

中国科学技术大学 博士学位论文



宇宙大尺度结构及引力透镜 的一些研究

作者姓名：杨毅彬
学科专业：天体物理
导师姓名：冯珑珑 教授
完成时间：二〇〇八年四月二日

University of Science and Technology of China
A dissertation for doctor's degree



Some Researches on The Large Scale Structure and Gravitational Lensing

Author's Name : Yibin Yang

Speciality : Astrophysics

Supervisor : Prof.Longlong Feng

Finished Time : April 2nd, 2008

中国科学技术大学学位论文原创性和授权使用声明

本人声明所呈交的学位论文，是本人在导师指导下进行研究工作所取得的成果。除已特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含任何他人已经发表或撰写过的研究成果。与我一同工作的同志对本研究所做的贡献均已在论文中作了明确的说明。

本人授权中国科学技术大学拥有学位论文的部分使用权，即：学校有权按有关规定向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅，可以将学位论文编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文。

保密的学位论文在解密后也遵守此规定。

作者签名：_____

年 月 日

摘 要

本文主要介绍了我们对宇宙大尺度结构的统计分析方法和对引力透镜的一些研究成果。宇宙大尺度结构和引力透镜是当前天文学研究中非常前沿的课题。它们对于理解宇宙的物质分布和演化具有极其重要的意义。全文共分为六章。

在第一章中我们简单的介绍了宇宙大尺度结构的相关背景知识，一共分为四个部分。我们分别介绍了标准宇宙学模型、结构形成理论、大尺度结构的统计研究以及大尺度结构的数值模拟及观测现状。

第二章中，我们介绍了引力透镜的基本理论以及它的数值算法。我们给出了引力透镜的基本参数和方程，介绍了临界曲线和焦散曲线的概念。并讨论了引力透镜的主要应用。此外我们简单的介绍了强引力透镜的数值算法。包括面密度，偏转角偏转势和临界曲线的数值计算技术。

第三章中我们介绍了小波方法在天体物理中的几个应用，包括密度场的小波分解，以及小波去噪声方法。

第四章中我们基于小波多尺度分析方法，提出了一种可用于计算三维数值模拟样本面密度的平滑算法。并引入了数学上新近发展的基于离散小波变换的去噪方法来去除多余的噪声。为了检验去噪算法的效果，我们分别处理了几组高斯噪声和泊松噪声数据，结果表明小波去噪方法能够非常有效的去除高斯噪声和泊松噪声，大大提高了数据的信噪比。随后我们利用该平滑算法研究了两组不同质量解析度的引力透镜数值模拟样本，样本采用了暗物质晕的等温椭圆模型，使用蒙特卡罗方法生成。计算结果表明此算法能够在很高的精度上构建引力透镜模拟样本的面密度分布轮廓，由面密度计算出来的透镜的临界曲线和焦散曲线也能较好地 and 理论曲线吻合，结果是令人满意的。同时比较了三组不同的小波基的计算结果，包括Daub4, Daub6和3阶B-spline函数，给出了最优的选择。最后我们还计算了一组N体数值模拟样本产生的引力透镜样本的临界曲线，计算结果表明数值模拟产生的子结构对透镜的临界曲线基本没有影响，然而物质流对临界曲线的影响却是很明显的。

在计算包含大量数据的样本的功率谱的时候，人们通常先将粒子的质量分配到网格上，然后利用快速傅立叶变换算出其功率谱。但是这一过程会不可避

免的带来重影效应，算得的功率谱在接近Nyquist频率的地方会带来很大的偏差。第五章中，基于Beylkin方法，我们给出了一种能够精确测量包含大量数据的样本的功率谱的算法。我们比较了传统的质量分配格式诸如NGP,CIC以及TSC和我们的算法算得的功率谱。我们采用了两种不同的尺度函数Daub6和3阶B-spline函数，样本则采用了泊松样本和Virgo数值模拟样本。结果表明B-spline函数计算出的功率谱能够和理论值吻合的相当好。它的优势在于不加入任何修正就可以精确的计算出功率谱。即使在接近Nyquist频率的尺度，它也能够很好的去除重影效应。

最后在第六章，我们总结了全文并对今后的研究方向提出了一些展望。

关键词： 中国科技大学, 学位论文

ABSTRACT

This thesis mainly focuses on some of our studies on the statistical study of the large-scale structure in the universe and gravitational lensing, which are of the most active issues in the modern astrophysics. The studies on them are very important for understanding the matter distribution of the universe and the evolution of the Universe. This thesis consists of six chapters.

First, we introduce some background knowledge of the large structure in the universe in Chapter 1. We briefly discuss the Standard Cosmology model, structure formation theories, the statistical analysis and the observations and numerical simulations of large-scale structure.

In Chapter 2, we introduce the basic theory of the gravitational lensing. We discuss the basis equations of gravitational lensing and its application in astrophysics. We also introduce the numerical methods in gravitational lensing, including how to compute the surface density, lensing potential, deflection angel, critical curves and caustics of lens.

In Chapter 3, we introduce the application of wavelet methods in astrophysics, including the multi-resolution analysis of density fields and the wavelet denoising method based on DWT(discrete wavelet transform).

In Chapter 4, we develop a new smoothing algorithm for computing surface densities from 3D numerical simulation samples. This algorithm is based on MRA (Multi-resolution Analysis) wavelet method. We test the algorithm by applying it to two gravitational lensing simulation samples which are generated by monte-carlo method and have different mass resolution, the results show our algorithm can successfully reconstruct the surface density of lens. We also compute the critical curves and caustics of lens samples, the results show that they can fit the theoretic curves very well. We test three different wavelet bases and compare them, including Daub4, Daub6 and B-spline 3th. Our algorithm is very fast and is suitable for high resolution N-body simulations.

The essential step in statistical analysis of a large data set in Fourier space using

ABSTRACT

FFT is to make assignment onto mesh. It has been noted such a procedure brings up the aliasing effect in Fourier space. Furthermore, the resulting power spectrum estimation may be biased from the true power spectrum. Actually, the power spectrum measured with FFT is a convolution of the true power spectrum and window function specified by mass assignment. In Chapter 5, based on the Beylkin's unequally spaced Fast Fourier Transformation technique, we introduce a new precision method for extracting the true power spectrum in a large data set. Numerically, we compare the traditional mass assignment schemes with the new method using Daub6 and 3rd-order B-spline scaling functions. The results show that B-splines function could be an optimal choice for mass assignment in sense that (1) it has a compact support in real space and thus yields an efficient algorithm (2) without any extra corrections, it leads to accurate recovery of the true power spectrum with errors less than 5% at $k \leq k_N$. It is hopeful that such a method could be applied to higher order statistics in Fourier space and enable us to have a precision modeling of the non-Gaussian features in the large scale structure of the universe.

Finally, the summary and future discussions are presented in Chapter 6.

Keywords: USTC, Thesis

目 录

摘要	I
ABSTRACT	III
目录	V
第 1 章 引言	1
1.1 标准宇宙学模型	1
1.1.1 宇宙学简史	1
1.1.2 宇宙学原理和RW度规	2
1.1.3 宇宙的各个组成成分	3
1.2 结构形成理论	4
1.2.1 线性扰动的Jeans理论	4
1.2.2 非线性扰动的球塌缩模型	6
1.2.3 暗物质的暗晕模型	7
1.3 宇宙大尺度结构的统计方法	8
1.3.1 两点相关函数	9
1.3.2 功率谱	10
1.3.3 高阶统计量	12
1.4 大尺度结构的观测及数值模拟	13
1.4.1 主要的观测巡天项目	14
1.4.2 数值模拟	15
第 2 章 引力透镜基本理论及数值算法	17
2.1 引言	17
2.2 引力透镜的基本理论	17
2.2.1 基本假设	18
2.2.2 引力透镜基本参数和方程	18
2.2.3 临界曲线和焦散曲线	22
2.2.4 引力透镜的应用	23

2.3 强引力透镜的数值算法	26
2.3.1 透镜面密度的常用算法	26
2.3.2 偏转角和偏转势的数值计算	29
2.3.3 临界曲线和焦散曲线的确定	30
2.3.4 利用插值提高计算精度,	30
第3章 小波方法介绍	33
3.1 引言	33
3.2 密度场的多尺度小波分析	33
3.2.1 尺度函数及小波函数	33
3.2.2 小波多尺度分析	36
3.2.3 紧支撑正交基	36
3.2.4 密度场的小波多尺度分析	38
3.3 小波方法在去噪中的应用	39
第4章 基于小波方法的平滑和去噪算法在引力透镜中的应用 ...	43
4.1 引言	43
4.2 算法介绍	44
4.2.1 小波平滑算法	44
4.2.2 去噪声算法	46
4.3 数值检验	48
4.3.1 去噪算法的检验	48
4.3.2 蒙特卡洛方法生成的透镜样本	48
4.3.3 N-body数值模拟样本	52
4.4 结论	53
第5章 小波方法在大尺度结构统计中的应用	65
5.1 引言	65
5.2 基于Beylkin算法的不规则数据的快速傅立叶变换	67
5.3 利用FFT计算傅立叶功率谱	70
5.3.1 利用B-spline基函数质量分配	70
5.3.2 密度涨落的功率谱	73

目 录

5.4 数值检验	75
5.4.1 泊松样本	76
5.4.2 Virgo数值模拟样本	80
5.5 总结	83
第 6 章 总结与展望	87
附录 基于暗晕模型的功率谱拟合公式	89
参考文献	91
致谢	97
在读期间发表的学术论文与取得的研究成果	99

插图

2.1	引力透镜示意图	19
2.2	剪切因子和会聚因子对放大率所起的作用	22
2.3	RCS和CMB对 Ω_m 和 σ_8 的限制(Contaldi et al. 2003)	25
2.4	CIC插值算法的示意图, 位于实线上的点是网格格点, 虚点上点 为样本粒子。	27
2.5	TSC插值算法的示意图, 位于实线上的点是网格格点, 虚点上点 为样本粒子。	28
2.6	确定像平面上临界曲线的方法。取自Bartelmann 2003。	31
2.7	数值计算出的采用等温椭球模型的引力透镜样本的临界曲线。 . .	32
2.8	数值计算出的采用等温椭球模型的引力透镜样本的焦散曲线。 . .	32
3.1	Daub4小波的尺度母函数 $\phi(x)$ 和小波母函数 $\psi(x)$ 及其对应的傅立 叶变换的模平方。引自Yang et al. 2001	38
3.2	左图为离散小波变换的过程示意图。右图为离散小波变换中每一 步输出数据的组成。(Remeo, et al. 2003)	40
4.1	包含噪声强度为1的高斯噪声数据样本去噪前后的对比。	49
4.2	包含噪声强度为0.05的高斯噪声数据样本去噪前后的对比。 . . .	50
4.3	包含泊松噪声的数据去噪前后的对比。	55
4.4	低质量解析度样本的面密度 κ 及其相对误差随椭圆半径 R 的变化。 实线是理论值, 点是用平滑算法算得的. 所使用的小波基和样本粒 子数标注在每张图上.	56
4.5	用Daub4小波基算得的低质量解析度样本的面密度 κ 及其相对误 差随椭圆半径 R 的变化, 但没有经过去噪声处理.	57
4.6	粒子数为 5×10^4 的样本的临界曲线和焦散曲线. 黑色曲线是理论 曲线, 黄色和红色曲线分别是样本的临界曲线和焦散曲线. 所使用 的小波基和样本粒子数标注在图上.	57

4.7	低质量解析度蒙特卡罗样本的临界曲线和焦散曲线. 黑色曲线是理论曲线, 黄色和红色曲线分别是样本的临界曲线和焦散曲线. 使用的小波基和样本粒子数标注在每张图上.	58
4.8	高质量解析度样本的面密度 κ 及其相对误差随椭圆半径 R 的变化. 实线是理论值, 点是用平滑算法算得的. 使用的小波基和样本粒子数标注在每张图上.	59
4.9	高质量解析度蒙特卡罗样本的临界曲线和焦散曲线. 黑色曲线是理论曲线, 黄色和红色曲线分别是样本的临界曲线和焦散曲线. 使用的小波基和样本粒子数标注在每张图上.	60
4.10	用SPH3D方法算得的面密度 κ 及其相对误差随椭圆半径 R 的变化, 引自Li et al. 2006. 实线是理论值, 点是用SPH平滑算法算得的. 样本粒子数标注在图上.	61
4.11	用SPH3D方法算得的面密度的临界曲线和焦散曲线引自Li et al. 2006. 蓝色和红色曲线分别是理论的临界曲线和焦散曲线. 黑色曲线是样本的临界曲线.	61
4.12	N体数值模拟的星系团粒子在相空间所找到的物质流, 引自Li et al. 2006. 星系团中心位于图的中央.	62
4.13	N体数值模拟星系团透镜样本1和样本2的临界曲线, 分别对应着紫色曲线和黄色曲线. 样本2在样本1中剔除了子结构粒子. . . .	62
4.14	N体数值模拟星系团透镜样本1和样本3的临界曲线, 分别对应着紫色曲线和红色曲线. 样本3在样本1中剔除了子结构和物质流粒子.	63
5.1	不同的质量分配函数在傅立叶空间中的形状, 包括NGP,CIC,TSC, Daub6,BL 3rd. 从左到右三组曲线分别对应着 $W^2(\xi + 1)$, $W^2(\xi)$ 和 $W^2(\xi - 1)$	72
5.2	迭代方法修正前的功率谱和修正后的功率谱(Jing 2005). 计算用的网格数分别为 64^3 和 256^3 , k_N^{64} 是 64^3 网格的Nyquist频率.	76
5.3	泊松样本的功率谱, 使用了 256^3 网格计算, 所使用的计算格式标注在各张图上.	77
5.4	泊松样本的功率谱, 使用了 512^3 网格计算, 所使用的计算格式标注在各张图上.	78

5.5	用3阶B-spline算得的泊松样本的功率谱的相对误差。	79
5.6	Virgo数值模拟样本的功率谱, 使用了 256^3 网格计算, 所使用的计算格式标注在各张图上。	81
5.7	Virgo数值模拟样本的功率谱, 使用了 512^3 网格计算, 所使用的计算格式标注在各张图上。	82
5.8	用3阶B-spline算得的Virgo数值模拟样本的功率谱的相对误差。 .	84
5.9	Virgo数值模拟样本的功率谱, 使用了 512^3 网格, 分别使用了3,5,7阶B-spline函数进行计算。因为结果差别很小, 所以几乎重合。	85

第1章 引言

两百多年前德国著名古典哲学家康德说过这样一段话：“有两种东西，我们愈时常愈反复加以思维，它们就给人心灌注入时时在翻新，有加无已的赞叹和敬畏：头上的星空和内心的道德法则。”从远古时期，人类便开始了对宇宙的探索。然而真正将宇宙作为一个整体进行研究却是在Einstein建立了广立相对论之后。这一章我们将简要介绍宇宙大尺度结构的一些基本背景。

1.1 标准宇宙学模型

1.1.1 宇宙学简史

爱因斯坦建立的广义相对论为宇宙学奠定了一个坚实的基础，而哈勃的划时代发现标志着现代宇宙学的真正确立。1929年哈勃发现大部分的星云其实是星系，通过分析24个相近邻星系的光谱发现它们都在远离我们而退行，退行的速度 v 正比于星系离我们的距离 d 。今天这一规律被称为哈勃定律并将比例系数记为 H_0 ：

$$v = H_0 d \quad (1.1)$$

哈勃的发现颠覆了人类数千年的传统宇宙观。在此之前，人们一直以为宇宙是永远静止的。而哈勃的这一发现却告诉我们宇宙正在膨胀。同时哈勃定律预示如果目前所有的星系都在彼此远去，那么在有限的时间以前，这些天体必然会聚集在一个极小的空间内。事实上，哈勃定律为日后的热大爆炸宇宙学奠定了最重要的观测证据。

在二十世纪四十年代末Gamow 提出大爆炸模型：在遥远的宇宙早期，宇宙是一个高密度高温度的火球，既没有星系，也没有恒星，时间越早不仅密度越高而且温度也越高，并预言了原初大爆炸的热火球由于膨胀冷却会遗留一些剩余的热辐射，他计算出这个背景光子温度为大约10K左右。1965年Penzias 和Wilson发现了这个大爆炸模型所预言的全天都存在的各向同性的辐射（微波背景辐射）。这一发现大大地支持了大爆炸模型。微波背景辐射的发现是哈勃发现宇宙在膨胀之后的宇宙学的第二个巨大的成就。这之后的三十年，天文学家使用各

种观测设备在各个波段对微波背景辐射进行了仔细的高精度的测量，包括广为人知的Cobe卫星和WMAP卫星的观测。

在发现微波背景辐射的同时，人们发现氢元素的丰度测量在宇宙的各个天体中其值都在24%左右，这个值远远超过了恒星内部的热核反应所能提供的氢丰度。然而大爆炸宇宙模型的热历史正好提供了轻元素自然产生和结束的环境。1964年，Hoyle和Taylor根据大爆炸宇宙的热演化史作了详细计算。他们的计算结果表明，由大爆炸宇宙学的核合成理论所产生的氢丰度为23 ~ 25%。由于大爆炸宇宙学的核合成理论所造成的轻元素丰度是和地点无关的，所以自然解释了氢元素丰度测量。后来Wagoner等人又计算了其他轻元素的丰度，也和观测吻合，这充分标志着热大爆炸宇宙学的巨大成功。

在这些工作的基础上，人们建立了现在被广泛接受的标准宇宙学模型。标准模型成功的解释了哈勃膨胀，微波背景辐射，宇宙中的元素组成等观测事实。它是牢固地建立在天文观测基础上的一门科学。

1.1.2 宇宙学原理和RW度规

宇宙学原理假设宇宙在空间大尺度上是均匀并且各向同性的。所谓均匀，是指空间不同点上的度规应该没有区别；而各向同性是指从一点度量不同的方向应该没有区别。这一假设已经被大尺度星系巡天，X射线源的分布，深度射电星系巡天以及类星体的分布等观测所支持，尤其是宇宙微波背景辐射的高度各向同性（各向同性程度 $\sim 10^{-5}$ ）是宇宙学原理的强有力支持。当然，小尺度上宇宙是不均匀的，既有星系，星系团这种高密度区，也有直径高达几十个Mpc的巨大空洞。不过在大尺度（尺度大于 $300h^{-1}\text{Mpc}$ ）时，物质的分布很好的满足宇宙学原理。

宇宙学原理告诉我们在宇宙中没有特殊的点，任何位置在本质上都是等价的。数学上可以证明，如果宇宙学原理成立，那么我们的宇宙的时空结构就可以用一个非常简单的度规来描述，这就是Roberston-Walker度规，简称RW度规。

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\psi^2 \right) \quad (1.2)$$

等式中 r, θ, ψ 是共动坐标， t 为宇宙时， k 是曲率因子，代表着宇宙的几何属性，可以取-1,0,1，分别对应开放，平坦，和封闭的宇宙。 $a(t)$ 是尺度因子，描述了宇宙的动力学演化。Roberston-Walker度规简化了宇宙的时空度规，使之仅含有一个未知变量 $a(t)$ 和一个未知常数 k 。

1.1.3 宇宙的各个组成成分

在Roberston-Walker 度规下解Einstein 场方程，我们可以得到Friedmann 方程。

$$8\pi G\rho = 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{3kc^2}{a^2} - \Lambda \quad (1.3)$$

$$\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3\frac{p}{c^2}) = -\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\Lambda}{3} \quad (1.4)$$

其中 G 是万有引力常数， ρ 是宇宙平均密度， p 是压力， Λ 是宇宙学常数。这组方程决定了宇宙尺度因子 $a(t)$ 的演化行为。进一步，如果我们定义 $H = \dot{a}/a$ ，可知 H 具有时间倒数的量纲，它描述了宇宙在当前时刻的膨胀速率。现在的 H 值称为哈勃常数。现在的观测一般认为 $H_0 \simeq 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}$ 。定义临界密度，即 $k = 0$ 时的宇宙的密度：

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} \quad (1.5)$$

则宇宙物质密度可以由参数 $\Omega_m = \rho/\rho_c$ 来表示。同样类似的，我们可以将宇宙学常数和曲率因子都表示成密度参数的形式： $\Omega_\Lambda = \Lambda/3H^2$, $\Omega_k = -k/(aH)^2$ 。这样，Friedmann 方程(1.3) 就可以化简为：

$$1 = \Omega_m + \Omega_k + \Omega_\Lambda \quad (1.6)$$

这样，宇宙的基本演化就可以由几个基本参数 Ω_m ， Ω_Λ ， Ω_k ，哈勃参量 H 来确定了。其中 Ω_m ， Ω_Λ 确定了我们所处宇宙的演化历程：它在加速膨胀还是在均匀膨胀，抑或是减速膨胀并最终塌缩。而 Ω_k 决定了宇宙的几何特征。哈勃常数 H_0 的倒数则给出了宇宙的年龄。

Ω_m 代表着非相对性物质在宇宙中所占的比例。非相对性物质是重子物质和暗物质组成的。重子物质指的是组成我们日常世界的质子和中子及电子。我们生活的地球以及太阳，我们用天文望远镜观测到的恒星，星系，星系团等等都是由重子物质构成的。有几种不同的方法来确定重子物质的比率。可以通过它们在遥远物体的光谱中留下的吸收特征，例如星系际介质(IGM) 在类星体光谱中产生的Ly α 森林来辨认它们。不同密度参数的重子物质将产生不同的吸收。由它们推得重子比率($z \simeq 3$):

$$\Omega_{Ly\alpha} \simeq 0.03. \quad (1.7)$$

宇宙早期的轻元素核合成过程(BBN) 强烈依赖于重子的密度比率。由于 Ω_b 是合成各元素的原料，不同的 Ω_b 会形成不同的 H/D , H/He 元素丰度比。根据观测到

的轻元素的丰度比可以推得重子比率为：

$$\Omega_{BBN} \simeq 0.044. \quad (1.8)$$

Ω_Λ 则代表着暗能量。暗能量是近几年来观测宇宙学最重要的发现之一。综合各种观测，包括宇宙微波背景辐射温度各向异性功率谱、宇宙大尺度结构、Ia型超新星、Ly- α forest功率谱等观测数据，人们给出了宇宙学的标准模型： Λ CDM模型。该模型告诉我们：宇宙中的物质部分只占大约30%，其中重子物质只有约4%。而大约70%的组分是暗能量，它直接推动了现在宇宙的加速膨胀。

1.2 结构形成理论

根据微波背景辐射的观测事实，证实了宇宙在大尺度上是均匀各向同性的。然而现实中的宇宙是有结构存在的，小尺度上有恒星，矮星系等结构，较大尺度上星系及星系团结构的存在，甚至有更大尺度上的超团，空洞等。这些结构是怎么在均匀的原初宇宙中形成的？大尺度和小尺度的结构哪一个先形成？这些都是结构形成理论所要研究的问题。关于结构形成有很多理论模型，不过基本都建立在引力不稳定性上。原初的微小扰动在引力的作用下逐渐放大而形成各种结构。

研究结构形成包括两个方面的内容，一是原初密度扰动的特性，二是在膨胀宇宙的背景之下密度扰动的演化过程。标准宇宙学给出了密度扰动的演化的宇宙背景，暴涨理论则给出了原初扰动的产生机制。在讨论扰动演化的时候，一般分为线性增长和非线性增长两个阶段进行讨论。

1.2.1 线性扰动的Jeans理论

为了解释恒星和行星的形成，Jeans在1902年论证了气体云中存在不稳定性。这种不稳定性现在被称之为Jeans不稳定性，它已经成为了星系和大尺度结构形成的标准理论。

Jeans理论表明在均匀而且各向同性的流体中，密度和速度小扰动 $\delta\rho, \delta v$ 可以随着时间演化。在线性阶段，我们认为密度涨落远远小于1，这样在讨论尺度范围远小于视界的密度涨落的时候，我们可能直接应用牛顿理论来讨论，不需要借助广义相对论。

在牛顿理论下，用 ρ 代表流体密度，用 p 代表压强，用 $\mathbf{v}$ 代表局域速度， ϕ 代表引力势，那么主导流体运动的三个基本方程为：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \phi = 0 \quad (1.10)$$

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho \quad (1.11)$$

以上三个方程分别为连续性方程，欧拉方程和泊松方程。我们考虑小扰动

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 \quad (1.12)$$

$$\mathbf{v} = v_0 + \mathbf{v}_1 \quad (1.13)$$

$$p = p_0 + p_1 \quad (1.14)$$

$$\phi = \phi_0 + \phi_1 \quad (1.15)$$

这里的下标0代表没有扰动时的值。我们要研究的是密度反差 $\delta(\mathbf{r}, t) = \rho_1/\rho_0$ 的演化。将这些扰动量代入到上面的流体方程组中，忽略二级小量可以得到 δ 满足方程：

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} - c_s^2 \nabla^2 \delta - 4\pi G \rho_0 \delta = 0 \quad (1.16)$$

其中对介质中的声速有 $c_s^2 \equiv \partial p / \partial \rho$ 。如果我们对 δ 作Fourier变换，可以得到 k 空间中的密度涨落 δ_k 满足的方程：

$$\ddot{\delta}_k + (c_s^2 k^2 - 4\pi G \rho_0) \delta_k = 0 \quad (1.17)$$

其通解为

$$\delta_k(t) = A \exp(\pm i \omega t), \omega^2 = c_s^2 k^2 - 4\pi G \rho_0 \quad (1.18)$$

上式中解的正负号分别对应扰动的增长和衰减模式。当 $\omega^2 = 0$ ，则相应的给出了波数的临界值

$$k_J = \left(\frac{4\pi G \rho_0}{c_s^2} \right)^{1/2} \quad (1.19)$$

当 $k > k_J$ 的时候，扰动将会以短波振荡的形式存在；而当 $k < k_J$ 的时候， ω 为虚数， δ 随时间按照指数增长。扰动演化对应着由引力引起的长波扰动增长。两种情况的分界点 k_J 对应的波长叫做Jeans波长 λ_J ：

$$\lambda_J = \frac{2\pi}{k_J} = \left(\frac{\pi c_s^2}{G \rho_0} \right)^{1/2} \quad (1.20)$$

Jeans波长由两个因素所决定：介质的密度和声速。在这个尺度，声波传过物体和物体塌缩的自由下落时标相同。当尺度小于Jeans长度的时候，内部扰动不会增长。只有尺度大于Jeans波长的扰动才会增长。和Jeans波长对应的扰动区域可以由直径为 λ_J 的球体来表示，它所包含的质量为：

$$M_J = \frac{4\pi G \rho_0}{3} \left(\frac{\lambda_J}{2}\right)^3 \quad (1.21)$$

这被称之为Jeans质量。当密度扰动区域的总质量大于Jeans质量的时候物质就会结团，反之则涨落只能引起声波振荡而不能成团。

以上的讨论没有考虑宇宙的膨胀，事实上，在膨胀宇宙的背景下，Jeans判据其实也是成立的。不过这时候要考虑上宇宙的膨胀 $a(t)$ ：

$$\lambda_J = \frac{2\pi}{k_J} = \frac{1}{a(t)} \left(\frac{\pi c_s^2}{G \rho_0}\right)^{1/2} \quad (1.22)$$

1.2.2 非线性扰动的球塌缩模型

当线性密度扰动演化到一定的程度的时候(通常认为 $\delta \sim 1$)，就进入到了非线性演化阶段。研究非线性演化的最简单的模型就是球塌缩模型。我们简单的介绍一下。我们考虑物质为主的宇宙($\Omega_m = 1$)中的一个物质球，根据牛顿理论，我们有：

$$\ddot{R} = -GM/R^2 \quad (1.23)$$

, 将上式对时间积分，可以得到：

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dR}{dt}\right)^2 - \frac{GM}{R} = \epsilon \quad (1.24)$$

上式中的 ϵ 为一个积分常数，代表系统的比能。容易看出，只能当 $\epsilon < 0$ 的时候，球才会塌缩。因此固有半径和时间之间的关系为：

$$R = R_c(1 - \cos \theta) \quad (1.25)$$

$$t = t_c(\theta - \sin \theta) \quad (1.26)$$

, 其中 θ 为参量， R_c 是球能够膨胀到的最大半径， $t_c\pi$ 是膨胀到最大尺度的时间。对于 $\theta \ll 1$ 之时，将上面两式展开至 θ^5 ，我们便可以得到在小 t 的时候，半径随时间的变化关系：

$$R \simeq \frac{A}{2} \left(\frac{6t}{t_c}\right)^{2/3} \left[1 - \frac{1}{20} \left(\frac{6t}{t_c}\right)^{2/3}\right] \quad (1.27)$$

可以计算出球的密度为：

$$\rho = \frac{3M}{4\pi R^3} \approx \frac{1}{6\pi G t^2} \left[1 + \frac{3}{20} \left(\frac{6t}{t_c} \right)^{2/3} \right] \quad (1.28)$$

因为是在物质为主的宇宙之中，所以宇宙时和哈勃常数之间有如下关系：

$$t = \frac{2}{3H} \quad (1.29)$$

,因子 $1/(6\pi G t^2)$ 就是宇宙物质密度 $\rho_0 = \rho_{crit}$. 根据密度涨落的定义，括号中后面一项是密度涨落。因此物质球内的密度涨落演化为：

$$\delta \simeq \frac{3}{20} \left(\frac{6t}{t_c} \right)^{2/3} \quad (1.30)$$

所以在早期，物质球的膨胀和哈勃膨胀速度是一致的， $a \propto t^{2/3}$ ，密度扰动的增长正比于哈勃膨胀 a 。

当 $\theta = 0$ 的时候，密度扰动逐渐增长。当 $\theta = \pi$ 时，物质球的膨胀达到了极大值，并开始脱离宇宙膨胀而收缩，而当 $\theta = 2\pi$ 的时候，如果我们只考虑引力的作用，那么物质球会塌缩到一个奇点。这时候对应的线性密度扰动为 $\delta_{lin} = (3/20)(12\pi)^{2/3} \simeq 1.69$ 。但是通常并不认为物质球会塌缩到奇点，当它收缩到最大半径的一半的时候，会达到维里化。这时候动能 K 和势能 V 之间的关系为 $V = -2K$ ，一般认为此时就是引力塌缩的终点，对应 $\theta = 3\pi/2$ ， $\delta_{lin} \simeq 1.58$ 。对于其他宇宙学参数的模型， δ_{lin} 所受的影响并不大，实际上它对宇宙学参数的依赖很弱。

1.2.3 暗物质的暗晕模型

暗物质问题是天体物理学中最重要的问题之一。对旋涡星系的旋转曲线的测量是暗物质存在的最直接的证据。同时对星系和星系团的质光比以及引力透镜效应的研究也有力地证明了暗物质的存在。人们推测宇宙中90%以上的物质都可能是不发光的暗物质。因此暗物质决定了宇宙大尺度结构和星系的形成演化。

尽管已经有诸多的观测证据有力的支持暗物质的大量存在，但是人们对暗物质的性质仍然所知甚少。一般把暗物质分成冷暗物质和热暗物质。目前普遍认为冷暗物质是主要的，热暗物质只占相当小的比例，或者完全不重要。现在占主导地位的冷暗物质模型认为冷暗物质只参加引力相互作用，它和光子没有耦

合,因此它的扰动增长得更快,当重子物质开始增长的时候,暗物质已经形成了势阱,这会大大加快重子物质的扰动增长,从而形成现在的结构。在用N-body方法对暗物质的演化进行数值模拟时人们发现多数暗物质会聚集在一起形成暗晕(halo)。重子气体会掉入到这些暗晕的势阱当中形成结构。因此要想讨论星系的形成,首先就要研究这些暗晕的性质。

在研究暗物质形成的暗晕中,最重要的是以下几个问题:(1)暗晕中的暗物质的分布即暗晕的密度轮廓。(2)不同质量的暗晕在宇宙中的质量分布函数。(3)重子物质相对于暗晕的分布,即偏袒机制。

对第一个问题,即暗晕的密度轮廓,目前通常采用的是NFW分布(Navarro,Frenk & White 1997):

$$\frac{\rho_{DM}(r)}{\rho_{crit}} = \frac{\delta_c}{(r/r_s)^\alpha (1 + r/r_s)^\beta} \quad (1.31)$$

上式中 ρ_{crit} 是宇宙的临界密度, δ_c 是暗晕的特征密度扰动, r_s 是暗晕的标度半径。参数 $\alpha = 1, \beta = 2$ 。这个公式是在数值模拟的基础上得到的普适公式,和宇宙的初始条件没有关系。从公式中可以看出密度轮廓只和暗晕的质量有关系。

暗晕的质量分布函数通常采用Press-Schechter质量函数(Press & Schechter 1974):

$$N(M, z)dM = -\frac{\bar{\rho}}{M} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\delta_c}{\delta^2(M, z)} \frac{d\delta(M, z)}{dM} \exp\left(-\frac{\delta_c^2}{2\delta^2(M, z)}\right) dM \quad (1.32)$$

这个质量函数和数值模拟的结果是相吻合的。

对于偏袒方案,要分为两种情况。一种是暗晕的分布对于整个物质场的偏袒,这种偏袒一般在考虑暗晕模型的性质时所关心。另外一种为可见物质(诸如星系) δ_{galaxy} 对暗物质 δ_{mass} 的偏袒。这在研究星系分布和成团性的时候很重要。最初一般采用线性偏袒方案,即 $\delta_{galaxy} = b\delta_{mass}$,其中b为偏袒因子(Peebles 1980, Kaiser 1987)。但线性偏袒只在大尺度上比较准确,后来又提出了非线性偏袒方案。

1.3 宇宙大尺度结构的统计方法

我们当然不可能知道宇宙中任何一处的结构,因此在对宇宙大尺度结构的研究之中,我们通常使用统计方法来进行研究他们的整体的性质。统计研究中经常使用的一个量是系综平均,也就是指对某个统计量进行多次测量后所取的

平均。然而我们所处的宇宙只有一个，我们是不可能对它进行多次测量的。因此我们需要用到各态历经(ergodic)假设。各态历经是指我们的宇宙的空间平均等于其系综平均。对于连续谱的高斯随机场而言，各态历经假设是成立的。因此我们就可以用空间平均来替代系综平均了。在后文中，如果没有特别指出的话，一般系综平均就是指空间平均。在本节中，我们主要讨论宇宙密度场的统计描述，特别注重于二阶统计量，因为二阶统计量是最常用也是最为重要的大尺度结构统计量。

1.3.1 两点相关函数

最为常用的统计方法是计算两点相关函数。两点相关函数给出了在某一个尺度上星系成团性的。对于高斯随机场来说，两点相关函数完全刻画了它的统计性质。给定了密度场 $\rho(x)$ ，我们定义无量纲的密度场扰动为

$$\delta(x) = \rho(x)/\bar{\rho} - 1 \quad (1.33)$$

容易知道， $\langle \delta(x) \rangle = 0$ 。定义两点相关函数为物质密度涨落 $\delta(x)$ 的协方差：

$$\xi(r) = \langle \delta(x)\delta(x+r) \rangle \quad (1.34)$$

，两点相关函数是一个系综平均统计量，在各态历经的假设下可由空间各点的平均而得。两点相关函数也可以看成是一个概率上的概念，在相距为 r 的体积元 V_1 和 V_2 中同时发现有星系的联合几率为

$$dP = n_g^2 [1 + \xi(r)] dV_1 dV_2 \quad (1.35)$$

其中 n_g 是星系的数密度。如果 $\xi(r) = 0$ ，则物质均匀分布，没有成团性；如果大于零，则同时发现星系的概率变大，有成团性，反之则有反成团性。我们有

$$\xi(r) = \frac{N(r)}{4\pi r^2 n_g^2 V} - 1 \quad (1.36)$$

，其中 $N(r)$ 是样本中距离为 r 到 $r + dr$ 的星系对数目。处理实际观测样本时，通常采用比较观测样本和生成的随机均匀分布的样本来计算 $\xi(r)$ ：

$$\xi(r) = \frac{n_R}{n_D} \frac{DD(r)}{RR(r)} - 1 \quad (1.37)$$

，其中 n_D 是观测样本的平均数密度， n_R 是随机样本的平均数密度， $DD(r)$ 和 $RR(r)$ 分别表示在观测样本和随机样本中相互距离为 r 的星系对数目。因为受观测手段的

限制,在观测样本中不可避免的要受到各种观测效应的影响,因此我们在生成均匀随机样本的时候也要加上同样的观测效应,以便消除观测效应对计算结果的影响。

这些年的观测结果发现(Davis & Peebles 1983, Hawkins et al. 2003),光学波段的星系的两点相关函数在尺度 $r \leq 20h^{-1}\text{Mpc}$ 的时候是可以用幂率谱来近似的:

$$\xi(r) = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\gamma} \quad (1.38)$$

,其中 $r_0 \approx 5h^{-1}\text{Mpc}$, $\gamma \approx 1.8$. 这一结果表明在尺度 $r \leq 5h^{-1}\text{Mpc}$ 上,星系分布具有很高的非线性。 $\xi(r)$ 在更大的尺度上的行为还不能很好的确定。

有些巡天只给出了角位置,对这类巡天我们无法计算它们的三维两点相关函数。如果要研究其成团性,我们可以类似的定义角相关函数:

$$dP_{12} = n_g^2 d\Omega_1 d\Omega_2 [1 + \omega(\theta_{12})] \quad (1.39)$$

,其中 Ω_1, Ω_2 是角位置 r_1 和 r_2 之间的立体角元。 θ_{12} 是 r_1 和 r_2 之间的角度。角相关函数和三维两点相关函数可以通过Limber方程(Limber 1953, Rubin 1954)来转化:

$$\omega(\theta) = \frac{\int_0^\infty \phi^2(L) r^4 dr \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(\sqrt{u^2 + r^2 \theta^2}) du}{[\int_0^\infty \phi^2(L) r^2 dr]^2} \quad (1.40)$$

,其中 $\phi(L)$ 是光度函数,即单位体积内单位绝对星等天体的数目。 u 是角向距离, r 为径向距离。根据Limber方程,可以知道如果空间相关函数满足斜率为 γ 的幂率谱形式,那么角相关函数也要满足幂率谱,其斜率为 $\delta = \gamma - 1$ 。从CfA (Borner et al. 1989), APM (Baugh 1996), 2MASS(Maller et al. 2003)等星表的观测知道,角相关函数确实具有幂率谱形式:

$$\omega(\theta) = A\theta^{-\delta} \quad (1.41)$$

,其中 $\delta \approx 0.8$, 与关系 $\delta \approx \gamma - 1$ 一致。

1.3.2 功率谱

在Fourier空间中也可以研究密度场在不同的空间尺度下的变化。将密度扰动在Fourier空间中展开:

$$\hat{\delta}(\vec{k}) \equiv \int d^3x \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{x}) \hat{\delta}(\vec{x}), \hat{\delta}(\vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{x}) \hat{\delta}(\vec{k}) \quad (1.42)$$

, 类似于相关函数, 我们可以定义功率谱为 k 空间密度涨落的协方差:

$$P(k) = V_u \langle |\delta_k|^2 \rangle \quad (1.43)$$

. 功率谱和两点相关函数都是二阶统计量, 它们构成了一对 Fourier 变换:

$$\xi(r) = \frac{1}{V_u} \sum_k P(k) \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{x}) = \frac{1}{2\pi^3} \int P(k) \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{x}) d^3k \quad (1.44)$$

. 在实际应用中功率谱同相关函数相比有一定的优势。因为在大尺度上两点相关函数的计算结果并不太好, 可是通过功率谱我们却可以得到大尺度上的信息。因此当研究几百个 $h^{-1}\text{Mpc}$ 范围内的星系的分布的时候, 功率谱比起两点相关函数具备优势。而且在线性区域, 功率谱中不同的傅立叶模上的振幅是不相关的, 而相关函数的不同距离上的振幅却有可能是相关的。(Feldman et al. 1994)。给定了功率谱, 加上相位随机分布的假设, 我们可以从统计上重构出一个高斯场。但是如果只知道两点相关函数以及假设角向随机分布, 我们并没有办法重构出高斯场。

通常实际计算功率谱最常用的方法是使用快速傅立叶变换(FFT), 它计算大规模的傅立叶变换速度很快。作数值计算时, 快速傅立叶变换只能对网格的格点进行操作, 因此在实际计算中需要先将星系的质量分配到网格的格点上, 常用的质量分配格式有 NGP(Nearest Grid Points), CIC(Counts in Cells), TSC(Triangle Shape Clouds)等。这其实就相当于在物质密度涨落上加上了一个窗口函数 $W(x)$, 分派后的密度涨落 $\delta_w(x) = \int W(x - x')\delta(x')dx'$, 然后再对经过质量分配后得到的密度场 $\delta_w(x)$ 作快速傅立叶变换可求得功率谱。用这种方法算得的傅立叶功率谱由于受到了质量分派函数的影响, 和真实值比起来会有一定的偏差, 这种偏差我们称之为重影效应(alias effect)。在后面的章节我们会详细讨论这种偏差, 并发展了一套新方法来计算傅立叶功率谱, 可以大大的减少这种偏差。

原初功率谱的形状在宇宙极早期就已经确定了, 宇宙早期的暴涨理论给出了与尺度无关的度规扰动谱, 在 Newton 近似下也就是引力势的谱: $\phi_k^2 = \text{const}$, 从而可以得到密度的扰动谱:

$$P(k) = Ak^n \quad (1.45)$$

. 这被称之为 Harrison-Zeldovich 谱(Harrison 1970, Zel'dovich 1972)。宇宙学的一个很重要的任务就是确定密度扰动的谱特征, 目前的大尺度星系巡天, CMB 的观测以及 QSOs Ly α 森林的观测都支持 $n = 1$ 的谱。从原初密度扰动谱到我们目前

所观测到的功率谱，这中间经历了Jeans质量效应和Damping效应，在小尺度上，这两种效应对扰动模有着抑制作用。我们需要在原初扰动谱上乘一个转移函数才能得到线性功率谱。转移函数定义为：

$$T_k = \frac{\delta_k(z=0)}{\delta_k(z)D(z)} \quad (1.46)$$

其中 $D(z)$ 是从红移 z 到现在的线性增长因子。线性功率谱的幅度需要从目前的观测结果给出。可以用WMAP卫星对微波背景辐射的观测给出归一化，也可以由富星系团的数目给出归一化，称之为 σ_8 归一化(White et al. 1993)。

我们目前能测量到的扰动功率谱已经经过了引力成团的非线性演化，偏离了线性功率谱的形状。为求得非线性功率谱，Peacock和Dodds在1996年曾经提出过一个对各种宇宙学模型都适用的拟合公式(Peacock & Dodds 1996)，目前最常用的公式是Smith等人在2003年基于暗晕模型给出的拟合公式(Smith et al. 2003)。我们在后面的章节中还会用到这个拟合公式，公式的具体参数参见附录。

物质扰动的功率谱是宇宙大尺度结构的基本统计量。它给出了结构形成中的基本物理过程的特征空间尺度，而且，它还包含着主导宇宙动力学演化的暗物质的物理特性，通过它我们可以确定宇宙学参数，鉴别宇宙模型。从2dFGRS巡天计划开始，人们已经可以通过计算巡天观测数据的功率谱(e.g. Percival et al. 2002)来精确的限定宇宙学参数，这标志着精确宇宙学时代的来临。Percival等人根据最新的SDSS DR5数据的功率谱对宇宙学参数给出了限定(Percival, et al. 2007)，通过尺度 $0.01 < k < 0.06 h Mpc^{-1}$ 上的功率谱形状，他们给出宇宙学参数 Ω_M 的范围为 $\Omega_M = 0.22 \pm 0.04$ ，这和WMAP的结果是一致的。

1.3.3 高阶统计量

对于普通的高斯场，我们只需要用二阶统计量(功率谱或者两点相关函数)就可以完全的描述其统计信息。然而我们实际观测到的宇宙中的各种结构一般都经历了非线性演化的阶段，其大尺度结构存在着非高斯性。对于非高斯密度场，我们可以用三阶甚至更高阶的统计量来刻画。常见的高阶统计量有三点相关函数，四点相关函数及其傅立叶变换对双谱(Bispectrum)和三谱(Trispectrum)。

三点相关函数(3PCF)是对星系的成团性的进一步刻画，通过它可以给出对宇宙学模型的进一步限定。三点相关函数可以看成是在三边为 r_{12}, r_{23} 和 r_{31} 的三

角形的三个顶点发现星系的联合概率。其计算方法为：

$$\zeta(r_{12}, r_{23}, r_{31}) = \frac{DDD(r_{12}, r_{23}, r_{31})}{RRR(r_{12}, r_{23}, r_{31})} - \xi(r_{12}) - \xi(r_{23}) - \xi(r_{31}) - 1 \quad (1.47)$$

其中 $DDD(r_{12}, r_{23}, r_{31})$ 是在观测样本中有星系组成三角形的数目， $RRR(r_{12}, r_{23}, r_{31})$ 是随机样本中的星系组成三角形的数目。对于星系等级成团模型(Peebles 1980)，其三点相关函数为：

$$\zeta(r_{12}, r_{23}, r_{31}) = Q[\xi(r_{12})\xi(r_{23}) + \xi(r_{23})\xi(r_{31}) + \xi(r_{31})\xi(r_{12})] \quad (1.48)$$

. 其中对应的 Q 是常数。

三点相关函数在傅立叶空间中对应的统计量是双谱。我们有：

$$B(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) = \langle \delta(\mathbf{k}_1)\delta(\mathbf{k}_2)\delta(\mathbf{k}_3)\delta_D(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \rangle \quad (1.49)$$

其中 δ_D 是狄拉克函数。在各向同性的宇宙中， $B(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3 = -\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)$ 可以写成 $B(k_1, k_2, k_3)$ ，其中 $k_3 = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + 2k_1k_2\mu_{12}}$ ， $\mu_{12} = \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 / (k_1k_2)$ 。

下面这种归一化的双谱 Q_m 也是经常用到的：

$$Q_m(k_1, k_2, k_3) = \frac{B(k_1, k_2, k_3)}{P(k_1)P(k_2) + P(k_2)P(k_3) + P(k_3)P(k_1)} \quad (1.50)$$

对密度扰动求各阶矩或者累积矩也可以描述密度扰动。对于高斯密度场，只有二阶累积矩不为零。因此高阶累积矩同样可以用来描述密度场的非高斯性。常用的是三阶矩和四阶矩，即斜度(Skewness)和陡度(Kurtosis)。

$$S \equiv \frac{\delta^3}{\sigma^4} \quad (1.51)$$

$$K \equiv \frac{\delta^4 - 3}{\sigma^6} \quad (1.52)$$

. 其中 $\sigma^2 = \langle \delta^2 \rangle$ 。

1.4 大尺度结构的观测及数值模拟

目前大尺度结构的研究主要是通过观测和数值模拟两方面进行的，在这一节中，我们将简要介绍一下大尺度结构的观测及数值模拟。

1.4.1 主要的观测巡天项目

宇宙学是建立在观测基础之上的科学，宇宙大尺度结构的研究同样需要观测提供信息，或者通过观测验证不同模型。在大尺度结构研究中比较重要的是对星系的巡天观测，包括红移巡天和二维巡天。宇宙学的巡天大体上分两类，一类是深视场巡天，一类是宽角度巡天。前者通常是面积很小但是深度很高的巡天。实际上是一维巡天，因为又被称之为铅笔束巡天。例如Gemini Deep Deep 巡天(Abraham et al. 2004), 能够探测红移1.0到2.0范围内的星系，其巡天面积却仅为30平方分。而哈勃深场巡天(Ferguson et al. 2000)巡天深度可以达到 $V \simeq 29$ ，其覆盖天区仅为5平方分。利用这类巡天我们可以获得高红移星系信息，这对研究星系的形成演化有重要意义。

虽然一维巡天可以获得高红移信息，但是它包含的星系数目一般较少，因此在大尺度结构的统计研究中更为常用的是宽角度巡天。虽然宽角度巡天的深度浅，但是因为它覆盖的天区广泛，因此包含的星系数目一般很多，所以具有统计意义。宽角度巡天又可分为二维光度巡天和给出了星系红移的三维红移巡天。从上个世纪90年代初期的CfA(Center for Astrophysics, e.g. Huchra et al. 1990)和APM(Automatic Plate-measuring Machine, e.g. Maddox et al. 1990)开始，大规模星系巡天越来越多，下面介绍一些重要的巡天工程。

2MASS(2 Micron All Sky Survey, e.g. Jarret et al. 2000, Jarret 2004)是一个近红外二维巡天，几乎覆盖了全天(99.98%)，分三个波段观测，观测目标分为点源和展源两部分。巡天的极限星等可达 $m_{Ks} \simeq 13.5$ 。

2dF(2 Degree Field Redshift Survey, e.g. Colless 1999) 这是一个规模较大的巡天，星系红移数目为 2×10^5 ，覆盖了天区面积1500平方度。巡天的极限星等可达 $m_{lim} \simeq 19.45$ 。

SDSS(Sloan Digital Sky Survey, e.g. Loveday 2002)是目前规模最大的巡天，SDSS-I已经覆盖了8000平方度的天区。星系红移数目达到 10^6 ，巡天的极限星等可达 $m_{lim} \simeq 22$ 。

UKIDSS(UKIRT Infrared Deep Sky Survey e.g. Dye 2006)是近红外巡天，计划覆盖面积为7500平方度的天区。由5个巡天组成，其中的大尺度巡天LAS(Large Area Survey)达到的极限星等为 $m_{lim} \simeq 18.4$ 。

LAMOST(Large-sky-Area Multi-Object fiber Spectroscopic Telescope:<http://www.lamost.org>)是我国将要进行的红移巡天计划，星系红移数目可达到 10^7 ，极限星等可到 $m_{lim} \simeq$

20.5。

1.4.2 数值模拟

由于引力不稳定性具有非线性的特征，因此数值模拟方法成为了研究宇宙学的重要手段，它是联系天文观测和理论之间的桥梁。天文上用到的数值模拟主要分为两大类：**N**体数值模拟和流体数值模拟。后者在研究星系形成演化方面用的较多，宇宙学的研究多用到**N**体数值模拟。在宇宙学的**N**体数值模拟中，暗物质的质量分布被一个个粒子所表示，这当然只是一个近似。

目前的**N**体数值模拟程序通常分为三种类型：**PM**(Particle Mesh)方法、 P^3M 方法和**Tree**方法。**PM**方法基于网格来计算密度和引力势，它的精度受到了网格大小的影响。但是**PM**方法的优点在于计算速度快，因此可以使用很多例子。它的细节可参考文献Hockney & Eastwood(1981)。使用 P^3M 方法的**N**体数值模拟程序分为两个部分：**PM**部分计算大尺度的力，**PP**(Particle-Particle)部分则用来计算小尺度范围粒子之间的力。因为采用了**PP**部分，所以它的精度要高于**PM**方法，不过相应的计算速度也要比**PM**慢。**Tree**方法对边界条件的选取很方便，但是运行速度要比**PM**方法慢(Apple 1985; Hernquist 1987)。

第2章 引力透镜基本理论及数值算法

2.1 引言

引力透镜是指光线在经过大质量天体时会在引力的作用下发生偏折的一种现象。这种现象早在1704年便被牛顿提出过，卡文迪许也曾经对引力透镜进行过计算。然而，是爱因斯坦的广义相对论才真正奠定了引力透镜的理论基础。如果把光线当成一束粒子来处理，可以应用牛顿理论来计算它在引力作用下的偏折，然而用广义相对论计算出的偏折量是牛顿理论计算出的两倍大。1919年爱丁顿在非洲利用日食的机会测量了星光因太阳的引力场所产生的偏折，和广义相对论所预测的一样。这也使得广义相对论从此被广泛接受。

从理论上说，宇宙中距离我们足够远、质量足够大的天体可以把一个源天体的光线偏折的比較强，使得我们作为观测者可以观测到多像。尽管理论早有预言，但是直到1979年，Walsh等人才发现了第一个多像系统QSO 9057+561。从这时候起，引力透镜成了天体物理中的最活跃的研究方向之一。越来越多的多像系统被发现。源天体的光线被偏折后，一般会导致它被观测到的大小和形状发生改变。有时候，这种改变会极其明显，最明显的例子就是爱因斯坦环(Einstein rings)和星系团中的巨弧(arcs)了。这种畸变比较明显的引力透镜现象被称之为强引力透镜。但是更多时候星系团后的源天体的像只发生了微小的改变，单个像的这种畸变也许很难被注意到，但是许多源天体的像发生的这种微小畸变是可以被测量的，这就是弱引力透镜现象。在20世纪60年代微引力透镜的概念被提出。微引力透镜是发生在恒星级天体中的引力透镜现象。与发生在星系尺度上的引力透镜现象相比，微引力透镜的源天体质量很小，光的偏转要小得多，通常情况下难以直接观测到微引力透镜所成的像，而只能观察到光度在瞬间增强的现象。20世纪80年代，波兰天文学家Bohdan Paczynski讨论了银河系中的暗物质作为微引力透镜的可能性，认为它们有很高的几率被观测到。1993年，人们在大麦哲伦云中发现了第一个微引力透镜。

2.2 引力透镜的基本理论

在这一节之中，我们将介绍引力透镜的基本理论，首先我们引入了研究引

力透镜的一些假设。然后我们给出了一个透镜系统的基本参量以及一些基本的方程。最后我们简要的介绍引力透镜在天文学中的各种应用。

2.2.1 基本假设

为了简化问题的讨论,避开奇点而便于计算,我们对引力透镜提出三个假设。首先,我们不考虑视界附近的光线。也就是说入射光线必须离透镜源足够远。如果是点质量透镜,我们可以理解为入射光线和透镜的距离远远大于透镜的史瓦西半径,即 $\eta \gg R_S \equiv 2GM/c^2$ 。换言之,我们假设透镜的牛顿引力势很小, $\Phi \ll c^2$ 。其次,我们假设引力透镜系统的速度,包括透镜内物质的相对运动速度和透镜本身的运动速度相对于静止参照系例如微波背景辐射的速度是可以忽略的,即 $v \ll c$ 。最后,我们假设透镜本身沿视线方向上的厚度相对于透镜系统的其它距离(例如透镜到源的距离)是足够薄的,这就是薄透镜假设。

事实上,对于普通的透镜来说,这些假设都能很好的满足。举例来说,考虑一个质量 $M = 10^{15} h^{-1} M_\odot$ 的星系团,假设它是球对称的,那么在距离其中心 $R = 1 h^{-1} \text{Mpc}$ 的地方牛顿势约为:

$$|\Phi| \approx \frac{GM}{R} \approx (2 \times 10^3 \text{ km s}^{-1})^2 \quad (2.1)$$

显然,第一个假设是成立的。一个典型的星系团的半径通常为 $1 - 1.5 h^{-1} \text{Mpc}$,而其红移一般都大于0.1,对应的 D_d 量级为 $10^2 \sim 10^3 h^{-1} \text{Mpc}$,显然薄透镜假设也是成立的。而我们知道星系团相对于哈勃流的本动速度通常为几百个 km s^{-1} 的量级,而星系团内部的星系相对于星系团的本动速度也一般不会超过 10^3 km s^{-1} 的量级,这都远远小于光速。因此第二个假设也是成立的。

2.2.2 引力透镜基本参数和方程

我们先来看一个引力透镜的示意图(2.1)。我们将透镜所在的平面叫做透镜平面或者像平面,将源所在的平面称之为源平面,图中给出了透镜系统的三个重要的距离: D_d 为观测者到透镜平面的角直径距离, D_s 为观测者到源平面的角直径距离, D_{ds} 为源平面和透镜平面之间的角直径距离。注意,因为时空曲率的存在, $D_s \neq D_d + D_{ds}$ 。我们用 η 和 ξ 分别来表示源平面和像平面上的物理坐标,源和像和水平视线的夹角分别为 β 和 θ ,光线经过透镜后产生的偏转角记为 $\hat{\alpha}$,它们之间的关系为:

$$\eta = D_s \beta, \xi = D_d \theta$$

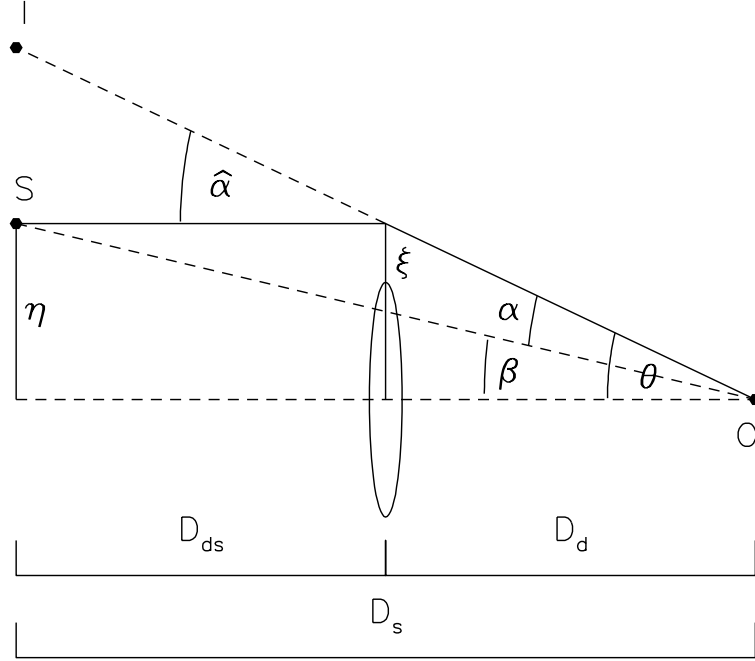


图 2.1: 引力透镜示意图

透镜方程为：

$$\eta = \frac{D_s}{D_d} \xi - D_{ds} \hat{\alpha} \quad (2.2)$$

这里我们定义透镜的面密度 Σ 为透镜的密度沿垂直于透镜平面的视线方向的积分：

$$\Sigma(\xi) = \int \rho(\xi, z) dz \quad (2.3)$$

那么根据广义相对论，可以得到：

$$\hat{\alpha}(\xi) = \frac{4G}{c^2} \int \frac{(\xi - \xi') \Sigma(\xi')}{|\xi - \xi'|^2} d^2 \xi' \quad (2.4)$$

为了便于进行数值计算，我们将矢量坐标 ξ, η 无量纲化。我们引入像平面上的长度单位 ξ_0 ，或者角度单位 θ_0 ，这个单位的大小可以是任意定义的。在源平面则对应单位 η_0 和 β_0 ：

$$\eta_0 = \frac{D_s}{D_d} \xi_0, \beta_0 = \frac{\eta_0}{D_s} = \frac{\xi_0}{D_d} = \theta_0 \quad (2.5)$$

那么无量纲化的坐标为：

$$\mathbf{x} = \frac{\xi}{\xi_0} = \frac{\theta}{\theta_0}, \mathbf{y} = \frac{\eta}{\eta_0} = \frac{\beta}{\theta_0} \quad (2.6)$$

分别对应于像平面与源平面。然后将面密度 Σ 也无量纲化,我们定义无量纲面密度(convergence)为:

$$\kappa(\mathbf{x}) = \Sigma(\xi_0 \mathbf{x}) / \Sigma_{cr} \quad (2.7)$$

其中 Σ_{cr} 我们称之为临界面密度,它只由透镜和源的红移所唯一决定。

$$\Sigma_{cr} = \frac{c^2}{4\pi G} \frac{D_s}{D_d D_{ds}} \quad (2.8)$$

无量纲后的透镜方程可以写为:

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} - \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) \quad (2.9)$$

其中:

$$\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) = \frac{D_{ds}}{\eta_0} \hat{\boldsymbol{\alpha}}(\xi_0 \mathbf{x}) \quad (2.10)$$

透镜方程用角坐标可以表示为:

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\theta}) \quad (2.11)$$

. 也就是说在源平面上坐标为 $\boldsymbol{\beta}$ 的点可以被观测者以角度 $\boldsymbol{\theta}$ 观测到,如果对于给定的 $\boldsymbol{\beta}$,透镜方程有一个以上的 $\boldsymbol{\theta}$ 解,那么就形成了多像系统。有了透镜方程后,只要我们知道透镜和源的红移以及透镜的面密度,我们就可以求出像平面到源平面的映射。然而我们用得更多的是源平面到像平面之间的映射,即求解透镜方程的反函数。一般情况我们是无法得到这个函数的解析形式的,通常需要用数值方法计算。

我们称产生了多像的透镜系统为强引力透镜。如果像平面中存在无量纲面密度 $\kappa \geq 1$ 之处,即 $\Sigma \geq \Sigma_{cr}$,那么源平面的某些位置就会产生多像(Schneider et al., 1992)。因此,临界面密度 Σ_{cr} 是可以用来区分弱引力透镜和强引力透镜的量。给定了 κ ,我们有:

$$\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\pi} \int d^2 x' \kappa(\mathbf{x}') \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \quad (2.12)$$

透镜理论中另外一个非常重要的量是偏转势 ψ :

$$\psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{\pi} \int d^2 \mathbf{x}' \kappa(\mathbf{x}') \ln |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \quad (2.13)$$

容易看出,偏转角可以写成偏转势的梯度: $\boldsymbol{\alpha} = \nabla \psi$. 偏转势满足泊松方程:

$$\nabla^2 \psi(\boldsymbol{\theta}) = 2\kappa(\boldsymbol{\theta}) \quad (2.14)$$

. 前面的透镜方程也可以使用偏转势, 写成:

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} - \nabla\psi(\mathbf{x}) \quad (2.15)$$

当光线经过透镜发生偏折后, 观测者所观测到的像不仅位置发生改变, 而且像的形状和大小相比源都发生了改变。这种畸变最明显的例子就是星系团中壮观的巨弧。在小角度的情况下, 我们可以认为源在像平面上等照度。如果 $\mathbf{I}^{(s)}(\boldsymbol{\beta})$ 是源平面的表面亮度, 那么观测到的像平面的表面亮度分布:

$$\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{I}^{(s)}[\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\theta})] \quad (2.16)$$

像的变形可以用下面的雅可比矩阵来描述:

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \left(\delta_{ij} - \frac{\partial^2 \psi(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right) = \begin{pmatrix} 1 - \kappa - \gamma_1 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & 1 - \kappa + \gamma_1 \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

这里我们引进了一个新的量剪切因子(shear) γ , 它描述了由于引力场的潮汐力而使源的形状发生的畸变。 $\gamma \equiv \gamma_1 + i\gamma_2 = |\gamma|e^{2i\varphi}$. 其中:

$$\gamma_1 = \frac{1}{2}(\psi_{,11} - \psi_{,22}), \gamma_2 = \psi_{,12} \quad (2.18)$$

因此, 如果 $\boldsymbol{\theta}_0$ 是像平面的一点, 对应源平面的点 $\boldsymbol{\beta}_0 = \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\theta}_0)$, 我们有:

$$\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{I}^{(s)}[\boldsymbol{\beta}_0 + \mathcal{A}(\boldsymbol{\theta}_0) \cdot (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0)]. \quad (2.19)$$

从这个等式可以知道, 如果源是圆环, 那么所成的像的形状就是椭圆, 椭圆的半轴和圆环的半径的比为矩阵 $\mathcal{A}(\boldsymbol{\theta}_0)$ 的特征值的倒数。观测到的像的流量和源的流量分别是表面亮度 $\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})$ 和 $\mathbf{I}^{(s)}(\boldsymbol{\beta})$ 的积分, 我们定义它们之间的比值为放大因子 μ , 我们有:

$$\mu = \frac{1}{\det \mathcal{A}} = \frac{1}{(1 - \kappa)^2 - |\gamma|^2} \quad (2.20)$$

像在大小和形状两方面都发生了畸变, 形状的畸变是因为引力场的潮汐力而产生的, 一般用剪切因子 γ 来描述。放大因子是由会聚因子 κ 引起的各向同性的畸变和由剪切因子 γ 引起的各向异性畸变共同引起的。从图(2.2)中可以形象地看出会聚因子和剪切因子各自所起的作用。

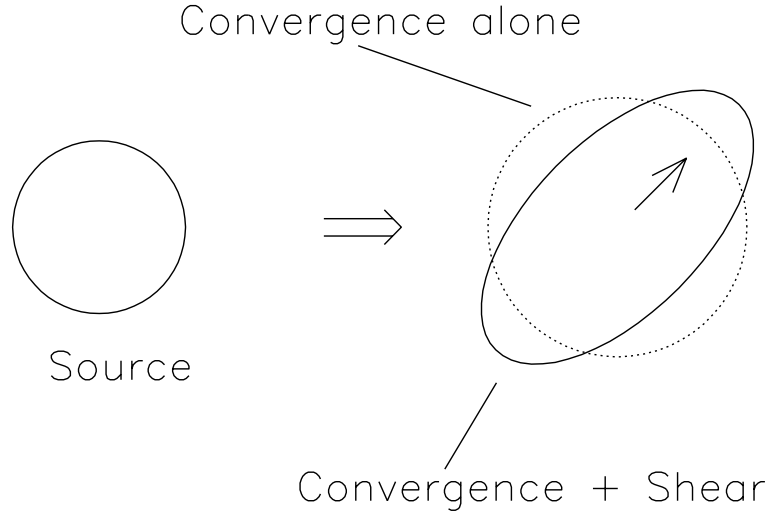


图 2.2: 剪切因子和会聚因子对放大率所起的作用

2.2.3 临界曲线和焦散曲线

放大因子可正可负，对于某些点，可以令 $\det A = 0$ ，即放大因子趋向于无穷大。这样的点在像平面上构成的曲线我们称之为临界曲线(critical curves)，它们在源平面上相对应曲线叫作焦散曲线(caustics)。理论上，源平面上位于焦散曲线上的点将会被无穷的放大。然而，我们在实际观测之中是观测不到这种情况的，原因有二：首先，实际宇宙中的源天体都是扩展源，它的放大率还是有限的。其次，即使是点源，其放大率也将会是一个有限的值，因为前面的透镜公式中用到的几何光学的近似在临界曲线附近是不成立的，因此其放大率也不会是无穷大(Ohanian 1983; Schneider et al., 1992)。尽管如此，临界曲线附近的像都被大大的变形了，巨弧就是由靠近焦散曲线的源星系所形成的。

只有几种简单的透镜模型的临界曲线和焦散曲线有解析解，例如最简单的等温球模型，我们下面简单的介绍一下这个模型。观测到的旋涡星系的旋转曲线证明了它在由暗物质构成的暗晕之中，暗晕的密度分布满足 $\rho \propto r^{-2}$ ，其投影面密度按照 θ^{-1} 分布。这样的密度分布是建立在空间中暗物质粒子的速度弥散为常数的假设基础之上的。因此我们称之为等温球模型。我们简单介绍一下满足等温球模型密度分布的引力透镜的基本属性。

等温球的投影面密度为：

$$\Sigma(\xi) = \frac{\sigma_v^2}{2G\xi} \quad (2.21)$$

其中 σ_v 为引力势中的粒子在视线方向的速度弥散（假设它们处于维里平衡）。那么对应的无量纲面密度为：

$$\kappa = \frac{\theta_E}{2\theta} \quad (2.22)$$

其中

$$\theta_E = 4\pi \left(\frac{\sigma_v}{c} \right)^2 \frac{D_{ds}}{D_s} \quad (2.23)$$

被称之为爱因斯坦偏折角。容易证明，在这个质量分布下对应的偏折角的大小是常数，有 $|\alpha| = \theta_E$ 。对应的偏转势为 $\psi = \theta_E |\theta|$ 。利用剪切因子的计算公式可以得出：

$$\gamma(\theta) = -\frac{\theta_E}{2|\theta|} e^{2i\psi} \quad (2.24)$$

放大率为：

$$\mu(\theta) = \frac{|\theta|}{|\theta| - \theta_E} \quad (2.25)$$

从上式可以看出满足 $|\theta| = \theta_E$ 的点构成了等温球的临界曲线，通常称之为爱因斯坦环。根据透镜方程将临界曲线的点映射到源平面得到的焦散曲线是一个位于 $\beta = 0$ 处的点。在实际的宇宙中，只有密度非常对称的透镜才能产生这样的焦散曲线，只要透镜密度分布和等温球的理论值相比有一点小扰动，那么得到的焦散曲线就不会是一个点而是一条曲线(Schneider et al. 1992)。

对于真实宇宙中的天体来说，等温球模型的密度分布是不可能满足的。按照等温球的密度分布公式， $|\theta| \rightarrow 0$ 时的面密度以及透镜的总质量都应该是无穷大，而这都不满足真实的天体质量分布。尽管如此，等温球模型还是和许多观测到的透镜系统拟合的很好。为了构造一个更为真实的透镜模型，我们可以给等温球中加一个核，即

$$\kappa(\theta) = \frac{\theta_E}{2\sqrt{|\theta|^2 + \theta_c^2}} - \frac{\theta_E}{2\sqrt{|\theta|^2 + \theta_t^2}} \quad (2.26)$$

其中核的半径为 θ_c 。对于 $\theta_c \ll |\theta| \ll \theta_t$ ，这个质量分布可看成是等温球分布，而且避免了质量出现无穷大的情况。

2.2.4 引力透镜的应用

引力透镜在天文学中有着广泛的应用，从恒星、星系、星系团以及宇宙大尺度结构这些不同的尺度中都可得到验证。如果想详细的了解这方面的情况，可以参阅Bartelmann等人的综述(e.g. Bartelmann & Schneider 2001; Refregier 2003;

Munshi 2006)。在这一节中，我们简要的介绍一下几种不同的引力透镜的主要应用。

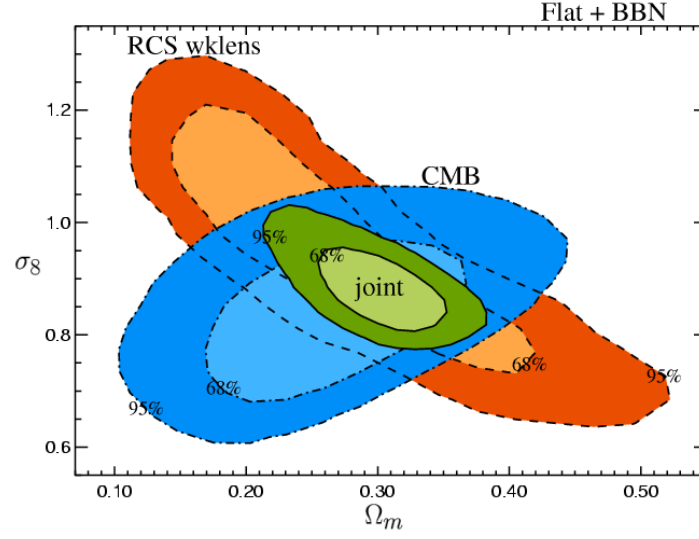
我们在前面提到过成像畸变十分明显的引力透镜为强引力透镜。通常强引力透镜的 κ 往往接近1，会产生多像系统。而且强引力透镜的放大率一般很大，可以利用这一点来研究较远较暗的背景星系。Ellis和Santos在2001年的观测发现星系团Abell 228中存在着多个有确定红移的多像系统，有一个在红移5.56处的星系被该星系团放大了33倍。如果没有引力透镜，这个星系是很难被观测到的。另外，利用强引力透镜可以确定哈勃常数等宇宙学参量。例如，通过分析QSO 0957+561的光学观测(Refsdal 1964;1966)和射电观测数据(Schild et al. 1993; Lehar et al. 1992)，并结合VLBI的观测结果(Falco et al. 1991)，Grogin和Narayan(Grogin & Narayan 1996)给出了哈勃常数

$$H_0 = (82 \pm 6)(1 - k)\left(\frac{t}{1.14yr}\right)^{-1} kms^{-1} Mpc^{-1} \quad (2.27)$$

即当 $t = 1.14yr$ 的时候， $H_0 < 88kms^{-1}Mpc^{-1}$ 。这和WMAP的观测数据 $H_0 = (71 \pm 4.1)kms^{-1}Mpc^{-1}$ 是相符合的。

引力透镜所形成的像由偏折角即引力势的微分决定，对透镜密度分布的小尺度结构并不敏感，但是会聚因子 κ 和剪切因子 γ 却对小尺度结构十分敏感，它们是由引力势的二阶微分所决定的。我们可以利用这个性质对星系的结构(尤其是暗晕的子结构)进行研究。冷暗物质模型指出大质量星系中应该存在大量子结构，然而目前观测到的子结构数目却远远小于理论值。Dalal和Kochanek提出基于简单透镜假设所得到的四像系统的观测和理论预言流量值不同意味着应该有大量子结构存在。

κ 远小于1的透镜为弱引力透镜。它不会产生多像系统，其所成的像只会产生微小的畸变。通过观测得到被扭曲的像的分布情况，比较两者之间的差别就可以知道使星系像发生扭曲的弱引力透镜的性质。弱引力透镜的很重要的应用就是可以用来测量星系及星系团的质量分布(e.g. Gray et al. 2006; Gavazzi et al. 2004)。由弱引力透镜对许多星系团所得的质量估计(e.g. Tyson 1989; Kaiser & Squires 1993; Squires et al. 1996; Luppino & Kaiser 1997; Gray et al. 2002)和动力学方法或X射线方法所得到的结果是一致的(Griest & Safizadeh 1998)。弱引力透镜也是研究宇宙大尺度结构的有效手段。沿着观测者的视线方向上由宇宙大尺度结构对远距星系所产生的弱引力透镜现象被称为宇宙剪切因子(cosmic

图 2.3: RCS和CMB对 Ω_m 和 σ_8 的限制(Contaldi et al. 2003)

shear)。因为光在质量不均匀分布的客体附近传播发生偏折，会造成远距离星系像的扭曲。而这种扭曲则反映了大尺度结构的统计性质。事实上，宇宙大尺度结构所产生的像的扭曲很小，一般都在百分之一以下。宇宙剪切因子信号的首次被探测是在2000年(e.g. Bacon et al. 2000; Kaiser et al. 2000; van Waerbeke et al. 2000; Wittman et al. 2000)，目前它已经成为研究宇宙物质分布和宇宙参量的重要手段。从发现大尺度上的透镜现象到现在只有数年的时间，但宇宙剪切的测量和微波背景辐射相结合已经对宇宙学参量的限制作出了许多贡献。将宇宙剪切因子巡天和WMAP卫星观测结果结合可以对宇宙学参量进行很强的限制，所得到的结果可以和大规模红移巡天计划的结果相当甚至更好。尤其是在对物质密度 Ω_m 和 σ_8 的确定上，RCS(Red-Sequence Cluster Survey)弱引力透镜测量和CMB的数据很接近。如图(2.3)所示，CMB和弱引力透镜的测量相结合十分有效。

微引力透镜是由于前景运动的天体所产生的透镜现象，一般很难被观测到。通过研究微引力透镜的出现率和特征可以估算运动客体的数目和质量。最早的微引力透镜巡天观测开始于1993年。微引力透镜可以令源的光度放大，因此有着相对高光度放大倍数(约大于10)的微引力透镜很适合用来探测行星(e.g. Luppino & Kaiser 1997; Gray et al. 2002)。例如放大倍数为10的微引力透镜可用来探测具有木星质量的行星；放大倍数为50的微引力透镜可探测到和海王星质量相当的

行星。

2.3 强引力透镜的数值算法

一般来说,偏转角和偏转势是研究透镜性质的最基本的物理量。然而,除了几种最简单的理论模型(例如点源模型或等温球模型)之外,我们一般是无法对它们求出解析解的。大多数情况,我们需要使用数值方法来研究引力透镜,这主要是因为两个原因:首先引力透镜是非线性的,源平面的点和像平面的点相互之间是以非线性关系对应的,所以才会有多像系统等现象。其次引力透镜通常涉及到大量的数据,只有应用数值方法才能方便的处理。即使是对于几种可以求出解析解的透镜模型,一旦当问题涉及到扩展源的时候,也通常不能够再求出解析解了。因此,数值计算对于引力透镜的计算是至关重要的。在本节中,我们将介绍一下强引力透镜的基本数值算法,包括透镜投影面密度的计算,偏转角和偏转势的数值算法及临界曲线和焦散曲线的数值解等。

2.3.1 透镜面密度的常用算法

我们知道,N-body数值模拟产生的引力透镜模拟样本都是由离散的粒子组成的,代表着实际宇宙中连续的密度分布。因此,我们要对模拟样本进行计算要做的第一件事就是计算它的投影面密度。否则就要分开计算这些离散的点各自在空间中某处的偏转势和偏转角,最后将这些点的贡献相加。这样做首先及其耗时,从实际应用上是不可行的;其次这样算出来的结果也是错误的,相当于把一个大的引力透镜当成了许多个微引力透镜来处理。

N-body数值模拟中的粒子并非实际意义上的质点,它代表着一个个的物质体元。我们要将这些粒子投影在透镜平面上,然后进行平滑,产生一个光滑的面密度分布。而在数值计算中,都是通过生成一个在二维网格格点上分布的密度场来实现的,格点上分派的质量和网格的面积之比就是这个网格的平均面密度。将离散粒子的质量分配到网格格点的过程有很多种算法。最简单而最直接的就是NGP(nearest grid point)算法,这一算法将每个粒子的质量全部分派到离它最近的网格格点上。如果粒子恰好处于网格的中心附近,这样分派当然是合适的;但是如果粒子在网格与网格的交界之处附近,这样做会带来很大误差,应该将粒子质量分派到它周围几个网格之上,以避免产生不连续的密度分布。

为了避免NGP所带来的不连续的面密度分布,使生成的面密度更为光滑,人

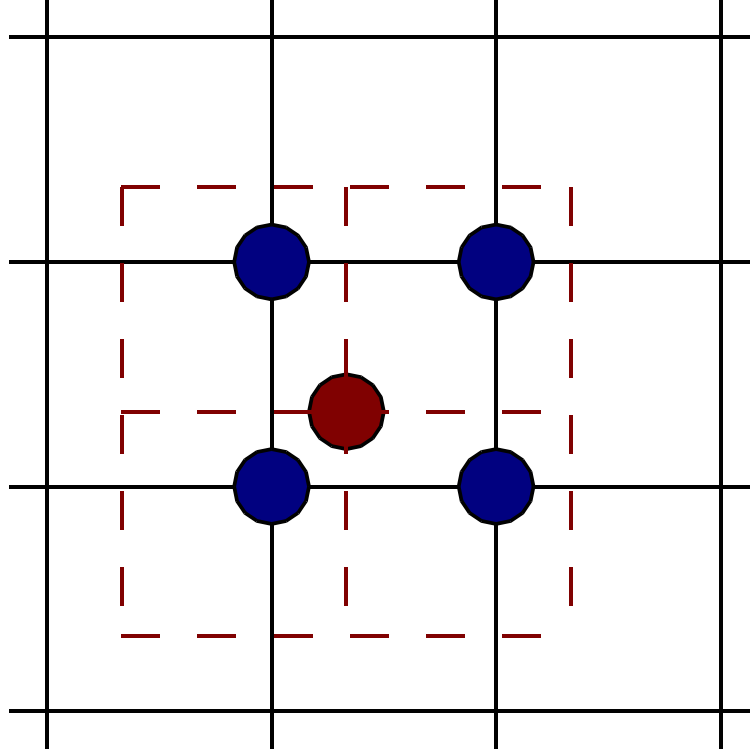


图 2.4: CIC插值算法的示意图, 位于实线上的点是网格格点, 虚点上点为样本粒子。

们又提出了一些更复杂的平滑算法。这些算法通常可以写成下面的形式:

$$Q(\mathbf{x}) = \sum_i W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) Q(\mathbf{x}_i) \quad (2.28)$$

其中 Q 是插值在位置在 $\mathbf{x}$ 处的粒子质量, $W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$ 是一个内核函数, 如果是二维平滑, 它可以分解到两个方向:

$$W(\delta\mathbf{x}) = w(\delta x_1)w(\delta x_2) \quad (2.29)$$

CIC算法是最常见的平滑算法, 它的内核函数为:

$$w_{CIC}(\delta x) = \begin{cases} 1 - |\delta x|/h & \text{if } |\delta x| < h \\ 0 & \text{if } |\delta x| \geq h \end{cases} \quad (2.30)$$

其中 h 是网格的间距, 图(2.4)是CIC算法分配质量的示意图, 从图中我们可以看出, CIC算法将每个粒子的质量分派到了它周围的四个网格格点上。比CIC算法

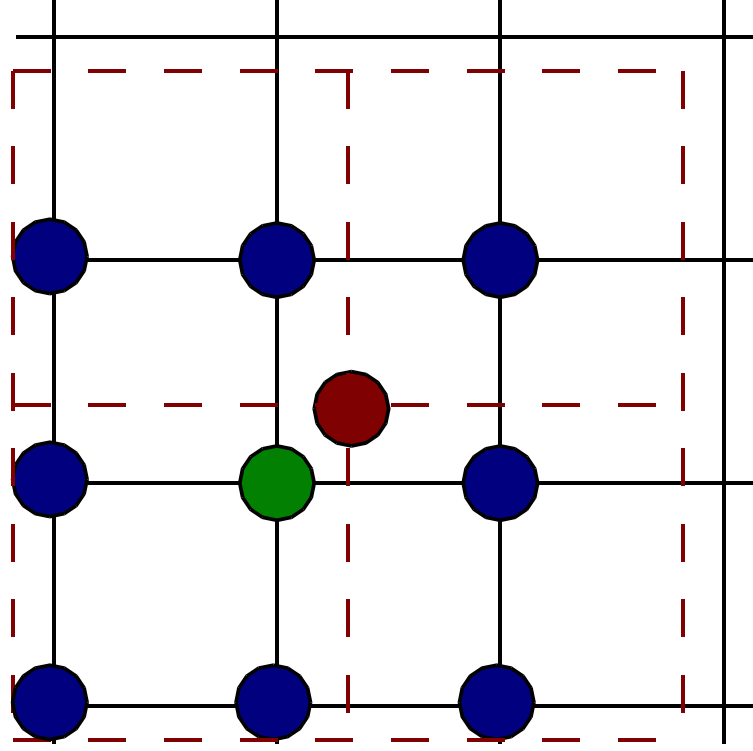


图 2.5: TSC插值算法的示意图, 位于实线上的点是网格格点, 虚线上点为样本粒子。

稍微复杂一点的是TSC算法, 使用的内核函数为:

$$w_{TSC}(x) = \begin{cases} 3/4 - \delta x^2/h^2 & \text{if } |\delta x| \leq h/2 \\ (3/2 - |\delta x|/h)^2/2 & \text{if } h/2 \leq |\delta x| < 3h/2 \\ 0 & \text{if } |\delta x| \geq 3h/2 \end{cases} \quad (2.31)$$

图(2.5)给出了TSC算法分配质量的示意图, 可以看到每个粒子的质量被分派到了其周围的九个网格格点, 因此比CIC算法更为光滑。

NGP,CIC和TSC算法都是固定平滑尺度的, 也就是说粒子质量被分派到固定大小的区域内, 还有的平滑算法并没有固定平滑尺度, SPH(smoothed particle hydrodynamics)算法就是其一。它的基本思想是在三维空间中给定一个邻居数目 N_{ngb} , 这些粒子所在的最小的球的半径就给出了中心粒子的平滑尺度。其内核

函数为：

$$w_{SPH}(r) = \frac{\sigma}{h^\nu} \begin{cases} 1 - \frac{3}{2}(\frac{r}{h})^2 + \frac{3}{4}(\frac{r}{h})^3 & \text{if } 0 \leq \frac{r}{h} \leq 1 \\ \frac{1}{4}(2 - \frac{r}{h})^3 & \text{if } 1 < \frac{r}{h} \leq 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.32)$$

在后面的章节中，我们将会详细的讨论基于小波多尺度分析方法发展的平滑算法，和SPH算法相比，此算法计算出的面密度误差更小，能够达到较高的精度，而且计算效率也更高。

2.3.2 偏转角和偏转势的数值计算

当我们用数值方法得到了网格上的面密度分布 $\kappa_{ij} = \kappa(\mathbf{x}_{ij})$ 后，我们可以直接计算偏转角，将每个格点对偏转角的贡献叠加：

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{\pi} \sum_{kl} \kappa_{kl} \frac{\mathbf{x}_{ij} - \mathbf{x}_{kl}}{|\mathbf{x}_{ij} - \mathbf{x}_{kl}|^2} . \quad (2.33)$$

然而，当格点的数目较多的时候，这将耗费大量计算时间。容易看出上式实际上是面密度 $\kappa(\mathbf{x})$ 和内核函数 $\mathbf{K}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\pi} \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^2}$ 的卷积。因此我们可以应用快速傅立叶变换将卷积转换为k空间的乘积关系：

$$\hat{\alpha}(\mathbf{k}) = \hat{\kappa}(\mathbf{k}) \hat{\mathbf{K}}(\mathbf{k}) \quad (2.34)$$

使用快速傅立叶变换计算 $\hat{\kappa}(\mathbf{k})$ 需要假设面密度在透镜平面上是周期性分布的。这通常是很自然的满足的，因为用大尺度的N体数值模拟产成的模拟样本自身就是按照周期性边界条件而生成的。而对于孤立体系例如星系团，其密度集中在中心很小的一块区域内，大部分的外围区域的面密度都接近为零，因此周期性假设所产生的影响是可以忽略的。尽管如此，我们为了安全起见，通常将面密度置于一个两倍大小的网格中心，例如 1024×1024 的网格放置在 2048×2048 网格内部，面密度之外的网格格点密度全部取零。

和偏转角的计算类似，我们可以将偏转势的计算也放入到k空间进行。我们知道偏转势和面密度之间的关系为：

$$\nabla^2 \psi = 2\kappa \quad (2.35)$$

此泊松方程在k空间的形式为：

$$\hat{\psi} = -\frac{2}{k^2} \hat{\kappa} \quad (2.36)$$

计算出 $\mathbf{k}$ 空间的偏转势后, 同样可以在 $\mathbf{k}$ 空间求出剪切因子, 容易知道:

$$\hat{\gamma}_1 = -\frac{1}{2}(k_1^2 - k_2^2)\hat{\psi}, \quad \hat{\gamma}_2 = -k_1 k_2 \hat{\psi}. \quad (2.37)$$

因为有 $\boldsymbol{\alpha} = \nabla\psi$, 实际上我们还可以利用 $\mathbf{k}$ 空间的偏转势来求偏转角:

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = -i\mathbf{k}\hat{\psi} \quad (2.38)$$

快速傅立叶变换的应用将偏转势和偏转角的计算速度大大提升了。

2.3.3 临界曲线和焦散曲线的确定

临界曲线的定义就是像平面上满足 $\det\mathcal{A} = 0$ 的点的集合。由公式2.17我们可以推得:

$$\det\mathcal{A} = (1 - \psi_{,11})(1 - \psi_{,22}) - \psi_{,12}^2 \quad (2.39)$$

我们算得偏转势后, 就可以用上面的公式算出每个网格格点的 $\det\mathcal{A}$. 令 $S = \text{sign}(\det\mathcal{A})$ 。我们知道, 临界曲线两旁的点的 $\det\mathcal{A}$ 的符号是相反的, 所以我们判定一个点在临界曲线旁边当且仅当至少有一个离它最近的点的 $\det\mathcal{A}$ 的符号跟它相反。即如果满足条件:

$$S_{00}(S_{-10} + S_{10} + S_{0-1} + S_{01}) < 4 \quad (2.40)$$

我们便认为点 $\mathbf{x}_{00}$ 位于临界曲线旁边。参见图(2.6)。显然, 点 $\mathbf{x}_{00}$ 自身并不在临界曲线上, 但是只要网格的分辨率够高, 这样的点的集合便可以看成是临界曲线本身。利用透镜方程2.9, 我们可以得到在源平面焦散曲线旁边的点, 精度够高的话也可以看成是焦散曲线本身。

作为例子, 我们利用这种方法计算一个采用等温椭球模型的引力透镜样本的临界曲线和焦散曲线。图(2.7)和图(2.8)分别是算得的临界曲线和焦散曲线, 可以看出, 计算结果是令人满意的。

2.3.4 利用插值提高计算精度,

前面我们提到利用快速傅立叶变换, 可以得到网格上所有格点上的各种信息, 包括偏转势、偏转角、剪切因子及放大率。实际计算中, 我们希望网格精度很高, 这样才能很好的研究强引力透镜区域的性质, 诸如临界曲线焦散曲线等。然而受计算机CPU计算能力和内存的限制, 我们不可能无限制的将网格变密。然

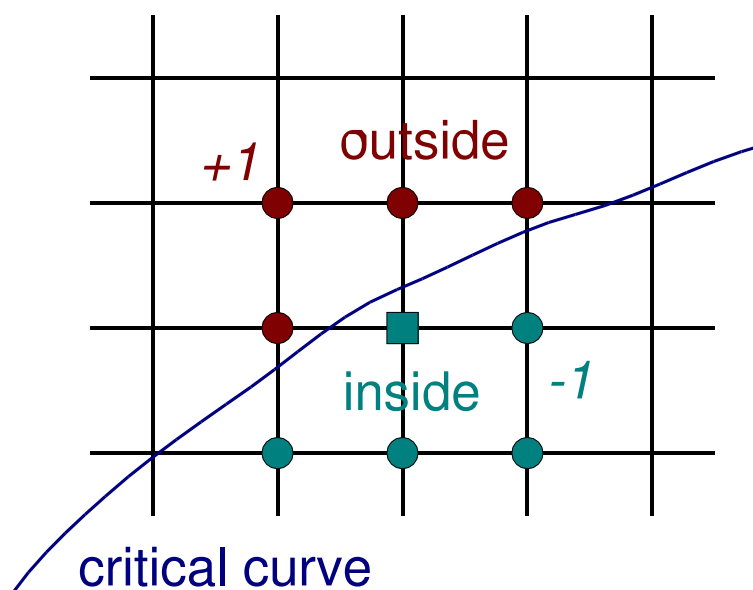


图 2.6: 确定像平面上临界曲线的方法。取自Bartelmann 2003。

而我们注意到强引力透镜效应只发生在高密度的一小块区域，因此我们只需要给出适度的网格精度，只要满足网格间隔 h 远小于临界曲线的尺寸和N体数值模拟的软化因子即可。对于我们最为关心的强引力透镜发生的区域，可以利用插值算法来提高运算精度。

我们可以直接利用傅立叶变换求出每个格点的偏转势、偏转角、剪切因子后分别将它们在更高的精度上插值。然而这三个量之间并非相互独立，所以分别作插值会破坏它们之间的内禀联系。所以更好的方法是只选取偏转势作插值，通过求偏转势的一阶二阶导数来计算出偏转角和剪切因子。

通常使用三次样条插值就可以很好的满足要求。它保证了导数的连续性，还给出了一阶和二阶导数，只需要进行一次插值就可以得到我们想要的各种信息。关于三次样条插值的详细介绍可参见William H. Press等人编著的《数值算法》一书。三次样条函数算法第一步就是计算各个数据点上的一阶和二阶导数。然后作为已知量代入插值公式来计算插值点上的值。这是必须要做的，因为每个数据点上的一二阶导数不会因为我们改变插值点而变化。所以我们插值最开始就要计算每个数据点上的一阶二阶导数和互导数，然后将它们保存下来作为下面计算的输入量，这一步是样条插值的初始化。

对于强引力透镜而言，我们只对透镜平面上一小部分区域感兴趣。剩下的

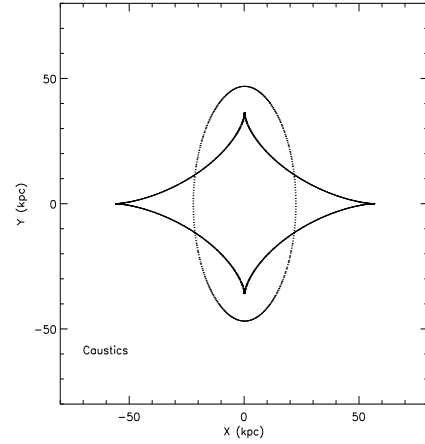
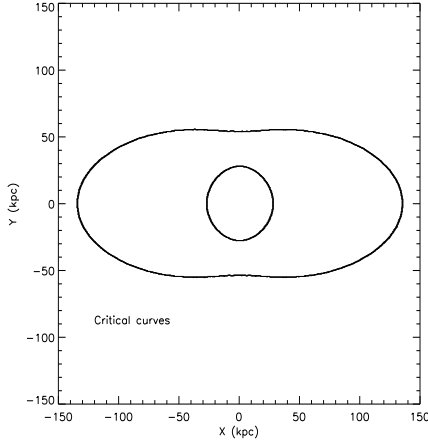


图 2.7: 数值计算出的采用等温椭球模型的引力透镜样本的临界曲线。图 2.8: 数值计算出的采用等温椭球模型的引力透镜样本的焦散曲线。

大部分区域只是为了消除傅立叶变换的周期性影响。因此我们只需要对我们关心的强引力区进行插值。我们可以通过限定放大因子来选取要插值的区域，例如选取放大因子 $\mu > 2.5$ 的区域。选取了需要插值的区域后，接下来就很简单了。做好了三次样条插值的初始化，然后根据所要求的精度在这个区域进行插值即可。样条插值相对于线性插值而言计算量要大一些，严格的说计算任意一点的插值都要用到全部的数据点，这样显然过于耗时。在实际计算中，因此我们并不会利用整个面密度网格上的点来计算，对于给定的插值点，我们确定它最邻近的格点 (i, j) ，以此为中心选取一个 $N \times N$ 的点阵，只要选取的点阵足够大，那么点阵之外的各点的作用可以忽略。通常， N 取 14 便已足够大。

经过插值后，我们得到了插值点上的偏转势以及偏转势的一阶二阶导数和互导数，这基本上的包括了强引力透镜研究所需的全部信息。从透镜公式我们知道，有了偏转势的一阶偏导即偏转角就可以将像平面上所有高精度的格点映射到源平面上。这样插值之后我们就建立了一个从源平面到像平面的点对点的映射列表。对于源平面上位置为 $\mathbf{y}$ 的点，我们可以利用映射表找到他在像平面上的观测位置 $\mathbf{x}$ 。

第3章 小波方法介绍

3.1 引言

小波分析(Wavelet Analysis)是数学中一个正在迅速发展的新领域,虽然历史并不算长,但是它已经得到了十分广泛的应用。小波这一概念是法国工程师Morlet在1984年最早提出的。和传统的傅立叶变换相比,小波变换在时间和频率上都是局域变换,而标准的傅立叶变换只在频率上是局域的。因而小波变换能够有效的从信号中提取信息,通过伸缩和平移等运算功能对函数或信号进行多尺度分析(Multiscale Analysis),解决很多不适合傅立叶变换处理的困难问题。此外,和快速傅立叶变换计算复杂度 $O(N \log N)$ 相比,离散小波变换的速度更快,它的计算复杂度为 $O(N)$ 。

小波方法已经在各个领域得到广泛应用。在这一章中,我们将介绍小波方法在天体物理中的几个应用,包括密度场的小波分解,以及小波去噪声方法等。对于小波变换的数学细节可参考文献Mallat(1989a,b);Meyer(1992);Daubechies(1992)等。

3.2 密度场的多尺度小波分析

3.2.1 尺度函数及小波函数

为了简单起见,我们这里只讨论一维的情况,二维和三维都可以类推之。考虑区间 $0 \leq x \leq L$ 上的密度分布 $\rho(x)$ 。其相对密度涨落为:

$$\delta(x) = \frac{\rho(x) - \bar{\rho}}{\bar{\rho}} \quad (3.1)$$

其中 $\bar{\rho}$ 是密度场的平均值。我们知道,不管是观测数据还是数值模拟数据,其密度分布的解析度都是有限值,假设这个值为 Δx 。所以我们可以将 $\delta(x)$ 无损的分成 2^J 个间隔。这里 J 取的足够大,使得 $L/2^J < \Delta x$ 。引入一个间隔整数 l ,其范围为 $0 \leq l \leq 2^J - 1$ 。第 l 个间隔的范围从 $lL/2^J$ 到 $(l+1)L/2^J$ 。那么,密度涨落可以被 2^J 个 $\epsilon_{J,l}$ 所定义。其中:

$$\epsilon_{J,l} = \delta(x), \quad Ll2^{-J} \leq x \leq L(l+1)2^{-J} \quad (3.2)$$

利用 $\epsilon_{J,l}$ ，我们可以将 $\delta(x)$ 写成下面的形式：

$$\delta(x) = \epsilon^J(x) \equiv \sum_{l=0}^{2^J-1} \epsilon_{J,l} \phi_{J,l}^H(x) \quad (3.3)$$

其中： $\phi_{J,l}^H(x)$ 由下面的公式给出：

$$\phi_{J,l}^H = \begin{cases} 1 & \text{for } Ll2^{-J} \leq x \leq L(l+1)2^{-J} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (3.4)$$

实际上， $\phi_{j,l}^H$ 可以看成是在分辨率尺度为 $L/2^j$ 下，对位置在 $Ll2^{-J} \leq x \leq L(l+1)2^{-J}$ 处密度扰动的加窗平均。我们把 $\phi_{j,l}^H$ 称之为尺度函数，将 $\epsilon_{J,l}$ 称之为对应的尺度函数系数(SFC)。如果定义尺度母函数为：

$$\phi^H(\eta) = \begin{cases} 1 & \text{for } 0 \leq \eta \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (3.5)$$

那么容易看出，从尺度母函数可以生成一系列尺度函数：

$$\phi_{j,l}^H(x) = \phi^H(2^j x / L - l), \quad (3.6)$$

其中 j, l 都是整数， $j \geq 0, 0 \leq l \leq 2^j - 1$ 。即尺度函数可以由尺度母函数经过简单的平移和伸缩变换而生成。我们可以将密度涨落 $\delta(x)$ 在尺度 $j = J - 1$ 下用尺度函数 $\phi_{j,l}^H(x)$ 来近似表示：

$$\delta^{J-1}(x) = \sum_{l=0}^{2^{J-1}-1} \epsilon_{J-1,l} \phi_{J-1,l}^H(x) \quad (3.7)$$

上式中的尺度函数系数 $\epsilon_{J-1,l}$ 可以由下式来计算：

$$\epsilon_{J-1,l} = \frac{1}{2}(\epsilon_{J,2l} + \epsilon_{J,2l+1}). \quad (3.8)$$

类似的，我们可以将这个步骤继续下去，在尺度 $j = J - 2, J - 3, \dots$ 下分别给出 $\delta(x)$ 的近似：

$$\delta^j(x) = \sum_{l=0}^{2^{j-1}-1} \epsilon_{j,l} \phi_{j,l}^H(x) \quad (3.9)$$

第 j 阶的尺度函数系数可以由第 $j+1$ 阶的尺度函数系数给出：

$$\epsilon_{j,l} = \frac{1}{2}(\epsilon_{j+1,2l} + \epsilon_{j+1,2l+1}). \quad (3.10)$$

$\epsilon_{j,l}$ 包含的信息比 $\epsilon_{j+1,l}$ 要少, 因此相应的 $\delta^j(x)$ 也比 $\delta^{j+1}(x)$ 包含的信息少一些。为了刻画它们之间的这种差别, 我们定义小波函数:

$$\psi^H(\eta) = \begin{cases} 1 & \text{for } 0 \leq \eta \leq 1/2 \\ -1 & \text{for } 1/2 \leq \eta \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (3.11)$$

这就是Haar小波, 所以我们在函数 $\phi(x)$ 和 $\psi(x)$ 上加了上标 H 。Haar小波是最早被提出的小波。类似的, 我们可以通过平移和伸缩运算得到一系列的小波基函数 $\psi_{j,l}^H(x)$:

$$\psi_{j,l}^H(x) = \psi^H(2^j x / L - l) \quad (3.12)$$

由公式(3.6)和(3.12)可以得到:

$$\phi_{j,2l}^H(x) = \frac{1}{2}(\phi_{j-1,l}^H(x) + \psi_{j-1,l}^H(x)), \quad (3.13)$$

$$\phi_{j,2l+1}^H(x) = \frac{1}{2}(\phi_{j-1,l}^H(x) - \psi_{j-1,l}^H(x)).$$

这样公式(3.3)就可以写成:

$$\delta^J(x) = \delta^{J-1}(x) + \sum_{l=0}^{2^{J-1}-1} \tilde{\epsilon}_{J-1,l} \psi_{J-1,l}^H(x) \quad (3.14)$$

我们称 $\tilde{\epsilon}_{J,l}$ 为小波系数(WFC), 容易知道有:

$$\tilde{\epsilon}_{J-1,k} = \frac{1}{2}(\epsilon_{J,2l} - \epsilon_{J,2l+1}). \quad (3.15)$$

这样, $\delta^J(x)$ 和 $\delta^{J-1}(x)$ 的差便由下式给出:

$$\tilde{\delta}^{J-1}(x) \equiv \sum_{l=0}^{2^{J-1}-1} \tilde{\epsilon}_{J-1,l} \psi_{J-1,l}^H(x). \quad (3.16)$$

于是公式(3.14)可以写成下面的形式:

$$\delta^J(x) = \delta^{J-1}(x) + \tilde{\delta}^{J-1}(x) \quad (3.17)$$

公式中的 $\tilde{\delta}^{J-1}(x)$ 包含了从尺度 J 到 $J-1$ 中因为平滑所损失掉的一切信息。

3.2.2 小波多尺度分析

将公式(3.17)中的过程重复下去，最终可以得到：

$$\delta^J(x) = \delta^0(x) + \tilde{\delta}^0(x) + \dots + \tilde{\delta}^{J-2}(x) + \tilde{\delta}^{J-1}(x) \quad (3.18)$$

其中

$$\tilde{\delta}^j(x) = \sum_{l=0}^{2^j-1} \tilde{\epsilon}_{j,l} \psi_{j,l}^H(x). \quad (3.19)$$

这就是密度涨落 $\delta(x)$ 的小波多尺度分析。其中 $\delta^0(x) = \epsilon_{0,0} \phi_{0,0}^H$ ， $\epsilon_{0,0}$ 是 $\delta(x)$ 在 $[0, L]$ 区间上的平均值，为零。因此 $\delta^0(x) = 0$ 。

注意到Haar小波在 j, l 指标上都是正交的：

$$\int_0^L \psi_{j',l'}^H(x) \psi_{j,l}^H(x) dx = \left(\frac{L}{2^j} \right) \delta_{j',j} \delta_{l',l} \quad (3.20)$$

其中 $\delta_{j',j}$ 是Kronecker符号。给定 j ，若 $j' \leq j$ ， $\psi_{j,l}^H(x)$ 和尺度函数 $\phi_{j',l}^H(x)$ 正交：

$$\int_0^L \phi_{j',l'}^H(x) \psi_{j,l}^H(x) dx = 0, \quad \text{if } j' \leq j. \quad (3.21)$$

这样，公式(3.19)中的小波系数可以由下式计算：

$$\tilde{\epsilon}_{j,l} = \frac{2^j}{L} \int_0^L \delta(x) \psi_{j,l}^H(x) dx. \quad (3.22)$$

公式(3.18)就可以写成：

$$\delta^J(x) = \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{l=0}^{2^j-1} \tilde{\epsilon}_{j,l} \psi_{j,l}^H(x). \quad (3.23)$$

3.2.3 紧支撑正交基

Haar小波有个明显的缺点：它在傅立叶波数空间中不是局域的。它的尺度函数和小波函数都是不连续的。从八十年代中期到九十年代早期，人们为了找到连续的小波基使得其在波数空间中具有局域性，做了大量工作(Daubechies 1988, Meyer 1988, Mallat 1989, Mallat & Zhong 1990)。特别是Daubechies在1988年构造出一组小波函数和尺度函数，具有很好的紧支撑正交性，并且是连续的，这组小波基得到了广泛应用。

为了构造出一组紧支撑正交小波基，它们的尺度函数和小波函数应该满足下面的方程(Daubechies 1992, Meyer 1993)：

$$\phi(\eta) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l \phi(2\eta - l) \quad (3.24)$$

$$\psi(\eta) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} b_l \phi(2\eta + l) \quad (3.25)$$

其中 a_l 和 b_l 称之为滤波系数。如果要求尺度母函数 $\phi(\eta)$ 是归一化的,那么由公式(3.24)可以得到:

$$\sum_l a_l = 2. \quad (3.26)$$

又要求 $\phi(\eta)$ 对不同的离散整数正交:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(\eta - m) \phi(\eta) d\eta = \delta_{m,0}, \quad (3.27)$$

因此我们有

$$\sum_l a_l a_l + 2m = 2\delta_{0,m}. \quad (3.28)$$

又因为小波函数 $\psi(\eta)$ 的容许性要求,我们可知

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\eta) d\eta = 0, \quad (3.29)$$

所以

$$\sum_l b_l = 0 \quad (3.30)$$

多尺度分析要求 ϕ 和 ψ 相互正交:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\eta) \phi(\eta - l) d\eta = 0. \quad (3.31)$$

因此

$$b_l = (-1)^l a_{1-l}. \quad (3.32)$$

以上的公式(3.26), (3.28), (3.30)和(3.32)给出了滤波系数要满足的约束条件。最简单的解 $a_0 = a_1 = b_0 = -b_1 = 1$, 别的系数全部为零。这就使我们上面曾经讨论过的Haar小波。除此之外最简单的解为:

$$a_0 = (1 + \sqrt{3})/4, \quad a_1 = (3 + \sqrt{3})/4, \quad (3.33)$$

$$a_2 = (3 - \sqrt{3})/4, \quad a_3 = (1 - \sqrt{3})/4. \quad (3.34)$$

这对应的小波被指为之Daubechies4小波。图(3.1)中画出了Daub4小波的尺度母函数和小波母函数的图,及其在傅立叶波数空间的模的平方。可以看到不管在实空间还是波数空间,它们都具有紧支撑性,即良好的局域性。

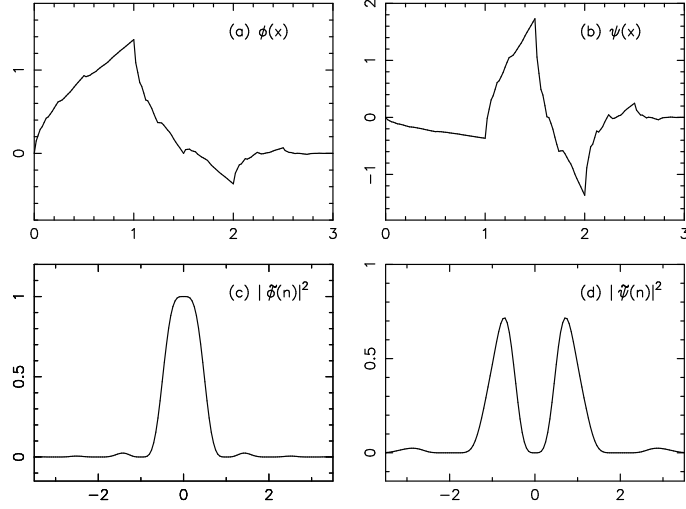


图 3.1: Daub4小波的尺度母函数 $\phi(x)$ 和小波母函数 $\psi(x)$ 及其对应的傅立叶变换的模平方。引自Yang et al. 2001

3.2.4 密度场的小波多尺度分析

构造出尺度函数和小波函数的母函数之后, 类似Haar小波, 同样可以经过平移和伸缩运算得到尺度及小波基函数:

$$\phi_{j,l}(x) = \left(\frac{2^j}{L}\right)^{1/2} \phi(2^j x/L - l) \quad (3.35)$$

$$\psi_{j,l}(x) = \left(\frac{2^j}{L}\right)^{1/2} \psi(2^j x/L - l), \quad (3.36)$$

不难看出, $\psi_{j,l}$ 和 $\phi_{0,m}$ ($0 \leq j < \infty, -\infty < l, m < \infty$)是周期为 L 的函数空间中的完备正交基。

考虑一个周期为 L 的密度场 $\rho(x)$, 那么利用正交基 $\psi_{j,l}$ 和 $\phi_{0,m}$ 可以将密度场 $\rho(x)$ 分解为:

$$\rho(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{0,m} \phi_{0,m}(x) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{c}_{j,l} \psi_{j,l}(x) \quad (3.37)$$

系数 $c_{0,m}$ 和 $\tilde{c}_{j,l}$ 可由下式给出

$$c_{0,m} = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) \phi_{0,m}(x) dx, \quad (3.38)$$

$$\tilde{c}_{j,l} = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) \psi_{j,l}(x) dx. \quad (3.39)$$

因为 $\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{j,l}(x)dx = 0$, 式(3.37) 可以写成:

$$\rho(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{0,m} \phi_{0,m}(x) + \bar{\rho} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{\epsilon}_{j,l} \psi_{j,l}(x) \quad (3.40)$$

其中 $\bar{\rho}$ 是平均密度, 另外

$$\tilde{\epsilon}_{j,l} = \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon(x) \psi_{j,l}(x) dx \quad (3.41)$$

其中 $\delta(x) = (\rho(x) - \bar{\rho})/\bar{\rho}$ 。容易证明, 公式(3.40)右边第一项等于

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{0,m} \phi_{0,m}(x) = L^{-1} \int_0^L \rho(x) dx. \quad (3.42)$$

实际上就是平均密度 $\bar{\rho}$ 。这样我们可以把公式(3.40)写成:

$$\delta(x) = \frac{\rho(x) - \bar{\rho}}{\bar{\rho}} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{\epsilon}_{j,l} \psi_{j,l}(x) \quad (3.43)$$

更一般的, 可以将密度场展开为

$$\rho(x) = \rho^J(x) + \bar{\rho} \sum_{j=J}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{\epsilon}_{j,l} \psi_{j,l}(x) \quad (3.44)$$

其中 $\rho^J(x)$ 是平滑尺度为 J 的密度场。

$$\rho^J(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \epsilon_{J,l} \phi_{J,l}(x) \quad (3.45)$$

尺度函数系数 $\epsilon_{J,l}$ 为

$$\epsilon_{J,l} = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) \phi_{J,l}(x) dx \quad (3.46)$$

这就是密度场的小波多尺度分析, 它在天体物理中有很多重要的应用。

3.3 小波方法在去噪中的应用

小波方法的一个非常重要的特性就是可以利用离散小波变换(DWT)对数据去除噪声, 这个特性目前已经广泛的应用在物理、工程及信号处理等诸多领域。相应的数学细节可参考Mallat等人的文献(e.g., Mallat 1998; Bergh et al. 1999)。我们首先简单介绍一下离散小波变换。

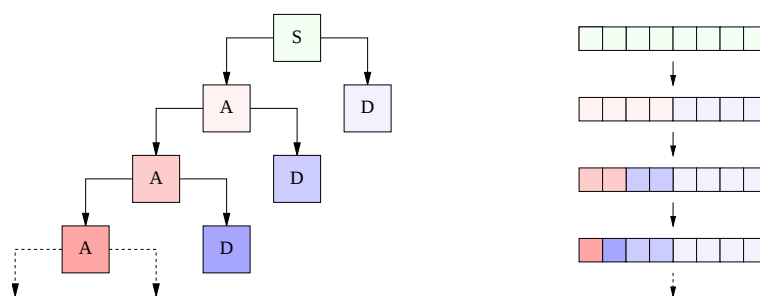


图 3.2: 左图为离散小波变换的过程示意图。右图为离散小波变换中每一步输出数据的组成。(Remeo, et al. 2003)

离散小波变换的思想是将数据的小尺度特征和大尺度特征用迭代的方法分别提取出来。第一步要将数据的最小尺度的特性分离出来，通过将数据经过高通滤波和低通滤波后输出来实现这一点。小波函数 $\psi(x)$ 对应着高通滤波，而尺度函数 $\phi(x)$ 对应着低通滤波。这实际上也是一种多尺度分析。接下来第二步要将比上一步中大一倍的尺度的特性从数据中提取出来。我们把上一步中通过低通滤波后输出的数据作为这一步的输入部分，然后同样按照上一步将其通过高通滤波和低通滤波后输出。这样我们可以一直重复这个过程，直到最大尺度的特性从数据中提取出来。简而言之，离散小波变换将原始数据分解成为一个粗糙的近似和一系列越来越精细的细节部分。图(3.2)给出了离散小波变换的示意图。其中左图为离散小波变换的过程示意图，右图为离散小波变换中每一步输出数据的组成。图中‘S’代表原始数据。‘A’代表数据通过低通滤波后输出的近似部分，‘D’代表数据通过高通滤波后输出的细节部分。

经过了离散小波变换后，原来的数据被变换成同样大小的一组小波系数。而原始数据可以通过将小波系数经过离散小波变换的逆变换而恢复，也就是上面过程的逆过程。

离散小波变换的自适应尺度和无冗余性又一个重要的特性：给定了一个包含噪声的数据后，对其作离散小波变换后，数据的主体部分集中在少量的数值较大的小波系数上，而噪声部分大部分变换成了很多数值很小的波系数。这是一个非常有利于去噪的特性，它意味着，如果我们能够将那些数值很小的波系数取为零，然后再作回逆变换，那么我们得到的新数据中的噪声将会大大减少。这就是离散小波变换去噪声的基本思想。

将去噪方法具体应用到实际时,还需要考虑各种细节。比如对高斯噪声和泊松噪声的处理是有区别的。去噪方法的关键之处在于怎么选取一个合适的阈值,将小于此阈值的小波系数取为零。数学上有很多种不同的方法来计算此阈值。另外选取不同的小波函数也对去噪的效果有影响。在第四章中,我们将会给出一套实用的基于离散小波变换的算法,并将讨论这些细节的处理。

在天文观测中,由于受到观测手段的限制,噪声的影响是无处不在的。另外,在 N 体数值模拟中,由于受到计算机处理能力的限制,模拟使用的粒子数有限,这不可避免会带来泊松噪声,影响最终的模拟结果。因此,小波去噪方法在天文学中是可以得到广泛应用的。

第4章 基于小波方法的平滑和去噪算法在引力透镜中的应用

我们在第二章中提到, 计算透镜平面的投影面密度在引力透镜研究中是很重要的。前面我们已经介绍了几种常见的计算N体数值模拟产生的样本的面密度算法, 包括CIC算法,TSC算法,SPH算法等。在这一章中, 我们将介绍基于小波方法的平滑算法, 以及去噪声算法, 同时将其应用在引力透镜的研究中。和同类算法相比, 我们的平滑算法能够在很高的精度上构建出引力透镜的投影面密度。我们生成用蒙特卡洛方法产生的满足等温椭球密度分布的引力透镜样本, 然后应用我们的算法计算其面密度及其临界曲线和焦散曲线, 并和理论值进行比较。我们还将此算法和SPH算法进行了对比, 证明了算法的优越性。

4.1 引言

近些年来, 随着观测手段的提高, 引力透镜已经成为了研究星系和宇宙学的重要工具。引力透镜的优势在于我们可以通过它来直接获取宇宙中物质分布的信息。它被广泛的应用在天文研究的很多领域之中。引力透镜是探测宇宙中暗物质分布的重要手段(Massey & Rhodes 2007), 可以用来测量星系及星系团的质量分布(e.g. Gray et al. 2006; Gavazzi et al. 2004) 以及获取宇宙大尺度结构的统计信息来限定宇宙学参数(e.g. Contaldi et al. 2003; Pedersen & Dahle 2007), 它还可以用于研究等级成团理论中的子结构问题(e.g. Chiba 2002; Dalal & Kochanek 2002; Metcalf & Madau 2001; Bradac et al. 2004)。

宇宙中的引力透镜具有比各种理论的物质分布模型复杂得多的机制, 比如复杂的非对称性, 子结构等。所以N体数值模拟是准确研究真实的引力透镜性质的最好途径。当我们用N体数值模拟来研究引力透镜的时候, 被模拟的透镜是由盒子里面的离散粒子所构成的, 所对应的则是现实空间中的光滑的质量分布。如果要研究数值模拟产生的透镜的属性, 在薄透镜近似下, 我们首先应该由模拟的三维密度场得到透镜平面上的投影面密度场, 然后才能得到诸如透镜势, 偏转角, 像的放大率等性质。因此一个能够精确的构建透镜面密度的平滑算法在引力透镜的研究中是非常重要的。

已经有很多不同的平滑算法在引力透镜的研究中使用. 包括常见的CIC格式(Amara et al. 2006)和TSC格式. 还有人应用了更复杂一些的平滑算法, 例如Gaussian内核函数(e.g. Bartelmann et al. 1998; Bradac et al. 2002); SPH内核函数(e.g. Li et al. 2005,2006)。有的平滑算法使用了固定长度的平滑尺度, 例如CIC, TSC或者Gaussian内核函数. 对于这种内核函数, 我们很容易证明先将粒子投影到透镜平面然后再平滑算出面密度(我们简称2维平滑)和先算出3维体密度场然后再沿垂直于透镜面的视线积分投影得到面密度(我们简称3维平滑)得到的结果是一样的. 因此对于固定尺度的平滑算法, 我们只需采用2维平滑算出面密度, 这样比先计算3维体密度场计算速度要快得多. 还有一些算法使用的平滑尺度不是固定的, 而是自适应的, 例如SPH内核函数. 在高密度区粒子分布密集, 采用较短的平滑尺度, 在低密度区则采用较长的平滑尺度. 3维平滑相比2维平滑从理论上说可以去除一些投影噪声, 不过计算量却要大得多.

小波方法从上个世纪90年代起便开始应用在宇宙学的统计研究之中了(e.g. Feng et al. 2000a,2000b,2001,2007)。小波变换的主要优点在于它可以同时得到位置空间和波数空间的统计性质。下面, 我们将提出一种新的基于小波多尺度分析方法的平滑及去噪算法, 并将其应用于计算引力透镜的投影面密度。

4.2 算法介绍

这一节中, 我们把算法分为两个部分来讨论, 首先简述对三维样本进行平滑的小波算法, 然后介绍去除噪声的小波算法.

4.2.1 小波平滑算法

为了简单起见, 我们讨论一维的情况. 给定了一个密度场 $\rho(x)$ ($0 < x < L$), 我们可以对其分解为(Fang & Thews 1998)

$$\rho(x) = \sum_{l=0}^{2^J-1} \epsilon_{J,l} \phi_{J,l}(x) + \sum_{j=J}^{\infty} \sum_{l=0}^{2^j-1} \tilde{\epsilon}_{j,l} \psi_{j,l}(x), \quad (4.1)$$

其中 $\epsilon_{J,l}$ 为尺度函数系数(简称SFCs), $\phi_{J,l}(x)$ 为尺度函数. $\tilde{\epsilon}_{j,l}$ 为小波函数系数(简称WFCs), $\psi_{j,l}(x)$ 为小波函数. J 和 j 是代表尺度的正整数, 对应的尺度为 $L/2^J$ 和 $L/2^j$. l 是代表位置的整数, 对应的空间范围是 $lL/2^j < x < (l+1)L/2^j$.

尺度函数可以由尺度函数的母函数 $\phi(x)$ 给出:

$$\phi_{J,l}(x) = \left(\frac{2^J}{L}\right)^{1/2} \phi(2^J x/L - l) \quad (4.2)$$

$\epsilon_{J,l}$ 可由下面的公式算出:

$$\epsilon_{J,l} = \int_0^L \rho(x) \phi_{J,l}(x) dx \quad (4.3)$$

给定了粒子分布后, 我们可以将其可以写成下面的形式:

$$\rho(x) = \sum_{i=1}^{N_g} w_i \delta^D(x - x_i), \quad (4.4)$$

其中 N_g 是粒子的总个数, $\{x_i\}$ 是第 i 个粒子的位置, $0 < x_i < L$, w_i 是第 i 个粒子的权重, δ^D 是Dirac- δ 函数. 粒子可以是实际观测到的星系, 也可以是数值模拟样本中的粒子. 将等式(4.4)代入到等式(4.1)和等式(4.3)后我们可以得到:

$$\rho(x) = \rho^J(x) + \sum_{j=J}^{\infty} \sum_{l=0}^{2^j-1} \tilde{\epsilon}_{j,l}^g \psi_{j,l}(x), \quad (4.5)$$

其中 ρ^J 为:

$$\rho^J(x) = \sum_{l=0}^{2^J-1} \epsilon_{J,l} \phi_{J,l}(x). \quad (4.6)$$

SFC系数 $\epsilon_{J,l}$ 为

$$\epsilon_{J,l} = \sum_{i=1}^{N_g} w_i \phi_{J,l}(x_i). \quad (4.7)$$

ρ^J 是 $\rho(x)$ 在尺度 J 下的平滑. 当 J 比较大的时候, $\rho^J(x)$ 就成为了 $\rho(x)$ 的很好的近似. 我们还可以得到

$$\sum_{l=0}^{2^j-1} \frac{L}{2^j} \epsilon_{j,l}^g = \sum_{i=1}^{N_g} w_i. \quad (4.8)$$

可以看出, 第 i 个粒子分配到第 l 个格点的质量为 $(L/2^j)w_i \phi_{J,l}(x_i)$. 尺度函数系数SFCs实际上是密度场 $\rho(x)$ 的一种质量分配.

应用此算法来计算引力透镜的面密度时步骤如下: 我们先将透镜的所有粒子垂直投影到给定的透镜平面得到一个二维点分布, 然后通过等式(4.7)来计算尺度函数系数SFCs. 得到了SFCs后, 我们就可以用等式(4.6)来算出透镜平面上任意一点的面密度了.

4.2.2 去噪声算法

我们知道, 2维平滑和3维平滑相比要带来一些多余的投影噪声。我们可以利用小波方法来去除这些噪声。小波方法是非常有效的去噪声工具, 已经被广泛的应用于数字信号和图像处理等领域(Mallat 1998; Bergh, Ekstedt & Lindberg 1999; Gonzalez & Woods 2002)。在处理透镜平面的面密度时, 我们采用了Romeo等人发展的一套小波方法(Romeo et al. 2003; Romeo et al. 2004)来去除多余的噪声。

应用小波方法去噪的处理过程如下: 如果需要处理的数据包含泊松噪声(例如数值模拟数据), 那么首先要做预处理。包含泊松噪声的数据 Y_P 可以在Anscombe变换(Anscombe 1948)下转换为只包含高斯白噪声的数据 Y_G , 其标准方差 $\sigma_G = 1$:

$$Y_G = 2 \sqrt{Y_P + \frac{3}{8}} \quad (4.9)$$

然后我们对预处理后的数据作快速小波变换。快速小波变换有一个很重要的特性: 包含噪声的数据做完小波变换后, 数据的主体信息被包含到一些大的小波系数之中, 而噪声的信息则被包含到许多很小的小波系数之中。如果我们能够设定一个合适的阈值, 然后将所有小于此阈值的小波系数取为零, 然后再作小波变换的反变换, 我们就可以得到新的一组数据, 这组数据基本去除了原来的噪声。快速小波变换的这种特性是它自身特有的属性, 和要处理的数据的性质无关。而且快速小波变换的运算速度非常快, 超过了快速傅立叶变换。快速小波变换的这种特性可以参考文献Addison(2002)和Goedecker(1998)中的详细讨论。

在整个去噪声过程中很重要的一步就是选取一个合适的阈值来处理小波系数。我们可以分为几种不同情况来处理。

阈值 T 正比于噪声的标准方差 σ , 比例系数 K 取决于数据的大小 N_d :

$$T = K(N_d) \sigma. \quad (4.10)$$

如果数据没有经过预处理, 不知道标准方差(噪声以高斯白噪声为主), 那么可通过求部分小波系数 $D_i(N_d/2)$ 的中位数绝对偏差来估计出 σ :

$$\sigma \simeq \frac{1}{0.6745} \text{MAD}[D_i(N_d/2)]. \quad (4.11)$$

如果噪声以泊松噪声为主, 那么经过了预处理之后其标准方差可估计为:

$$\sigma \simeq 1. \quad (4.12)$$

对于 $K(N_d)$, 一般有两种不同的估计方式. 第一种是:

$$K(N_d) = \sqrt{2 \ln N_d}. \quad (4.13)$$

这种估计方式去噪声效率较高, 但是可能会损失数据的原有信息, 因此不十分安全. 另一种估计方式为:

$$K(N_d) \simeq \begin{cases} 0 & \text{若 } N_d \leq 32, \\ 0.3936 + 0.1829 \log_2 N_d & \text{若 } N_d > 32. \end{cases} \quad (4.14)$$

在处理数值模拟数据的时候, 我们通常选用后一种估计方式. 得到了阈值之后, 就可以对小波系数进行处理了, 我们可以有两种不同的处理方法, 一种是所谓的硬处理:

$$\overline{W}_i = \begin{cases} 0 & \text{若 } |W_i| \leq T, \\ W_i & \text{若 } |W_i| > T; \end{cases} \quad (4.15)$$

其中 W_i 是小波系数, $\overline{W}_i$ 是处理后的小波系数. 硬处理将小于阈值的小波系数取为零, 其余系数保持不变. 相对应的软处理则为:

$$\overline{W}_i = \begin{cases} 0 & \text{若 } |W_i| \leq T, \\ \text{sign}(W_i)(|W_i| - T) & \text{若 } |W_i| > T. \end{cases} \quad (4.16)$$

软处理对于大于阈值 T 的小波系数也减去了一个 T . 对于数值模拟数据, 软处理会给去噪后数据带来一定的偏差, 所以通常选用硬处理。

处理完小波系数后, 我们对其作逆快速小波变换便得到了去除噪声后的数据. 当然如果数据原先经过了预处理, 那么此时也应该相应的作Anscombe反变换来恢复. 需要指出的是Anscombe变换会给数据带来一个偏差, 不过这个偏差可以解析的估计为:

$$\text{bias} \simeq -\frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{N_d} \right) \sigma^2. \quad (4.17)$$

所以我们只需对去除噪声后的数据整体减去这个偏差即可。

当对透镜模拟样本的粒子做完DWT分解后, 我们便得到了一个SFCs的矩阵. 我们应用本节中的小波去噪算法, 对此SFCs矩阵去除噪声. 因为SFCs矩阵包含了密度场的信息, 所以去除了SFCs的噪声便相当于对整个密度场去噪声. 然后用去除噪声后的SFCs矩阵便可以重构密度场。

4.3 数值检验

4.3.1 去噪算法的检验

在这一节中，我们将对小波去噪算法进行几个数值检验，分别测试算法对高斯噪声及泊松噪声的去噪效果。首先，我们检验小波去噪算法对高斯白噪声数据的去噪效果。为了衡量去噪声的效果，我们需要定义一个量来衡量噪声的大小。假设原始无噪声的数据为 f ，加入了噪声后的数据为 $\hat{f}$ ，那么定义信噪比 SNR 为：

$$SNR = 10 \log_{10} \frac{|f|^2}{|f - \hat{f}|^2} = 10 \log_{10} \frac{\sum_k f_k^2}{\sum_k (f_k - \hat{f}_k)^2} \quad (4.18)$$

我们生成了两个高斯噪声数据样本。第一个样本包含 2^{12} 个数据点，在常数10上加入了强度为1的高斯噪声。信噪比为19.95，经过小波去噪后，信噪比为46.134，提高了一倍多。用上一节的方法算出了高斯噪声的标准方差为1.009，已经非常接近方差的实际值1。图(4.1)分别为是去噪前后的数据图。可以看到去噪后的数据已经基本去除了噪声。另外一个高斯噪声数据也包含了 2^{12} 个数据点，我们在0到 π 区间上的正弦函数上加入强度为0.05的高斯噪声。数据的信噪比为22.9692。经过小波去噪后，信噪比同样提升了一倍到46.3470。算出的噪声的标准方差为0.0504。图(4.2)分别给出了去噪前后的数据。和上一个样本一样，噪声被非常好的去除，完全恢复出了正弦曲线。

从这两个测试中我们可以看出小波方法去除高斯噪声是非常有效的。我们下面研究一下它处理泊松噪声的能力。我们用如下的方法生成了一个泊松样本：在 256^2 的2维平面网格上随机放入 256^2 个粒子，然后用CIC方法生成网格的面密度场。那么这个密度场实际上是在均匀分布的面密度场中加入了泊松噪声。这个泊松数据的信噪比为3.5402。用小波方法对之去噪后，信噪比大幅提升，达到了23.99。这个测试说明去噪算法对于泊松噪声的处理能力也是很强大的。在图(4.3)我们画出了去噪前后的面密度图。

4.3.2 蒙特卡洛方法生成的透镜样本

Kormann和Keeton等人提出的等温椭球模型是最常见的引力透镜模型(Kormann, Schneider & Bartelmann 1994; Keeton & Kochanek 1998)。它有解析形式的临界曲线和焦散曲线。我们将用它来检验平滑算法。

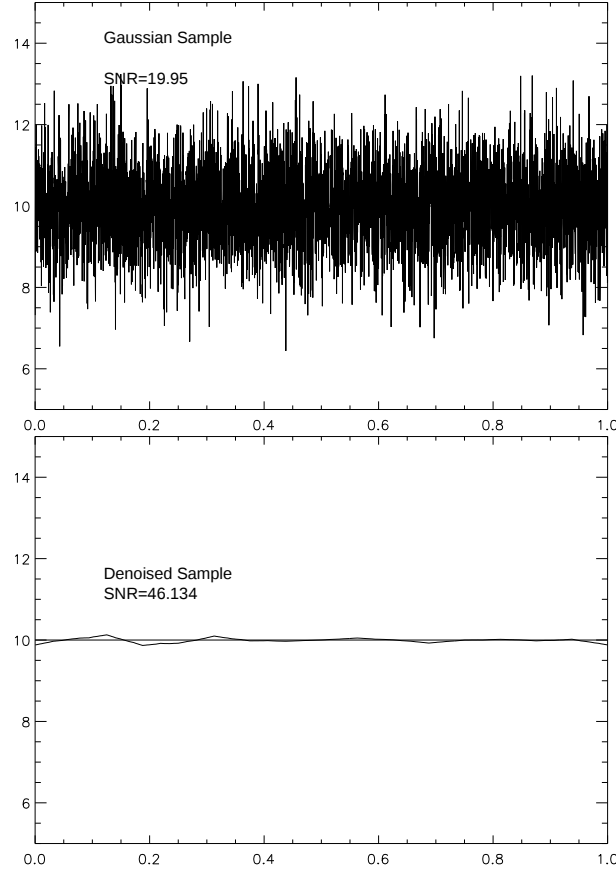


图 4.1: 包含噪声强度为1的高斯噪声数据样本去噪前后的对比。

等温椭球的密度分布如下:

$$\rho = \frac{v_c^2}{4\pi G q_3} \frac{e}{\sin^{-1} e} \frac{1}{s^2 + x^2 + y^2 + z^2/q_3^2}, \quad (4.19)$$

其中 v_c 是晕的旋转速度, G 为引力常数, s 是椭球中心的核的半径, 三维椭球的 X , Y 轴是等长的, q_3 是短轴 Z 和等长轴的比值, 投影椭率为 $e = \sqrt{1 - q_3^2}$ 。我们取 v_c 为 1500 km s^{-1} , $s = 20 \text{ kpc}$, and $q_3 = 0.5$ 。

我们用蒙特卡罗方法生成密度分布满足公式(4.19)的模拟样本。取透镜所在的立方体盒子的边长为 4 Mpc 。透镜和源的红移分别取为 0.3 和 1.0 , 投影方向沿长轴 Y 轴。我们生成了两组不同质量解析度的模拟样本。高质量解析度的样本包含 $N_p = 2 \times 10^6$ 个粒子, 每个粒子的质量为 $M_p = 4.375 \times 10^8 h^{-1} M_\odot$, 低质量解析度的样本包含 $N_p = 2 \times 10^5$ 个粒子, 每个粒子质量为 $M_p = 4.375 \times 10^9 h^{-1} M_\odot$ 。哈勃常数的单位取为 $100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ 。

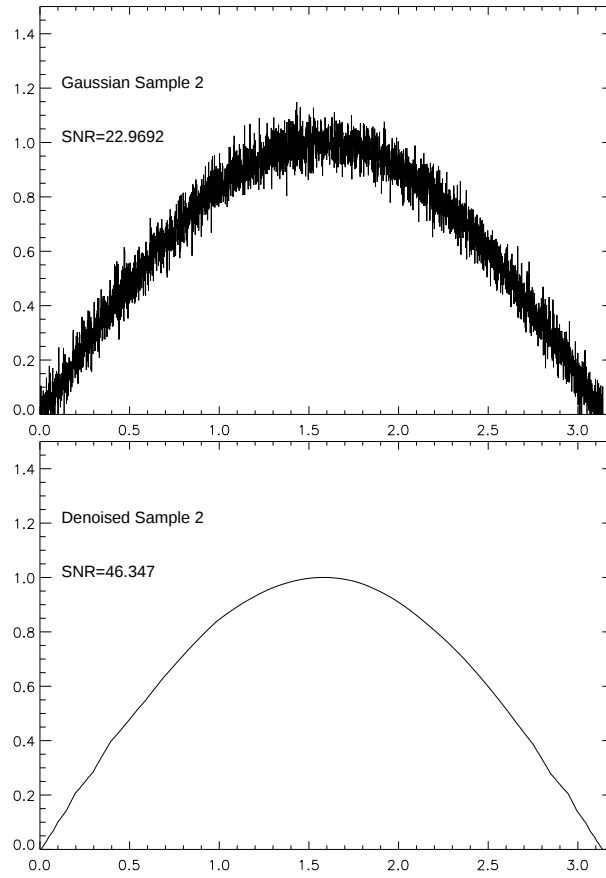


图 4.2: 包含噪声强度为0.05的高斯噪声数据样本去噪前后的对比。

我们用上节所介绍的算法来计算模拟样本的面密度 κ , 面密度的网格为 1024×1024 . 对每组样本, 我们分别使用了三组不同的小波基来计算, 包括Daub4, Daub6 和B-spline 3th. 然后我们用得到的面密度场来算出透镜的临界曲线和焦散曲线。

图(4.4)是从低质量解析度样本算出的透镜面密度分布。图上各个点表示在不同的椭圆半径间隔内的面密度平均值, 实线是根据等式18算出来得理论值. 相对误差画在了图的下方。可以看出三组不同的小波基都能比较好的拟合理论曲线。然而在距离中心比较近的区域, Daub4小波基不能很好的重构面密度, 相对误差较大。相反B-spline 3th和Daub6却能相对较好的重构这部分区域的面密度。但是从整体看, B-spline 3th小波基不如Daub4和Daub6的结果那么平滑。因此总体来说Daub6小波基是最优选择。需要指出的是这些结果都是经过JOFILUREN程序处理后去除了噪声的。我们计算了一组没有经过JOFILUREN程序去噪的面密度,

从中可以看出噪声的影响。图(4.5)和图(4.4)的第一幅相同,都是使用Daub4小波基计算的面密度,但没有经过JOFILUREN程序处理。可以看出经过去噪声处理后,噪声水平被去除了很多,而且没有损失密度场的信息。这说明JOFILUREN程序可以很有效的去除样本中的噪声。

图(4.7)是低质量解析度样本面密度算出的临界曲线和焦散曲线。因为Daub4小波基不能很好的重构离中心较近区域的面密度,算出的临界曲线和理论曲线有着较大的偏差,临界曲线的内曲线误差尤其大一些。Daub6和B-spline 3th小波基则能较好的符合理论曲线,尤其是临界曲线的内曲线,误差比Daub4要小得多。

对高质量解析度的蒙特卡罗样本,我们也计算了其投影面密度和对应的临界曲线和焦散曲线,结果在图(4.8)和图(4.9)中。可以看出来其投影面密度的相对误差要远远小于低质量解析度样本。三组小波基算得的面密度相对误差值被控制在1.7%以下。相应的临界曲线和焦散曲线结果也非常好,三组不同的小波基算出的结果都能很好的和理论曲线符合。Daub6小波基的结果比起另外两组小波基要略微平滑一些,基本上和理论曲线完全吻合了。

作为对比,我们在这里引用一组李国亮等人用SPH3D平滑算法算得的蒙特卡罗透镜样本的结果(Li et al. 2006)。他们所使用的透镜模拟的参数和我们是一样的,只不过粒子数略有不同,粒子数为1748982,和我们所采用的高质量解析度样本的粒子数很接近,所以近似的可以做一个比较。图(4.10)是他们算得的透镜面密度分布,图(4.11)是所对应的临界曲线。和我们的高质量解析度样本的结果相比,他们的面密度误差要大接近一倍,而且从面密度算得的临界曲线也不如我们的结果光滑。我们的三组不同小波基的结果都比SPH方法好,可见在 10^6 量级上我们的算法是具有优势的。

总的来看,当计算粒子数较多的透镜模拟样本时(粒子数达到 10^5 或 10^6 量级),我们的平滑算法能够相当好的重构透镜的面密度场。但如果样本的粒子数比较少(低于 10^5 量级),算出来的面密度场还是有一定的误差。我们计算了一组粒子数为 $N_p = 5 \times 10^4$ 的样本的临界曲线和焦散曲线。如图(4.6)所示,可以看到计算出来的临界曲线和理论值相比出现了较大的振荡,变得不再平滑。因此我们的算法应用在粒子数不低于 10^5 的样本时效果最佳。然而随着目前计算机硬件的计算能力日益提高,目前数值模拟研究所使用的粒子数也随之越来越大。N体数值模拟研究引力透镜的样本粒子数普遍都在 10^5 或 10^6 量级甚至更高,因此很

适合此算法的应用。

需要指出的是用此平滑算法计算面密度的计算速度很快,我们使用了Intel的Itanium CPU计算,计算时间均小于20秒。而李国亮等人的SPH3D算法则需要数分钟之久。因此对于以后 10^8 乃至 10^9 粒子数量级的模拟,我们的算法更具有优势。

4.3.3 N-body数值模拟样本

在上一节我们检验了小波平滑及去噪算法对蒙特卡洛透镜模拟样本的计算效果,作为应用,这一节我们将算法应用在真实的N体数值模拟样本上,来研究一下数值模拟样本中子结构和物质流对透镜性质的影响。

我们跟李国亮要了一个N体数值模拟产生的引力透镜样本。这个N体数值模拟采用了 Λ CDM宇宙学模型,物质密度 $\Omega_0 = 0.3$,宇宙学参数 $\Lambda_0 = 0.7$,形状因子 $\Gamma = 0.21$, $\sigma_8 = 0.9$, $h = 0.7$ 是以 $100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ 为单位的哈勃常数。这个宇宙学数值模拟所用的盒子尺度为 $L = 100 h^{-1} \text{ Mpc}$,算法采用 P^3M 方法。数值模拟采用了 512^3 个粒子,每个粒子的质量为 $m_p = 6.2 \times 10^8 h^{-1} M_\odot$ 。软化因子 $\eta = 30 h^{-1} \text{ kpc}$,质量解析度为 $1.67 \times 10^{10} h^{-1} M_\odot$ 。关于数值模拟的详细细节参见Jing & Suto (2002)。

我们所用的星系团是在红移 $z = 0.326$ 处所选取的。星系团的质量为 $M = 3.4 \times 10^{14} h^{-1} M_\odot$,维里半径为 $1.6 h^{-1} \text{ Mpc}$ 。我们假定源的红移位于 $z = 2.0$ 处。和上一节的等温椭圆球一样,星系团放在了一个边长为 4 Mpc 的立方体盒子中,这就是我们要研究的透镜样本了。透镜的中心位于星系团的中心处。这个样本总共包含粒子数为 $N_p = 565600$ 。另外,为考察引力绑定的子结构的影响,使用SUBFIND算法(Springel et al. 2001)找出子结构。但是这个算法只能找到引力绑定的结构,而另外一些相对松散的结构则被忽略了。这种结构通常是被潮汐力拉散的结构所产生的遗迹,我们称之为物质流。

寻找物质流的方法是计算粒子在相空间中的密度,找出相空间中成团的粒子,将其定义为物质流。这样的结构在空间具有一定的成团性,而且成员粒子的运动速度具有连续性,更加符合流的概念。我们要找的物质流粒子具有这样的特征:它们的体密度明显高于它们所处的背景密度,它们的速度具有较强的关联性。因此可分为两个步骤,首先在位置空间找团,然后将选出的粒子在速度空间进行进一步筛选。图(4.12)中表示的是利用这样的方法找到的一个物质流。

这样,我们首先剔除了子结构粒子后产生了一个样本,这个样本的粒子数为 $N_p = 515618$,我们称为样本2。然后我们在样本2中再把物质流粒子剔除掉,这个剔除了子结构和物质流的样本粒子数为 $N_p = 508748$,这个样本我们称为样本3。原来的包含了所有粒子的样本我们当成样本1。我们用小波平滑算法计算了三个样本投影后的面密度,这里我们选用了小波基Daub6。然后分别计算了三个样本的临界曲线。图(4.13)中画出了样本1和样本2的临界曲线,我们可以看到样本1的临界曲线和样本2的临界曲线几乎是完全重合的,这说明子结构对星系团透镜的临界曲线几乎没有影响。然而我们发现,物质流对星系团透镜的临界曲线的贡献是不可忽略的。在图(4.14)我们画出了样本1和样本3的临界曲线,可以看出临界曲线在图(4.12)的方框位置处发生了明显的改变,这说明了剔除了方框内的物质流粒子后导致临界曲线形状的改变。

我们的结果和李国亮等人的结果(Li et al. 2006)是基本相符的。他们对N体数值模拟星系团透镜样本进行计算后也得到了同样的结论。

4.4 结论

在本章中,我们介绍了一种使用了小波多尺度分析的平滑算法和基于DWT的小波去噪算法,并将其应用在强引力透镜的研究中。为了检验去噪算法的效果,我们分别处理了几组高斯噪声和泊松噪声数据,结果表明小波去噪方法能够非常有效的去除高斯噪声和泊松噪声,大大提高了数据的信噪比。

我们随后使用了用蒙特卡罗方法生成的等温椭球数值模拟样本来检验平滑算法。我们生成了两组不同的质量解析度的样本,代表了数值模拟中常用的两种质量解析度。计算结果表明该算法能够非常好的构建高质量解析度透镜样本的面密度场,算得的面密度场相对误差控制在了非常低的水平上。同时对低质量解析度样本也能较好的重构其面密度场。我们同时比较了三组不同的小波基的计算效果,包括Daub4, Daub6 和B-spline 3th小波基,计算结果表明Daub6小波基最优,算得的面密度相对误差小,根据面密度算出的临界曲线和焦散曲线也优于另外两组小波基。B-spline 3th小波基也是一个很好的选择。作为对比,我们引用了一组李国亮等人用SPH3D方法算得的蒙特卡罗透镜样本面密度结果,他们的样本粒子数和我们的低质量解析度样本接近,但是算得的面密度相对误差要高于我们的结果一倍以上,算得的临界曲线也不如我们的结果光滑。结果表明粒子数在 10^6 量级时我们的平滑算法是很有优越性的。我们计算了一组N体数值模拟产

生的引力透镜样本的临界曲线，计算结果表明数值模拟产生的子结构对透镜的临界曲线基本没有影响，然而物质流对临界曲线的影响却是很明显的。对N体数值模拟产生的引力透镜样本进行更加深入的研究，是我们今后工作的目标。

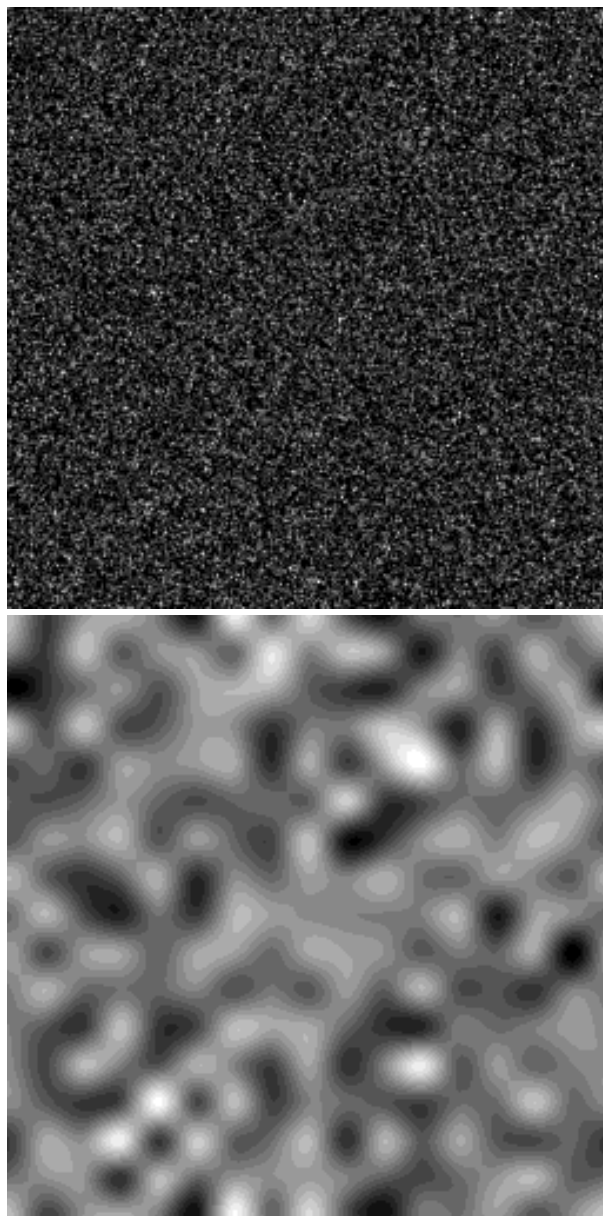


图 4.3: 包含泊松噪声的数据去噪前后的对比。

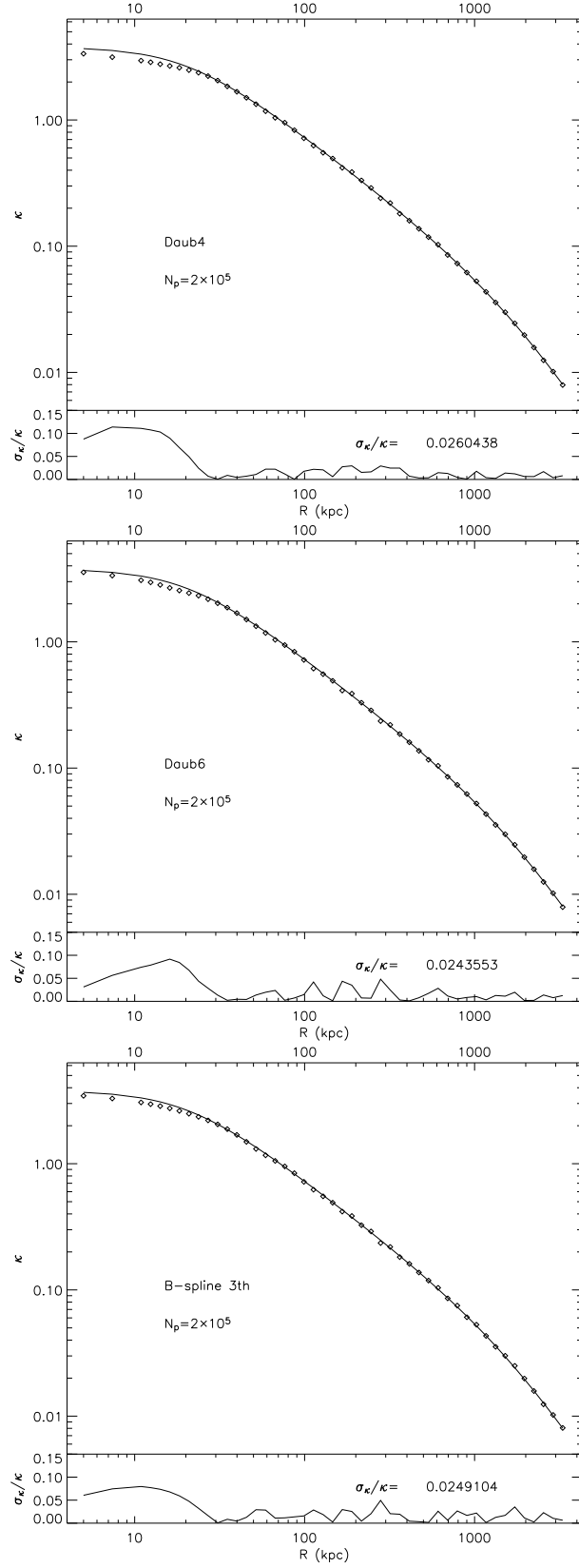


图 4.4: 低质量解析度样本的面密度 κ 及其相对误差随椭圆半径 R 的变化. 实线是理论值, 点是用平滑算法算得的. 所使用的小波基和样本粒子数标注在每张图上.

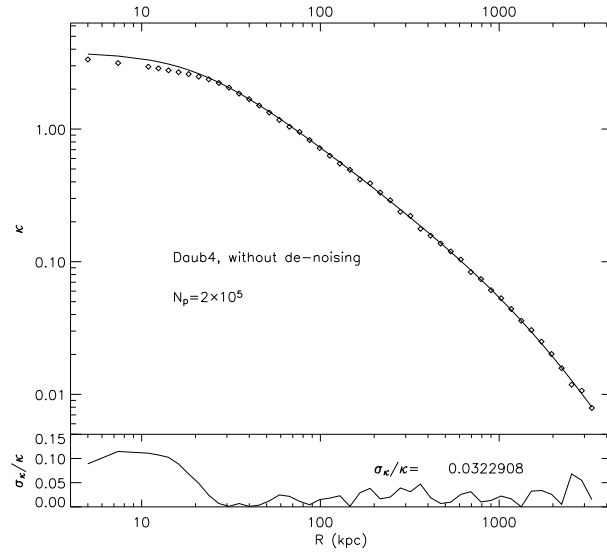


图 4.5: 用Daub4小波基算得的低质量解析度样本的面密度 κ 及其相对误差随椭圆半径 R 的变化, 但没有经过去噪声处理.

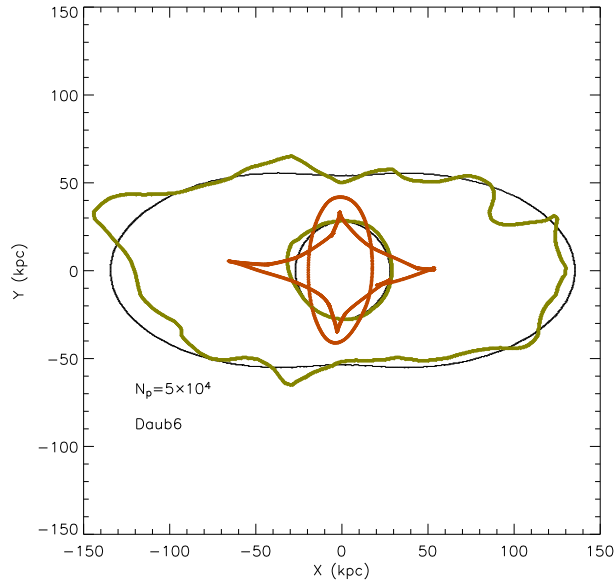


图 4.6: 粒子数为 5×10^4 的样本的临界曲线和焦散曲线. 黑色曲线是理论曲线, 黄色和红色曲线分别是样本的临界曲线和焦散曲线. 所使用的小波基和样本粒子数标注在图上.

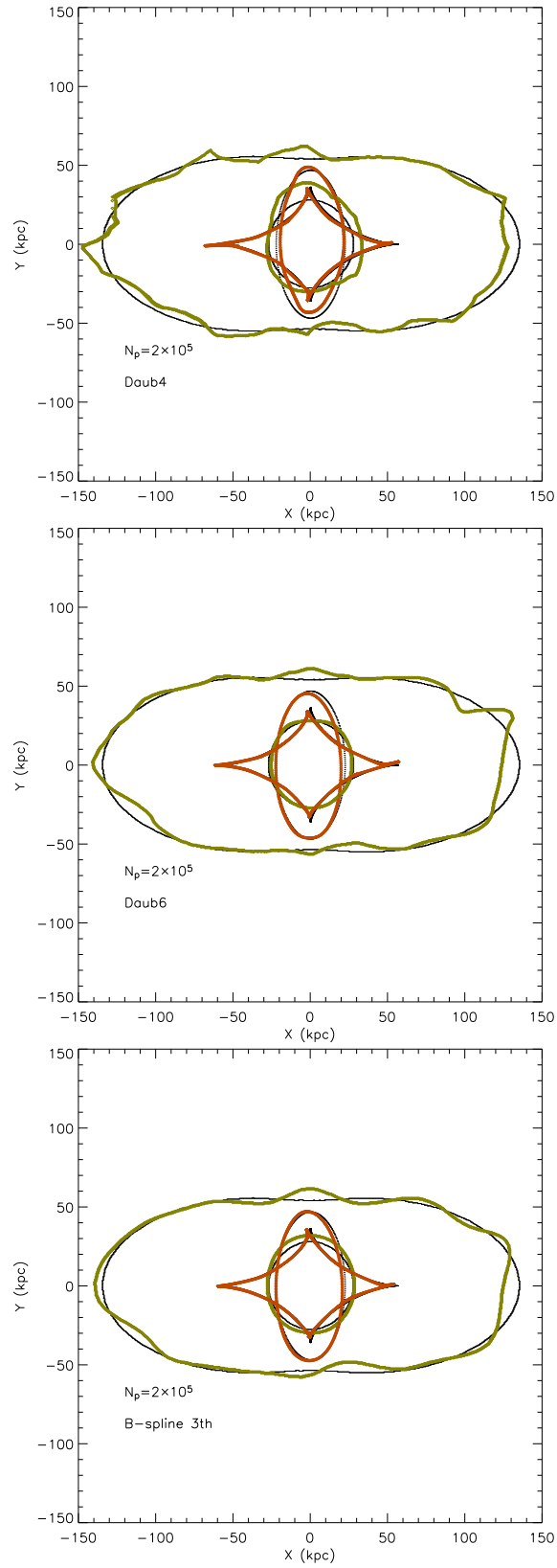


图 4.7: 低质量解析度蒙特卡罗样本的临界曲线和焦散曲线. 黑色曲线是理论曲线, 黄色和红色曲线分别是样本的临界曲线和焦散曲线. 所使用的小波基和样本粒子数标注在每张图上.

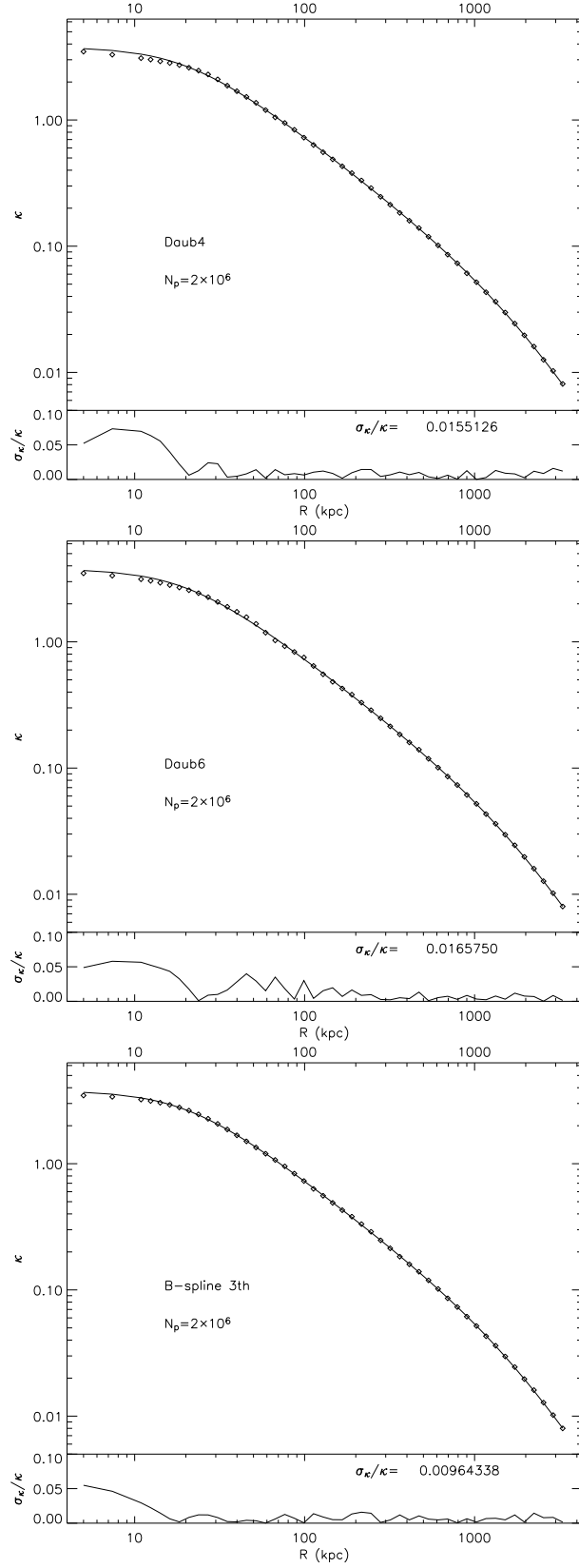


图 4.8: 高质量解析度样本的面密度 κ 及其相对误差随椭圆半径 R 的变化. 实线是理论值, 点是用平滑算法算得的. 所使用的小波基和样本粒子数标注在每张图上.

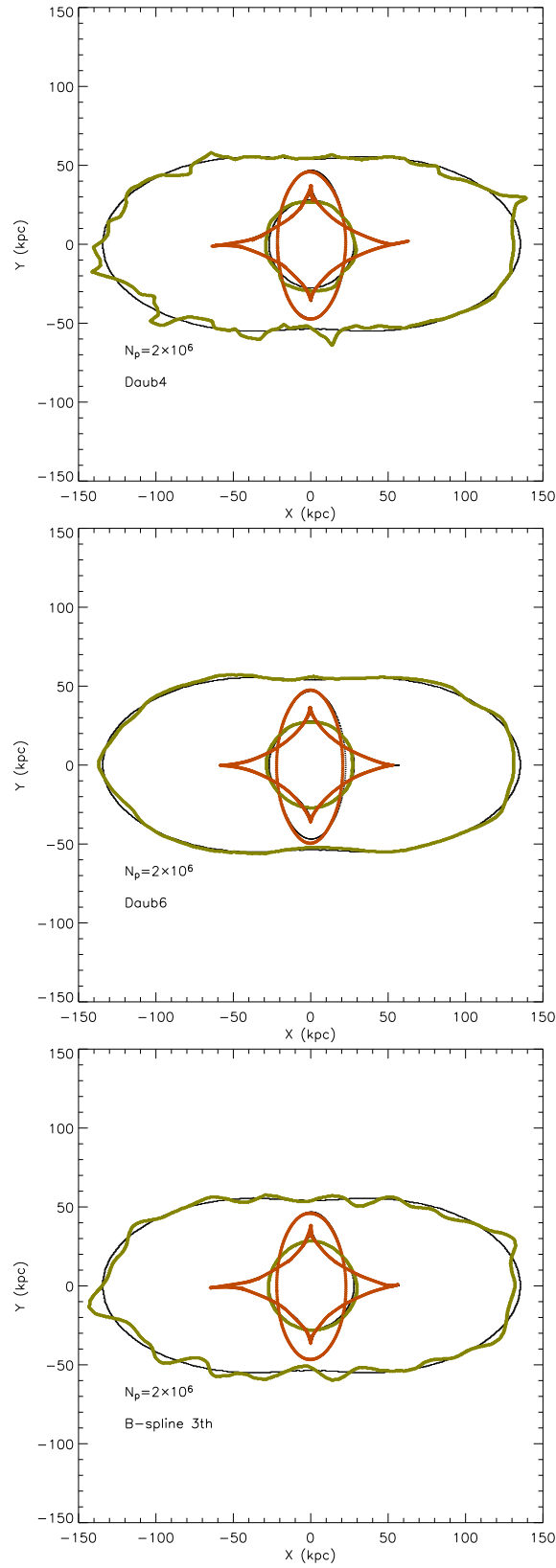


图 4.9: 高质量解析度蒙特卡罗样本的临界曲线和焦散曲线. 黑色曲线是理论曲线, 黄色和红色曲线分别是样本的临界曲线和焦散曲线. 所使用的小波基和样本粒子数标注在每张图上.

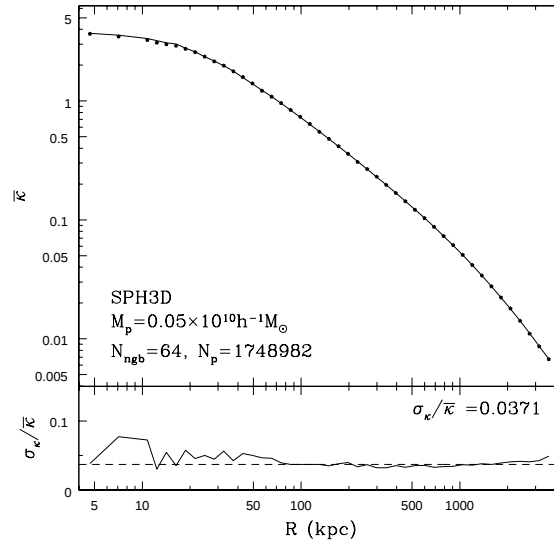


图 4.10: 用SPH3D方法算得的面密度 κ 及其相对误差随椭圆半径 R 的变化, 引自Li et al. 2006. 实线是理论值, 点是用SPH平滑算法算得的. 样本粒子数标注在图上.

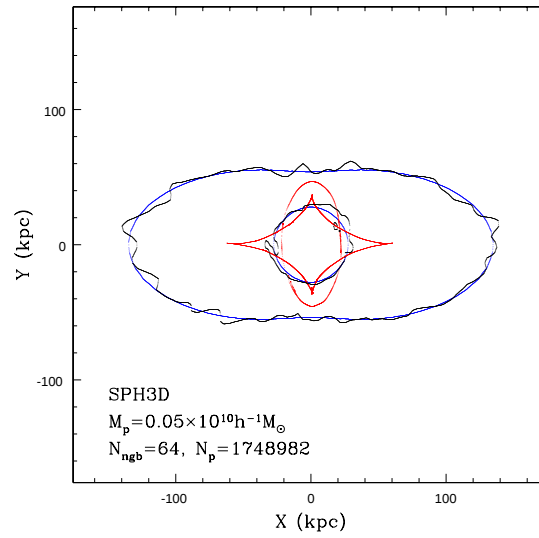


图 4.11: 用SPH3D方法算得的面密度的临界曲线和焦散曲线引自Li et al. 2006. 蓝色和红色曲线分别是理论的临界曲线和焦散曲线. 黑色曲线是样本的临界曲线.

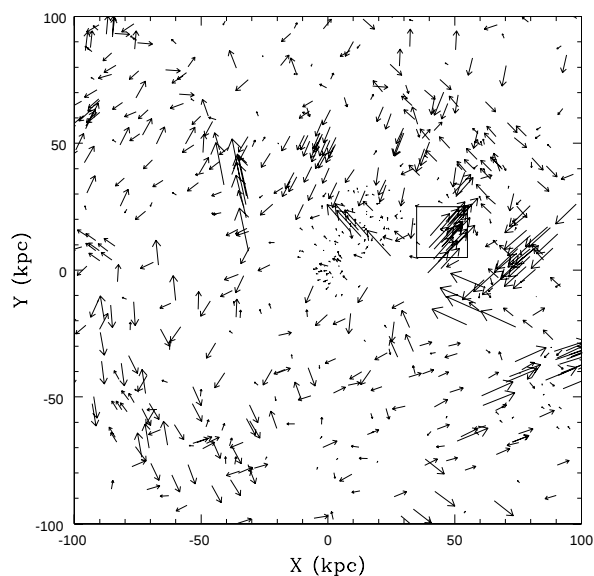


图 4.12: N体数值模拟的星系团粒子在相空间所找到的物质流, 引自Li et al. 2006. 星系团中心位于图的中央。

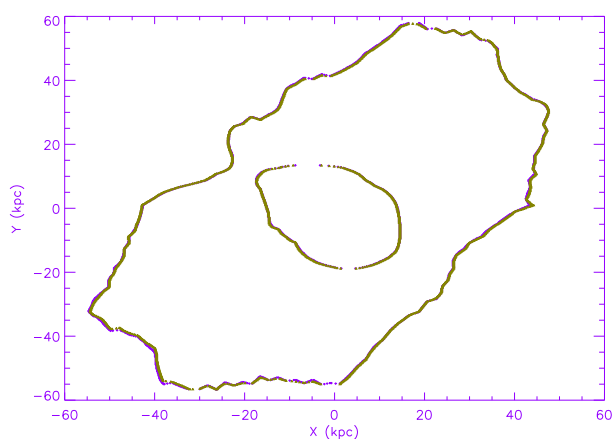


图 4.13: N体数值模拟星系团透镜样本1和样本2的临界曲线, 分别对应着紫色曲线和黄色曲线。样本2在样本1中剔除了子结构粒子。

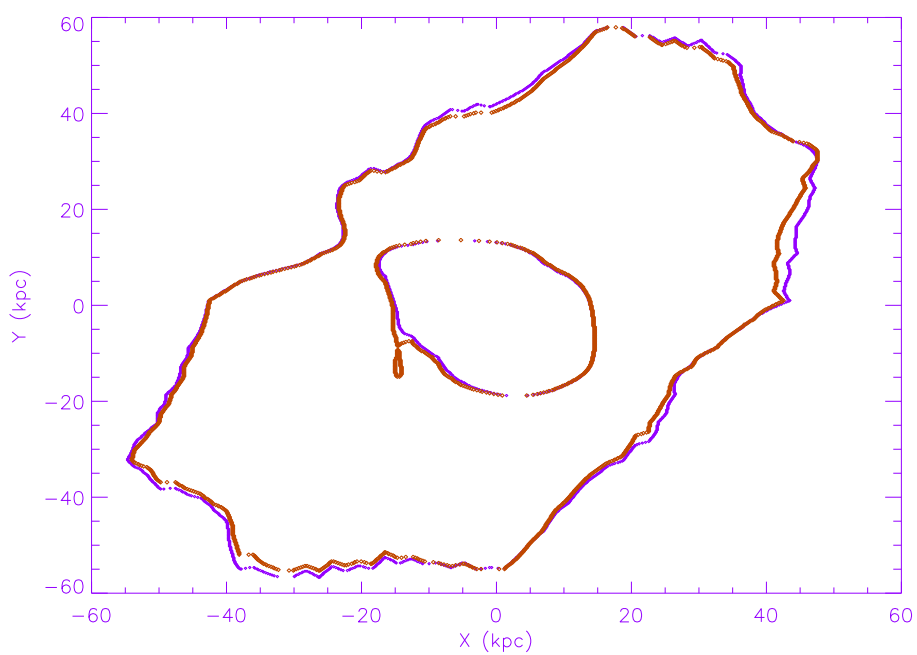


图 4.14: N体数值模拟星系团透镜样本1和样本3的临界曲线，分别对应着紫色曲线和红色曲线。样本3在样本1中剔除了子结构和物质流粒子。

第5章 小波方法在大尺度结构统计中的应用

5.1 引言

功率谱是测量宇宙中物质分布的最重要的手段之一。它包含了宇宙和结构形成中一些基本的物理信息。事实上在当前的由引力不稳定性产生的等级成团的冷暗物质模型中,功率谱代表了结构形成中物理过程的典型尺度。同时在数学上,它使得我们可以对参数空间给一个限定从而区分不同的理论模型。因此,宇宙大尺度结构的统计研究中的一个至关重要的任务就是精确的测量功率谱。迄今为止,人们已经发展了很多种不同的方法来测量星系功率谱。

早在1969年,Yu和Peebles就认识到功率谱在刻画星系成团性质的重要性。从那时候起,人们计算了很多红移巡天的星系功率谱。比较有影响力的有:CfA和Perseus-Pisces红移巡天(Baumgart & Fry 1991),射电星系巡天(Peacock & Nicholson 1991),CfA红移巡天(Park et.al. 1994),QDOT巡天(Feldman, Kaiser & Peacock, 1994),1.2Jy IRAS巡天(Fisher, et.al, 1993),2Jy IRAS巡天(Jing & Valdarnini 1993),CfA和SSRS巡天(Vogeley et al. 1992; da Costa et al. 1994),Stromlo-APM红移巡天(Tadros & Efstathiou, 1996),Las Campanas巡天(Lin et.al., 1996)。另外,Baugh和Efstathiou还从二维巡天APM中测量到的二维功率谱和角相关信息中计算出了三维功率谱。特别是从2dFGRS巡天计划和SDSS巡天计划得到的傅立叶功率谱(e.g. Percival et al. 2002; Tegmark et al. 2004; Percival et al. 2007)标志着精确宇宙学时代的来临。

Baumgart和Fry(1991)最早提出了利用三维的红移巡天来测量功率谱的实际方法。他们提出一个简单方法,就是把红移巡天的数据放了一个盒子之中,然后将数据作傅立叶变换从而计算出功率谱。随后,在Feldman, Kaiser和Peacock(1994)的一篇很有影响力的文章中,他们对Baumgart和Fry的方法做了一个改进:他们通过一个辅助的随机样本得到选择函数和窗口函数,然后给每个星系都加了这种权重,从而得到功率谱的最佳估计。

从技术上说,给定了一个星系分布后,密度场的傅立叶变换就可以通过按

照傅立叶变换的定义直接求和的方法来计算：

$$\hat{\rho}_g(\mathbf{n}) = \sum_{i=1}^{N_g} w_i e^{2\pi \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_i / L} \quad (5.1)$$

其中 $\mathbf{x}_i$ 是第 i 个星系的位置, w_i 是它的权重, N_g 是样本中所有星系的数目。那么星系的功率谱就是 $|\hat{\rho}_g(\mathbf{n})|^2$ 。

事实上, 如果我们的样本只包含几千个星系, 那么这种直接求和的方法是完全可行的。而且计算的结果会非常精确。然而, 实际用到的星系样本中包含的星系数目往往是百万甚至千万量级的, 这时候用直接求和的方法来计算是完全不可行的, 因为计算量太大, 耗时会过长。因此对于这种包含大量星系的样本来说, 使用快速傅立叶变换(FFT)才是更为可行而快捷的方法。

快速傅立叶变换只能对网格上的数据进行操作。因此为了应用快速傅立叶变换计算功率谱, 首先要做的就是将离散的粒子质量分布分配到网格的格点上, 通常称之为质量分配。常用的质量分配的格式NGP, CIC和TSC我们在第二章都介绍过。质量分配这一过程相当于在原来的密度场分布上卷积了一个窗口函数 W 。人们早就知道经过质量分配后用快速傅立叶变换计算出的功率谱在接近Nyquist频率的尺度上会和真实值有偏差(e.g., Jing 1992 ; Percival & Walden 1993 ; Baugh & Efstathiou 1994)。事实上, 我们有

$$|\hat{\hat{\rho}}_g(\mathbf{n})|^2 = \sum_{n'=-\infty}^{\infty} |\hat{W}(\mathbf{n} + L\mathbf{n}')|^2 |\hat{\rho}_g(\mathbf{n} + L\mathbf{n}')|^2 \quad (5.2)$$

从上式中容易看出, 经过质量分配后计算出的傅立叶功率谱 $\hat{\hat{\rho}}_g(\mathbf{n})$ 是不等于 $\hat{\rho}_g(\mathbf{n})$ 的。这种偏差只依赖于真实的功率谱的斜率, 所以其修正是和模型有关的(Peacock & Dodds 1996)。Jing在2005年提出了一种迭代的方法来从上式所求得的 $\hat{\hat{\rho}}_g(\mathbf{n})$ 中重构真实的功率谱。Cui等人在最近的一篇文章中也讨论了这种质量分配格式的采样效应(sampling effects)对真实的功率谱所带来的影响, 和Jing的方法不同, 他们没有采用迭代的方法修正重影效应, 但是采用了一种特别的质量分配格式, 这种格式带来的采样效应非常之小以致于可以忽略。

另一方面, 人们发展了各种算法来快速计算公式(5.1)中的直接求和项, 并且这些算法在数值计算和统计中得到了广泛的应用。早期, 有人使用拉格朗日插值方法(Press & Rybicki, 1989, Brandt, 1991)或泰勒展开(Sullivan, 1990)来修正均匀的空间网格上的偏差。然而这种算法并不是很有计算效率, 特别是当

它应用在高维空间的网格上时。Dutt 和Rokhlin (1993)提出了一种更为快速的算法：使用Gaussian bells进行插值。另外，在多尺度分析(Multiresolution analysis)的框架下，Beylkin提出了一种估算函数的傅立叶变换的快速算法，当用来计算非均匀空间的快速傅立叶变换(USFFT)时，这种算法更为简单而高效。与之类似，Fang和Feng在2000年提出了一种自适应空间的快速傅立叶变换算法。在本章中，我们将介绍一种基于Beylkin算法的用来计算不规则数据的傅立叶变换的算法，并将其应用在泊松样本和真实的N体模拟样本的功率谱上来检验。

本章的结构如下，在第二节中我们将简单的介绍Beylkin的这种非均匀空间的快速傅立叶算法，然后在第三节中我们将引入使用B-spline尺度函数作为质量分配方法，并将说明其计算功率谱的优点。接下来在第四节我们利用泊松随机样本和真实的Virgo N体模拟样本的功率谱上来检验算法的数值表现。最后在第五节我们给出总结。

5.2 基于Beylkin算法的不规则数据的快速傅立叶变换

为了不失一般性和简单起见，本节中所有的公式都是一维情形下的。应用到多维空间时可以直接类推。我们需要估算下式中的直接求和：

$$\hat{n}(\xi) = \sum_{i=0}^{N_g-1} w_i e^{i2\pi\xi x_i} \quad (5.3)$$

其中 $x_i \in [0, 1]$, $\{w_i\}_1^{N_g}$ 是我们要计算的数据集合。对于一个给定的星系分布来说， x_i 就对应着星系所处的空间位置，而 $\{w_i\}$ 则对应着各个星系的权重。容易看出，我们可以将上式改写成下面的等价形式：

$$\hat{n}(\xi) = \int w(x) e^{i2\pi\xi x} dx \quad (5.4)$$

其中

$$n(x) = \sum_{i=1}^{N_g} w_i \delta_D(x - x_i) \quad (5.5)$$

此外， $n(x)$ 需要有周期性边界条件。显然，对于一维函数来说，周期性边界条件可以写成 $\hat{n}(x) = n(x - [x])$, $x \in \mathbf{R}$ 。

现在我们就可以对任意一个函数在不同的空间尺度上进行多尺度分析(Daubechies, 1992; Fang & Thews, 1998)了，这构成了一个函数空间上的序

列: $0 \subset \cdots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset \cdots \subset L^2(\mathbf{R})$ 。假设一组函数 $\{\phi(x-k)|k \in \mathbf{Z}\}$ 构成了 V_0 的正交基, 那么通过在尺度 2^j 上的伸缩和 $2^{-j}k$ 的平移变换我们可以得到一组 V_j 上的正交基:

$$\{\phi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\phi(2^j x - k) \quad |k \in \mathbf{Z}\} \quad (5.6)$$

其中 ϕ 叫做尺度基函数。实际上函数 $f \in L^2(\mathbf{R})$ 在 V_j 上的投影就是函数 f 在尺度 j 下的近似, 而且随着 j 的增大, 当 $j \rightarrow \infty$ 时将趋近于 f 。

给定了尺度函数后, 我们就可以对密度分布 $n(x)$ 在尺度 j 下进行多尺度分析了。我们有:

$$n(x) = \sum_k \epsilon_k^j \phi_{j,k}^P(x) \quad (5.7)$$

其中 $\phi_{l,k}^P(x)$ 是周期性尺度函数, 由下式给出:

$$\phi_{j,k}^P(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_{j,k}(x+n) = \sqrt{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi(N(x+n) - k) \quad (5.8)$$

其中 $N = 2^j$ 。尺度函数系数 SFCs $\{\epsilon_k^j\}$ 由下式给出:

$$\epsilon_k^j = \int n(x) \phi_{j,k}^P(x) dx \quad (5.9)$$

$$= \sqrt{N} \int_{-\infty}^{\infty} n(x) \phi(Nx - k) dx \quad (5.10)$$

尺度函数系数刻画了在尺度 $k/2^j$, $(0 \leq k \leq N-1)$ 下, 在位置 $l/2^j$ 下的密度涨落 (Fang & Thews, 1998, Feng & Fang, 2004)。因为函数 $n(x)$ 具有周期性, 上式中的积分域可以改为 $[0, 1]$:

$$\epsilon_k^j = \sqrt{N} \int_0^1 n(x) \sum_{l \in \mathbf{Z}} \phi(Nx - k - Nl) dx \quad (5.11)$$

应用泊松求和公式, 我们有

$$\sum_{l \in \mathbf{Z}} \phi(Nx - k - Nl) = \frac{1}{N} \sum_{l \in \mathbf{Z}} e^{2\pi i(k-Nx)l/N} \bar{\phi}(l/N) \quad (5.12)$$

因此在傅立叶空间中, 公式(5.11)可以写成下面的形式:

$$\epsilon_k^j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l \in \mathbf{Z}} \bar{\phi}(l/N) \hat{n}(l) e^{2\pi i k l / N} \quad (5.13)$$

其中

$$\hat{n}(l) = \int_0^1 n(x) e^{-2\pi i l x} dx \quad (5.14)$$

$$\hat{\phi}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) e^{-2\pi i x \xi} dx \quad (5.15)$$

其中符号 $\bar{\cdot}$ 表示复数共轭。将公式(5.13)变形可得：

$$\epsilon_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l=0}^{N-1} \left(\sum_{m \in \mathbf{Z}} \bar{\hat{\phi}}(l/N + m) \hat{n}(l + Nm) \right) e^{2\pi i k l / N} \quad (5.16)$$

另外，我们有

$$|F(l) - \hat{n}(l)| \leq \sum_{m=\pm 1, \pm 2, \dots} \frac{|\hat{\phi}(l/N + m)|}{|\hat{\phi}(l/N)|} |\hat{n}(l + Nm)| \quad (5.17)$$

其中

$$F(l) = \frac{1}{\sqrt{N} \bar{\hat{\phi}}(l/N)} \sum_{k=0}^{N-1} \epsilon_k e^{-2\pi i k l / N} \quad (5.18)$$

因此我们不难看出，如果能够选择一个合适的尺度函数，上式的左项就可以足够小，这时候 $F(l)$ 就成为了 $\hat{n}(l)$ 的很好的近似。实际上公式(5.18)就为我们提供了一种简单而高效的快速算法，我们可以通过它来使用标准的快速傅立叶变换来计算不规则数据的傅立叶变换。

简单的概括一下，算法可以分为三个步骤：

(1) 首先通过公式(5.9)计算函数 $n(x)$ 的尺度函数系数 ϵ_k^j 。实际上实际运算的时候可以使用下式：

$$\epsilon_k^j = \sqrt{N} \sum_{i=1}^{N_p} w_i \phi^P(Nx_i - k) \quad (5.19)$$

通常，我们会选择紧支撑的尺度函数。在这种情况下，就不需要按照上式对整个样本的粒子全部求和，而只需要对位置 k 附近的粒子求和，减少大量运算量。

(2) 根据公式(5.18)使用标准的快速傅立叶变换计算离散傅立叶变换。

(3) 最后乘上因子 $1/\bar{\hat{\phi}}(l/N)$ 。

算法的效率主要取决于基函数在实空间和波数空间的性质。后面我们会发现，高阶B-spline函数将会是非常合适的基函数，它运算快捷而且能够提高很高的精度。

5.3 利用FFT计算傅立叶功率谱

5.3.1 利用B-spline基函数质量分配

从数学上看,质量分配就是用各种基函数来对狄拉克函数 σ_D 作近似。为了能够达到较高的计算效率,通常需要窗口函数在实空间中是有紧支撑性的,同时为了让重影效应减少到最小,我们希望窗口函数在傅立叶空间是接近top hat的。

Beylkin发现具有紧支撑性的小波基函数往往计算效果不够好,这是因为紧支撑性的小波基函数在傅立叶空间中衰减不够快(Beylkin 1992)。而高阶的B-spline函数却是一个很好的选择,它在实空间中具有局域性而在波数空间中又衰减得足够快。下面,我们将简单的介绍一下n阶B-spline函数的基本性质,这些性质在实际应用中是很有用的。

首先 $\beta^{(0)}(x)$ 由下式给出:

$$\beta^{(0)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } |x| < 0.5 \\ 0.5 & \text{if } |x| = 0.5 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (5.20)$$

B-spline函数是一组对称的钟形函数族。它是由上面的分段函数 $\beta^{(0)}(x)$ 经过交迭卷积构造而成的,

$$\beta^{(n)}(x) = (\beta_{+1}^{(0)} \circ \beta_{+2}^{(0)} \circ \cdots \circ \beta_{+n}^{(0)} \circ \beta_{+(n+1)}^{(0)})(x) \quad (5.21)$$

上式中符号 $\circ$ 代表卷积运算。实际上 $\beta^{(n)}(x)$ 可表示成下面的分段多项式:

$$\beta^{(n)}(x) = \sum_{l=0}^{n+1} (-1)^l \binom{n+1}{l} \frac{(x + \frac{n+1}{2} - l)_+^n}{n!} \quad (5.22)$$

其中

$$x_+^m = \begin{cases} x^m & \text{if } x > 0 \\ 0 & \text{if } x \leq 0 \end{cases} \quad (5.23)$$

在实际计算中,我们通常使用下面的递归公式来计算B-spline函数:

$$\beta^{(n)}(x) = \frac{(n+1)/2 + x}{n} \beta^{(n-1)}(x + 1/2) + \frac{(n+1)/2 - x}{n} \beta^{(n-1)}(x - 1/2) \quad (5.24)$$

注意到当 $n = 0, 1, 2$ 的时候, B-spline函数分别对应着传统的质量分配格式NGP, CIC, TSC。

n阶B-spline函数 $\beta^{(n)}(x)$ 的傅立叶变换为:

$$\hat{\beta}^{(n)}(\xi) = \left(\frac{\sin \pi \xi}{\pi \xi} \right)^{n+1} \quad (5.25)$$

n阶B-spline函数只在区间 $[-\frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2}]$ 上具有紧支撑性, 因此 β 并不能构成正交基, 但是它们可以构成双正交系统的一部分。对应的尺度函数可以由B-spline函数构造出来。我们定义 β 的双正交基为 γ , 那么我们有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \beta^{(n)}(x-k) \gamma^{(n)}(x-l) dx = \delta_{kl} \quad (5.26)$$

从上面的正交性条件可以看出, 在波数空间中,

$$\hat{\gamma}^{(n)}(\xi) = \frac{\hat{\beta}^{(n)}(\xi)}{a^{(n)}(\xi)} \quad (5.27)$$

其中 $a^{(n)}(\xi)$ 为周期函数:

$$a^{(n)}(\xi) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} |\hat{\beta}^{(n)}(\xi+l)|^2 = \sum_{l=-n}^n \beta^{(2n+1)}(l) e^{i2\pi l \xi} \quad (5.28)$$

我们注意到函数 γ 并不具备紧支撑性。在傅立叶空间中, 我们可以利用函数 $a^{(n)}(\xi)$ 使得B-spline基正交化, 成为Battle-Lemarié尺度函数, 即下式:

$$\hat{\varphi}^{(n)}(\xi) = \frac{\hat{\beta}^{(n)}(\xi)}{\sqrt{a^{(n)}(\xi)}}. \quad (5.29)$$

我们可以看到, 利用Battle-Lemarié尺度函数, 狄拉克函数 δ 可以有有限表示:

$$\delta^D(x-y) \rightarrow \sum_{k \in \mathbf{Z}} \varphi_{j,k}^n(x) \varphi_{j,k}^n(y). \quad (5.30)$$

上面的公式实际上给出了一组基函数的完备性, 这也是成为质量分配函数的基本条件。

我们将n阶B-spline函数作为基函数, 那么由公式(5.16)可以得到:

$$\frac{F(\xi)}{\sqrt{a^{(n)}(\xi)}} = \hat{n}(\xi/N) \hat{\varphi}^{(n)}(\xi) + \sum_{l=\pm 1, \pm 2, \dots} \hat{n}(N^{-1}(\xi+l)) \hat{\varphi}^{(n)}(\xi+l) \quad (5.31)$$

其中

$$F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \epsilon_k e^{-2\pi i \xi k}, \quad (5.32)$$

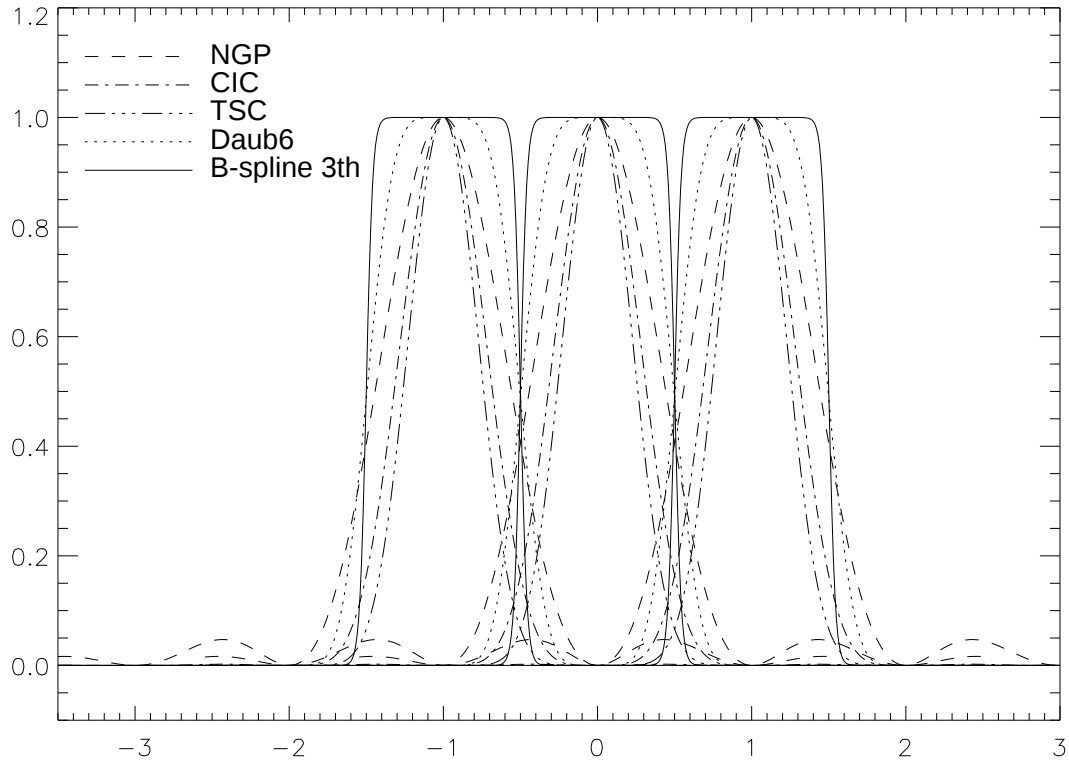


图 5.1: 不同的质量分配函数在傅立叶空间中的形状, 包括NGP,CIC,TSC, Daub6, BL 3rd. 从左到右三组曲线分别对应着 $W^2(\xi + 1)$, $W^2(\xi)$ 和 $W^2(\xi - 1)$.

公式中的 ϵ_k 是由B-spline函数给出的尺度函数系数。

在图(5.1)中我们比较了不同质量分配格式的窗口函数 $W^2(\xi)$ 在傅立叶空间中的形状。包括了传统的质量分配格式NGP、CIC、TSC, 还有Daubechies尺度函数Daub6和3阶正交化的B-spline函数(也就是Battle-Lemarié尺度函数BL 3rd)。 $W^2(\xi)$ 和 $W^2(\xi - 1)$ (或 $W^2(\xi + 1)$)交迭的区域可以看出重影效应的大小。显然如果质量分配函数的窗口函数在傅立叶空间是完全top-hat形状, 那么计算出的FFT功率谱就不会受到采样效应的任何影响。从图(5.1)中我们可以看到3阶Battle-Lemarié尺度函数的窗口函数 $W^2(\xi)$ 是最接近top-hat的, 因此我们可以预期它所计算出的FFT功率谱是最接近真实功率谱的。

5.3.2 密度涨落的功率谱

给定了宇宙密度场 $\rho(\mathbf{r})$, 密度涨落 $\delta(\mathbf{r})$ 由下式给出:

$$\delta(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r}) - \bar{\rho}}{\bar{\rho}} \quad (5.33)$$

根据宇宙学原理, 只要体积 V_μ 足够大, 那么 V_μ 中的密度场 $\rho(\mathbf{r})$ 就可以代表整个宇宙密度场。 $\delta(\mathbf{r})$ 的傅立叶变换可以表示成:

$$\delta(\mathbf{k}) = \frac{1}{V_\mu} \int_{V_\mu} \delta(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} \quad (5.34)$$

功率谱则可以定义为:

$$P(\mathbf{k}) = \langle |\delta(\mathbf{k})|^2 \rangle \quad (5.35)$$

其中 $\langle \cdot \rangle$ 表示系综平均。

密度场应该是连续的, 但是在实际的计算中密度场一般被有限个粒子所表示。数密度可以写成:

$$n(\mathbf{r}) = \sum_i w_i \delta^D(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \quad (5.36)$$

其中 $\mathbf{r}_i$ 表示第 i 个粒子的位置。 w_i 则是它的权重。对于流量极限的星系巡天来说, w_i 由选择函数给出。这个离散密度场的傅立叶变换根据定义可以由直接求和的形式给出:

$$\delta^d(\mathbf{k}) = \frac{1}{N} \sum_i w_i e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_i} - \delta_{bfk,0}^K \quad (5.37)$$

其中 N 是粒子的总数, δ^K 是Kronecker符号。容易知道, 真实的功率谱为:

$$P(k) \equiv \langle |\delta(\mathbf{k})|^2 \rangle = \langle |\delta^d(\mathbf{k})|^2 \rangle - \frac{1}{N} \quad (5.38)$$

显然, 对于离散粒子构成的样本来说, 减去 $1/N$ 修正了功率谱中的噪声项。对于给定的质量分配格式, 根据快速傅立叶变换算出的功率谱 $P^{fft}(\mathbf{k})$ 和真实的功率谱之间的关系为:

$$P^{fft}(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{n}} |\hat{W}(\mathbf{k} + 2k_N \mathbf{n})|^2 P(\mathbf{k} + 2k_N \mathbf{n}) + \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{n}} |\hat{W}(\mathbf{k} + 2k_N \mathbf{n})|^2 \quad (5.39)$$

上式中的求和是在3维整数向量 $\mathbf{n}$ 上进行的, k_N 是Nyquist频率。和公式(5.38)相比较, 真实的功率谱及噪声被 $W^2(\mathbf{k})$ 所影响而导致偏差。

为了从 P^{fft} 中重构出真实的功率谱, Jing(2005)提出了一种迭代的方法, 用N体数值模拟数据检验效果很好。我们下面简单的介绍一下Jing的这种对功率谱的修正方法。详细的细节请参考Jing (2005)。

从公式(5.39)中可以看到, $P^{fft}(\mathbf{k})$ 和 $P(\mathbf{k})$ 之间的偏差分为两个部分。首先我们要修正公式右边的第二项噪声部分。对于NGP, CIC, TSC格式来说, 我们有(Hockney & Eastwood 1981):

$$W(\mathbf{k}) = \left[\frac{\sin(\frac{\pi k_1}{2k_N}) \sin(\frac{\pi k_2}{2k_N}) \sin(\frac{\pi k_3}{2k_N})}{(\frac{\pi k_1}{2k_N})(\frac{\pi k_2}{2k_N})(\frac{\pi k_3}{2k_N})} \right]^p, \quad (5.40)$$

其中 k_i 是 $\mathbf{k}$ 的第 i 个方向。 $p = 1, 2, 3$ 分别对应着NGP, CIC, TSC格式。 $W(\mathbf{k})$ 的形状可以参见图(5.1)。

当我们确定了选用的质量分配函数(NGP, CIC, TSC之一), 那么公式(5.39)中的噪声项就很容易修正了。如果我们记噪声项为:

$$D^2(\mathbf{k}) \equiv \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{n}} W^2(\mathbf{k} + 2k_N \mathbf{n}) \quad (5.41)$$

那么对于NGP, CIC, TSC这几个格式, 噪声项可以写成下面的形式:

$$D^2(\mathbf{k}) = \frac{1}{N} \begin{cases} 1, & \text{NGP} \\ \Pi_i[1 - \frac{2}{3} \sin^2(\frac{\pi k_i}{2k_N})], & \text{CIC} \\ \Pi_i[1 - \sin^2(\frac{\pi k_i}{2k_N}) + \frac{2}{15} \sin^4(\frac{\pi k_i}{2k_N})], & \text{TSC} \end{cases} \quad (5.42)$$

在实际应用中, 对于后两种情况CIC和TSC来说, 通常可以采用下面的各向同性近似来计算噪声项:

$$D^2(\mathbf{k}) \approx \frac{1}{N} \begin{cases} [1 - \frac{2}{3} \sin^2(\frac{\pi k}{2k_N})], & \text{CIC} \\ [1 - \sin^2(\frac{\pi k}{2k_N}) + \frac{2}{15} \sin^4(\frac{\pi k}{2k_N})], & \text{TSC} \end{cases} \quad (5.43)$$

修正了噪声项之后, 我们还要从公式(5.39)中修正右边的第一项。我们定义下面的修正因子 $C_2(k)$ 为:

$$C_2(k) = \frac{\left\langle \sum_{\mathbf{n}} W^2(\mathbf{k} + 2k_N \mathbf{n}) P(\mathbf{k} + 2k_N \mathbf{n}) \right\rangle_d}{P(k)}. \quad (5.44)$$

因为 $W(\mathbf{k})$ 是减函数, 因此当 $k \ll k_N$ 时, 重影效应是很小的, 我们有 $C_2(k) \approx W^2(k) \approx 1$ 。但是当 $k \sim k_N$ 时, 重影效应变得很重要, 不可忽略。这是由 $|\mathbf{k} +$

$2k_N \mathbf{n} | \sim k$ 带来的偏差所引起的。 $C_2(k)$ 对 $\mathbf{P}(\mathbf{k})$ 的依赖仅取决于 $\mathbf{P}(\mathbf{k})$ 在 $k \sim k_N$ 区域的形状, 即 $\mathbf{P}(\mathbf{k})$ 在 $k \sim k_N$ 区域的斜率 α_N , $\alpha_N = [\ln P(k) / \ln k]_{k \sim k_N}$ 。

因为在计算 $\mathbf{P}(\mathbf{k})$ 之前我们并不知道斜率 α_N 的值, 因此Jing采用了一种迭代的方法来得到修正因子 $C_2(k)$ 。假设我们已经计算了去除噪声项的功率谱 $P_r(k)$:

$$\begin{aligned} P_r(k) &= \left\langle \langle |\delta^f(\mathbf{k})|^2 \rangle - D^2(\mathbf{k}) \right\rangle_d \\ &= \left\langle \sum_{\mathbf{n}} W^2(\mathbf{k} + 2k_N \mathbf{n}) P(\mathbf{k} + 2k_N \mathbf{n}) \right\rangle_d \end{aligned} \quad (5.45)$$

其中 $k \leq k_N$ 。我们可以通过数值拟合来求得 $0.5k_N \leq k \leq k_N$ 范围内的 $P_r(k)$ 的斜率 α_0 , 然后我们计算出 $C_2(k, \alpha_0)$ 从而得到 $P_0(k) = P_r(k) / C_2(k, \alpha_0)$ 。接着又可以从刚刚得到的 $P_0(k)$ 计算出它在 $0.5k_N \leq k \leq k_N$ 范围内的斜率 α_0 , 然后可以计算出新的 $C_2(k, \alpha_0)$ 从而得到 $P_0(k) = P_r(k) / C_2(k, \alpha_0)$ 。可以一直重复这个过程, 直至 $P_0(k)$ (或者 α_0)收敛于一个给定的精度。最后得到的 $P_0(k)$ 就是重构出的真实功率谱 $\mathbf{P}(\mathbf{k})$ 。

图(5.2)是利用一个N体数值模拟样本算得的修正前和修正后的FFT功率谱。可以看到经过Jing的迭代方法修正后, NGP, CIC, TSC三种方法算的功率谱都能较好的重构出真实功率谱, 结果基本吻合了。

虽然Jing的这种迭代方法可以提供对FFT功率谱的一种修正, 但是比较繁琐, 通常都要迭代数次才能重构出功率谱。而且它只能应用于计算功率谱, 而不能提供对高阶统计量诸如Bi-spectrum的修正。我们下面将看到可以用一种更为直接的方法来实现这一点。如果我们采用3阶的B-spline函数来作质量分配, 那么正如图(5.1)所示, 当 $|\mathbf{k}| \leq k_N$, $|W(\mathbf{k})|^2$ 在傅立叶空间中是非常接近top-hat形状的, 这个属性保证了算得的功率谱几乎不受重影效应影响。因此我们可以不加任何修正的利用快速傅立叶变换来计算真实的功率谱。

5.4 数值检验

在这一小节中, 我们将应用上面的Beylkin算法来计算傅立叶变换功率谱, 检验算法的精度和效率。下面, 我们分别用泊松样本和N体数值模拟样本来作数值检验。

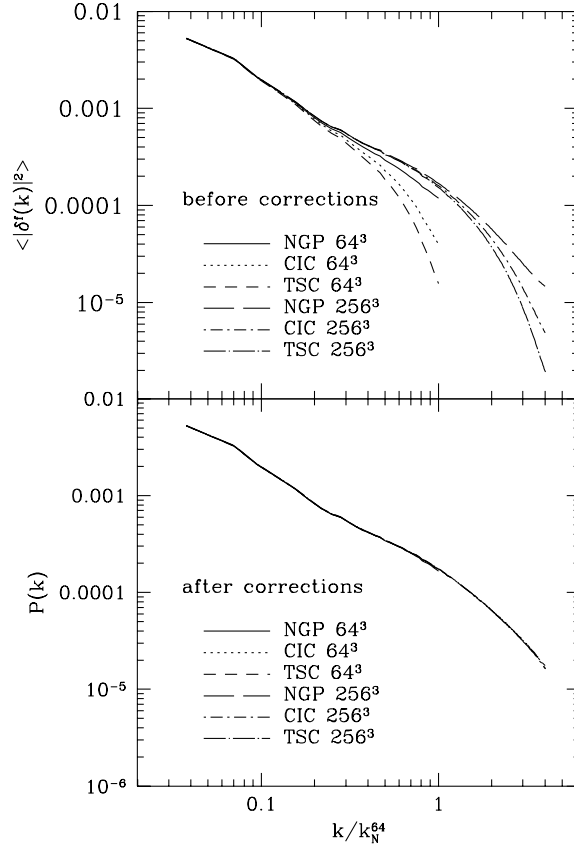


图 5.2: 迭代方法修正前的功率谱和修正后的功率谱(Jing 2005)。计算用的网格数分别为 64^3 和 256^3 , k_N^{64} 是 64^3 网格的Nyquist频率。

5.4.1 泊松样本

对于满足泊松分布的随机样本来说，它的功率谱为：

$$P_{shot}(k) = \frac{1}{N} \quad (5.46)$$

其中 N 为粒子的总数。我们生成了10组随机分布泊松样本，每个样本都由 $N = 256^3$ 个粒子构成，它们随机分布在立方体盒子之中。在图(5.3)和图(5.4)中，我们画出了这10组泊松随机样本的功率谱的平均值及其 $1 - \sigma$ 误差。因为样本是完全的随机分布，所以经过快速傅立叶变换算得的功率谱仅包含了公式(5.39)右边的第二项。

我们使用了NGP,CIC和TSC这三种不同的质量分配格式来计算网格密度，

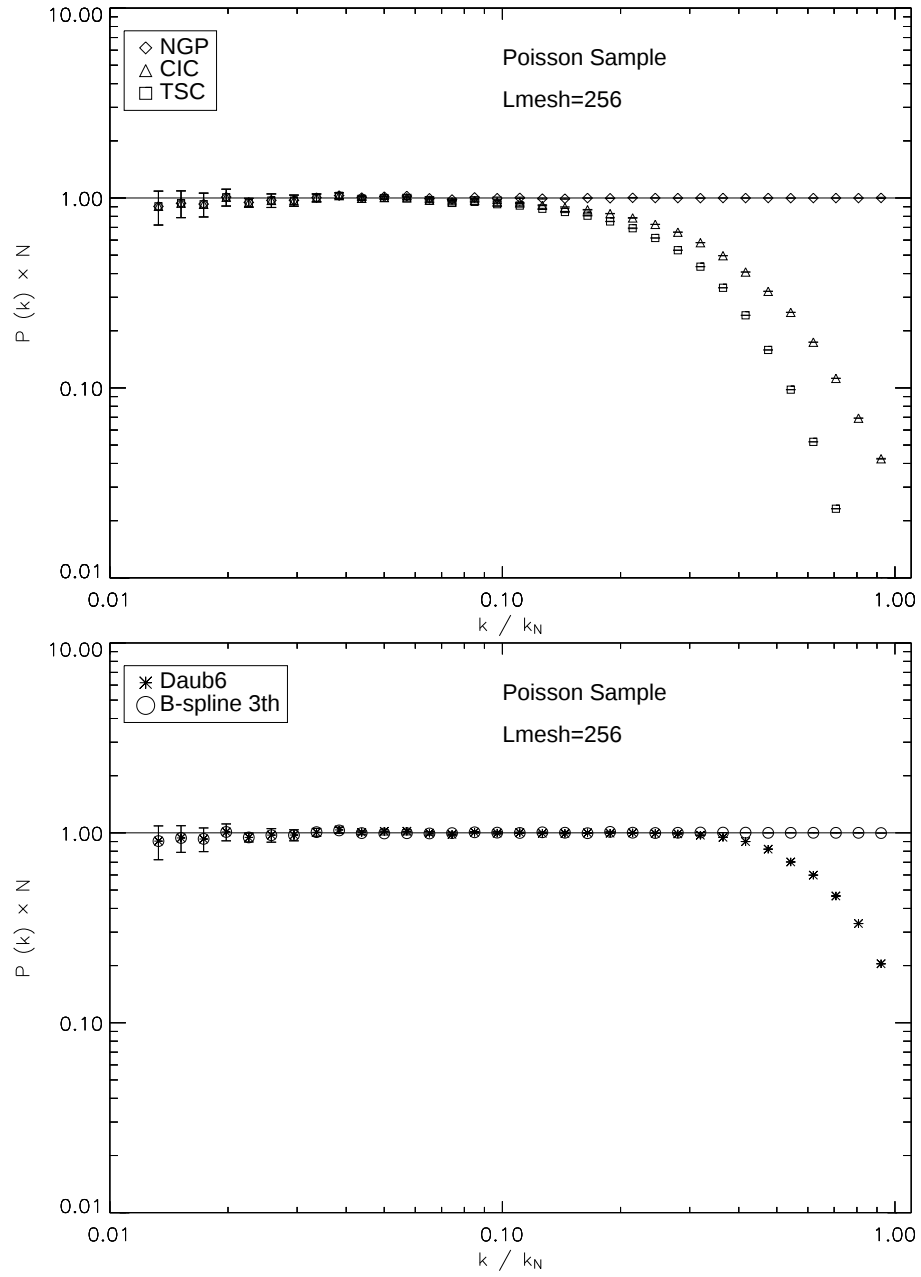


图 5.3: 泊松样本的功率谱, 使用了 256^3 网格计算, 所使用的计算格式标注在各张图上。

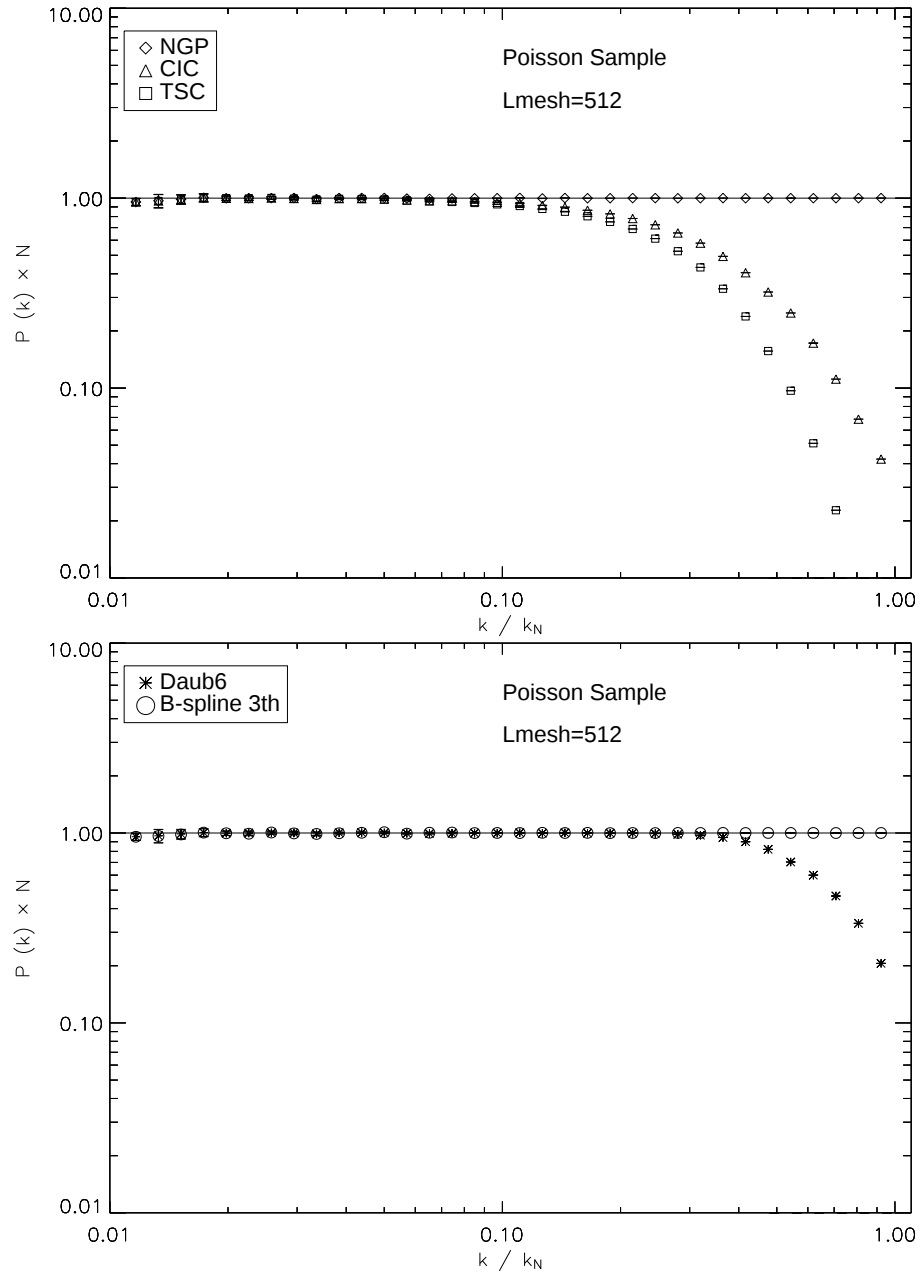


图 5.4: 泊松样本的功率谱, 使用了 512^3 网格计算, 所使用的计算格式标注在各张图上。

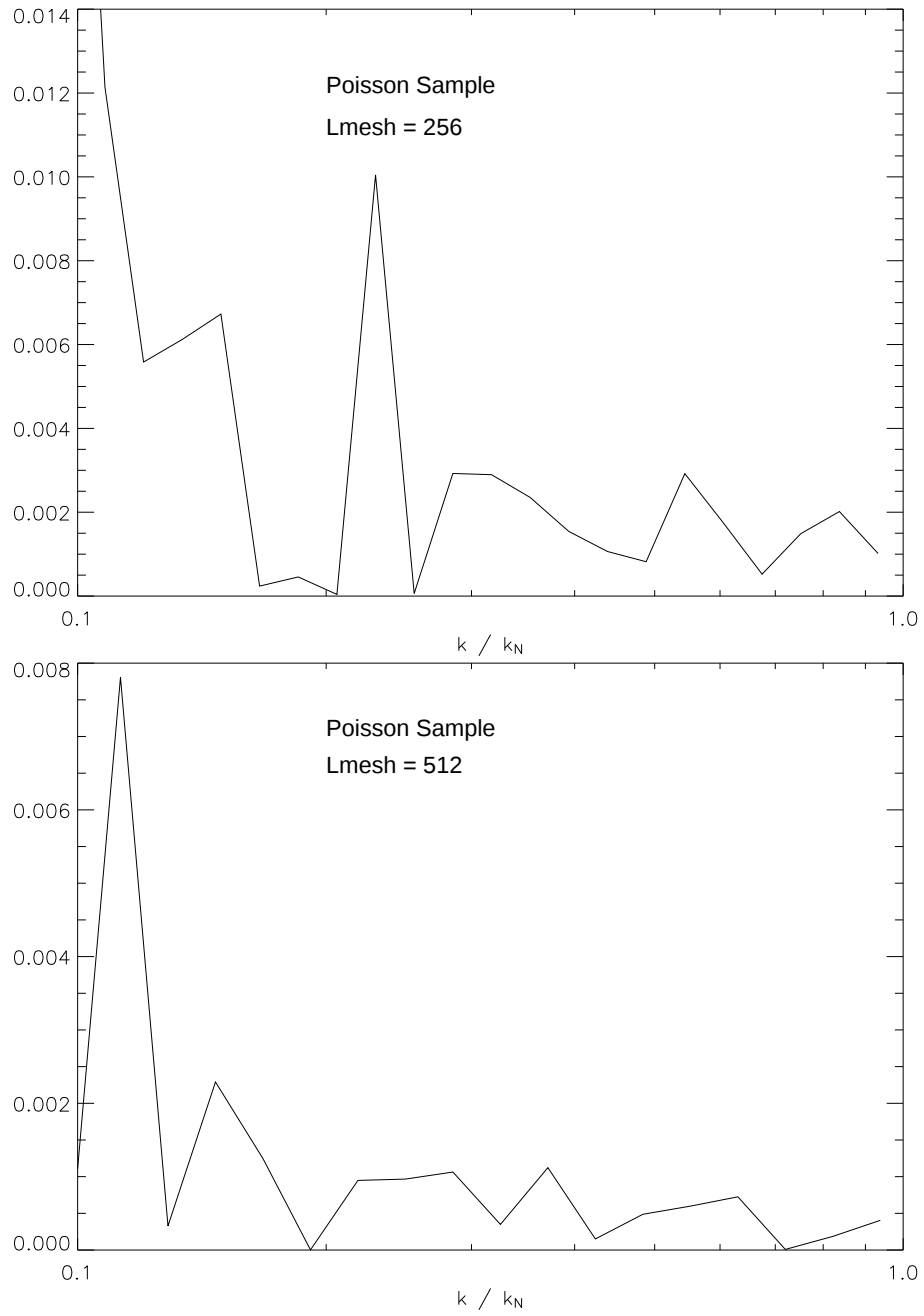


图 5.5: 用3阶B-spline算得的泊松样本的功率谱的相对误差。

从而利用快速傅立叶变换技术来计算其功率谱。然后作为比较,我们使用了Belykin算法计算了样本的功率谱,采用了两个不同的尺度函数Daub6和3阶B-spline函数。我们在图中分别标注了计算功率谱所使用的各种格式。我们采用了 256^3 和 512^3 两组不同的网格数来计算功率谱。

根据公式(5.39),泊松随机样本的FFT功率谱为 $\frac{1}{N} \sum_{\mathbf{n}} |\hat{W}(\mathbf{k} + 2k_N \mathbf{n})|^2$,因此有 $\langle NP_{shot}(k) \rangle \equiv 1$ 。我们可以看到,对于传统的质量分配格式来说,除了NGP格式以外,CIC和TSC格式在接近Nyquist频率 k_N 附近的时候都产生了非常明显的重影效应。而作为对比,我们发现用Daub6尺度函数算得的功率谱结果大大减少了重影效应,但是在接近Nyquist频率 k_N 附近的时候还是没有消除重影效应。然而当我们使用3阶B-spline尺度函数计算功率谱的时候,结果变得非常之好。算得的功率谱很好的和理论功率谱符合了,即使当频率接近 k_N 的时候都能够极好的吻合。这些结果和图(5.1)是吻合的。因此即使是采用非高阶的B-spline函数,都能够很好的去除重影效应。

为了检验Beylkin算法的精度,我们计算了3阶B-spline基函数计算出的功率谱的相对误差。结果参见图(5.5)。从图上可以看出,在使用 256^3 网格的情况下, $0.1k_N$ 到 k_N 这段区间上最大误差也不超过1.4%。而使用 512^3 网格的时候,最大误差不超过1%。因此Beylkin算法算得的功率谱的精度是相当令人满意的。

5.4.2 Virgo数值模拟样本

我们计算了Virgo宇宙学数值模拟(Kauffman et al. 1999)中 $z = 0$ 的样本的功率谱。该样本使用了LCDM宇宙学模型。数值模拟所采用的各种宇宙学参数为: $\Omega_m = 0.3, \Omega_\Lambda = 0.7, \Gamma = 0.21, h = 0.7, \sigma_8 = 0.9$,力的软化因子为 $20h^{-1}\text{kpc}$ 。数值模拟是在边长为 $239.5h^{-1}\text{Mpc}$ 的周期性的立方体盒子中进行的,盒子中包含了 256^3 个粒子。

和刚才的泊松样本一样,我们应用了上一节的Beylkin算法来计算了Virgo样本的功率谱。我们同样使用了两个不同的尺度函数Daub6和3阶B-spline函数来计算。作为比较,我们还使用NGP, CIC, TSC质量分配格式来计算了样本的功率谱。最后算得的功率谱是无量纲化功率谱 $\Delta^2(k)$,它和 $P(k)$ 的关系为:

$$\Delta^2(k) \equiv \frac{V}{2\pi^2} k^3 P(k) \quad (5.47)$$

和之前的泊松随机样本一样,我们分别采用了 256^3 和 512^3 两组不同的网格数来计算,计算结果分别画在图(5.6)和图(5.7)上。为了能够直观地看出不同的方法

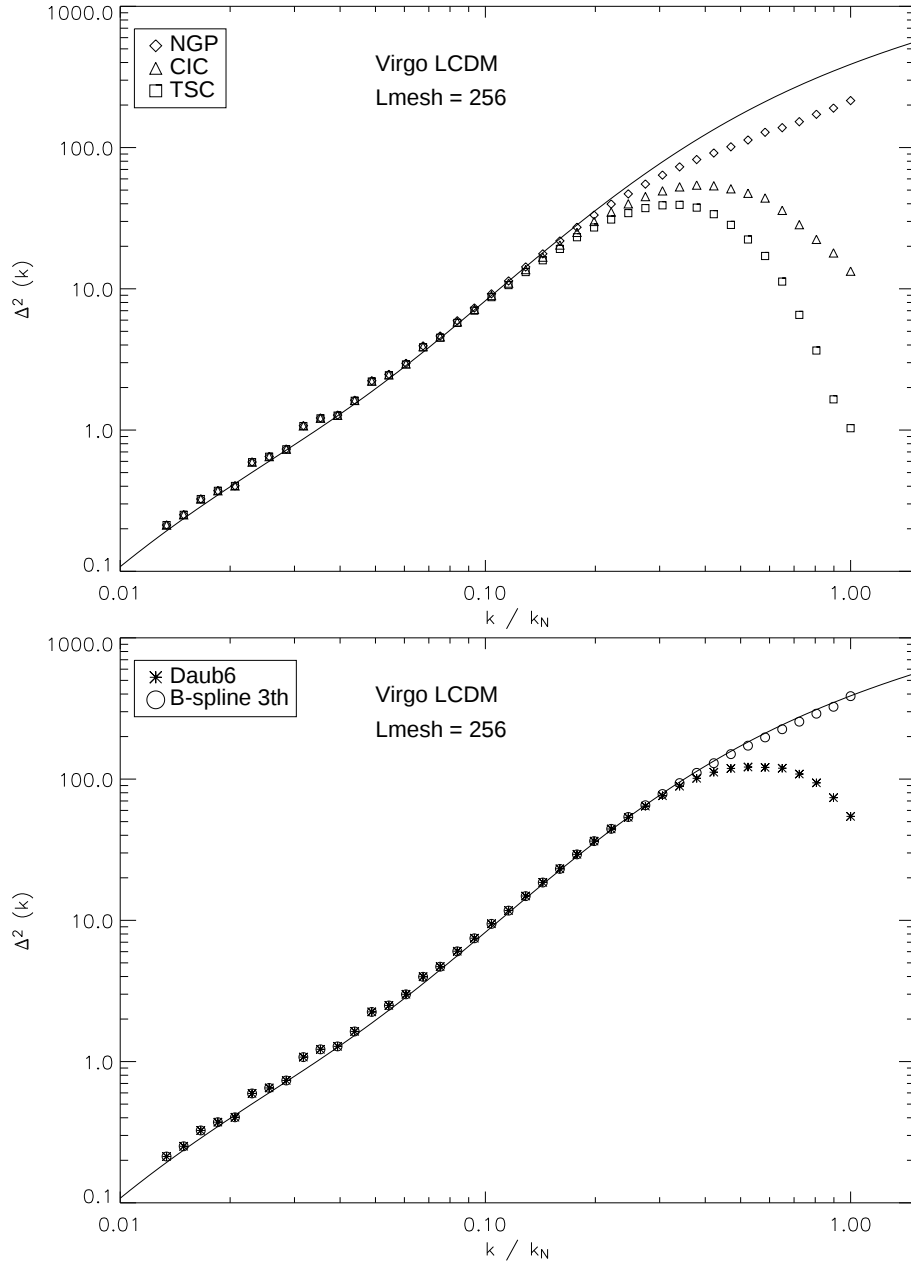


图 5.6: Virgo数值模拟样本的功率谱, 使用了 256^3 网格计算, 所使用的计算格式标注在各张图上。

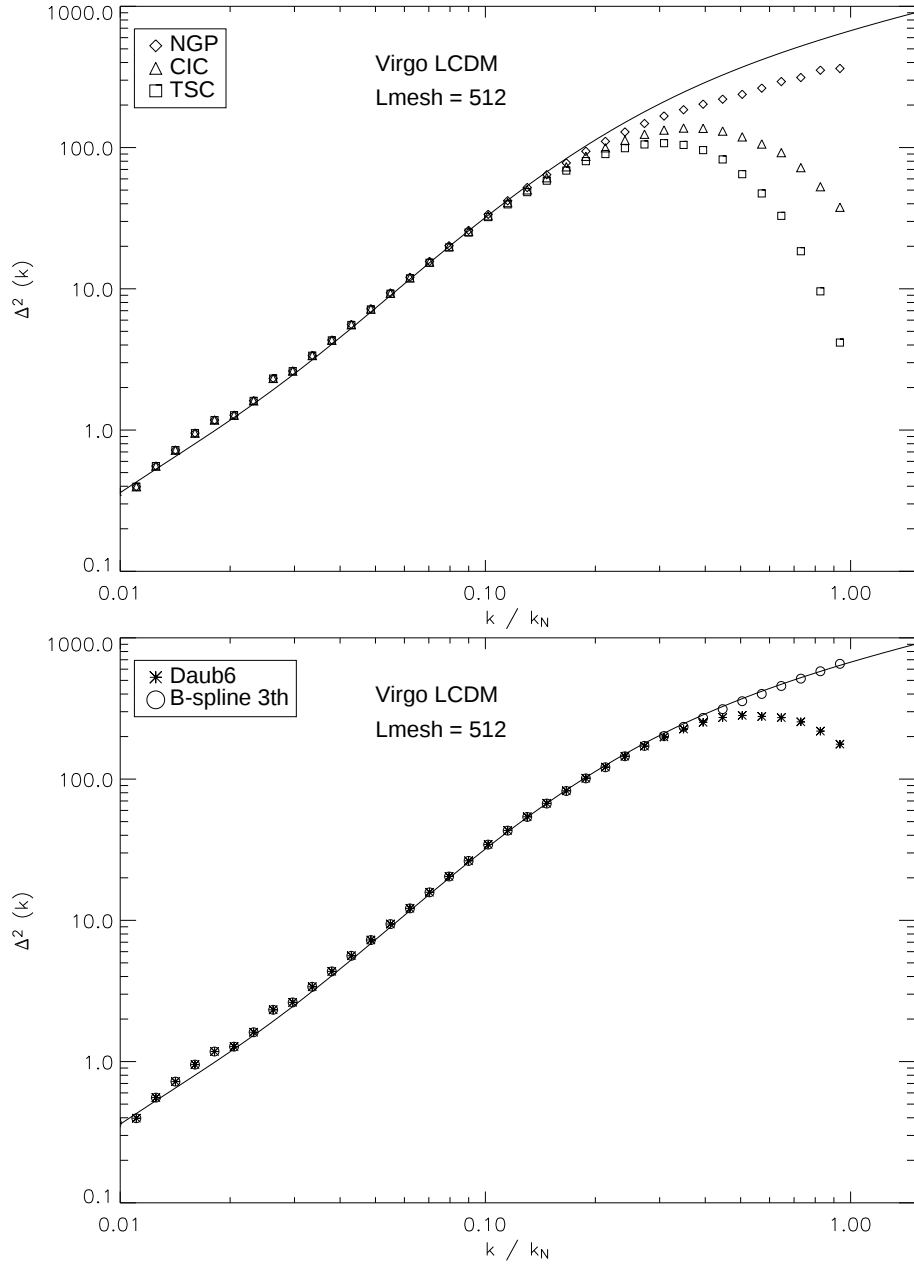


图 5.7: Virgo数值模拟样本的功率谱, 使用了 512^3 网格计算, 所使用的计算格式标注在各张图上。

计算结果的精度，我们在图上画出了功率谱的理论曲线，这条理论曲线是根据Smith等人提出的LCDM模型的非线性功率谱的拟合公式算出来的(Smith et al. 2003)。结果和之前的泊松随机样本类似，传统的NGP,CIC和TSC方法算得的功率谱在没有加入修正的情况下有非常明显的重影效应。用Daub6尺度函数算得的结果要好得多，但是仍然在 k_N 附近和理论曲线有明显的偏差。最后用3阶B-spline函数算得的功率谱结果基本上能够满足我们的要求，在整个 $k \leq k_N$ 的尺度上都能够较好的和理论曲线吻合了。

为了检验Beylkin算法的精度，我们计算了3阶B-spline基函数计算出的功率谱和Smith拟合公式之间的相对误差。结果参见图(5.8)。从图上可以看出，在使用 256^3 网格的情况下， $0.1k_N$ 到 k_N 这段区间上最大误差也不超过7%。而使用 512^3 网格的时候，即使 $k \geq 0.6k_N$ ，误差都没有超过4%。事实上，Smith的拟合公式和真实的功率谱之间都存在一定的误差。因此Beylkin算法算得的功率谱的精度是令人满意的。

对于不规则数据而言，使用Jing的递归修正算法也可以重构出精度令人满意的功率谱。但是我们的Beylkin算法可以不加任何修正而达到同样的效果。而且只需加入小的改动，就可以把Beylkin算法应用到传统的质量分配方法上，这是此算法的另一个优越之处。我们希望能够将它应用到需要Fourier变换计算的高阶宇宙学统计量上，目前这些高级统计量还没有很好的修正方法。

最后，我们需要指出的是我们所采用的B-spline函数都是三阶的。从理论上讲，B-spline函数的阶数越高，它越能够成为傅立叶变换的更好的近似。然而，高阶的B-spline函数要比低阶函数消耗更多的计算时间，大大降低运算效率。事实上， n 阶的B-spline函数所需要的计算复杂度为 $(n+1)^d$ ，其中 d 是空间的维数。为了测试B-spline函数的阶数对结果精度的影响，我们分别计算了一下3,5,7阶的样条函数算得的Virgo样本功率谱，参见图(5.9)。从结果上看差别是很小的。而3阶B-spline函数所需要的计算时间和TSC格式是差不多的，因此我们选择3阶B-spline函数测量功率谱就已经足够好了。

5.5 总结

在Beylkin提出的算法基础之上，我们发展了一套新的算法来精确的测量离散粒子样本的傅立叶功率谱。我们分别用泊松随机样本和N体数值模拟样本来检验了我们的算法。结果非常令人满意，我们可以将它用于宇宙大尺度统计研

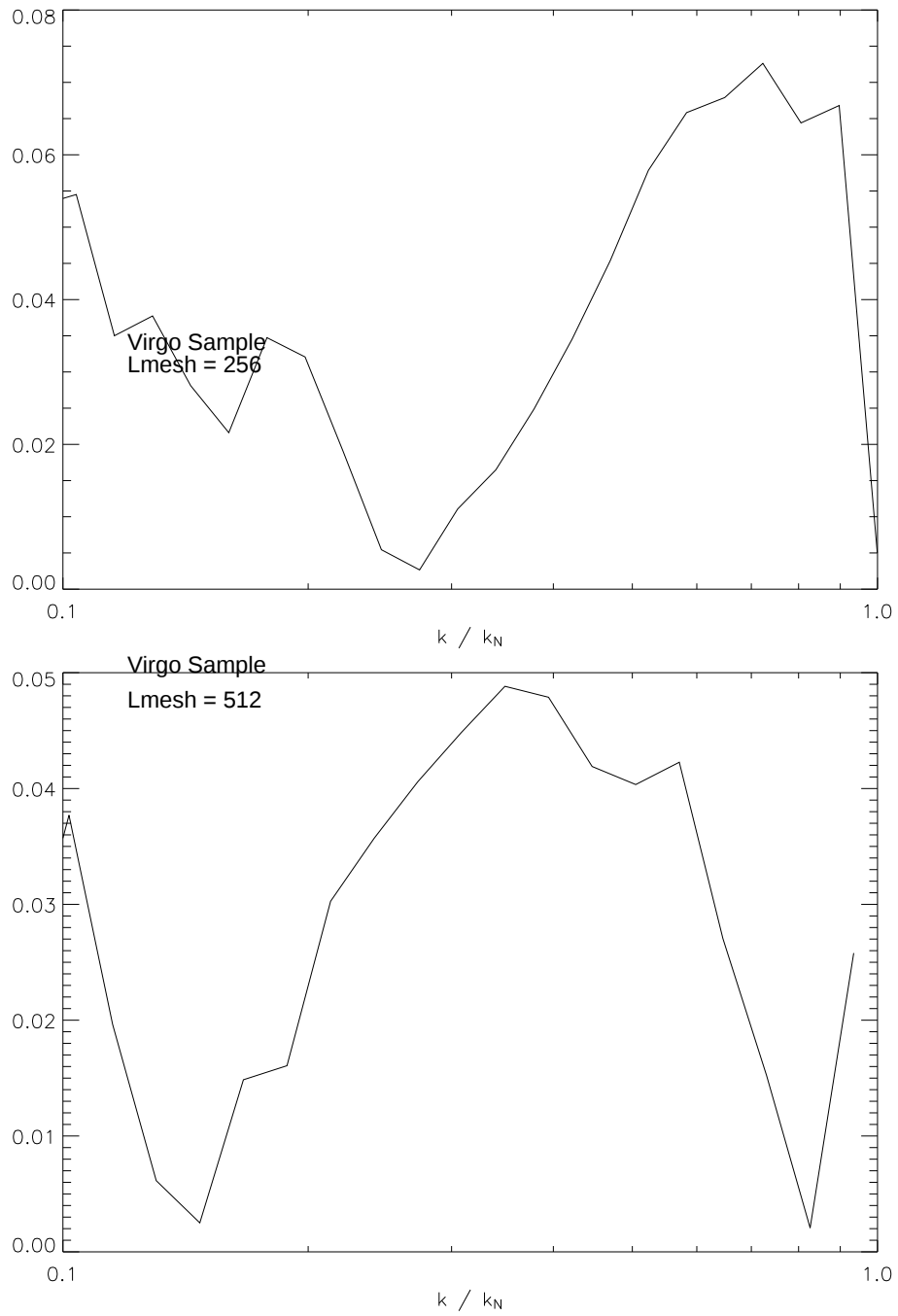


图 5.8: 用3阶B-spline算得的Virgo数值模拟样本的功率谱的相对误差。

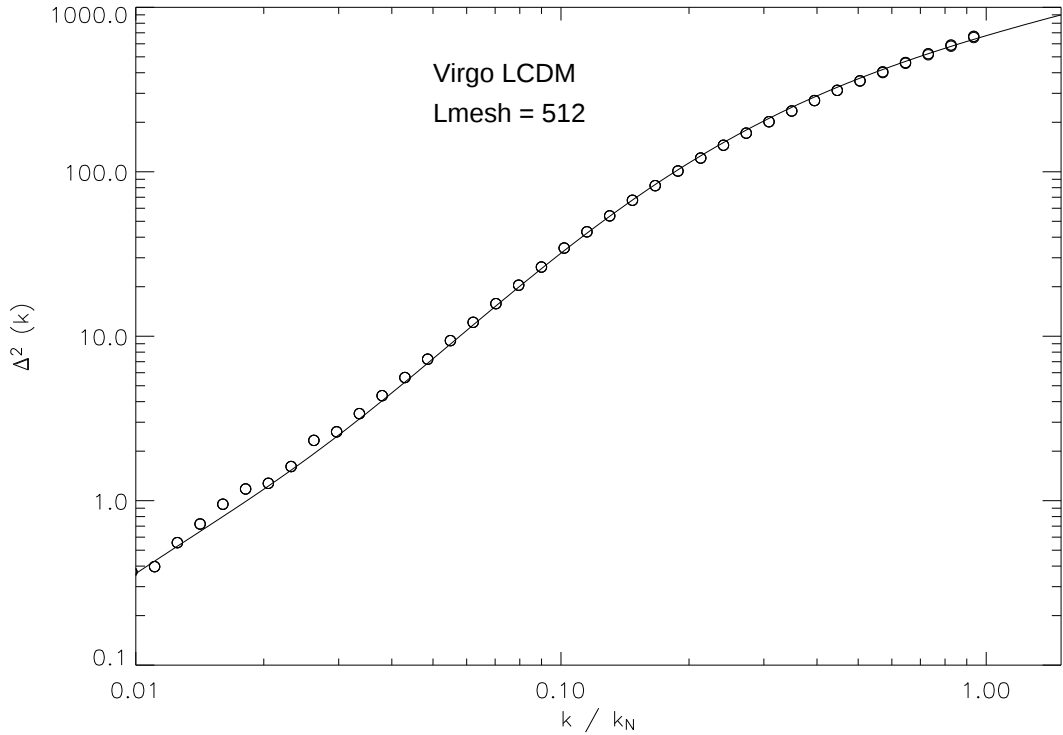


图 5.9: Virgo数值模拟样本的功率谱, 使用了 512^3 网格, 分别使用了3,5,7阶B-spline函数进行计算。因为结果差别很小, 所以几乎重合。

究来计算星系样本的傅立叶功率谱。事实上, 对于包含大量数据的样本来说这种算法不仅计算速度快而且精度也很高。此算法的一大优越之处就是它可以不加入任何额外为消除质量分配中的采样效应而引入的修正, 也能很好的计算出功率谱。正如我们在数值测试中看到的, 即使应用3阶B-spline样条函数, 算得的功率谱在 $k \geq 0.6k_N$ 时误差也不超过5%。因此, 这套算法可以应用于计算星系巡天样本密度场或者速度场的傅立叶功率谱。

除了功率谱之外, 在成团性分析中人们往往应用更高阶的统计量诸如双谱(bispectrum)和三谱(trispectrum)来刻画非线性演化中的非高斯性。对于这些非高斯特性的精确测量能够帮助我们区分结构形成中的不同模型。尽管已经有人发展了很好的算法来消除计算功率谱时所出现的重影效应(Jing, 2005), 但是还没有过一套实用的算法可以让我们精确的使用快速傅立叶变换。我们发展的这套Beylkin算法有希望能成为满足这个需要的一套有效工具。此外, B-spline尺度函数还可应用于N体数值模拟之中。

第6章 总结与展望

在本论文中，我们主要讨论了引力透镜投影面密度的计算以及对星系样本傅立叶功率谱的计算。下面我们对这几个方面的内容分别总结如下：

用N体数值模拟来研究引力透镜的时候，由模拟的三维密度场得到透镜平面上的投影面密度场是至关重要的一个步骤。基于小波多尺度分析方法，我们提出了一种可用于计算三维数值模拟样本投影面密度的平滑算法。并利用该平滑算法研究了蒙特卡罗方法生成的引力透镜数值模拟样本，计算结果表明此算法能够在很高的精度上构建引力透镜模拟样本的面密度分布轮廓，而且由面密度计算出来的透镜的临界曲线和焦散曲线也能较好地 and 理论曲线吻合。和其他的平滑算法比较，这种平滑算法的计算结果有明显优势。

我们引入了数学上新近发展的基于离散小波变换的去噪方法来去除计算引力透镜投影面密度平滑过程所产生的多余噪声。对蒙特卡罗样本的数值检验表明这种去噪方法能够有效地去除大量噪声。

经过质量分配后作FFT变换来计算星系样本的功率谱一般会带来重影效应，对于传统的质量分配方法来说，这种重影效应会大大影响算得的功率谱，和真实功率谱相差较大。基于Beylkin方法，我们给出了一种能够精确测量包含大量离散数据的星系样本的功率谱的算法。该算法的两大优势在于计算速度快并且计算精度很高。和传统的质量分配方法比，这种算法算出的FFT功率谱可以不加入任何修正也能够很好的去除质量分配中的重影效应。我们利用了一个N体数值模拟Virgo样本检验了算法，结果表明即使是在接近Nyquist频率时，算得的FFT功率谱和理论的Smith功率谱拟合公式相比误差也不超过5%。

最后需要指出的是论文中的很多工作还可以进一步深入，这也是我们今后工作的方向。虽然在论文中我们已经计算了一组N体数值模拟透镜样本的临界曲线，但是仍有很多重要的透镜参量没有涉及。今后我们将会应用基于小波方法的平滑算法来研究更多的N体数值模拟透镜样本，并将详细的研究透镜的各种性质诸如Cusp关系或燕尾结构等。这些参量对于理解强引力透镜的流量异常现象是很关键的。

在对弱引力透镜的观测中，观测到的宇宙学剪切因子场因为观测手段的限

制会存在大量噪声。而去除这些噪声还原真实的剪切因子场在弱引力透镜研究中是至关重要的。目前有一些不同的方法用来去噪,包括Gaussian filtering, Wiener filtering等方法。今后我们也会尝试利用小波方法来去除这些噪声,并期待会有更好的表现。

此外,除了用来计算功率谱之外, Beylkin方法也能够进一步推广,可以运用它来精确计算星系样本的高阶统计量诸如Bispectrum或Trispectrum等。对这些反映非高斯特性的统计量的精确测量能够帮助我们区分结构形成中的不同模型。我们在今后的工作将会发展这样的算法。另外我们今后还将尝试将B-spline尺度函数应用于N体数值模拟之中。

附录 基于暗晕模型的功率谱拟合公式

这里我们给出基于暗晕模型的功率谱拟合公式，具体细节请参考文献(Smith et al. 2003)。暗晕模型将功率谱分解为两个部分之和：

$$\Delta_{NL}^2(k) = \Delta_Q^2(k) + \Delta_H^2(k). \quad (\text{A.1})$$

它们分别由下面的公式给出：

$$\Delta_Q^2(k) = \Delta_L^2(k) \left[\frac{(1 + \Delta_L^2(k))^{\beta_n}}{1 + \alpha_n \Delta_L^2(k)} \right] \exp[-f(y)]; \quad (\text{A.2})$$

其中 $y \equiv k/k_\sigma$, $f(y) = y/4 + y^2/8$; 而

$$\Delta_H^2(k) = \frac{\Delta_H'^2(k)}{1 + \mu_n y^{-1} + \nu_n y^{-2}}, \quad (\text{A.3})$$

其中

$$\Delta_H'^2(k) = \frac{a_n y^{3f_1(\Omega)}}{1 + b_n y^{f_2(\Omega)} + [c_n f_3(\Omega) y]^{3-\gamma_n}} \quad (\text{A.4})$$

, $y \equiv k/k_\sigma$.

谱的参数由高斯filtering确定：

$$\sigma^2(R_G) \equiv \int \Delta_L^2(k) \exp(-k^2 R_G^2) d \ln k. \quad (\text{A.5})$$

此外

$$\sigma(k_\sigma^{-1}) \equiv 1. \quad (\text{A.6})$$

有效系数(effective index)为：

$$3 + n_{\text{eff}} \equiv - \left. \frac{d \ln \sigma^2(R)}{d \ln R} \right|_{\sigma=1}, \quad (\text{A.7})$$

谱的曲率为：

$$C \equiv - \left. \frac{d^2 \ln \sigma^2(R)}{d \ln R^2} \right|_{\sigma=1}. \quad (\text{A.8})$$

如果令 $(a_n, b_n, c_n, \gamma_n, \alpha_n, \beta_n, \mu_n, \nu_n)$ 作为自由参数变化，那么下面的系数能够将Virgo J98的CDM数值模拟数据拟合的最好，误差不超过8.6%，比PD96拟合公式要好很多(对应的最大误差为14%)。特别的，此拟合公式对J98数值模拟中

的 Λ CDM模型拟合得尤其好。当红移 $z < 3$ 时, 拟合公式和模拟数据的实际功率谱的偏差小于3%($k < 10hMpc^{-1}$ 时)。这是相当良好的拟合。

最佳的拟合系数如下:

$$\begin{aligned} \log_{10} a_n = & 1.4861 + 1.8369 n + 1.6762 n^2 + 0.7940 n^3 \\ & + 0.1670 n^4 - 0.6206 C ; \end{aligned} \quad (A.9)$$

$$\log_{10} b_n = 0.9463 + 0.9466 n + 0.3084 n^2 - 0.9400 C ; \quad (A.10)$$

$$\log_{10} c_n = -0.2807 + 0.6669 n + 0.3214 n^2 - 0.0793 C ; \quad (A.11)$$

$$\gamma_n = 0.8649 + 0.2989 n + 0.1631 C ; \quad (A.12)$$

$$\alpha_n = 1.3884 + 0.3700 n - 0.1452 n^2 ; \quad (A.13)$$

$$\beta_n = 0.8291 + 0.9854 n + 0.3401 n^2 ; \quad (A.14)$$

$$\log_{10} \mu_n = -3.5442 + 0.1908 n ; \quad (A.15)$$

$$\log_{10} \nu_n = 0.9589 + 1.2857 n ; \quad (A.16)$$

依赖于 Ω 的函数为:

$$\left. \begin{aligned} f_{1a}(\Omega) &= \Omega^{-0.0732} \\ f_{2a}(\Omega) &= \Omega^{-0.1423} \\ f_{3a}(\Omega) &= \Omega^{0.0725} \end{aligned} \right\} \Omega \leq 1 \quad (A.17)$$

$$\left. \begin{aligned} f_{1b}(\Omega) &= \Omega^{-0.0307} \\ f_{2b}(\Omega) &= \Omega^{-0.0585} \\ f_{3b}(\Omega) &= \Omega^{0.0743} \end{aligned} \right\} \Omega + \Lambda = 1 \quad (A.18)$$

参考文献

- [1] Abraham, R.G., Glazebrook, K. McCarthy, P.J., et al. 2004, AJ, 127, 2455
- [2] Amara, A., et al. 2006, MNRAS, 367, 1367
- [3] Anscomber, F.J. 1948, Biometrika, 35, 246
- [4] Bacon, D. Refregier, A., Ellis, R.S. 2000, MNRAS, 318, 625
- [5] Bartelmann, M., Huss, A., Colberg, J.M., et al. 1998, A&A, 330, 1
- [6] Bartelmann, M. & Schneider, P. 2001, Phys. Rep. 340, 291
- [7] Bartelmann, M. 2003, astro-ph/0304162
- [8] Bertschinger, E. 1998, Annu. Rev. Astron. Astrophys., 36, 599
- [9] Bradac, M., et al. 2002, A&A, 388, 373
- [10] Bradac, M., Schneider, P., et al. 2004, A&A, 423, 797
- [11] Baumgart, D.J. & Fry, J.N. 1991, ApJ, 375, 25
- [12] Baugh, C.M. & Efstathiou, G. 1993, MNRAS, 265, 145
- [13] Baugh, C.M. & Efstathiou, G. 1994, MNRAS, 267, 323
- [14] Bergh, J., Ekstedt, F., Lindberg, M. 1999, Wavelets (Studentlitteratur, Lund)
- [15] Beylkin, G. 1992, SIAM J. Numer. Anal., 29, 1716
- [16] Beylkin, G. 1995, Applied and Computational Harmonic Analysis, 2, 363
- [17] Brandt, A. 1991, Computer Physics Communications, 65, 24
- [18] Chiba, M. 2002, ApJ, 565, 17
- [19] Coles, P. & Lucchin, F. 2002, Cosmology (Wiley Press)
- [20] Colless, M.M. 1999, Proc.Looking deep in the Southern Sky (Berlin: Springer)
- [21] Contaldi, R., Hoekstra, H., Lweis, A. 2003, Phys. Rev. Lett., 90, 1308
- [22] da Costa, L.N., Vogeley, M.S., Geller, M.J., Huchra, J.P., & Park, C. 1994, ApJ, 437, L1
- [23] Cui, W., Liu, L., Yang, X., Wang, Y., Feng, L.L., Springel, V. 2008 preprint(arXiv:0804.0070)
- [24] Dalal, N. & Kochanek, C. 2002, ApJ, 572, 25

-
- [25] Daubechies, I. 1992, *Ten Lectures on Wavelets* (Philadelphia, SIAM)
- [26] Davis, M., Efstathiou, G., Frenk, C.S., White, S.D.M. 1985, *ApJ*, 292, 371
- [27] Dutt, A. & Rokhlin, V. 1993, *SIAM J. Sci. Comput.*, 146, 1368
- [28] Dye, S., Warren, S.J., Hambly, N.C., et al. 2006, *MNRAS*, 372, 1227
- [29] Falco, E.E. et al. 1991, *ApJ*, 372, 364
- [30] Fang, L.Z. & Feng, L.L. 2000, *ApJ*, 539, 5
- [31] Fang, L.Z. & Thews, R. 1998, *Wavelet in Physics* (World Scientific, Singapore)
- [32] Feng, L.L., Deng, Z.G., Fang, L.Z. 2000, *ApJ*, 530, 53
- [33] Feng, L.L., Fang, L.Z. 2000, *ApJ*, 535, 519
- [34] Feng, L.L., Pando, J., Fang, L.Z. 2001, *ApJ*, 555, 74
- [35] Feng, L.L. & Fang, L.Z. 2004, *ApJ*, 601, 54
- [36] Feng, L.L., Shu, C.W. & Zhang, M.P. 2004, *ApJ*, 612, 1
- [37] Feng, L.L. 2007, *ApJ*, 658, 25
- [38] Feldman, H.A., Kaiser, N. & Peacock, J.A. 1994, *ApJ*, 426, 23
- [39] Fisher, K., Davis, M., Strauss, M.A., Yahil, A., & Huchra, J.P. 1993, *ApJ*, 402, 42
- [40] Friedmann, A. 1922, *Z. Phys.*, 10, 377
- [41] Friedmann, A. 1924, *Z. Phys.*, 21, 326
- [42] Gavazzi, R., Mellier, Y., et al. 2004, *A&A*, 422, 407
- [43] Gramann, M. & Einasto, J. 1992, *MNRAS*, 254, 453
- [44] Gray, E., Taylor, N., et al. 2002, *ApJ*, 568, 141
- [45] Griest, K., Safizadeh, N. 1998, *ApJ*, 500, 37
- [46] Grogin, N., Narayan, R. 1996, *ApJ*, 462, 92
- [47] Guth, A.H. 1981, *Phys. Rev. D.*, 23, 347
- [48] Guth, A.H., Pi, S.Y. 1982, *Phys. Rev. Lett.*, 49, 1110
- [49] Hamilton, A.J.S. & Tegmark, M. 2002, *MNRAS*, 330, 506
- [50] Harrison, E.R. 1970, *Phys. Rev. D.*, 1, 2726
- [51] Hubble, E. 1929, *Proc.N.A.S.*, 15, 168

-
- [52] Hockney, R.W. & Eastwood, J.W. 1981, Computer simulations using particles (McGraw-Hill)
- [53] Jarrett, T.H., Chester, T., Cutri, R., et al. 2000, AJ, 119, 2498
- [54] Jarret, T.H. 2004, preprint(astro-ph/0405069)
- [55] Jing, Y.P. & Valdarnini, R. 1993, ApJ, 406, 6
- [56] Jing, Y.P. & Suto, Y. 2002, ApJ, 574, 538
- [57] Jing, Y.P. 2005, ApJ, 620, 559
- [58] Kaiser, N. 1984, ApJ, 284, L9
- [59] Kaiser, N., Squires, G. 1993, ApJ, 404, 441
- [60] Kaiser, N. 1991, ESO-CERN Symposium on Relativistic Astrophysics (New York Academic Science)
- [61] Kaiser, N. Tonry, J.L., Luppino, G.A. 2000, PASP, 112, 768
- [62] Kauffman, G., Colberg, J.M., Diaferio, A. & White, S.D.M. 1999, MNRAS, 303, 188
- [63] Keeton, C., Kochanek, C. 1998, ApJ, 495, 157
- [64] Kochanek, C.S., Dalal, N. 2004, ApJ, 610, 69
- [65] Kormann, R., et al. 1994, A&A, 284, 285
- [66] Lang, K.R. 1999, Astrophysical Formulae (Springer)
- [67] Lehar, J., Hewitt, J.N., Roberts, D.H., et al. 1992, ApJ, 435, 109
- [68] Li, G.L., Mao, S.D., Jing, Y.P., et al. 2005, ApJ, 635, 795
- [69] Li, G.L., Mao, S.D., Jing, Y.P., et al. 2006, ApJ, 652, 43
- [70] Lin, H., Kirshner, R.P., Sackett, S.A., Landy, S.D., Oemler, A., Tucker, D.L. & Schechter, P.L. 1996, ApJ, 471, 617
- [71] Longair, M.S. 2001, Galaxy Formation (Springer)
- [72] Loveday, L. 2002, Contemporary Physics, 43, 437
- [73] Luppino, G., Kaiser, N. 1997, ApJ, 475, 20
- [74] Maccio, A.V., Moore, B., Stadel, J., Diemand, J. 2006, MNRAS, 366, 1529
- [75] Maccio, A.V., Miranda, M. 2005, astro-ph/0509598
- [76] Mallat, S.G. 1989, IEEE Trans, on PAMI, 11, 674
- [77] Mallat, S.G. 1989, Trans. Am. Math. Soc., 315, 69

- [78] Mallat, S.G. 1989, IEEE Trans, on ASSP, 37, 2091
- [79] Mallat, S.G. 1998, A wavelet Tour of Signal Processing (Academic Press, Boston)
- [80] Massey, R., Rhodes, J., et al. 2007, Nature, 445, 286
- [81] Massey, R., Rhodes, J., et al. 2007, ApJS, 172, 239
- [82] Metcalf, R. & Madau, P. 2001, ApJ, 563, 9
- [83] Mao, S. 1992, ApJ, 389, 63
- [84] Mao, S. & Schneider, P. 1998, MNRAS, 295, 587
- [85] Mo, H.J., White, S.D.M. 1996, MNRAS, 282, 347
- [86] Mo, H.J. 2002, Galaxy Formation and Evolution (Cambridge University Press)
- [87] Monaghan, J. 1992, ARAA, 30, 543
- [88] Munshi, D., Valageas, P., et al. 2006 preprint(astro-ph/0612667v1)
- [89] Navarro, J.F., Frenk, C.S., white, S.D.M. 1996, ApJ, 462, 563
- [90] Navarro, J.F., Frenk, C.S., white, S.D.M. 1997, ApJ, 490, 493
- [91] Niedereiter, H. 1978, Bull. Amer. Math. Soc., 84, 957
- [92] Paczynski, B. 1987, Nature, 325, 572
- [93] Padmanabhan, T. 2000, Theoretical Astrophysics (Cambridge University Press)
- [94] Park, C., Gott, J.R. & da Costa, L.N. 1992, ApJ, 392, L51
- [95] Park, C., Vogeley, M.S., Geller, M.J. & Huchra, J.P. 1994, ApJ, 431, P569
- [96] Peacock, J.A. & Nicholson, D. 1991, MNRAS, 253, 307
- [97] Peacock, J.A. & West, M. 1992, MNRAS, 259, 494
- [98] Peacock, J.A. & Dodds, S.J. 1996, MNRAS, 280, 19
- [99] Peacock, J.A. 1999, Cosmological Physics (Cambridge University Press)
- [100] Peebles, P.J.E. 1973, ApJ, 185, 413
- [101] Peebles, P.J.E. 1980, The large scale structure of the universe (Princeton University Press)
- [102] Peebles, P.J.E. 1999, ApJ, 510, 523
- [103] Peebles, P.J.E. 1999, ApJ, 510, 531
- [104] Penzias, A.A. & Wilson, R.W. 1965, ApJ, 142, 419

- [105] Percival, D.B. & Walden, A.T. 1993 *Spectral Analysis for Physical Applications* (Cambridge University Press)
- [106] Percival, W.J., et al. 2001, *MNRAS*, 327, 1297
- [107] Percival, W.J., et al. 2002, *MNRAS*, 337, 1068
- [108] Percival, W.J., et al. 2007, *ApJ*, 657, 645
- [109] Pedersen, K. & Dahle, H. 2007, *ApJ*, 667, 26
- [110] Press, W.H. & Schechter, P. 1974, *ApJ*, 187, 425
- [111] Press, W.H. & Rybicki, G.B. 1989, *ApJ*, 338, 277
- [112] Press, W.H., et al. 1992, *Numerical Recipes in Fortran* (Cambridge University Press)
- [113] Refregier, A. 2003, *ARA&A*, 41, 645
- [114] Refsdal, S. 1964, *MNRAS*, 128, 307
- [115] Refsdal, S. 1966, *MNRAS*, 132, 101
- [116] Romeo, A.B., Horellou, C., Bergh, J. 2003, *MNRAS*, 342, 337
- [117] Romeo, A.B., Horellou, C., Bergh, J. 2004, *MNRAS*, 354, 1208
- [118] Schaap, W.E. & van de Weygaert, R. 2000, *A&A*, 363, L29
- [119] Schramm, N.D. 1991, *Physica Scripta*, T36, 22
- [120] Scoccimarro, R., Colombi, S., et al. 1998, *ApJ*, 496, 586
- [121] Schild, R.E., Thomson, D.J. 1993, *Proc. 31st Liege Int. Astroph. Coll.* 415
- [122] Schneider, P. & Weiss, A. 1992, *A&A*, 260, 1
- [123] Shu, F.H. 1982, *The Physical Universe* (University Science Books)
- [124] Smith, R.E., et al. 2003, *MNRAS*, 341, 1311
- [125] Smoot, G.F., et al. 1992, *ApJ*, 396, L1
- [126] Springel, V., White, S.D.M., Tormen, G., Kauffmann, G. 2001, 328, 726
- [127] Squires, G., Kaiser, N., et al. 1996, *ApJ*, 461, 572
- [128] Sullivan, T.D. 1990, *Sandia Report*
- [129] Tadros, H. & Efstathiou, G. 1996, *MNRAS*, 282, 1381
- [130] Tegmark, M., et al. 2004, *ApJ*, 606, 702
- [131] Tyson, J.A., et al. 1990, *ApJ*, 349, L1

-
- [132] Vogeley, M.S., Park, C., Geller, M.J., Huchra, J.P. 1992, ApJ, 391, L5
- [133] van Waerbeke, L., Millier, Y., Erben, T., et al. 2000, A&A, 358, 30
- [134] Walsh, D., Carswell, R.F., Weymann, R.J. 1979, Nature, 279, 381
- [135] Wittman, D.M., Tyson, J.A., et al. 2000, Nature, 405, 143
- [136] White, S.D.M. 1979, MNRAS, 186, 145
- [137] White, S.D.M., Rees, M.J. 1978, MNRAS, 183, 341
- [138] White, S.D.M., Frenk, C. 1991, ApJ, 379, 52
- [139] White, S.D.M., Navarro, J.F., 1993, MNRAS, 265, 271
- [140] Yang, X.H., Feng, L.L., Chu, Y.Q., Fang, L.Z. 2001, ApJ, 553, 1
- [141] Yang, X.H., Feng, L.L., Chu, Y.Q., Fang, L.Z. 2001, ApJ, 560, 549
- [142] Yang, X.H., Feng, L.L., Chu, Y.Q., Fang, L.Z. 2001, ApJ, 566, 630
- [143] Yang, Y.B., Feng, L.L., Pan, J., Yang, X.H. 2008, preprint
- [144] Yang, Y.B., Li, G.L., Romeo, A. 2008, preprint
- [145] Yu, J.T. & Peebles, P.J.E. 1969, ApJ, 158, 103
- [146] Zel'dovich, Y.B. 1970, A&A, 5, 84
- [147] Zel'dovich, Y.B. 1972, MNRAS, 160, 1
- [148] Zwicky, F. 1933, Helv. Phys. Acta, 6, 110
- [149] 杨小虎, 博士论文; 刘纪认, 博士论文; 李国亮, 博士论文.

致 谢

首先感谢我的导师冯珑珑老师。冯老师六年以来的谆谆教导，把原本对天文一无所知的我带入了天体物理研究的大门。冯老师学识渊博，治学严谨，不管在科研上还是生活上都对我热情帮助，在他的支持和鼓励下我度了很多生活和科研上的难关，得以顺利完成学业。

感谢天体物理中心的褚耀泉教授，朱杏芬教授，张扬教授，王挺贵教授，周又元院士，向守平教授，张家铝院士，程福臻教授，孔旭教授，王俊贤教授，林宣滨副教授以及紫台的盘军研究员等诸位老师给予我的指导和帮助。

感谢系里程路华，奚玮红，陆山等老师这几年对我工作的支持和帮助。

感谢科大天体物理中心和紫台宇宙学团组的诸位同学，他们的鼓励和帮助使我的研究工作能够顺利进行。

感谢上海天文台的李国亮博士，他对我在引力透镜上的帮助使我受益颇多。

感谢瑞典Chalmers工业大学的Alessandro B. Romeo教授，和他展开的讨论让我对小波去噪方法理解更加深刻透彻。

另外我要特别感谢我在紫台学习的几年时间中紫台所提供的热情的帮助。

最后感谢我的父母和家人，他们对我生活上的关怀和学业上的支持让我能够克服种种困难，并将一直激励着我走好今后的路。

在读期间发表的学术论文与取得的研究成果

- [1] 基于小波的平滑算法在引力透镜中的应用

杨毅彬, 李国亮, Romeo, A., 2008, 天文学报已接受

- [2] An Optimal Method For The Power Spectrum Measurement

Yang, Y.B., Feng, L.L., Pan, J. & Yang, X.H., 2008 submitted to ChjAA