21] Bondi H., *Nature* **179** (1957) 1072; Bondi H. and McCrea W.H., *Proc.Camb.Phil.*, **56** (1960) 410;
- [22] Boyle L.B. and Steinhardt P.J., arXiv:astro-ph/0512014;
- [23] Bonvin C., Caprini C. and Durrer R., arXiv:astro-ph/0606548;
- [24] Bunch N.D. and Davies P.C.W., *Quantum Fields in Curved Space*, Cambridge University Press (1982);
- [25] Cabella P. and Kamionkowski M., arXiv:astro-ph/0403392;
- [26] Caldwell R.R., *Phys.Lett.B* **545** (2002) 23; Carroll S.M., Hoffman M. and Trodden M., *Phys.Rev.D* **68** (2003) 023509; Caldwell R.R., Kamionkowski M. and Weinberg N.N., *Phys.Rev.Lett.* **91** (2003) 071301; Dabrowski M.P., Stachowiak T. and Szydlowski M., *Phys.Rev.D* **68** (2003) 103519; Onemli V.K. and Woodard R.P., *Phys.Rev.D* **70** (2004) 107301;
- [27] Caldwell R.R. and Linder E.V., *Phys.Rev.Lett.* **95** (2005) 141301; Scherrer R.J., *Phys.Rev.D* **73** (2006) 043502 ;
- [28] Challinor A., arXiv:astro-ph/0606584;
- [29] Chandrasekhar S., *Radiative Transfer* (Dover, New York, 1960);
- [30] Chevallier M. and Polarski D., *Int.J.Mod.Phys.D* **10** (2001) 213; Linder E.V., *Phys.Rev.Lett.* **90** (2003) 091301; Padmanabhan T. and Choudhury T.R., *MNRAS* **344** (2003) 823;
- [31] Chiba T., *Phys.Rev.D* **73** (2006) 063501;
- [32] Coleman S. and Weinberg E., *Phys.Rev.D* **7** (1973) 1888;
- [33] Cole S. et al., *Mon.Not.R.Astron.Soc.* **362** (2005) 505; Tegmark M. et al., *Astrophys.J.* **606** (2005) 702; Eisenstein D.J. et al., *Astrophys.J.* **633** (2005) 560;

-
- [34] Cooray A.R. and Huterer D., *Astrophys.J.* **513** (1999) L95;
- [35] Cooray A.R., et al., *Phys.Rev.D* **72** (2005) 023514;
- [36] Copeland E.J., Sami M. and Tsujikawa S., arXiv:hep-th/0603057;
- [37] Copeland E.J., Liddle A.R. and Wands D., *Phys.Rev.D* **57** (1998) 4686; Gumjudpai B., Naskar T., Sami M. and Tsujikawa S., *JCAP* **0506** (2005) 007;
- [38] Corasaniti P.S., Kunz M., Parkinson D., Copeland E.J. and Bassett B.A., *Phys.Rev.D* **70** (2004) 083006; Hannestad S. and Mortsell E., *JCAP* **0409** (2004) 001; Upadhye A., Ishak M. and Steinhardt P.J., *Phys.Rev.D* **72** (2005) 063501; Lazkoz R., Nesseris S. and Perivolaropoulos L., *JCAP* **0511** (2005) 010;
- [39] Cyburt R.H., Fields B.D., Olive K.A. and Skillman E., *Astropart.Phys.* **23** (2005) 313;
- [40] Detweiler S., *Astrophys.J.* **234** (1979) 1101; Thorsett S.E. and Dewey R.J., *Phys.Rev.D* **53** (1996) 3468; Lommen A.N., arXiv:astro-ph/0208572;
- [41] Dicus D.A. and Repko W.W., *Phys.Rev.D* **72** (2005) 088302;
- [42] Dodelson S., Kaplinghat M. and Stewart E., *Phys.Rev.Lett.* **85** (2000) 5276; Feng B., Li M.Z. and Zhang X.M., *Phys.Lett.B* **634** (2006) 101; Xia J.Q., Feng B. and Zhang X.M., *Mod.Phys.Lett.A* **20** (2005) 2409; Barenboim G., Mena O. and Quigg C., *Phys.Rev.D* **71** (2005) 063533; Barenboim G. and Lykken J., *Phys.Lett.B* **633** (2006) 453; Linder E.V., *Astropart.Phys.* **25** (2006) 167; Nojiri S. and Odintsov S.D., arXiv:hep-th/0603062; Zhao W., arXiv:astro-ph/0604459;
- [43] Dodelson S., Kinney W.H. and Kolb E.W., *Phys.Rev.D* **56** (1997) 3207; Kinney W.H., *Phys.Rev.D* **58** (1998) 123506; Peiris H.V. et al., *Astrophys.J.Suppl.* **148** (2003) 175;
- [44] Fabris J.C., Goncalves S.V.B. and dos Santos M.S., *Gen.Rel.Grav.* **36** (2004) 2559; Santos M.S., Goncalves S.V.B., Fabris J.C. and de Gouveia Dal Pino E.M., arXiv:gr-qc/0504032;
- [45] Feng B., Wang X.L. and Zhang X.M., *Phys.Lett.B* **607** (2005) 35;
- [46] Ferrari V., *Annalen Phys.* **1** (2000) 3;
- [47] Finn L.S., arXiv:gr-qc/9903107;
- [48] Freese K., Frieman J.A. and Olinto A.V., *Phys.Rev.Lett.* **65** (1990) 3233; Asams F.C., Bond J.R., Freese K., Frieman J.A. and Olinto A.V., *Phys.Rev.D* **47** (1993) 426; Frieman J., Hill C., Stebbins A. and Waga I., *Phys.Rev.Lett.*

- 75 (1995) 2077;
- [49] Freese K. and Lewis M., Phys.Lett.B **540** (2002) 1;
- [50] Gerke B.F. and Efstathiou G., MNRAS **335** (2002) 33;
- [51] Gong G., Class.Quantum Grav. **21** (2004) 5555;
- [52] Grishchuk L.P., Sov.Phys.JETP, **40** (1974) 409;
- [53] Grishchuk L.P., Zh.Eksp.Teor.Fiz. **67** (1974) 825; Grishchuk L.P., Ann. NY Acad.Sci. **302** (1977) 439; Grishchuk L.P., Lipunov V.M., Postnov K.A., Prokhorov M.E. and Sathyaprakash B.S., Phys.Usp. **44** (2001) 1;
- [54] Grishchuk L.P., Phys.Rev.D **45** (1992) 2601;
- [55] Grishchuk L.P., Phys.Rev.D **48** (1993) 3513; Grishchuk L.P., Phys.Rev.Lett. **70** (1993) 2371;
- [56] Grishchuk L.P., Class.Quant.Grav. **14** (1997) 1445; Lecture Notes Physics **562** (2001) 164, in *Gyros, Clocks, Interferometers...: Testing Relativistic Gravity in Space*, Lammerzahl, et al., (Eds);
- [57] Grishchuk L.P., Lipunov V.M. and Postonv K.A., arXiv:astro-ph/0008481; Phys.Usp., **44** (2001) 1;
- [58] Grishchuk L.P., arXiv:gr-qc/0504018;
- [59] Guo Z.K., Piao Y.S., Zhang X.M. and Zhang Y.Z., Phys.Lett.B **608** (2005) 177; Zhang X.F., Li H., Piao Y.S. and Zhang X.M., Mod.Phys.Lett.A **21** (2006) 231;
- [60] Guo Z.K., Ohta N. and Zhang Y.Z., Phys.Rev.D **72** (2005) 023504; Li H., Guo Z.K. and Zhang Y.Z., Mod.Phys.Lett.A **21** (2006) 1683; Hao J.G. and Li X.Z., Phys.Rev.D **66** (2002) 087301; Tsujikawa S., Phys.Rev.D **72** (2005) 083512;
- [61] Guth A.H., Phys.Rev.D **23** (1981) 347;
- [62] Guth A.H. and Pi S.Y., Phys.Rev.Lett. **49** (1982) 1110; Hawking S.W. Phys.Lett.B **115** (1982) 295; Straobinsky A.A. Phys.Lett.B **117** (1982) 175; Bardeen J, Steinhardt P.J. and Turner M.S., Phys.Rev.D **28** (1983) 679;
- [63] Hannestad S. and Mortsell E., Phys.Rev.D **66** (2002) 063508;
- [64] Harari D. and Zaldarriaga M., Phys.Lett.B **310** (1993) 96;
- [65] Hellings R.W. and Downs G.S., Astrophys.J. **265** (1983) L39
- [66] Henriques A.B., Class.Quant.Grav. **21** (2004) 3057; Henriques A.B. and Mendes L.M., Phys.Rev.D **52** (1995) 2083;
- [67] Hinshaw G., arXiv:astro-ph/0603451;
- [68] Hoffman M.B. and Turner M.S., Phys.Rev.D **64** (2001) 023506; Kinney W.H.,

- Phys.Rev.D **66** (2002) 083508; Liddle A.R., Phys.Rev.D **68** (2003) 103504;
Chongchitnan S. and Efstathiou G., Phys.Rev.D **72** (2005) 083520;
- [69] Hoyle F., MNSRA **108** (1948) 372; Hoyle F. and Narlikar J.V.,
Proc.Roy.Soc.A **270** (1962) 334; Narlikar J.V., Nature **242** (1973) 135;
- [70] <http://astro.berkeley.edu/mpulsar/>;
- [71] <http://astro.uchicago.edu/dasi/>; Leitch E.M., et al., Astrophys.J. **624** (2005)
10;
- [72] <http://cmb.phys.cwru.edu/boomerang/>; Polenta G., et al., Adv.Space Res.
36 (2005) 1064;
- [73] <http://lisa.nasa.gov/>;
- [74] <http://map.gsfc.nasa.gov/>;
- [75] <http://tamago.mtk.nao.ac.jp/>;
- [76] <http://quiet.uchicago.edu/>;
- [77] <http://www.astro.caltech.edu/~tjp/CBI/>; Sievers J.L. et al., arXiv:astro-
ph/0509203;
- [78] <http://www.ligo.caltech.edu/advLIGO/>;
- [79] <Http://www.mrao.cam.ac.uk/~act21/clover.html>; Taylor A.C., et al.,
arXiv:astro-ph/0407148;
- [80] <http://www.rssd.esa.int/index.php?project=Planck>;
- [81] <http://wwwcascina.virgo.infn.it/>;
- [82] <http://wwwphy.princeton.edu/cosmology/capmap/>; Barkats D., et al., As-
trophys.J. **619** (2005) L127;
- [83] <http://universe.nasa.gov/program/bbo.html>; Corbin V. and Cornish N.J.,
Class.Quantum Grav. **23** (2006) 2435;
- [84] <http://universe.nasa.gov/program/inflation.html>; Verde L., Peiris H. and
Jimenez H., JCAP **0601** (2006) 019;
- [85] Hu W. and Sugiyama N., Astrophys.J. **444** (1995) 489;
- [86] Hu W. and Sugiyama N., Astrophys.J. **471** (1996) 542;
- [87] Hu W. and White M., Phys.Rev.D **56** (1997) 597;
- [88] Hu W., Phys.Rev.D **71** (2005) 047301;
- [89] Hulse R.A. and Taylor J.H., Astrophys.J **195** (1975) L51;
- [90] Huterer D. and Cooray A., Phys.Rev.D **71** (2005) 023506; Lazkoz R.,
Nesseris S. and Perivolaropoulos L., JCAP **0511** (2005) 010;
- [91] Jaranowski P., Krolak A. and Schutz B.F., Phys.Rev.D **58** (1998) 063001;
- [92] Jones B. and Wyse R., A&A **149** (1985) 144;

-
-
- [93] Kamenshchik A.Y., Moschella U. and Pasquier V., Phys.Lett.B **511** (2001) 265; Bilic N., Tupper G.B. and Viollier R.D., Phys.Lett.B **535** (2002) 17; Bento M.C., Bertolami O. and Sen A.A., Phys.Rev.D **66** (2002) 043507;
- [94] Kamionkowski M., Kosowsky A. and Stebbins A., Phys.Rev.D **55** (1997) 7368;
- [95] Kampfer B., Annalen Phys. **9** (2000) 605; Schwarz D.J., Annalen Phys. **12** (2003) 220; Schaefer T., arXiv:hep-ph/0509068;
- [96] Keating B. et al., Astrophys.J. **495** (1998) 580;
- [97] Kinney W.H., Phys.Rev.D **66** (2002) 083508; Easther R. and Kinney W.H., Phys.Rev.D **67** (2003) 043511;
- [98] Kolb E.W. and Turner M., *The Early Universe* Addison-Sesley Publishing Company (1990);
- [99] Kamionkowski M., Kosowsky A., Stebbins A., Phys.Rev.D **55** (1997) 7368;
- [100] Kosowsky A., Annals Phys. **246** (1996) 49;
- [101] Leitch E.M. et al., Astrophys.J. **624** (2005) 10; MacTavish C.J. et al., arXiv:astro-ph/0507503; Sievers J.L. et al., arXiv:astro-ph/0509203; Barkats D. et al., Astrophys.J. **619** (2005) L127;
- [102] Lewis A., Challinor A. and Lasenby A., Astrophys.J. **538** (2000) 473;
- [103] Li F.Y., Tang M.X. and Shi D. P., Phys.Rev.D **67** (2003) 104008; Li F.Y. and Yang N., Chin.Phys.Lett. **20** (2004) 1917; Li F.Y., Chen Z.Y. and Yi Y., Chin.Phys.Lett. **22** (2005) 2157;
- [104] Linde A.D., Phys.Lett.B **108** (1982) 389;
- [105] Liddle, A.R., Phys.Rev.D **68** (2003) 103504;
- [106] Liddle A.R. and Lyth D.H., *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure*, Cambridge University Press (2000); Turner M.S. Whith M. and Lidsey J.E. Phys.Rev.D **48** (1993) 4613; Turner M.S. and White M., Phys.Rev.D **53** (1996) 6822; Chongchitnan S. and Efstathiou G., Phys.Rev.D **73** (2006) 083511;
- [107] Liddle A.R. and Lyth D.H., Phys.Lett.B **291** (1992) 391; Liddle A.R. and Lyth D.H., Phys.Rep. **231** (1993) 1;
- [108] Liddle A.R. and Urena-Lopez L., arXiv:astro-ph/0605205;
- [109] Liddle A.R., Parsons P. and Barrow J.D., Phys.Rev.D **50** (1994) 7222;
- [110] LIGO Scientific Collaboration: Abbott B. et al., Phys.Rev.Lett. **95** (2005) 221101;
- [111] Lyth D.H. and Riotto A., Phys.Rev.D. **56** (1997) 1841;
- [112] Lyth D.H. and Riotto A., Phys.Rept. **314** (1999) 1;

-
- [113] Ma C.P. and Bertschinger E., *Astrophys.J.* **455** (1995) 7;
- [114] Maggiore M., *Phys.Rept.* **331** (2000) 283;
- [115] Maia M.R.G., *Phys.Rev.D* **48** (1993) 647;
- [116] Maia M.R.G. and Barrow J.D., *Phys.Rev.D* **50** (1994) 6262;
- [117] Malquarti M., Copeland E.J. and Liddle A.R., *Phys.Rev.D* **68** (2003) 023512;
- [118] Matinyan S. and Savvidy., *Nucl.Phys.B* **134** (1978) 539; M.Gyulassy M. and Iwazaki A., *Phys.Lett.B* **165** (1985) 373;
- [119] Ng K.L. and Ng K.W., *Astrophys.J.* **445** (1995) 521;
- [120] Ng K.W. and Speliotopoulos A.D., *Phys.Rev.D* **52** (1995) 2112;
- [121] Ni W.T., Shiomi S. and Liao A.C., *Class.Quant.Grav.* **21** (2004) S641;
- [122] Nice D.J., Sayer R.W. and Taylor J.H., *Astrophys.J.* **466** (1996) L87;
- [123] Padmanabhan T., *Structure Formation in the Universe* Cambridge Press (1995);
- [124] Pagels H. and Tomboulis E., *Nucl.Phys.B* **143** (1978) 485;
- [125] Parker L., *Phys.Rev.* **183** (1969) 1057;
- [126] Parker L. and Raval A., *Phys.Rev.D* **60** (1999) 063512;
- [127] Peebles P.J.E., *Astrophys.J.* **153** (1968) 1;
- [128] Peebles P.J.E. and Ratra B., *Astrophys.J.* **325** (1988) L17; Weller J. and Lewis A.M., *MNRAS* **346** (2003) 987; Gordon C. and Hu W., *Phys.Rev.D* **70** (2004) 083003;
- [129] Peebles P.J.E. and Yu J.T., *Astrophys.J.* **162** (1970) 815;
- [130] Planck Collaboration, arXiv:astro-ph/0604069;
- [131] Politzer H., *Phys.Rev.Lett.* **30** (1973) 1346; Gross D.J. and Wilzcek F., *Phys.Rev.Lett.* **30** (1973) 1343;
- [132] Polnarev A., *Sov.Astron.* **29** (1985) 6;
- [133] Pritchard J.R. and Kamionkowski M., *Annals Phys.* **318** (2005) 2;
- [134] Riess A.G. et al., *Astron.J.* **116** (1998) 1009; Perlmutter S. et al., *Astrophys.J.* **517** (1999) 565; Tonry J.L. et al., *Astrophys.J.* **594** (2003) 1; Knop R.A. et al., *Astrophys.J.* **598** (2003) 102;
- [135] Riszuelo A. and Uzan J-P, *Phys.Rev.D* **62** (2000) 083506;
- [136] Rubakov V.A., Sazhin M.V. and Veryaskin A.V., *Phys.Lett.B* **115** (1982) 189;
- [137] Sachs R.K. and Wolfe A.M., *Astrophys.J.* **147** (1967) 73;
- [138] Sahni V., *Phys.Rev.D* **42** (1990) 453;
- [139] Sandvik H., Tegmark M., Zaldarriaga M. and Waga I., *Phys.Rev.D* **69** (2004) 123524;

-
-
- [140] Santos M.S., Proc. of the Conference on Magnetic Fields in the Universe: from laboratories and stars to primordial structures, AIP(NY), eds. de Gouveia Dal Pino E. M., Lugones G. and Lazarian A. arXiv:gr-qc/0504032;
- [141] Sasaki S., Prog.Theor.Phys. **76** (1986) 1036; Mukhanov V.F., Feldman H.A. and Brandenberger R.H., Phys.Rept. **215** (1992) 203;
- [142] Schwarz D.J., Mod.Phys.Lett.A **13** (1998) 2771;
- [143] Seidel E. and Moore T., Phys.Rev.D **35** (1987) 2287; Seidel E., Phys.Rev.D **42** (1990) 1884;
- [144] Seljak U. et al., Phys.Rev.D **71** (2005) 103515; Seljak U., Slosar A. and McDonald P., arXiv:astro-ph/0604335;
- [145] Seljak U. and Zaldarriaga M., Phys.Rev.Lett. **78** (1997) 2054; Kamionkowski M., Kosowsky A. and Stebbins A., Phys.Rev.Lett. **78** (1997) 2058; Pritchard J.R. and Kamionkowski M., Annals Phys. **318** (2005) 2; Zhao W. and Zhang Y., arXiv:astro-ph/0508345;
- [146] Seljak U. and Zaldarriaga M., Astrophys.J. **469** (1996) 437;
- [147] Seto N., Kawamura S. and Nakamura T., Phys.Rev.Lett. **87** (2001) 221103;
- [148] Smarr L., *Source of Gravitational Radiation*, Cambridge University Press (1979); Barker J. et al., Phys.Rev.D **55** (1997) 829; Anninos P. and Brandt S., Phys.Rev.Lett. **81** (1998) 508;
- [149] Smith T.L., Kamionkowski M. and Cooray A., Phys.Rev.D **73** (2006) 023504; Chongchitnan S. and Efstathiou G., Phys.Rev.D **73** (2006) 083511; Smith T.L., Peiris H.V. and Cooray A., Phys.Rev.D **73** (2006) 123503;
- [150] SNAP Collaboration, arXiv:astro-ph/0507458; SNAP Collaboration, arXiv:astro-ph/0507459;
- [151] Stark R.F. and Piran T., Phys.Rev.Lett. **55** (1985) 891;
- [152] Starobinsky A., JETP Lett. **30** (1979) 682; Sasaki S., Prog.Theor.Phys. **76** (1986) 1036; Mukhanov V.F., Feldman H.A., and Brandenberger R.H. Phys.Rept. **215** (1992) 203; Peebles P.J.E., *Principles of Physical Cosmology* Princeton University Press (1993); Peacock J.A., *Cosmological Physics* Cambridge University Press (1999); Lyth D.H. and Riotto A., Phys.Rept. **314** (1999) 1;
- [153] Steinhardt P., Critical Problems in Physics Fitch V.L. and Marlow D.R. (Princeton U.Press, 1997); Dicke R.H. and Peebles P.J.E., in ‘General Relativity: An Einstein Centenary Survey’, ed. by Hawking S.W. & W.Israel (Cambridge U. Press, 1979);

-
- [154] Stewart E.D. and Lyth D.H., *Phys.Lett.B* **302** (1993) 171;
- [155] Sunyaev R. and Zeldovich Y., *Astrophys.Space Sci.* **7** (1970) 3;
- [156] Tashiro H., Chiba K. and Sasaki M., *Class.Quant.Grav.* **21** (2004) 1761;
- [157] Taylor A.C., et al., arXiv:astro-ph/0407148;
- [158] Tegmark M. et al., *Astrophys.J.* **606** (2004) 702; Tegmark M. et al., *Phys.Rev.D* **69** (2004) 103501; Pope A.C. et al., *Astrophys.J.* **607** (2004) 655; Percival W.J. et al., *MNRAS* **327** (2001) 1297;
- [159] Torres D.F., *Phys.Rev.D* **66** (2002) 043522; Nojiri S., Odintsov S.D. and Tsujikawa S., *Phys.Rev.D* **71** (2005) 063004; Caldwell R.R. and Doran M., *Phys.Rev.D* **72** (2005) 043527; Capozziello S., Nojiri S. and Odintsov S.D., *Phys.Lett.B* **634** (2006) 93; Li M.Z., Feng B. and Zhang X.M., *JCAP* **0512** (2005) 002; Zhao W. and Zhang Y., *Class.Quant.Grav.* **23** (2006) 3405; Copeland E.J., Sami M. and Tsujikawa S., arXiv:hep-th/0603057; Apostolopoulos P.S. and Tetradis N., arXiv:hep-th/0604014;
- [160] Tsagas C.G. and Barrow J.D., *Class.Quantum Grav.* **14** (1997) 2539; Tsagas C.G. and Maartens R., *Phys.Rev.D* **61** (2000) 083519;
- [161] Turner M.S., White M. and Lidsey J.E., *Phys.Rev.D* **48** (1993) 4613;
- [162] Xia T.Y., Zhang Y. and Zhao W., in preparation;
- [163] Ungarelli C. et al., *Class.Quant.Grav.* **22** (2005) S955;
- [164] Vikman A., *Phys.Rev.D* **71** (2005) 023515;
- [165] Watanabe Y. and Komatsu E., *Phys.Rev.D* **73** (2006) 123515;
- [166] Wei H., Cai R.G. and Zeng D.F., *Class.Quant.Grav.* **22** (2005) 3189; Wei H. and Cai R.G., *Phys.Rev.D* **72** (2005) 123507; Alimohammadi M. and Mohseni Sadjadi H., *Phys.Rev.D* **73** (2006) 083527;
- [167] Weinberg S., *Gravitation and Cosmology* John Wiley (1972);
- [168] Weinberg S., *Phys.Rev.D* **69** (2004) 023503; Dicus D.A. and Repko W.W., *Phys.Rev.D* **72** (2005) 088302;
- [169] Wetterich C., *Nucl.Phys.B* **302** (1988) 668; Ratra B. and Peebles P.J.E., *Phys.Rev.D* **37** (1988) 3406; Wetterich C., *Astron.Astrophys.* **301** (1995) 321; Caldwell R.R., Dave R. and Steinhardt P.J., *Phys.Rev.Lett.* **80** (1998) 1582;
- [170] Zaldarriaga M. and Harari D.D., *Phys.Rev.D* **52** (1995) 3276; Harari D. and Zaldarriaga M., *Phys.Lett.B* **310** (1993) 96;
- [171] Zaldarriaga M. and Seljak U., *Phys.Rev.D* **58** (1998) 023003; Kesden M., Cooray A. and Kamionkowski M., *Phys.Rev.Lett.* **89** (2002) 011304; Knox

- L. and Song Y.S., Phys.Rev.Lett. **89** (2002) 011303; Hu W., Hedman M.M. and Zaldarriaga M., Phys.Rev.D **67** (2003) 043004;
- [172] Zel'dovich Ya. B. and Novikov I.D., *The Structure and Evolution of the Universe*, The University of Chicago Press (1983);
- [173] Zhang Y., Phys.Lett.B **340** (1994) 18; Zhang Y., Gen.Rel.Grav. **34** (2002) 2155; Zhang Y., Gen.Rel.Grav. **35** (2003) 689; Zhang Y., Chin.Phys.Lett. **20** (2003) 1899;
- [174] Zhang Y., Hao H. and Zhao W., Acta.Astron.Sinica **46** (2005) 1;
- [175] Zhang Y., Yuan Y.F., Zhao W. and Chen Y.T. Class.Quantum Grav. **22** (2005) 1831;
- [176] Zhang Y. Zhao W. Yuan Y.F. and Xia T.Y., Chin.Phys.Lett. **20** (2005) 1871;
- [177] Zhang Y., Er X Z., Xia T.Y., Zhao W. and Miao H.X., Class.Quantum Grav. **23** (2006) 3783;
- [178] Zhao G.B., Xia J.Q., Li M.Z., Feng B. and Zhang X.M., Phys.Rev.D **72** (2005) 123515;
- [179] Zhao W., in preparation;
- [180] Zhao W. and Zhang Y., ACTA ASTRONOMICA SINICA 44 (2003) 273;
- [181] Zhao W. and Zhang Y., arXiv:astro-ph/0508010;
- [182] Zhao W. and Zhang Y., arXiv:astro-ph/0508345 (Phys.Rev.D **74** (2006) 083006);
- [183] Zhao W. and Zhang Y., Phys.Rev.D **73** (2006) 123509;
- [184] Zhao W. and Zhang Y., Class.,Quantum Grav. **23** (2006) 3405;
- [185] Zhao W. and Zhang Y., Phys.Lett.B **640** (2006) 69;
- [186] Zhao W. and Zhang Y., Phys.Rev.D **74** (2006) 043503;
- [187] Zlatev I., Wang L. and Steinhardt P.J. Phys.Rev.Lett. **82** (1999) 896; Steinhardt P.J., Wang L. and Zlatev I., Phys.Rev.D **59** (1999) 123504;
- [188] 王秀莲, 博士论文; 李明哲, 博士论文; 冯波, 博士论文; 朴云松, 博士论文.

致 谢

终于写到了论文的最后一部分。这部分本来应该是很好写的，但是提起笔来却一时不知道应该从哪里开始。面对生活了九年之久的中国科学技术大学，面对朝夕相处的老师和同学，眼泪一再模糊了我的视野。九年的时光，似乎转瞬即逝，入校时的那张迷茫的面孔，至今仍记忆犹新。九年的时光，耗费了我整整三分之一的人生，其中多少酸甜苦辣，多少聚散离别，也许只有自己能够体会到。多少次开怀大笑，多少次雷霆暴怒，多少次志得意满，多少次颓废沮丧，就如同是昨天的事情；九年的时光，帮我开启了人生的大门，面对期许已久的花花世界，却再次陷入了迷茫，带着与九年前一样不舍而又无奈的眼神离开这里朝夕相处的花花草草。临走之前应该有个交待吧，说些什么呢？还是那些虽俗套，但却充满真情，虽罗嗦，但却不可替代的致谢。首先要感谢我的导师张杨老师，六年以来的谆谆教导，手把手地把我带进宇宙学这片广阔的田野。张老师渊博的知识，乐观的生活态度，一直以来都让我羡慕不已。我从来都很羡慕那些能够从工作学习中找到乐趣的人，能够潇洒自如地面对一个又一个的困难，虽经百折仍不改初衷。张老师就是这样的，但是这一点，我一直到现在也没有也没有学到，身为张老师的开山弟子，不觉惭愧不已。另外我还有特别感谢袁业飞老师。袁老师是我们本科时候的班主任老师，他的广义相对论课程讲授的精彩绝伦，使我受益终生。他从不厌其烦的教导，谦虚严谨的风格，平易近人的态度一直都是我学习的榜样。最难以忘怀的是一年前带袁老师课程助教的经历，当时我正处于人生的最低谷，迷茫而不知所措，沮丧而颓废异常，是袁老师不厌其烦的开导和鼓励，伴我走过了那个最为黑暗年代。

还要感谢天体物理中心的褚耀泉教授，朱杏芬教授，冯珑珑教授，王挺贵教授，周又元院士，向守平教授，张家铝院士，程福臻教授，孔旭教授，王俊贤教授，林渲滨副教授，李成博士，董小波博士，肖伟科博士，王宇博士，史菲博士等给予我的指导和帮助。奚玮红，程路华，陆山等系里老师给予我的帮助和支持在此也一并感谢。

感谢天体中心每一位朝夕相处的兄弟姐妹。学习和生活中热烈的讨论使我受益匪浅，朋友间的鼓励和帮助使我的研究工作顺利进行。特别需要感谢的是张伟同学，他对我在计算机方面的帮助使我受益颇多。

最后仅以此文献给我的父母和妻子，他们一起伴我度过了多少风风雨雨，又历经了多少艰难坎坷。他们的支持和鼓励是我前进的动力，而对他们的回报之心则成为我生活的希望所在。祝他们永远幸福，安康。

攻读学位期间的论文发表情况

1. **Multi-pulsar cross-correlation method for detecting cosmic gravitational waves**
W.Zhao* and Y.Zhang, ACTA ASTRONOMICA SINICA 44 (2003) 273
2. **A test of the MOND theory and the model of dark matter**
Y.Zhang, W.Zhao* and J.L.Han, Chinese Astronomy and Astrophysics 28 (2004) 9
3. **宇宙中的几类引力波源**
张杨, 赵文*, 袁业飞, 紫金山天文台台刊 23 (2004) 3
4. **Relic gravitational waves in the accelerating universe**
Y.Zhang, Y.F.Yuan, W.Zhao*, Y.T.Chen, Class.Quant.Grav. 22 (2005) 1383
5. **Numerical spectrum of relic gravitational waves in accelerating universe**
Y.Zhang, W.Zhao*, Y.F.Yuan, T.Y.Xia, Chin.Phys.Lett. 20 (2005) 1817
6. **An approximate analytic formula for the polarization of cosmic microwave background radiation**
Y.Zhang, H.Hao, W.Zhao*, Chinese Astronomy and Astrophysics 29 (2005) 250
7. **The state equation of Yang-Mills field dark energy models**
W.Zhao* and Y.Zhang, Class.Quant.Grav. 23 (2006) 3405
8. **Exact analytic spectrum of relic gravitational waves in accelerating**

universe

Y.Zhang, X.Z.Er, T.Y.Xia, W.Zhao* and H.X.Miao, *Class. Quant. Grav.* 23 (2006) 3783

9. **Quintom models with an equation of state crossing -1**

W.Zhao* and Y.Zhang, *Phys.Rev.D* 73 (2006) 123509

10. **Relic gravitational waves and their detection**

W.Zhao* and Y.Zhang, *Phys.Rev.D* 74 (2006) 043503

11. **Coincide problem in YM field dark energy models**

W.Zhao* and Y.Zhang, *Phys.Lett.B* 640 (2006) 69;

12. **Analytic approach to the CMB polarizations generated by relic gravitational waves**

W.Zhao* and Y.Zhang, *Phys.Rev.D* 74 (2006) 083006;

13. **Yang-Mills dark energy coupled with matter and radiation**

T.Y.Xia, Y.Zhang and W.Zhao*, *Class. Quant. Grav.* 24 (2007) 3309

14. **Relic gravitational waves and CMB polarization in accelerating universe**

Y.Zhang, W.Zhao*, X.Z.Er, H.X.Miao and T.Y.Xia, *Proceeding of the Third International ASTROD Symposium, Beijing, (2006)*

个人简历

姓 名：赵文
性 别：男
籍 贯：山西省临猗县
民 族：汉族
政治面貌：团员
出生日期：1980.07.21
毕业院校：中国科学技术大学
专 业：天文学
指导老师：张杨 教授
研究领域：宇宙暗能量，引力波，微波背景辐射，暴涨宇宙学
毕业日期：2006.12
电子信箱：wzhao7@mail.ustc.edu.cn
个人主页：<http://mail.ustc.edu.cn/wzhao7/>

个人经历：

1998.09-2001.07：就读于中国科学技术大学地球与空间科学系；
2001.09-2002.07：就读于中国科学技术大学天文与应用物理系；
2002.09-2006.12：保送在中国科学技术大学天体物理中心攻读博士学位