

中国科学技术大学
博士学位论文



残余引力波、高频引力波探测器和
宇宙暗能量的一些研究

作者姓名: 童明雷
学科专业: 天体物理
导师姓名: 张杨教授
完成时间: 二〇一〇年四月十日

University of Science and Technology of China
A dissertation for doctor's degree



**Some Studies on Relic
Gravitational Waves, High
Frequency Gravitational Wave
Detectors and Cosmic Dark
energy**

Author's Name:	Minglei Tong
speciality:	Astrophysics
Supervisor:	Prof. Yang Zhang
Finished time:	April 10 th , 2010

中国科学技术大学学位论文原创性声明

本人声明所呈交的学位论文,是本人在导师指导下进行研究工作所取得的成果。除已特别加以标注和致谢的地方外,论文中不包含任何他人已经发表或撰写过的研究成果。与我一同工作的同志对本研究所做的贡献均已在论文中作了明确的说明。

作者签名: _____

签字日期: _____

中国科学技术大学学位论文授权使用声明

作为申请学位的条件之一,学位论文著作权拥有者授权中国科学技术大学拥有学位论文的部分使用权,即:学校有权按有关规定向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版,允许论文被查阅和借阅,可以将学位论文编入有关数据库进行检索,可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文。本人提交的电子文档的内容和纸质论文的内容相一致。

保密的学位论文在解密后也遵守此规定。

公开 保密(____年)

作者签名: _____

导师签名: _____

签字日期: _____

签字日期: _____

摘 要

本文主要介绍在张杨教授的指导下我对宇宙残余引力波、高频引力波探测器和暗能量模型的一些研究结果。这几个方面都是宇宙学和引力波中重要的前沿课题。本文共分为六章。

第一章我们简述宇宙学的背景知识，残余引力波，引力波探测器和暗能量的研究现状和最新进展，以及我们在这几个方面所作的一些工作。残余引力波携带了极早期宇宙的信息，是我们认识早期宇宙暴涨最重要的手段之一，对研究早期宇宙具有极为重要的意义。高频引力波探测器是全新的引力波探测技术，主要利用电磁波和引力波的相互作用带来的可观测效应，这是一门新兴的技术，是对其他频段引力波探测器的有益补充。而暗能量则是宇宙学中极其热门的课题，各种模型层出不穷，当然也存在一些困难，例如巧合性问题、精细调节问题等等。同时我们也介绍了 Friedmann 宇宙最基本的知识。

第二章中首先介绍引力波的一些基本理论，宇宙中存在的引力波源及各频段的探测。然后我们讨论了宇宙残余引力波的量子起源、各阶段的解析解和转移函数的性质。接着我们研究了暴涨的张量型跑动谱指数对残余引力波谱的影响，发现在高频部分，不同的张量型跑动谱指数 α_t 对残余引力波谱和能量功率谱影响非常明显。越大的 α_t 会产生越大的残余引力波谱 $h(\nu, \tau_0)$ ，同时也使引力波的能量功率谱 $\Omega_g(\nu)$ 越明显地偏离于“平”的尺度不变谱。我们将理论预言的引力波同目前正在运行或未来要运行的激光引力波干涉仪探测器，包括 LIGO、AdvLIGO、LISA，以及低温共振棒探测器 EXPLORER 和共振腔探测器 MAGO 进行了量级上的对比，分析了探测的可能性。最后，我们用 LIGO S5 的最新运行结果限制了残余引力波的参数 β 和 α_t ，并计算了不同 β 和 α_t 值的信噪比。

第三章和第四章我们介绍两种利用电磁波和引力波的直接相互作用的高频引力波探测器。第三章主要介绍一种新型的微波激光引力波探测器，其探测频段在 GHz 附近。由于引力波的存在，垂直于激光的传播方向会产生与激光同频率扰动的光子流，这可以通过微波接收机探测到。首先，我们给出了探测器的构造，接着我们详细的讨论了这种探测器的探测原理，估计了该探测器的灵敏度。然后我们分析了这种探测器对残余引力波探测的可能性，最后我们指出了这种探测器的不足及改正方案。因为这种探测器的建造成本并不太高，灵敏度也非常高，所以是非常值得去投入建造的。第四章我们介绍环形波导腔引力波探测器，其探测频段在 100MHz 附近。在环形波导腔中传播的电磁波的极化矢量在引力波的影响下会随着时间偏转，这种偏转与引力波的幅度成正比。通过电磁探针可以将偏转角度测定，以此来估计引力波的强度。类似于第三章，我

们也依次讨论了探测器的构造、探测原理、以及探测器的灵敏度等等。

第五章首先介绍了暗能量的一些观测证据、暗能量模型中普遍存在的两个问题：精细调节问题和巧合性问题。接着简要论述两种最流行的宇宙学模型：宇宙学常数模型和标量场模型。然后讨论了我们在真空能衰减模型、两圈 Yang-Mills 场凝聚模型和有效标量场模型做过的一些工作。真空能衰减模型认为暗能量的能量密度正比于哈勃参数 H ，一定程度上缓解了精细调节问题，同时也比较容易解释高红移宇宙年龄问题。我们也画出了真空衰减模型和两圈 Yang-Mills 场凝聚模型的 Statefinder 和 Om 诊断。随着观测技术的发展，我们可以利用观测数据通过 Statefinder 和 Om 诊断来鉴别不同的暗能量模型。在量子 Yang-Mills 场模型的启发下，我们构造了有效标量场的拉氏量。与 Yang-Mills 场模型不同，这不是矢量场而是标量场模型。通过计算，我们还发现该模型可以很好的解释巧合性问题，但是不能解决精细调节问题。通过稳定性分析，该模型的动力学演化稳定，不受小扰动的影响，是稳定的吸引子解。另外，我们发现该模型的状态方程 w 在演化到达宇宙现阶段时可以达到 -1 ，如果暗能量和物质有耦合，状态方程 w 则可以自然地跨越 -1 。最后，利用 Ia 型超新星、重子声速振荡 (BAO) 和微波背景辐射 (CMB) 的观测数据，我们对有效标量场模型作了 χ^2 分析。

第六章是全文的总结和展望。

关键词：残余引力波，高频引力波探测器，宇宙暗能量

Abstract

This thesis presents my researches, under the guidance of my adviser Professor Yang Zhang, on the relic gravitational waves (RGWs), high-frequency gravitational wave (GW) detectors and dark energy models. All of them are very active issues in modern cosmology and GW astronomy. This thesis is divided into six chapters.

Chapter 1 is the introduction of the knowledge of cosmology, the mainly research status and recent progress of RGWs, high-frequency GW detectors and dark energy, and some work we have done on these subjects. RGWs carry a lot of information about the very early Universe, and is one of the most important methods to recognize the inflation happened in very early Universe. So RGWs is very important for us to study the very early Universe. High-frequency GW detector is a new detecting technique, which mainly make use of the observational effects come from the interaction between electromagnetic waves and GWs. It is very new and a wonderful complement for the usual GW detectors aimed on other frequency bands. Dark energy is a very popular field in cosmology. Many dark energy models have been proposed. Among them, of course, there are some problems that can not be resolved such as the coincidence problem and the fine tuning problem, etc. At the same time, we also introduce some knowledge about Friedmann cosmology.

In Chapter 2, we firstly introduce the basics of gravitational wave theory, the sources of gravitational waves and the detection on different frequency bands. Then, we discuss the quantum generation of RGWs, the analytic solutions of RGWs in various phases of the Universe and the properties of the transfer functions of RGWs. Next, we study the influences of the tensorial running spectral index α_t of inflation on RGWs, and found that the spectrum and the energy power spectrum of RGWs in high-frequency band are very sensitive to different α_t . A larger α_t leads to a larger spectrum of RGWs $h(\nu, \tau_0)$, and meanwhile make the power spectrum $\Omega_g(\nu)$ deviate from the “flat” k -independent case more obviously. We make a comparison of the RGWs predicted by theories and the sensitivities of various ongoing and forthcoming laser interferometer GW detectors including LIGO, AdvLIGO, LISA, the cryogenic resonant bar detector EXPLORER and the cavity detector MAGO, and then we analyzed the detecting probabilities. At last, we use the latest results of LIGO S5 to constrain the parameters β and α_t of RGWs, and then calculate the signal-to-noise for different values of β and α_t .

Two new kinds of high-frequency GW detectors based on the interaction between electromagnetic waves and GWs are introduced in Chapter 3 and Chapter 4, respectively. In Chapter 3, we mainly introduce a new maser GWs whose response frequency is around GHz. Due to the existence of GWs, perturbed photon fluxes are generated which perpendicular to the propagating direction of the maser,

and these perturbed photons can be detected by a microwave receiver. First of all, we give the construction of this kind of GW detector. Then we discuss the detecting method in details, and estimate the sensitivity of this detector. Next, we analyze the detecting probabilities aimed at RGWs. Last, we represent the defect of this detector and propose some improving suggestions. The price for the construction of the maser GW detector is not too high, and its sensitivity is very high, so it is worth to be constructed. In Chapter 4, we introduce the annular waveguide GW detector whose response frequency lie in 100MHz or so. Due to GWs, the polarization vector of the electromagnetic waves transporting in a annular waveguide will rotate with time. The rotating angular is proportional to the amplitude of the incoming GWs. The accumulative rotating angular can be detected by a electromagnetic probe, and then the strength of the GWs can be estimated. Similar to Chapter 3, we also discuss the construction, the detecting method and the sensitivity of this kind of GW detector.

In Chapter 5, we first introduce some observational evidences of dark energy and the two problems existed generally in dark energy models: the coincidence problem and the fine tuning problem. Then we introduce the most two popular dark energy model: cosmological constant model and the scalar field model. Next, we represent the work we have done on decaying vacuum model, Yang-Mills field condensate (YMC) model and the effective scalar field model. In decaying vacuum model, the energy density of dark energy is proportional to Hubble parameter H , alleviate the fine tuning problem to some extent. Meanwhile, it can explain the high redshift cosmological age problem easily. We plot the Statefinder diagnostic and Om diagnostic for decaying vacuum model and YMC model. Along with the progress of the observational technique, we can extinguish various dark energy models by Statefinder and Om diagnostics using the observational data. Inspired by YMC model, we construct the Lagrangian density for the effective scalar field model. Different from YMC model, the effective scalar field model is not a vector field model but a scalar field model. By calculation, we find that the effective field model can solve the coincidence problem naturally, but the fine tuning problem still exists. After the analysis of the stability, we found that this model has stable attractor solutions. Moreover, we find that the equation of state w of YMC approaches -1 at the present stage during the evolution. If the coupling with the matter component is included, w can cross over -1 naturally. At last, we make a χ^2 analysis on the effective scalar field model using the observational data from supernova of type Ia, baryon acoustic oscillation (BAO) and cosmic microwave background radiation (CMB).

The summary and future outlook are presented in the last Chapter.

keywords: relic gravitational waves, high-frequency gravitational wave detector, cosmic dark energy

目 录

中文摘要	I
英文摘要	III
第一章 引言	1
第二章 宇宙残余引力波	11
2.1 引力波基本理论	11
2.2 宇宙中的引力波源及各波段探测	16
2.3 残余引力波的产生	17
2.3.1 暴涨宇宙学说	17
2.3.2 残余引力波的量子起源	18
2.4 残余引力波的演化	20
2.4.1 宇宙标度因子的演化	20
2.4.2 宇宙各阶段残余引力波解析解	22
2.4.3 残余引力波谱	24
2.4.4 残余引力波的转移函数	27
2.5 跑动谱指数对残余引力波谱的影响	30
2.6 最新 LIGO S5 对残余引力波参数的限制	36
第三章 微波激光引力波探测器	41
3.1 探测器构造	41
3.2 探测原理	41
3.2.1 高斯光束	41
3.2.2 沿正 z 方向的引力波产生的扰动光子流	43
3.2.3 其它几个方向的引力波产生的扰动光子流	48

3.2.4	各方向扰动光子流的数值计算	52
3.2.5	相位差对扰动光子流的影响	54
3.3	探测高频残余引力波	55
3.3.1	探测器在实验室中的实现	55
3.3.2	探测器的灵敏度	56
3.3.3	探测残余引力波可能性	57
第四章	环形波导腔引力波探测器	61
4.1	探测器构造	61
4.2	探测原理	62
4.3	计算偏转角度	63
4.3.1	引力波沿正 z 方向传播	63
4.3.2	引力波沿正 x 方向传播	67
4.3.3	引力波沿正 y 方向传播	69
4.4	电磁波偏振矢量偏转的累积效应	69
4.5	探测残余引力波	73
4.5.1	探测器的灵敏度	73
4.5.2	高频残余引力波探测的可能性	76
第五章	暗能量模型	79
5.1	暗能量简介	79
5.1.1	暗能量的一些观测证据	80
5.1.2	一些暗能量模型	84
5.1.3	暗能量模型存在的主要问题	86
5.2	真空能衰减模型	86
5.2.1	DV 模型的宇宙学解	87
5.2.2	高红移宇宙年龄问题对 DV 模型的检验	91
5.2.3	Statefinder 诊断对 DV 模型的检验	93
5.2.4	Om 诊断对 DV 模型的检验	94

5.3	Yang-Mills 凝聚暗能量模型	96
5.3.1	量子1-loop的 YMC 暗能量模型	98
5.3.2	量子2-loop的 YMC 暗能量模型	103
5.3.3	YMC 的 Statefinder	105
5.4	有效标量场模型	108
5.4.1	模型	108
5.4.2	有效标量场的吸因子解	112
5.4.3	观测对有效标量场的限制	113
第六章	总结与展望	117
6.1	总结	117
6.2	展望	120
	参考文献	123
	致谢	133
	论文发表情况	135

插图目录

1-1	LISA的轨道示意图。[Flanagan & Hughes, 2005]	5
2-1	引力波两种极化模式。[Abramovici, <i>et al.</i> , 1992]	15
2-2	标度因子在有加速膨胀和没有加速膨胀的宇宙中的演化.	25
2-3	a'/a 随时间的变化。	27
2-4	取定 r 和 β , 不同 α_t 对引力波谱 $h(\nu, \tau_0)$ 的影响 [Tong & Zhang, 2009a].	31
2-5	r 和 β 对能量功率谱 $\Omega_g(\nu)$ 的影响 [Tong & Zhang, 2009].	32
2-6	取定 r 和 β , 不同 α_t 对能量功率谱 $\Omega_g(\nu)$ 的影响 [Tong & Zhang, 2009].	33
2-7	LIGO 和 AdvLIGO 的灵敏度和残余引力波幅度的比较 [Tong & Zhang, 2009a].	33
2-8	LISA 的灵敏度和残余引力波幅度的比较 [Tong & Zhang, 2009a]. ...	34
2-9	EXPLORER 2005年的运行结果和残余引力波幅度的比较[Tong & Zhang, 2009a].	34
2-10	MAGO 的灵敏度和残余引力波幅度的比较 [Tong & Zhang, 2009a].	35
2-11	BBN 和 CMB 对 β 和 α_t 的限制。	36
2-12	毫秒脉冲星探测器和PPTA对残余引力波能量功率谱 $\Omega_g(\nu)$ 的限制。	36
2-13	左边: 利用引力波谱LIGO S5对残余引力波谱中参数 β 的限制。我们将 $h_c(\nu)\sqrt{F/2\nu}$ 同 H1/L1 的目标曲线 \tilde{h}_f (SNR=1, 置信度为68%) 和交叉关联后的探测曲线(SNR=3.29, 置信度为95%)比较。右边: 不同 β 的引力波能量功率谱与各探测器能探测到的 Ω_g^{\min} (对于LIGO S5, $\Omega_g(\nu) = 6.9 \times 10^{-6}$, 置信度为 95%)的对比。其中取了参数 $r = 0.55, \alpha_t = 0$ [Zhang, Tong & Fu, 2010].	38
2-14	左边: 利用引力波谱 LIGO S5 对残余引力波谱中参数 α_t 的限制。右边: 不同 α_t 的引力波能量功率谱与各探测器能探测到的 Ω_g^{\min} 的对比。其中取了参数 $r = 0.55, \beta = -2$ [Zhang, Tong & Fu, 2010].	39
2-15	在LIGO的探测频段, 两组参数 ($\beta = -1.88, \alpha_t = 0$) 和 ($\beta = -2, \alpha_t = 0.011$) 产生的能量功率谱 $\Omega_g(\nu)$ 的简并。	40
2-16	约化交叉关联函数 $\gamma(\nu)$ [Allen, 1996].	40
3-1	探测装置的结构示意图。微波激光束沿正z方向传播, 静磁场 $\hat{B}^{(0)}$ 沿正 y 方向。激光束的包络面是双曲面, 反射分型模放在激光的包络面上, 将沿负x方向的那些扰动光子 ($n_x^{(1)} < 0$) 全反射成沿正 x 方向 ($n_x^{(1)'} > 0$), 然后这些光子被微波接收机探测到。被全反射的扰动光子的强度可在约 1m 内保持不变。	42

3-2	在 $y = 0.03\text{m}$ 处, $n_x^{(1)}$ 作为 x, z 的函数。各参数取为 $A_\otimes \sim 10^{-30}$, $\psi_0 = 1.8 \times 10^4 \text{ V m}^{-1}$, $W_0 = 0.05 \text{ m}$, $\hat{B}_y^{(0)} = 3 \text{ T}$, and $l = 0.4 \text{ m}$ 。	48
3-3	在 $x = 0.05\text{m}$ 的平面, $n_x^{(1)}$ 作为 y, z 的函数。各参数取值同图3-2 [Tong, Zhang & Li, 2008]。	49
3-4	在 $z = 0.4\text{m}$ 处, $n_x^{(1)}$ 作为 x, y 的函数。各参数取值同图3-2 [Tong, Zhang & Li, 2008]。	49
3-5	引力波沿负 z 轴传播时, 在 $x = 0.05\text{m}$ 处, $n_x^{(1)}$ 作为 (y, z) 的函数。各参数取值同图3-2。	50
3-6	引力波沿负 z 轴传播时, 在 $y = 0.03\text{m}$ 处, $n_x^{(1)}$ 作为 (x, z) 的函数。各参数取值同图3-2。	50
3-7	引力波沿正 x 轴传播时, 在 $x = 0.05\text{m}$ 处, $n_x^{(1)}$ 作为 (y, z) 的函数。各参数取值同图3-2。	51
3-8	引力波沿正 x 轴传播时, 在 $y = 0.03\text{m}$ 处, $n_x^{(1)}$ 作为 (x, z) 的函数。各参数取值同图3-2。	52
3-9	引力波沿负 x 轴传播时, 在 $x = 0.05\text{m}$ 处, $n_x^{(1)}$ 作为 (y, z) 的函数。各参数取值同图3-2。	53
3-10	引力波沿正 x 轴传播时, 在 $y = 0.03\text{m}$ 处, $n_x^{(1)}$ 作为 (x, z) 的函数。各参数取值同图3-2。	53
3-11	$N_x^{(1)}$ 随相因子 δ 的微小起伏. (a), (b), (c), (d) 分别表示入射的引力波沿 $+z, -z, +x, -x$ 方向。	55
3-12	高频段的残余引力波谱。其中各参数取为 $r = 0.22$, $\Omega_\Lambda = 0.75$, $\beta = -1.9$ 。在 4.5 GHz , 引力波谱对不同的 β_s 值很敏感 [Miao & Zhang, 2007]。	58
4-1	波导腔探测器示意图。	62
4-2	当 $A_\oplus = 0$ 时, $\Delta\Pi^2$ 随 ϖ 的变化。 $\Delta\Pi^2$ 在 $\varpi = 1.434$ 处有最大值 $1.864A_\otimes$, 在 $\varpi = 0.743$ 处有最小值 $-0.643A_\otimes$ 。注意: (1) $\varpi \gg 1$ 且 ϖ 是半整数时, $\Delta\Pi^2 = A_\otimes$; (2) ϖ 是整数时, $\Delta\Pi^2 = 0$; (3) $\varpi \rightarrow 0$ 时 $\Delta\Pi^2 = 0$ 。	66
4-3	当 $A_\otimes = 0$ 时, $\Delta\Pi^2$ 随 ϖ 的变化。 $\Delta\Pi^2$ 在 $\varpi = 1.036$ 处有最小值 $-1.585A_\oplus$ 。	66
4-4	当 $A_\otimes = A_\oplus = A$ 时, $\Delta\Pi^2$ 随 ϖ 的变化。 $\Delta\Pi^2$ 在 $\varpi = 1.546$ 处有最大值 1.842 , 在 $\varpi = 0.889$ 处有最小值 -1.802 。	67
4-5	对于圆极化的引力波, $\Delta\Pi^2$ 和 ϖ 的关系。 $\Delta\Pi^2$ 的值总是小于 $A/2$ 。	67
4-6	$A_\otimes = 0$, $n = 10$ 的情况。 $(\Delta\Pi^2)_n$ 在 $\varpi = 1.00038$ 处有最小值 $-15.071A_\oplus$ 。	70
4-7	$A_\oplus = 0$, $n = 10$ 的情况。 $(\Delta\Pi^2)_n$ 在 $\varpi = 1.038$ 处有最大值 $\Delta\Pi_{max}^2 = 12.027A_\otimes$, 在 $\varpi = 0.964$ 处有最小值 $\Delta\Pi_{min}^2 = -10.761A_\otimes$ 。	71
4-8	$A_\otimes = A_\oplus = A$, $n = 10$ 的情况。 $(\Delta\Pi^2)_n$ 在 $\varpi = 1.055$ 有最大值 $\Delta\Pi_{max}^2 = 11.05A$, 在 $\varpi = 0.982$ 处有最小值 $\Delta\Pi_{min}^2 = -20.214A$ 。 ..	71

4-9	$A_{\otimes} = A_{\oplus} = A$, $n = 10$ 的情况。 $(\Delta\Pi^2)_n$ 在 $\varpi = 1.055$ 处有最大值 $\Delta\Pi_{max}^2 = 11.05A$, 在 $\varpi = 0.982$ 处有最小值 $\Delta\Pi_{min}^2 = -20.214A$ 。 .	72
4-10	$A_{\otimes} = A_{\oplus} = A$, $n = 10$ 的情况。 $(\Delta\Pi^2)_n$ 在 $\varpi = 1.055$ 处有最大值 $\Delta\Pi_{max}^2 = 11.05A$, 在 $\varpi = 0.982$ 处有最小值 $\Delta\Pi_{min}^2 = -20.214A$ 。 .	74
4-11	不同 β 的残余引力波谱 $h(\nu, \eta_0)$ 。	76
4-12	对于固定的 $\beta = -1.8$, 不同 β_s 的残余引力波谱 $h(\nu, \eta_0)$ 。	77
5-1	SNIa的测量结果: ESSENCE(紫色菱形)与 SNLS (绿色叉号), 低红移 SN (橙色雪花状), Riess 等人 2004 年编辑的 SN 其加上来自 HST 的观测结果(蓝色方形)。上图: 三种不同的宇宙学模型下的距离模量与红移关系和观测数据的对比。下图: 各模型减掉模型 $\Omega_{\Lambda} = 0$, $\Omega_m = 0.3$ 的距离模数差 [Frieman, <i>et al.</i> , 2008]。(基于文献 [Wood-Vasey, <i>et al.</i> , 2007])。	82
5-2	用 SN, CMB 和 BAO 约束 Ω_m 和 Ω_{Λ} 的联合置信区域。颜色从深到浅依次为 68.3%、95.4%和99.7% 的置信水平。其中取定 $w = -1$ [Kowalski, <i>et al.</i> , 2008]。	83
5-3	与图5-2同样的数据来约束 Ω_m 和常数状态方程 w 的联合置信区域。其中取定 $\Omega_m + \Omega_{\Lambda} = 1$ [Kowalski, <i>et al.</i> , 2008]。	84
5-4	DV 模型和 LCDM 模型预言的 $\Omega(z)$ 随红移 z 的演化。	91
5-5	DV 模型和 LCDM 模型预言的 $T(z)$ 随红移 z 的演化。同时我们也画出了类星体 APM 08279+5255 的 T(3.91), 用 T_{qua} 表示, 其中我们取年龄区间 $t_{\text{qua}} = (2.0 - 3.0)\text{Gyr}$, 而且分别取了 $h = 0.72$ 和 $h = 0.62$ 两个值。	93
5-6	DV 模型中 Statefinder 参数 $r(z)$ 和 $s(z)$ 的演化 [Tong & Zhang, 2009b]。作为比较, 我们也画出其他几种暗能量模型的情况, 包括: LCDM 模型、Yang-Mills 模型、quiescence(Q) 模型和 kinessence(K)模型 [Sahni, <i>et al.</i> , 2003]。	95
5-7	DV 模型的 Statefinder 参数 (r, s) 和 (r, q) 轨迹。圆点表示 $\Omega_m = 0.27$ 时的当前值, 方点表示 $\Omega_m = 0.32$ 时的当前值。三角形表示 SSU(稳态宇宙学模型), 菱形表示 SCDM(标准冷暗物质模型)。	95
5-8	三种暗能量模型的 $Om(z)$ [Tong & Zhang, 2009b]。	96
5-9	$\Gamma' = 0$, $\Gamma/H_0 = 0.5$: 能量密度的演化情况。在 $\rho_{yi} = (10^{-10}, 10^{-2})\rho_{mi}$ 范围内在早期始终存在跟踪解 [Zhang, Xia & Zhao, 2007]。	101
5-10	$\Gamma' = 0$, $\Gamma/H_0 = 0.5$: 状态方程的演化。由于耦合效应, w_y 通过了 -1 , 最后在 $z = 0$ 时 ~ -1.17 [Zhang, Xia & Zhao, 2007]。	101
5-11	$\Gamma' = 0$, $\Gamma/H = 0.5$: 能量密度和状态方程的演化。由于耦合效应, w_y 在很早通过了 -1 , 最后在 $z = 0$ 时 ~ -1.17 [Zhao, Zhang & Tong, 2009]。	102
5-12	模型 1, $\Gamma = 0$, $\Gamma' = 0$: 能量密度和状态方程的演化。 w_y 在趋于 -1 , 但始终不能跨越 -1 [Zhao, Zhang & Tong, 2009]。	103

5-13	ρ_y , p_y 和 w 作为变量 $y = \ln(F/\kappa^2)$ 的函数图像两圈模型(实线)与一圈模型(虚线)对比 [Xia & Zhang, 2007]。	104
5-14	两圈 YMC 模型能量密度演化, 参数 $\gamma = 0.2$, $\delta = 3.0$ 。YMC 的初始能量密度在范围 $\rho_{yi} = (10^{-27} \sim 10^{-2})\rho_{ri}$ 内都会存在跟踪解, $\rho_y(t)$ 会在红移 $z \sim 0.6$ 时开始占主导 [Tong, Zhang & Xia, 2009]。	105
5-15	左边: YMC 模型 $r(z)$ 随红移的演化($z < 10$)。右边: $s(z)$ 随红移的演化($z < 5$)。为比较, 我们同时也画出了 LCDM 的 (r, s) [Tong, Zhang & Xia, 2009]。	106
5-16	两圈 YMC 模型中 statefinder 在 $r-s$ 平面和 $r-q$ 平面的演化。圆点表示现在时刻的值, 五角星代表 LCDM 模型, 菱形代表 SCDM 模型, 三角形代表 SSU 模型 [Tong, Zhang & Xia, 2009]。	106
5-17	无耦合的有效标量场能量密度和物态的演化。	111
5-18	耦合($\gamma = 0.2$)的有效标量场能量密度和物态的演化。	111
5-19	SN, BAO 和 CMB 约束的参数空间 $\Omega_m - \gamma$ 和 $\Omega_m - w_0$ 。	115

第1章 引言

宇宙是空间，时间和物质的总和，是物理学研究的最大对象。牛顿支持宇宙的静止性和绝对性，这在一定程度上影响了爱因斯坦，他在建立广义相对论后不久，就将其应用到宇宙学研究。为了得到一个静止不动和永恒的动力学状态，他在引力场方程中引入了“宇宙学常数”。该模型存在两个问题：第一，爱丁顿在该模型提出不久就发现该模型是不稳定的，也就是说只要存在一个很小的扰动，该模型的静态条件就会被破坏。第二，为什么要引进宇宙学常数项？它是一个简单的常数，还是有其相应的物理起源？有意思的是，该宇宙学常数与当代宇宙学研究的一个热门问题——暗能量有着密切的关系，这一点可以从后面的讨论中看到。现代宇宙学的真正确立是以哈勃的划时代发现为标志的。1929年哈勃发现大部分的星云是星系，而且它们正离我们远去。对星系的认识，第一次把人类的目光引向宇宙深处，加上后来轻元素相对丰度的测量和宇宙微波背景辐射的观测，并称为现代宇宙学的三大基石，奠定了现代宇宙学的理论框架，即现在被广泛接受的热大爆炸宇宙学模型。爱因斯坦广义相对论成为我们认识宇宙物理内涵、描述宇宙概貌及其演化的有力工具。当然宇宙学还建立在一个基本假设之上，这一假设便是宇宙学原理，也称为哥白尼原理：宇宙在任意时刻都是均匀且各向同性的。宇宙学原理是现代宇宙学的根基。

引力波是爱因斯坦引力场方程的解，是广义相对论的自然预言。在广义相对论提出不久，爱因斯坦便在弱场近似下求解场方程，发现了它的波动解。上世纪五、六十年代，Bondi 等人求解了引力波的严格解，最终从理论上令人信服地证明了引力波的存在 [Bondi, 1957]。从观测上，引力波存在的间接证据首先来自于 Hulse 等人对脉冲双星轨道周期的观测 [Hulse & Taylor, 1975]，他们发现观测结果与相对论的预言符合得很好，因为辐射引力波带走能量而使得双星逐渐靠近，公转周期变短。然而引力波至今仍未被直接探测到，这阻碍了引力场的量子理论、基本粒子的统一理论和理论物理的发展。现在有更多的团组正在利用各种不同的仪器来试图直接观测引力波，最主要的仪器包括低温共振棒或共振腔探测器和激光干涉仪两种。引力波探测对于物理学的进一步发展具有重大意义，以下几个方面可能会因此取得突破性进展：(1)理论物理，特别是引力理论的量子化问题将取得长足的发展；(2)致密星，特别是黑洞附近物理的研究将取得突破性的进展，例如对一个双星系统，其辐射的引力波的偏振性质揭示了其双星轨道的倾斜度，而这类关于波源运动的宏观信息通常无法从电磁辐射观测中取得；(3)早期宇宙，特别是宇宙光子退耦以前历史的研究，由于引力

波与其他物质的相互作用很弱，因此早期宇宙中产生的引力波携带了早期宇宙的信息，而利用电磁波最早只能认识到光子退耦时期的宇宙。宇宙中存在的引力波波源主要有以下两类：孤立的天体产生的引力波和背景的随机引力波。前者主要是由致密的天体如中子星、黑洞、白矮星等产生，比如双致密星相互绕转、非轴对称的脉冲星自转会产生周期性的引力波，而双黑洞的并合、超新星爆发会产生比较强的突发性引力波信号，这些都是激光干涉仪最主要的探测目标；后者是由极早期宇宙暴涨产生并遗留下来的，后面我们将重点讨论这种背景引力波。目前对它的探测，除了用引力波探测器直接探测以外还有其他的两种方法：一种是利用毫秒脉冲星精确的周期信号残差来限制引力波，周期性脉冲信号到达地球的时间会因引力波的存在而延迟；另一种是通过探测 CMB 的磁场型极化功率谱来探测引力波，由于 CMB 的磁场型极化功率谱只能由引力波产生，而不能由密度扰动产生，因此观测 CMB 的磁场型极化功率谱是探测极低频引力波最主要的方法之一，而这同时也是 CMB 研究的主要目标之一。

在标量场驱动的暴涨模型中，剧烈变化的引力场会将引力波的零点量子振荡放大，形成今天可被探测的残余引力波随机背景 [Grishchuk, 2001]。在量子场论和广义相对论的框架下，这是个必然结果。一个波场并不是一个单一的谐振子，也许是依赖于坐标和时间的多个独立模式。这个场可以在 Fourier 空间分解为一系列的谐振子，因此我们将引力波场描述为一个多谐振子、多模式的集合。由于爱因斯坦方程的非线性，每个谐振子都与外界宇宙环境中变化的引力场耦合在一起，对于波长非常短的引力波，这种耦合作用在宇宙早期谐振子的绝热条件被打破时非常明显。正是所有早期宇宙中物质产生的均匀、各向同性的引力场扮演了额“抽运场” (pump field) 的作用，将引力波谐振子变成了多粒子态。具体地讲，每对动量相反波的初始真空态演化成高度相关联的态，叫做双模压缩真空态 [Grishchuk & Sidorov, 1989; 1990]，其强度和有效耦合的时长依赖于谐振子的频率。暴涨时期宇宙的标度因子呈 e 指数膨胀 [Sasaki, 1986]，一般认为该模型至少要使暴涨在极短的时间内膨胀 10^{20} 倍以上，因此被称为暴涨(inflation)，而宇宙视界在这时却几乎没有变化。在该阶段，宇宙的急速膨胀将本来有因果联系的区域迅速推到视界之外，当进入辐射为主阶段以后这些区域再慢慢回到视界之内。视界之外的引力波都处在双模压缩真空态，而一些波长很短的引力波在视界之内处于相干态。双模压缩真空态的引力波大小保持不变，而相干态的引力波随着宇宙膨胀以反比于宇宙标度因子的方式衰减。视界之内不同波数的引力波先后进入视界，其幅值随着标度因子增大而衰减，这样形成了一个频带非常宽的背景引力波，从

10^{-18}Hz 到 10^{10}Hz 。然后，依次经历了再加热时期，辐射为主时期，物质为主时期和加速膨胀时期，最终演化成今天的残余引力波。这些阶段发生的物理过程都会在残余引力波谱上留下烙印。不同的暴涨模型会产生不同的引力波谱，因此可以从引力波谱的谱形中获知暴涨过程的信息 [Kuroyanagi, Chiba & Sugiyama, 2009]。再加热时期标度因子的指数大小会影响高频的残余引力波谱 [Grishchuk, 2001; Zhang *et al.*, 2005a; 2005b; 2006]。辐射为主时期的中微子自由流过程 [Weinberg, 2004; Watanable & Komats, 2006; Miao & Zhang, 2007]、宇宙 QCD 相变和正负电子对湮灭 [Schwarz, 1998; Watanable & Komats, 2006; Wang, *et al.*, 2008] 也都会对引力波谱产生影响。中微子的自由流会使残余引力波谱在 $10^{-16}\text{Hz}\sim 10^{-10}\text{Hz}$ 减小 20%，QCD 相变使得残余引力波谱在大于 10^{-9}Hz 的频段降低了 20%，而正负电子对湮灭会使残余引力波谱在大于 10^{-12}Hz 的频段减弱 10%。在现阶段加速膨胀的宇宙学模型中，暗能量的多少也可以直接影响引力波的功率。因此，原则上我们可以通过观测引力波的功率谱来反向研究宇宙中的暗能量。在本文中，我们首先用严格解析的方法研究了加速膨胀的宇宙中残余引力波的演化行为。张杨教授同赵文博士、夏天阳博士等讨论了加速膨胀(暗能量)对引力波能谱的影响 [Zhang *et al.*, 2005b; 2005c; 2006]，发现加速膨胀的影响可以归结为一个简单的 damping 因子。在此基础上，我们着重讨论了跑动的暴涨谱指数对残余引力波谱及其能量功率谱的影响。独立于慢滚暴涨模型，我们将暴涨谱指数 β 和偏离于幂律谱的跑动指数 α_t 作为独立的量。对于 $\alpha_t = 0$ 的残余引力波谱，能量功率谱在各个波段都保持幂律的形式，且 β 越大，引力波谱的幅度越大，尤其是在高频段更加明显；当 $\alpha_t \neq 0$ 时，则引力波的能谱会偏离幂律谱，而且 $|\alpha_t|$ 越大，偏离的越厉害，也是在高频段更加明显。接着，我们将理论预言的残余引力波谱同多种引力波探测器如 LIGO [The LIGO Scientific Collaboration]、AdvLIGO [The Advanced LIGO Team]、LISA [The LISA International Science Team; Tinto, *et al.*]、EXPLORER [Astone, *et al.*, 2008]、MAGO [Ballatini, *et al.*, 2005] 和 PPTA [Manchester, 2006] 的灵敏度做了量级上的对比。但这种讨论并不是很严格，应该还要考虑到各种探测器对引力波入射方向的敏感程度，即要考虑约化因子 F [Allen, 1996; Maggiore, 2000] 的影响。例如，激光干涉仪引力波探测器的约化因子 $F = 2/5$ ，而低温共振棒的为 $F = 8/15$ 。我们利用最新 LIGO S5 的运行结果 [The LIGO Collaboration and The VIRGO Collaboration, 2009]，对参数 β 和 α_t 作了限制，并计算了不同 (β, α_t) 的信噪比。同时我们也用 BBN [Maggiore, 2000; Cyburt, *et al.*, 2005] 和 CMB [Smith, Pierpaoli & Kamionkowski, 2006] 的观测对参数 β 和 α_t 作了相应

的限制。除了暴涨产生的残余引力波之外，还有一些早期宇宙过程产生背景的引力波。例如，在没有暴涨过程的标准模型中，从原初等离子体中脱离热平衡的引力波黑体谱 [Zel'dovich and Novikov, 1983; Kolb & Turner, 1990]，相互作用越弱脱离热平衡的能标就越高，所以引力波很早就脱离了热平衡， $T_{\text{dec}} \sim M_{\text{pl}}$ ，而今天的温度为 $T_g \simeq 0.9 \text{ K}$ [Kolb & Turner, 1990]，因此这种黑体引力波的频率主要集中在 $\nu_g = k_B T_g / h \simeq 1.9 \times 10^{10} \text{ Hz}$ ，其中 k_B 和 h 分别是玻尔兹曼常数和普朗克常数。而如果存在暴涨过程，假设暴涨的 e-folding 为 60，那么黑体引力波目前的温度 $T_g \sim 10^{-27} \text{ K}$ [Zhao, Baskaran & Coles, 2009]，而频率主要集中在 $\nu_g \sim 10^{-16} \text{ Hz}$ 附近。对于微波背景辐射的光子， $T_r \simeq 2.73 \text{ K}$ ， $\nu_r = 5.7 \times 10^{10} \text{ Hz}$ 。黑体的背景引力波和暴涨产生的残余引力波可以通过 CMB 的功率谱来区分 [Zhao, Baskaran & Coles, 2009]。另外，PBB (pre-big-bang) 过程 [Veneziano & Gasperini, 2002]，bouncing-Universe 过程 [Khoury *et al.*, 2001; 2002]，宇宙弦 [Damour & Vilenkin, 2000; 2001] 以及其他的一些过程也会产生引力波背景，详细地见文献 [Buonanno, 2004]。本文我们不考虑这些过程产生的引力波，着重讨论暴涨产生的残余引力波。

由于引力相互作用较其它三种相互作用弱得多，因而引力波的效应也就极其微弱，这种微弱的特点导致了两种结果：(1) 由于引力作用很弱，所以引力波在到达地球的过程中与其他物质相互作用很微弱，这样我们可以通过引力波探测到一些用电磁波无法探测的天文现象；(2) 由于引力波与其他物质的相互作用很微弱，决定了引力波与探测器的作用很弱，所以探测起来非常困难。但引力波具有非常好的相干性，这一点类似于激光，利用其相干性可以提高引力波的可探测性。引力波为我们提供了认识天文现象有别于电磁波的另一窗口，是我们认识极早期宇宙的重要手段。为了直接探测引力波，人们建造了很多引力波探测器，包括激光干涉仪和低温共振棒。激光干涉仪包括：

- LIGO [The LIGO Scientific Collaboration]，美国的引力波探测器，包括三个干涉仪：一个 4 km 的干涉仪建在 Livingston, Louisiana；一对干涉仪（一个 4 km，另一个 2 km）在 Hanford, Washington。这两地相距 3000 km。AdvLIGO [The Advanced LIGO Team] 会将探测精度提高 10 倍。

- Virgo [Freise, *et al.*, 2005; The Virgo Collaboration]，是法国和意大利合建的探测器，位于意大利的 Pisa 附近。Virgo 与 LIGO 在很多方面都很类似，最大的区别是 Virgo 采用了一个非常复杂的地震噪音隔离系统，因此在低频率端灵敏度也很高。

- GEO600 [Willke, *et al.*, 2002; Lück, *et al.*, 2010; The GEO600 Team]，是

德国和英国合建的臂长为 600 m 的引力波探测器，位于德国的 Hanover 附近。尽管该探测器臂长比较短，但它利用了先进的干涉技术，使得其灵敏度可以同臂长为几千米的干涉仪的灵敏度相媲美。这种干涉技术为后来建造新一代激光干涉仪探测器起到了不可估量的作用。

- TAMA300 [Ando, *et al.*, 2001; Takahashi, Tagoshi & TAMA Collaboration, 2004]，是日本在 Tokyo 附近建造的臂长为 300 m 的探测器，目前已运行多年。TAMA 组正在设计一个 3 km 的干涉仪[Kuroda *et al.*, 2000]。

- ACIGA [Degallaix, *et al.*, 2005; Barriga, Zhao & Blair, 2005]，是澳大利亚建的引力波探测器，位于 Perth。这个探测器具有特殊意义，因为其他的激光引力波干涉仪都在北半球，基本处于同一平面上，而 ACIGA 在南半球，有利于确定引力波源的位置，也更有效的利用交叉关联技术。

- LISA [The LISA International Science Team]，是 NASA 和 ESA 共建的空间激光干涉仪引力波探测器，预计于2020年左右发射。如图1-1所示，LISA 由三个空间航天器排成一个等边三角形，间距为 5×10^6 km，其平面的法线方向与黄道面呈 60° 夹角，质心在地球轨道上，相对于太阳比地球滞后 20° 。

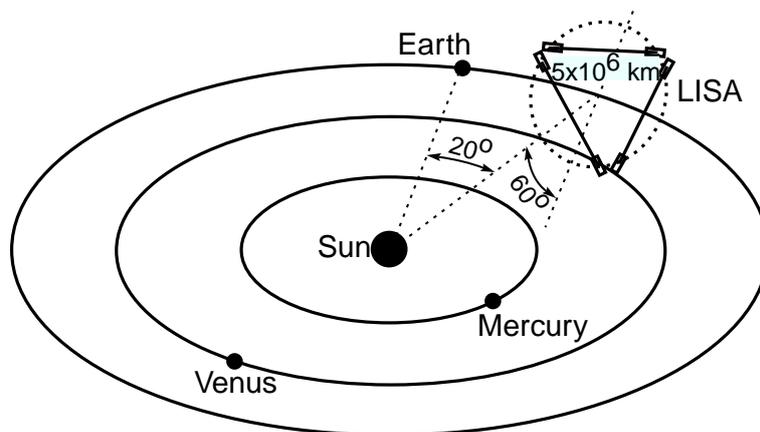


图 1-1 LISA的轨道示意图。[Flanagan & Hughes, 2005]

另外还有一些激光干涉仪引力波探测器，如 DECIGO [Seto, Kawamura & Nakamura, 2001; Kawamura, 2006]、BBO [Crowder & Cornish, 2005; Seto, 2006]、ASTROD [Ni, Shiomi & Liao, 2004; Ni, 2008]、Super-ASTROD [Ni, 2009]等等。低温共振棒有ALLEGRO、AURIGA、EXPLORER、NAUTILUS以及NIOBE [Astone, *et al.*, 1990; Pallottino, 1997; Mauceli, *et al.*, 1996; Blair, *et al.*, 1995; Cerdonio *et al.*, 1997]，低温共振腔 MAGO [Ballatini *et al.*, 2005] 等等，我们不再做详细的介绍。地面的激光干涉仪探测的频段大都集中在 $10 - 10^3$ Hz，空间干涉仪

LISA 和 ASTROD 频段分别在 $10^{-4} - 10^{-1}\text{Hz}$ 和 $10^{-5} - 10^0\text{Hz}$ 。而地面的共振探测器集中在 10^3Hz 附近一个很窄的频带。除此之外，高频引力波探测器的构想也被提出来，比如波导腔探测器 [Cruise, 2000; Cruise & Ingley, 2005; 2006]，在环形腔中传播的电磁波，其偏振矢量在引力波的影响下会沿与传播方向垂直的方向偏转，偏转角度正比于引力波的振幅，其探测频段在 100MHz 附近。我们详细计算了该探测器对各个方向传播的引力波的响应 [Tong & Zhang, 2008]，发现该探测器最容易探测沿垂直于环形腔方向传播的引力波。最近，利用高斯光束的方法测高频引力波也被提了出来 [Li, *et al.*, 2000; 2003; 2006; 2008]，一束线偏振激光通过一个强磁场区域，在引力波的影响下，垂直于激光传播的径向方向会产生扰动光子流，其衰减比零阶光子流要慢，通过分型膜可以将扰动光子流的信号很好的保存 1m 左右，然后被微波接收机探测到。我们称之为微波激光探测器，它利用了激光和引力波的共振效应，因此该探测器探测的频率就是激光的频率 $\sim\text{GHz}$ ，探测频段很窄。我们初步估算了该探测器的约化因子 F 在 $(1/4, \pi/4)$ 之间 [Tong, Zhang & Li, 2008]，同时我们将理论预言的残余引力波的幅度同微波激光探测器和环形波导腔探测器的灵敏度作量级上的对比，详见本文的第三、四章。

宇宙暗能量的研究是当今宇宙学最重要的研究课题之一。它的观测首先来源于 1998 年对 Ia 型超新星(SNIa)的观测 [Riess, *et al.*, 1998; Perlmutter, *et al.*, 1999]，该观测表明现今的宇宙处于加速膨胀阶段。后来通过 CMB 的观测，宇宙大尺度结构的观测，以及宇宙重子振荡，弱引力透镜，伽玛暴等观测都证实了该加速膨胀的存在。目前认为导致宇宙加速膨胀的原因有两种：一种是认为广义相对论在宇宙学尺度上不适用；另一种更普遍的观点是宇宙中存在被称为暗能量的物质，它有以下几个特点：暗能量的(有效)物态 w 是负的，而且必须要小于 $-1/3$ ，这样才有可能导致宇宙的加速膨胀；暗能量的分布没有明显的成团性质，其分布是均匀并且各向同性的，这已被多数观测所证明。暗能量的物理本质非常令人困惑，目前流行的有以下几种模型：第一种是爱因斯坦引进的宇宙学常数 Λ ，即真空能模型；第二种是标量场模型；第三种是矢量场模型。宇宙学常数模型能够自然地给出 $w = -1$ 的物态，并且与多数宇宙学观测能够很好地符合 [Seljak, *et al.*, 2005]。但是从理论方面考虑，该模型存在两个严重问题：多数人认为 Λ 与真空能量有关，但是粒子物理所预言的真空能与观测到的暗能量在量级上相去甚远，因此要得到现在的宇宙学常数，需要对宇宙的初始条件作非常精细的调节，这就是所谓的精细调节问题。其次由于物质的演化行为与宇宙学常数很不一样，但为什么如今的物质密度和宇宙学常数

的等效密度在同一个量级？这就是所谓的巧合性问题。在此基础上，真空能衰减模型提了出来 [Borges & Carneiro, 2005; Carneiro, 2007]，该模型认为暗能量的能量密度正比于哈勃参数 H ，一定程度上缓解了精细调节问题。正是由于这些原因，人们更加倾向于暗能量的动力学模型。其中最常用的是标量场模型，如 Quintessence [Wetterich, 1988]，Phantom [Caldwell, 2002]，K-essence [Armendariz-Picon, *et al.*, 1999]，以及 Quintom [Hu, 2005] 等。最近暗能量观测数据的丰富积累使得探测暗能量状态方程的演化成为可能。最直接探测暗能量本质的超新星数据倾向于暗能量为状态方程跨越 -1 的动力学模型。这是通常的标量场模型都不能实现的 [Vikman, 2005]。矢量场是研究暗能量的另外一种比较常用的模型，例如有效 Yang-Mills 凝聚的暗能量模型 [Zhao & Zhang, 2005a; 2006b; 2006c; Xia, Zhang & Zhao, 2006; Wang, Zhang & Xia, 2008]，该模型有比较扎实的物理起源和很少的可调参数。高红移宇宙年龄问题 [Hasinger, *et al.*, 2002; Friaca, *et al.*, 2005]、Statefinder 诊断 [Sahni, *et al.*, 2003] 以及 Om 诊断 [Sahni, *et al.*, 2008] 成为区别各种暗能量模型或者限制暗能量模型参数的有利工具。我们将详细讨论这三种鉴别方法对真空衰减能模型和 YMC 模型的限制。根据 YMC 模型的启发，我们构造了有效标量场的拉氏量，导出了该标量场的动力学演化方程。通过计算，我们发现该模型可以很好的解释巧合性问题，但是不能解决精细调节问题。能标参数 α 需要通过观测来确定。LCDM 模型只是无耦合有效标量场模型的一个特例。通过稳定性分析，我们发现该模型的动力学演化稳定，不受小扰动的影响，是稳定的吸引子解。与耦合 YMC 暗能量模型一样，耦合的有效标量场模型的状态方程 w 也可以自然的跨越 -1 ，而不必引入比较奇怪的场。我们利用 Ia 型超新星 [Hicken, *et al.*, 2009; Kowalski, 2008]、重子声速振荡 (BAO) [Eisenstein *et al.*, 2005] 和微波背景辐射 (CMB) [Komatsu, *et al.*, 2009] 的观测数据，对有效标量场模型作了 χ^2 分析。

作为我们下面讨论的基础，这里简要介绍一下 Friedmann-Robertson-Walker (FRW) 宇宙模型。根据宇宙学原理，时空度规可以用 FRW 形式描述：

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right], \quad (1-1)$$

其中 r , θ , ϕ 是共动空间坐标， t 是时间， $a(t)$ 是宇宙的尺度因子，我们用 a_0 表示现在时刻的宇宙尺度因子，本文中统一用下标 0 表示现在时刻，除非另外说明。 K 是三维空间的曲率， $K = 0$ 对应空间平直的欧几里德宇宙； $K > 0$ 是正曲率 (三维球)， $K < 0$ 是负曲率 (鞍形空间)。越来越多的观测支持 $K = 0$ ，即我

们生活在一个平坦的宇宙中。

宇宙的膨胀取决于标度因子 $a(t)$ 的演化，但方程(1-1)仅仅利用了宇宙的均匀各向同性的假设，并没有给出宇宙的动力学演化信息。 $a(t)$ 的演化由宇宙中的物质密度分布及演化决定。标度因子和物质密度通过爱因斯坦方程相互联系[Weinberg, 1972]

$$R_{\nu}^{\mu} - \frac{1}{2}\delta_{\nu}^{\mu}R = 8\pi GT_{\nu}^{\mu}, \quad (1-2)$$

其中 R_{ν}^{μ} 为 Ricci 张量，与度规和度规的一阶导数有关。 R 是 Ricci 标量，由 R_{ν}^{μ} 缩并得到。 T_{ν}^{μ} 为能量动量张量，包含了物质的密度、压强等信息。在 Friedmann-Robertson-Walker 是空背景下，Ricci 张量的各个分量为 [Kolb & Turner, 1990]:

$$R_0^0 = \frac{3\ddot{a}}{a}, \quad (1-3)$$

$$R_j^i = \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2K}{a^2} \right) \delta_j^i, \quad (1-4)$$

$$R = 6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{K}{a^2} \right), \quad (1-5)$$

其中 “.” 表示对 t 求一阶导数。

在均匀各向同性的假设下，将宇宙视为理想流体。于是，能量动量张量表示为

$$T_{\nu}^{\mu} = \text{Diag}(-\rho, p, p, p), \quad (1-6)$$

其中 ρ 和 p 分别代表能量密度和压强。于是爱因斯坦方程(1-2)化为 Friedmann 方程:

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{K}{a^2}, \quad (1-7)$$

$$\dot{H} = -4\pi G(p + \rho) + \frac{K}{a^2}, \quad (1-8)$$

其中 H 是哈勃参数，而 ρ 和 p 表示某一时刻宇宙中的总能量密度和总压强。由能量动量守恒($T_{;\nu}^{\mu\nu} = 0$)可以得出连续性方程

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0. \quad (1-9)$$

上式可以由方程(1-7)和(1-8)得到。因此方程(1-7)、(1-8)和(1-9)中只有两个是独

立的。由方程(1-7)和(1-8)消去 K/a^2 项得到

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p). \quad (1-10)$$

因此若宇宙加速膨胀($\ddot{a} > 0$)，则需要满足 $\rho + 3p < 0$ ，即 $p < -\rho/3$ 。而通常能量密度是正定的，因此需要总压强为负的。众所周知，重子和冷暗物质的压强趋于零，辐射的压强为正，那么必须要求暗能量的压强为负值。我们也可以把方程(1-7)写为如下形式

$$\Omega(t) + \Omega_K = 1, \quad (1-11)$$

其中 $\Omega(t) \equiv \rho(t)/\rho_c(t)$ 是一个无量纲的能量密度参数， $\Omega_K = K/(aH)^2$ 是宇宙曲率的等效能量密度，而 $\rho_c(t) = 3H^2/8\pi G$ 。很明显，物质的分布决定了宇宙的空间几何

$$\Omega > 1 \quad (\rho > \rho_c) \rightarrow K = +1, \quad (1-12)$$

$$\Omega = 1 \quad (\rho = \rho_c) \rightarrow K = 0, \quad (1-13)$$

$$\Omega < 1 \quad (\rho < \rho_c) \rightarrow K = -1. \quad (1-14)$$

目前，观测 [Bennett, *et al.*, 2003; Komatsu, *et al.*, 2009]和理论 [Liddle & Lyth, 2000]都表明现在宇宙是近似平坦的，目前最新的结果： $-0.0133 < \Omega_K < 0.0084(95\%CL)$ [Komatsu, *et al.*, 2010]。因此没有特别说明，以后的讨论我们都将认为 $K = 0$ 。

波长为 λ 的光子在尺度为 $a(t)$ 的宇宙中传播，一个远距离的源在 t_{em} 时刻发射出的光子红移： $1 + z = \lambda_{obs}/\lambda_{em} = a_0/a(t_{em})$ ，直接表征了当时的宇宙尺度。这表明时间间隔与红移间隔是直接对应的 $dt = -dz/H(z)(1+z)$ ，其中 $H \equiv \dot{a}/a$ 是 Hubble 参数。观测给出现在的 Hubble 参数值 $H_0 = 100 h \text{ km/sec/Mpc}$ ，其中 $h \approx 0.71$ 是无单位的 Hubble 常数。

全文没有特别说明，都采用自然单位： $c = 1$ 。拉丁指标 i, j, k, l 等标记三维空间坐标，希腊字母 α, β, μ, ν 等标记四维时空坐标。

第 2 章 宇宙残余引力波

在广义相对论的框架下，引力只不过是使用时空度规来描写的物理对象。正如麦克斯韦方程有辐射解—电磁波一样，我们不禁要问爱因斯坦方程有没有辐射解呢？也就是说我们的宇宙中是否存在着引力辐射—引力波？最初，爱因斯坦在弱场近似下求解爱因斯坦场方程发现了波动解，预言了引力波的存在，后来 Bondi 等人证明了引力辐射会带走能量，即引力辐射使得孤立引力源的引力质量下降 [Bondi, 1957]，从理论上找到了引力波的严格解。众所周知，电磁波是电磁场在空间中的传播，而引力波可以看成是时空自身扰动的传播 [Weinberg, 1972]，其传播速度也为光速。经典电磁波量子化可以得到光子，引力波量子化后对应引力子，当然引力场的量子化理论还不完善。引力子的静质量为零，自旋为 2。与其它种类的物理波动类似，引力波也携带能量。在引力波传播所经过的时空点处，发生空间伸缩等物理现象。天体物理和宇宙学的许多物理过程中都可以产生引力波，因此引力波的研究和探测对于天体物理、宇宙学具有重要意义。从理论角度来看，广义相对论理论是迄今最为成功的引力理论，它的许多重要预言都得到了观测和实验的验证。下面简短地介绍引力波的基本理论。

2.1 引力波基本理论

由于爱因斯坦方程是非线性的，引力波的严格解非常复杂。由于大多数可观测的引力辐射强度都非常低，我们只讨论弱场下的引力辐射。在弱场下，线性引力是广义相对论的一个很好的近似，时空度规可以看作是在平直时空度规上加了一个微小偏离，

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (2-1)$$

其中 $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ 是闵可夫斯基度规，描述平直时空。 $h_{\mu\nu}$ 是度规的扰动，其性质 $\|h_{\mu\nu}\| \ll 1$ 。 $\|h_{\mu\nu}\|$ 表示某个典型非零分量的大小。在线性引力中，我们只需保留 $h_{\mu\nu}$ 的线性项，忽略高阶项。于是我们可以放心的用 $\eta_{\mu\nu}$ 来升降张量的指标。注意， $h_{\mu\nu}$ 在洛仑兹变换下是一个张量，但在一般变化下不是张量。为后面计算方便，我们首先给出线性引力理论的一些量。仿射联络 (Christoffel 符号) 为

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}\eta^{\alpha\delta}(\partial_{\gamma}h_{\delta\beta} + \partial_{\beta}h_{\delta\gamma} - \partial_{\delta}h_{\beta\gamma}) \quad (2-2)$$

$$= \frac{1}{2}(\partial_\gamma h^\alpha{}_\beta + \partial_\beta h^\alpha{}_\gamma - \partial^\alpha h_{\beta\gamma}),$$

其中 $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu$ 。因为我们用 $\eta_{\mu\nu}$ 升降张量指标，所以一个矢量的空间指标可以任意的写在上面或者下面： $f^x = f_x$ ，而时间上下指标差一负号： $f^t = -f_t$ 。Riemann 张量在线性理论中写为

$$\begin{aligned} R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} &= \partial_\gamma \Gamma^\alpha{}_{\beta\delta} - \partial_\delta \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\gamma \partial_\beta h^\alpha{}_\delta + \partial_\delta \partial^\alpha h_{\beta\gamma} - \partial_\gamma \partial^\alpha h_{\beta\delta} - \partial_\delta \partial_\beta h^\alpha{}_\gamma). \end{aligned} \quad (2-3)$$

通过缩并我们得到 Ricci 张量

$$R_{\mu\nu} = R^\rho{}_{\mu\rho\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\rho \partial_\nu h^\rho{}_\mu + \partial^\rho \partial_\mu h_{\nu\rho} - \square h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h), \quad (2-4)$$

其中 $h = h^\mu{}_\mu$ 是 $h_{\mu\nu}$ 的迹， $\square = \partial_\rho \partial^\rho = \nabla^2 - \partial_t^2$ 是波动算符。再做一次缩并得曲率标量

$$R = R^\sigma{}_\sigma = (\partial_\rho \partial^\sigma h^\rho{}_\sigma - \square h), \quad (2-5)$$

于是爱因斯坦张量为：

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\rho \partial_\nu h^\rho{}_\mu + \partial^\rho \partial_\mu h_{\nu\rho} - \square h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h - \eta_{\mu\nu} \partial_\rho \partial^\sigma h^\rho{}_\sigma + \eta_{\mu\nu} \square h). \end{aligned} \quad (2-6)$$

这个表达式过于冗长，我们可以重新引入一个记号： $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h$ ，称为反迹扰动张量 [Flanagan & Hughes, 2005]（因 $\bar{h}^\mu{}_\mu = -h$ 而得此名）。将(2-6)中的 $h_{\mu\nu}$ 全部用 $\bar{h}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h$ 代替，得

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\rho \partial_\nu \bar{h}^\rho{}_\mu + \partial^\rho \partial_\mu \bar{h}_{\nu\rho} - \square \bar{h}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \partial_\rho \partial^\sigma \bar{h}^\rho{}_\sigma). \quad (2-7)$$

线性的爱因斯坦方程为：

$$\frac{1}{2}(\partial_\rho \partial_\nu \bar{h}^\rho{}_\mu + \partial^\rho \partial_\mu \bar{h}_{\nu\rho} - \square \bar{h}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \partial_\rho \partial^\sigma \bar{h}^\rho{}_\sigma) = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (2-8)$$

其中 $T_{\mu\nu}$ 是引力波辐射源的能量动量张量。如果引力波离引力波源很远，我们可以认为 $T_{\mu\nu} = 0$ ，比如宇宙残余引力波。如果作一个一般的无限小坐标变换， $x^{\mu'} = x^\mu + \xi^\mu$ ，其中 $\xi^\mu(x^\nu)$ 是任意无限小的矢量场， $\partial_\nu \xi^\mu$ 顶多和 $h_{\mu\nu}$ 同量级 [Weinberg, 1972]，我们容易得到

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu, \quad (2-9)$$

从而

$$\begin{aligned}\bar{h}'_{\mu\nu} &= h'_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h' \\ &= \bar{h}_{\mu\nu} - \partial_\mu\xi_\nu - \partial_\nu\xi_\mu + \eta_{\mu\nu}\partial^\sigma\xi_\sigma.\end{aligned}\quad (2-10)$$

如果 $\bar{h}_{\mu\nu}$ 是方程(2-8)的解, 那么容易验证 $\bar{h}'_{\mu\nu}$ 也是方程(2-8)的解。因此方程(2-8)没有唯一的解, 因为给定任何解后, 我们总能通过坐标变换造出其它的解, 这叫做场方程的“规范不变性”。我们可以通过选取某种规范, 即坐标系来克服这个困难。最方便的选择是在谐和坐标系中工作, 即取洛仑兹规范

$$\partial^\mu\bar{h}_{\mu\nu} = 0. \quad (2-11)$$

这四个约束条件使得 $h_{\mu\nu}$ 从10个自由度(对称性要求只有10个自由度, 而不是16个)变成了6个自由度。将(2-11)式代入方程(2-8), 得

$$\square\bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi GT_{\mu\nu}. \quad (2-12)$$

该方程解为 [Flanagan & Hughes, 2005]:

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) = 4 \int d^3x' \frac{T_{\mu\nu}(t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (2-13)$$

若是在真空中, 方程(2-12)变成

$$\square\bar{h}_{\mu\nu} = 0, \quad (2-14)$$

其解可以表示成平面波解的叠加, 也就是:

$$\bar{h}_{\mu\nu}(\mathbf{x}, t) = \text{Re} \int d^3k A_{\mu\nu}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)}. \quad (2-15)$$

这里 $\omega = |\mathbf{k}|$, 洛仑兹规范要求 $k^\mu A_{\mu\nu} = 0$ 。

下面我们考虑真空 ($T_{\mu\nu} = 0$) 且时空是渐进平直 (当 $r \rightarrow \infty$ 时 $h_{\mu\nu} \rightarrow 0$) 的情况。在一般的无穷小变换下, 若仍满足洛仑兹规范条件, 则 (2-10) 式和 (2-11) 要求

$$\square\xi^\mu = 0. \quad (2-16)$$

这个方程的解为

$$\xi^\mu = \text{Re} \int d^3k C^\mu(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t}, \quad (2-17)$$

其中, $C^\mu(\mathbf{k})$ 是某个波数为 \mathbf{k} 的平面波的振幅。将式(2-15)代入式(2-10), 我们

得到 $A_{\mu\nu}(\mathbf{k})$ 作如下变换

$$A_{\mu\nu} \rightarrow A'_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} - ik_{\mu}C_{\nu} - ik_{\nu}C_{\mu} + i\eta_{\mu\nu}k^{\sigma}C_{\sigma}. \quad (2-18)$$

注意式 (2-18) 满足洛仑兹规范条件 $k^{\mu}A'_{\mu\nu} = 0$ (利用了 $k^{\mu}k_{\mu} = 0$)。我们总能取合适的 C^{μ} 使得

$$0 = \eta^{\mu\nu}A'_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}A_{\mu\nu} + 2ik^{\mu}C_{\mu}, \quad (2-19)$$

$$0 = A'_{t\nu} = A_{t\nu} - iC_{\nu}k_t - iC_tk_{\nu} + i\delta_{t\nu}k^{\mu}C_{\mu}, \quad (2-20)$$

其中 $\delta_{\alpha\beta}$ 是 Kronecker 函数。上述方程组给出解

$$C_0 = -\frac{i}{2k_0}(A_{00} + \frac{1}{2}A^{\mu}_{\mu}), \quad (2-21)$$

$$C_i = -\frac{i}{2k_0^2}[2k_0A_{0i} - k_i(A_{00} + \frac{1}{2}A^{\mu}_{\mu})]. \quad (2-22)$$

因此我们总能找到合适的 C^{μ} 使得 $h_{\mu\nu}$ 只有纯空间分量

$$h_{tt} = h_{ti} = 0, \quad (2-23)$$

而且是无迹的,

$$h = h^i_i = 0. \quad (2-24)$$

应用 (2-24) 式, 洛仑兹条件写为

$$\partial_i h_{ij} = 0. \quad (2-25)$$

这叫做横向无迹规范, 又称 TT 规范。我们将取了 TT 规范的度规扰动 $h_{\mu\nu}$ 记为 $h_{\mu\nu}^{TT}$ 。由于是无迹的, 因此 $h_{\mu\nu}^{TT} = \bar{h}_{\mu\nu}^{TT}$ 。式 (2-23)-(2-25) 给出了 8 个约束条件, 因此 $h_{\mu\nu}$ 只剩下两个自由度, 这两个自由度是物理的, 代表引力波的两极化模式。例如, 一束沿 z 方向传播的平面引力波: $h_{ij}^{TT} = h_{ij}^{TT}(t - z)$ 。洛仑兹规范要求 $\partial_z h_{zj}^{TT}(t - z) = 0$, 即 h_{zj}^{TT} 为常数。而这个常数必须为 0, 因为渐进平直要求: $r \rightarrow \infty$ 时, $h_{\mu\nu} \rightarrow 0$ 。于是 h_{ij}^{TT} 只有四个非零分量 h_{xx}^{TT} , h_{xy}^{TT} , h_{yx}^{TT} 和 h_{yy}^{TT} 。对称性和零迹的条件使得 h_{ij}^{TT} 只剩两个独立的分量:

$$h_{xx}^{TT} = -h_{yy}^{TT} \equiv h_+(t - z), \quad h_{xy}^{TT} = h_{yx}^{TT} \equiv h_{\times}(t - z). \quad (2-26)$$

这里, h_+ 和 h_{\times} 表示引力波的两极化。如图 2-1 所示, h_+ 使空间在 x 和 y 方向上产生周期性的伸缩效应, 而 h_{\times} 使空间在与 x , y 轴成 45 度角的方向上产生周期性的伸缩效应。以 LIGO 为例, 如果探测器两臂的原始长度为 L , 当引力波

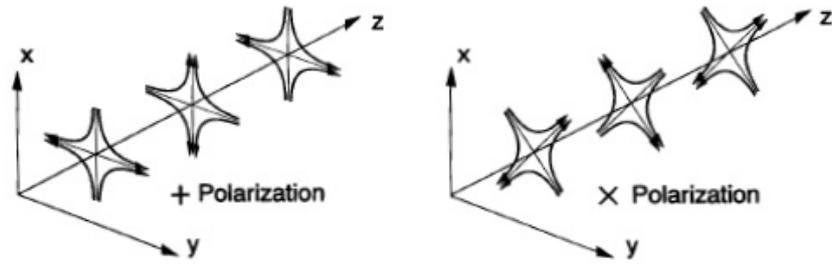


图 2-1 引力波的两极化模式。[Abramovici, *et al.*, 1992]

经过探测器时，臂长变化为 [Flanagan & Hughes, 2005]:

$$\delta L^i(t) = \frac{1}{2} h_{ij}^{TT}(t) L_0^j. \quad (2-27)$$

若探测器的两臂分别沿着 x 轴和 y 轴，那么由方程(2-27)，我们可以得到

$$\frac{\delta L_x}{L} = \frac{1}{2} h_+,$$

$$\frac{\delta L_y}{L} = -\frac{1}{2} h_+.$$

现在我们简单讨论一下有源的引力辐射。引力波和电磁波的产生机制不同，电磁波主要是偶极辐射，而引力波主要是四极辐射，也就是说引力波源的能动张量的四极矩需随时间变化。假设探测器距离引力波源为 r ，则接收的引力波信号为(取到一阶小量)¹:

$$h_{ij}^{TT}(t, r) = \frac{2G}{rc^5} \frac{d^2}{dt^2} Q_{ij}^{TT}(t - r). \quad (2-28)$$

其中 Q_{ij}^{TT} 为横向无迹规范下的引力波源的能动张量的四极矩。引力波的能量密度为 [Maggiore, 2000]

$$\rho_{GW} = \frac{c^2}{32\pi G} \langle \dot{h}_{ij} \dot{h}^{ij} \rangle, \quad (2-29)$$

其中“ $\langle \rangle$ ”表示集平均(ensemble average)。则容易求得单位时间内辐射的引力波能量，即引力波的光度为 [Kokkotas, 2008]

$$L_{GW} = -\frac{dE}{dt} = \frac{1}{5} \frac{G}{c^5} \langle \frac{\partial^3 Q_{ij}}{\partial t^3} \frac{\partial^3 Q^{ij}}{\partial t^3} \rangle. \quad (2-30)$$

如果假设引力波的两个极化分量相当，距离地球为 r 的波源，在时间 $T \simeq 1/\nu$

¹为了使表达式完整，我们这里暂且不取 $c = 1$ 。

内辐射的能量为 $\Delta E = L_{GW}/\nu$ ，到达地球的引力波的振幅为 [Weinberg, 1972]:

$$h \simeq \frac{1}{r} \left(\frac{G}{\pi^2 c^3} \frac{\Delta E}{\nu} \right)^2. \quad (2-31)$$

若知道引力波的频率 ν 及引力源的能量损失，就可以对引力波的振幅作出估计。更高极矩所产生的引力辐射非常微弱，通常忽略不计。举一个例子，考虑一个距离我们为 r 的双星系统，质量分别为 m_1 和 m_2 ，相距 R ，作圆周运动，轨道角频率为 Ω ，那么产生的引力波 h_{ij}^{TT} 到达我们这里的特征大小为

$$h = \frac{4\mu\Omega^2 R^2}{r} = \frac{4\mu M^{2/3} \Omega^{2/3}}{r}, \quad (2-32)$$

其中 $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ 是约化质量， $M = m_1 + m_2$ 是总质量。如果 $m_1 = m_2$ ，则

$$h = \frac{M^{5/3} \Omega^{2/3}}{r}. \quad (2-33)$$

注意，引力波的频率为 Ω/π 。

2.2 宇宙中的引力波源及各波段探测

引力辐射大致分为三种：周期性的孤立源，突发式的引力波源和随机引力波。周期性的引力波源包括双星系统，旋转的中子星以及 X 射线双星系统中的中子星。突发式的引力波源有超新星爆发，黑洞形成和合并的致密双星。随机引力波源有宇宙残余引力波和天体过程产生的随机引力波背景等等。

通常引力波的能量密度要远远小于电磁波的能量。这就给引力波的探测带来很大困难。对于地面的和空间的引力波探测仪器来说，孤立的引力波源是极为重要的探测对象。实际的引力波发射过程依赖于具体的物理环境和条件，目前人们对这些过程细节还不完全了解，通常只能作量级的估算。这其中最有可能被地面上观测到的是双星系统中的双黑洞系统。突发式引力波源探测的最大问题是持续时间太短，例如在黑洞形成过程中放出引力辐射的特征时间大约在 10^{-4} 秒的量级 [Ferrari, 2000]，几乎不具有可探测性。下面我们具体介绍引力波各频段特点及其探测性。

(1) 极低频， $10^{-18} Hz \leq f \leq 10^{-13} Hz$ ，这一频段的引力波很可能产生于早期宇宙的暴涨，时空度规中量子涨落在暴涨时期被放大，振幅的方均根依赖于暴涨的能标 E_{infl} :

$$h_{\text{rms}} \propto \left(\frac{E_{\text{infl}}}{m_{\text{pl}}} \right)^2, \quad (2-34)$$

其中 m_{pl} 是普朗克质量。

(2) 超低频, $10^{-9}Hz \leq f \leq 10^{-7}Hz$, 对这一频段的振幅, 最好的限制来自毫秒脉冲星的观测, 引力波可以使遥远脉冲星的脉冲到达我们这里的时间发生振荡的变化, 因为毫秒脉冲星的自转非常稳定, 因而可视为“标准钟”, 可以作为探测器来探测这一频段的引力波。目前利用该技术做得最好的限制是 [Hobbs *et al.*, 2009]:

$$h_c(f_{1yr}) < 10^{-14}, \quad f_{1yr} = 1/[1yr]. \quad (2-35)$$

(3) 低频, $10^{-5}Hz \leq f \leq 1Hz$, 对于这一频段的引力波, 用地面上的探测器是没有希望探测到的, 尽管地面探测器可以从局域的地面运动中完全隔离出来, 然而引力与局域质量分布涨落的耦合最终使得地面探测器的探测频率 $f > 1Hz$ 。唯一的方法是将探测器放到远离低频噪音的太空中, 这就是在 2020 年左右将发射的 LISA(Laser Interferometer Space Antrnna)。这一频段对应的引力波源有: 双星的绕转, 含黑洞的双星系统的并合以及随机引力波背景。

(4) 中频, $1Hz \leq f \leq 10^4Hz$, 地面探测器可以探测这一频段的引力波, 例如用低温共振法的棒形或球形探测器, 或用激光干涉仪的方法, 有美国的 LIGO, 英国和德国的 GEO, 法国和意大利的 VIRGO, 日本的 TAMA, 澳大利亚的 ACIGA。引力波源有: 致密双星的并合, 大质量恒星的塌缩, 射电脉冲星的自转以及随机引力波背景。

(5) 高频, $f > 10^4Hz$, 主要是宇宙残余引力波, 它产生于早期宇宙的量子涨落, 经过宇宙膨胀的若干阶段(尤其是暴涨), 最终演化成现在的宇宙残余背景引力波。下面我们将详细讨论残余引力波。

2.3 残余引力波的产生

2.3.1 暴涨宇宙学说

标准的大爆炸宇宙模型是建立在宇宙学原理和广义相对论的基础上。这是目前为止最成功的宇宙学模型, 它成功的预言了宇宙的膨胀, 宇宙微波背景辐射的存在, 以及宇宙核合成的发生。近几年来大量的观测已经对该模型参数提出了比较严格的限制, 并最终确立了宇宙学的标准模型: 即 LCDM 模型。该模型认为, 宇宙早期经历了辐射为主阶段, 物质为主阶段, 最终演化到现在的宇宙学常数为主阶段。但是大爆炸宇宙学也存在着一些与初始条件有关的问题, 如平坦性疑难, 均匀性疑难, 超重粒子疑难, 结构起源疑难等等。基于这

些疑难, 1981年, Guth 提出了暴涨理论 [Guth, 1981], 后来得到了进一步的发展 [Linde, 1982; Albrecht & Steinhardt, 1982], 尤其是近几年通过对 CMB 温度各向异性功率谱 [Bennett, *et al.*, 2003] 以及物质功率谱的观测 [Tegmark, *et al.*, 2004] 间接证明了该模型。暴涨模型认为: 在辐射为主之前, 宇宙经历了一个加速膨胀的阶段, 即 $\ddot{a} > 0$ 。这时候宇宙以真空能占主导, 其压强和能量满足状态方程 $p = -\rho$, 这就是人们通常所说的 de Sitter 膨胀。这个阶段, 宇宙的能量密度 ρ 和膨胀速率 H 都是常数。这样我们得到标度因子的演化规律为:

$$a = a_i e^{H(t-t_i)}. \quad (2-36)$$

其中 t_i 表示暴涨开始的时刻。我们看到此时宇宙的标度因子呈指数膨胀, 一般认为该模型至少要使暴涨在极短的时间内膨胀 10^{20} 倍以上, 因此被称为暴涨(inflation), 而宇宙视界在这时却几乎没有变化。在该阶段, 宇宙的急速膨胀将本来有因果联系的区域迅速推到视界之外, 当进入辐射为主阶段以后, 这些区域再慢慢回到视界之内, 因而自然地回答了大爆炸模型中的平坦性疑难, 均匀性疑难, 超重粒子疑难。而且暴涨将早期的量子涨落推出视界变成经典涨落, 形成了宇宙结构起源的种子, 因而也自然回答了宇宙的结构起源疑难, 这就是暴涨理论的基本思想。但是大爆炸模型的成功, 使得暴涨不能永远持续下去, 它必然经历一段时间而及时停止下来。暴涨理论不能代替大爆炸理论, 而是对它的合理补充。而且在暴涨阶段向大爆炸阶段演化时还需要一个宇宙再加热(reheating)过程。这方面的研究已经非常成熟了, 可以参考综述性文章 [Sasaki, 1986]。

2.3.2 残余引力波的量子起源

残余引力波是建立在广义相对论和量子场论框架下的一个自然结果。在极早期宇宙中(暴涨阶段), 强变化的引力场将零点量子振荡激发, 产生了一个随机引力波背景。当引力波存在时, 空间平直的 FRW 宇宙中线性张量扰动的度规一般可以写为:

$$ds^2 = a^2(\tau)[-d\tau^2 + (\delta_{ij} + h_{ij})dx^i dx^j]. \quad (2-37)$$

其中 h_{ij} 取 TT 规范, 因此它只有两个独立的物理自由度, 用+, ×来表示。张量扰动 h_{ij} 在量子力学的框架下表示成算符 [Grishchuk, 2001; Zhang, *et al.*, 2005a]:

$$h_{ij} = \frac{\sqrt{16\pi}l_{pl}}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{k} \sum_{\sigma=+,\times} \epsilon_{ij}^{(\sigma)}(\mathbf{k}) \frac{1}{\sqrt{2k}} [a_{\mathbf{k}}^{(\sigma)} h_{\mathbf{k}}^{(\sigma)}(\tau) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + a_{\mathbf{k}}^{(\sigma)\dagger} h_{\mathbf{k}}^{(\sigma)*}(\tau) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}], \quad (2-38)$$

其中 $l_{pl} = (G\hbar/c^3)^{1/2}$ 是普朗克长度, $\epsilon_{ij}^{(\lambda)}(\mathbf{k})$ 是极化张量, 满足关系式:

$$\begin{aligned}\epsilon_{ij}^{(\sigma)}(\mathbf{k}) &= \epsilon_{ji}^{(\sigma)}(\mathbf{k}), \quad \delta^{ij}\epsilon_{ij}^{(\sigma)}(\mathbf{k}) = 0, \quad k^i\epsilon_{ij}^{(\sigma)}(\mathbf{k}) = 0, \\ \epsilon^{(\sigma)ij}(\mathbf{k})\epsilon_{ij}^{(\sigma')}(\mathbf{k}) &= 2\delta_{\sigma\sigma'}, \quad \epsilon_{ij}^{(\sigma)}(-\mathbf{k}) = \epsilon_{ij}^{(\sigma)}(\mathbf{k})\end{aligned}\quad (2-39)$$

产生和湮灭算符满足

$$[a_{\mathbf{k}}^{(\sigma)}, a_{\mathbf{k}'}^{(\sigma')\dagger}] = \delta_{\sigma\sigma'}\delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (2-40)$$

而且对于原初真空态 $|0\rangle$ 有

$$a_{\mathbf{k}}^{(\sigma)}|0\rangle = 0. \quad (2-41)$$

统计上来说, 两种极化模式的残余引力波幅度相等: $h_k^+ = h_k^\times$, 因此我们省去指标符号(σ)统一写成 h_k 。而 a_k 和 a_k^\dagger 遵循海森堡方程:

$$\frac{da_k}{d\tau} = -i[a_k, H] \quad \frac{da_k^\dagger}{d\tau} = -i[a_k^\dagger, H] \quad (2-42)$$

注意这里的 H 是哈密顿算符, 不要和哈勃参数混淆。如果定义: $\mu_k(\tau) \equiv a(\tau)h_k(\tau)$, 那么由方程(2-42)可以得动力学方程 [Grishchuk, 1975; 1993]:

$$\mu_k'' + \left(k^2 - \frac{a''}{a}\right)\mu_k = 0. \quad (2-43)$$

当 a''/a 可以忽略时, 方程(2-43)有通常的谐振子解

$$\mu_k(\tau) = A_k e^{-ik\tau} + B_k e^{ik\tau}, \quad (2-44)$$

其中常数 A_k 和 B_k 由初始条件来定。另一方面, 当 a''/a 项占主导时, 方程(2-43)一般解的形式为

$$\mu_k(\tau) = C_k a + D_k a \int^{\tau} \frac{d\tau}{a^2}, \quad (2-45)$$

事实上这个近似解只是在 $k \ll |a'/a|$ 时才成立。膨胀的宇宙中, (2-45)式的第二项通常小于第一项, 于是当 $k \ll a'/a$ 时, 容易得

$$h_k = C_k = const. \quad (2-46)$$

条件 $k \ll a'/a$ 也可以等效的表示成 $\lambda \gg 1/H$, 其中 $\lambda = 2\pi a/k$, $H = a'/a^2$ 是视界半径。当波长远小于宇宙视界时($\lambda \ll 1/H$), 引力波的强度会绝热的衰减: $h_k \propto \frac{e^{\pm ik\tau}}{a(\tau)}$, 故 $\lambda \ll 1/H$ 也称为绝热条件。而当波长远大于宇宙视界时($\lambda \gg 1/H$), 引力波的强度保持不变, 此时 $\lambda \gg 1/H$ 被称为超绝热条件, 可以将 a''/a 视为一个等效势 $U(\tau)$ 。当绝热条件满足时, 这些高频模式的引力波不

与等效势 $U(\tau)$ 作用，高频模式的真空态(薛定谔图像)将永远处于真空态；而当超绝热条件满足时，低频模式的引力波被等效势 $U(\tau)$ 超绝热的放大，于是 h_k 保持为常数而不是绝热的衰减，低频模式真空态演化成压缩真空态。

2.4 残余引力波的演化

在上一节中我们主要讨论了宇宙的残余引力波如何从宇宙的暴涨阶段产生，给出了残余引力波的一般解的形式。这一节我们将详细讨论残余引力波如何在宇宙中演化，并给出宇宙各个时期的残余引力波解析解。首先我们看一下宇宙标度因子是如何演化的。

2.4.1 宇宙标度因子的演化

考虑空间平直 ($K=0$) 的 Friedmann-Robertson-Walker(FRW)宇宙，时空度规 (1-1) 式写为直角坐标的形式：

$$ds^2 = a^2(\tau)[-d\tau^2 + \delta_{ij}dx^i dx^j]. \quad (2-47)$$

宇宙的标度因子 $a(\tau)$ (τ 为共形时间)分别经历了暴涨、再加热，辐射为主、物质为主和现在的暗能量为主几个演化阶段，其分别对应的近似表达式为[Grishchuk, 1997; 2001; Zhang, *et al.*, 2005a; 2005b; 2006]:

暴涨阶段：

$$a(\tau) = l_0 |\tau|^{1+\beta}, \quad -\infty < \tau \leq \tau_1 \quad (2-48)$$

其中 $1 + \beta_{inf} < 0$ ， $\tau_1 < 0$ 是暴涨结束时刻。我们这里用指数 β 来描述整个暴涨阶段，如果 $\beta = -2$ ，那么上式所描述的就是 de Sitter 膨胀。暴涨谱指数 β 与原初密度扰动的谱指数的关系为 $n_s = 2\beta + 5$ ，而与原初张量扰动(引力波)谱指数的关系是 $n_t = 2\beta + 4$ 。WMAP 的观测表明 $\beta \sim -2$ [Sperdel, *et al.* 2003; 2007]。

再加热阶段：

$$a(\tau) = a_z (\tau - \tau_p)^{1+\beta_s}, \quad \tau_1 \leq \tau \leq \tau_s \quad (2-49)$$

其中 τ_s 是再加热结束的时刻， $1 + \beta_s > 0$ 。

辐射为主阶段：

$$a(\tau) = a_e (\tau - \tau_e), \quad \tau_s \leq \tau \leq \tau_2, \quad (2-50)$$

其中 τ_2 是辐射为主结束、物质为主开始时刻。

物质为主阶段:

$$a(\tau) = a_m(\tau - \tau_m)^2, \quad \tau_2 \leq \tau \leq \tau_E \quad (2-51)$$

其中 τ_E 是物质能量密度与暗能量能量密度相等的时刻。根据目前的观测, 我们取 $\Omega_m = 0.27$, $\Omega_\Lambda = 0.73$, 这样可以得到 τ_E 对应的红移 $z_E = (\Omega_\Lambda/\Omega_m)^{1/3} - 1 \simeq 0.393$ 。

加速膨胀阶段:

$$a(\tau) = l_H|\tau - \tau_a|^{-\gamma}, \quad \tau_E \leq \tau \leq \tau_0 \quad (2-52)$$

这里 τ_0 是现在的时刻。类似的, 当 $\gamma = 1$ 时描述的是 de Sitter 膨胀, 能量密度参数为 $\Omega_\Lambda = 1$ 。为了准确描述现在的尺度因子的膨胀规律, 可以用数值方法来拟合 γ 的值 [Miao & Zhang, 2007]:

$$\left(\frac{a'}{a^2}\right)^2 = H_0(\Omega_m a^{-3} + \Omega_\Lambda). \quad (2-53)$$

其中 $a' = da/d\tau$ 。根据拟合的结果, 在 $\Omega_\Lambda = 0.7$ 时, $\gamma \simeq 1.05$, 在 $\Omega_\Lambda = 0.75$ 时 $\gamma \simeq 1.044$ 。

方程(2-48)-(2-52)中总共有五个时间参数: τ_1 , τ_s , τ_2 , τ_E 和 τ_0 , 把宇宙历史划分为五个阶段。这些参数可以通过设定各个阶段之间的标度因子的比值来确定 [Zhang, *et al.*, 2006]: 再加热阶段, $\zeta_1 = a(\tau_s)/a(\tau_1) = 300$; 辐射为主阶段, $\zeta_s = \frac{a(\tau_2)}{a(\tau_s)} = 10^{24}$; 物质为主阶段, $\zeta_2 = a(\tau_E)/a(\tau_2) = 3454\zeta_E^{-1}$; 加速为主阶段, $\zeta_E = a(\tau_0)/a(\tau_E) = 1 + z_E = (\Omega_\Lambda/\Omega_m)^{1/3}$ 。另外我们将现在的标度因子取为 $a(\tau_0) = l_H$ (标度因子 $a(\tau_0)$ 如何归一化不影响物理结果, 只需自始至终采用同一个 $a(\tau_0)$ 的值), 于是[Zhang, *et al.*, 2005a]:

$$|\tau_0 - \tau_a| = 1 \quad (2-54)$$

根据 Hubble 常数的定义 $H_0 = a'(\tau_0)/a^2(\tau_0)$, 可以确定

$$l_H = \gamma/H_0. \quad (2-55)$$

利用各个阶段的标度因子及其一阶导数连续, 可以得到(2-48)-(2-52)式中的参数 [Miao & Zhang, 2007]:

$$\begin{aligned} \tau_a - \tau_E &= \zeta_E^{\frac{1}{\gamma}}, \\ \tau_E - \tau_m &= \frac{2}{\gamma} \zeta_E^{\frac{1}{\gamma}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tau_2 - \tau_m &= \frac{2}{\gamma} \zeta_2^{-\frac{1}{2}} \zeta_E^{\frac{1}{\gamma}}, \\
 \tau_2 - \tau_e &= \frac{1}{\gamma} \zeta_2^{-\frac{1}{2}} \zeta_E^{\frac{1}{\gamma}}, \\
 \tau_s - \tau_e &= \frac{1}{\gamma} \zeta_s^{-1} \zeta_2^{-\frac{1}{2}} \zeta_E^{\frac{1}{\gamma}}, \\
 \tau_s - \tau_p &= \frac{1}{\gamma} (1 + \beta_s) \zeta_s^{-1} \zeta_2^{-\frac{1}{2}} \zeta_E^{\frac{1}{\gamma}}, \\
 \tau_1 - \tau_p &= \frac{1}{\gamma} (1 + \beta_s) \zeta_1^{\frac{-1}{1+\beta_s}} \zeta_s^{-1} \zeta_2^{-\frac{1}{2}} \zeta_E^{\frac{1}{\gamma}}, \\
 \tau_1 &= \frac{1}{\gamma} (1 + \beta) \zeta_1^{\frac{-1}{1+\beta_s}} \zeta_s^{-1} \zeta_2^{-\frac{1}{2}} \zeta_E^{\frac{1}{\gamma}}, \tag{2-56}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_m &= \frac{l_H}{4} \gamma^2 \zeta_E^{-(1+\frac{2}{\gamma})}, \\
 a_e &= l_H \gamma \zeta_2^{-\frac{1}{2}} \zeta_E^{-(1+\frac{1}{\gamma})}, \\
 a_z &= l_H \gamma^{1+\beta_s} |1 + \beta_s|^{-(1+\beta_s)} \zeta_s^{\beta_s} \zeta_2^{\frac{\beta_s-1}{2}} \zeta_E^{-(1+\frac{1+\beta_s}{\gamma})}, \\
 l_0 &= l_H \gamma^{1+\beta} |1 + \beta|^{-(1+\beta)} \zeta_1^{\frac{\beta-\beta_s}{1+\beta_s}} \zeta_s^{\beta} \zeta_2^{\frac{\beta-1}{2}} \zeta_E^{-(1+\frac{1+\beta}{\gamma})}. \tag{2-57}
 \end{aligned}$$

残余引力波现在时刻的物理频率可以用共动波数 k 表示为

$$\nu = \frac{k}{2\pi a(\tau_0)} = \frac{k}{2\pi l_H}. \tag{2-58}$$

波长为哈勃半径 $1/H_0$ 的共动波数为

$$k_H = \frac{2\pi a(\tau_0)}{1/H_0} = 2\pi\gamma. \tag{2-59}$$

这里我们再引入一个后面我们需要的共动波数 [Tong & Zhang, 2009a]

$$k_E \equiv \frac{2\pi a(\tau_E)}{1/H(\tau_E)} = k_H (\Omega_m / \Omega_\Lambda)^{\frac{1}{3\gamma}}, \tag{2-60}$$

即 τ_E 时刻与哈勃半径对应的共动波数。

2.4.2 宇宙各阶段残余引力波解析解

若是将 h_{ij} 视为经典场，那么可以将其付立叶展开为

$$h_{ij}(\tau, x) = \sum_{\sigma=\times,+} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \epsilon_{ij}^\sigma h_k^{(\sigma)}(\tau) e^{ik \cdot x}. \tag{2-61}$$

FRW宇宙中引力波满足的波动方程为 [Zhang *et al.*, 2005]:

$$\partial_\mu (\sqrt{-g} \partial^\mu h_{ij}(\mathbf{x}, \tau)) = 0. \tag{2-62}$$

对于给定的波矢 \mathbf{k} , 该方程可以写为:

$$h_k''(\tau) + 2\frac{a'(\tau)}{a(\tau)}h_k'(\tau) + k^2h_k(\tau) = 0. \quad (2-63)$$

容易验证方程(2-63)和方程(2-43)是等效的。宇宙标度因子在各演化阶段的都是幂律的形式

$$a(\tau) \propto \tau^\alpha. \quad (2-64)$$

代入式(2-63)中得到通解

$$h_k(\tau) = \tau^{\frac{1}{2}-\alpha} [a_1 J_{\alpha-\frac{1}{2}}(k\tau) + a_2 N_{\alpha-\frac{1}{2}}(k\tau)], \quad (2-65)$$

其中常数 a_1 和 a_2 由 h_k 和 h_k' 的连续性确定。下面我们分阶段讨论。

暴涨时期, $h_k(\tau)$ 的解为

$$h_k(\tau) = A_0 l_0^{-1} |\tau|^{-(\frac{1}{2}+\beta)} [A_1 J_{\frac{1}{2}+\beta}(k\tau) + A_2 J_{-(\frac{1}{2}+\beta)}(k\tau)], \quad -\infty < \tau \leq \tau_1, \quad (2-66)$$

其中常数 A_0 决定了原初张量扰动的幅度, 而 A_1 和 A_2 取为 [Grishchuk, 1993a]:

$$A_1 = -\frac{i}{\cos \beta \pi} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{i\pi\beta/2}, \quad A_2 = iA_1 e^{-i\pi\beta}. \quad (2-67)$$

在高频极限下, 得到绝热真空 $\lim_{k \rightarrow \infty} h_k(\tau) \propto e^{-ik\tau}$ 。另一方面, $k\tau \ll 1$ 时,

$$h_k(\tau) \propto J_{\frac{1}{2}+\beta}(x) \propto k^{\frac{1}{2}+\beta}. \quad (2-68)$$

再加热时期, $h_k(\tau)$ 的解为

$$h_k(\tau) = t^{-\frac{1}{2}-\beta_s} [B_1 J_{\frac{1}{2}+\beta_s}(kt) + B_2 N_{\frac{1}{2}+\beta_s}(kt)], \quad \tau_1 \leq \tau \leq \tau_s, \quad (2-69)$$

其中 $t \equiv \tau - \tau_p$, B_1 和 B_2 可由 $h_k(\tau_1)$ 和 $h_k'(\tau_1)$ 的连续条件确定,

$$B_1 = \frac{-1}{2} \pi t_1^{\frac{3}{2}+\beta_s} [k N_{\frac{3}{2}+\beta_s}(k t_1) h_k(\tau_1) + N_{\frac{1}{2}+\beta_s}(k t_1) h_k'(\tau_1)], \quad (2-70)$$

$$B_2 = \frac{1}{2} \pi t_1^{\frac{3}{2}+\beta_s} [k J_{\frac{3}{2}+\beta_s}(k t_1) h_k(\tau_1) + J_{\frac{1}{2}+\beta_s}(k t_1) h_k'(\tau_1)], \quad (2-71)$$

其中 $t_1 \equiv \tau_1 - \tau_p$ 。

辐射为主时期, $h_k(\tau)$ 的解为

$$h_k(\tau) = y^{-\frac{1}{2}} [C_1 J_{\frac{1}{2}}(ky) + C_2 N_{\frac{1}{2}}(ky)], \quad \tau_s \leq \tau \leq \tau_2, \quad (2-72)$$

其中 $y \equiv \tau - \tau_e$, h_k 和 h_k' 在 τ_s 时刻的连续条件将 C_1 和 C_2 确定为

$$C_1 = \frac{-1}{2} \pi y_s^{\frac{3}{2}} [k N_{\frac{3}{2}}(k y_s) h_k(\tau_s) + N_{\frac{1}{2}}(k y_s) h_k'(\tau_s)], \quad (2-73)$$

$$C_2 = \frac{1}{2}\pi y_s^{\frac{3}{2}} \left[k J_{\frac{3}{2}}(k y_s) h_k(\tau_s) + J_{\frac{1}{2}}(k y_s) h'_k(\tau_s) \right], \quad (2-74)$$

其中 $y_s \equiv \tau_s - \tau_e$ 。

物质为主时期, $h_k(\tau)$ 的解为

$$h_k(\tau) = z^{-\frac{3}{2}} \left[D_1 J_{\frac{3}{2}}(k z) + D_2 N_{\frac{3}{2}}(k z) \right], \quad \tau_2 \leq \tau \leq \tau_E, \quad (2-75)$$

其中 $z \equiv \tau - \tau_m$, D_1 和 D_2 被确定为

$$D_1 = \frac{-1}{2}\pi z_2^{\frac{5}{2}} \left[k N_{\frac{3}{2}}(k z_2) h_k(\tau_2) + N_{\frac{3}{2}}(k z_2) h'_k(\tau_2) \right], \quad (2-76)$$

$$D_2 = \frac{1}{2}\pi z_2^{\frac{5}{2}} \left[k J_{\frac{3}{2}}(k z_2) h_k(\tau_2) + J_{\frac{3}{2}}(k z_2) h'_k(\tau_2) \right], \quad (2-77)$$

其中 $z_2 \equiv \tau_2 - \tau_m$ 。

加速膨胀时期, $h_k(\tau)$ 的解为

$$h_k(\tau) = s^{\frac{1}{2}+\gamma} \left[E_1 J_{-\frac{1}{2}-\gamma}(k s) + E_2 N_{-\frac{1}{2}-\gamma}(k s) \right], \quad \tau_E \leq \tau \leq \tau_0, \quad (2-78)$$

其中 $s \equiv \tau - \tau_a$, 而且

$$E_1 = \frac{-1}{2}\pi s_E^{\frac{1}{2}-\gamma} \left[k N_{-\frac{1}{2}-\gamma}(k s_E) h_k(\tau_E) + N_{-\frac{1}{2}-\gamma}(k s_E) h'_k(\tau_E) \right], \quad (2-79)$$

$$E_2 = \frac{1}{2}\pi s_E^{\frac{1}{2}-\gamma} \left[k J_{-\frac{1}{2}-\gamma}(k s_E) h_k(\tau_E) + J_{-\frac{1}{2}-\gamma}(k s_E) h'_k(\tau_E) \right], \quad (2-80)$$

其中 $s_E \equiv \tau_E - \tau_a$ 。

为了说明加速膨胀对残余引力波的影响, 图2-2画出了目前加速膨胀的宇宙和目前还是物质为主的宇宙两种情况下标度因子的演化。由上面的分析可知, 视界之内的引力波 $h_k(\tau) \propto 1/a(\tau)$, 因此可以计算得 [miao & Zhang, 2007]:

$$h_k(\tau_0)_{\text{CDM}}/h_k(\tau_H)_{\Lambda\text{CDM}} \sim 1.3. \quad (2-81)$$

2.4.3 残余引力波谱

引力场 h_{ij} 在每个时刻 τ 每个点 \mathbf{x} 的平均值为零:

$$\langle 0|h_{ij}(\tau, \mathbf{x})|0\rangle = 0. \quad (2-82)$$

这一点很容易从(2-38)和(2-41)式中看出。然而 h_{ij} 的方差不为零,

$$\langle 0|h^{ij}(\tau, \mathbf{x})h_{ij}(\tau, \mathbf{x})|0\rangle \equiv \langle h^2\rangle, \quad (2-83)$$

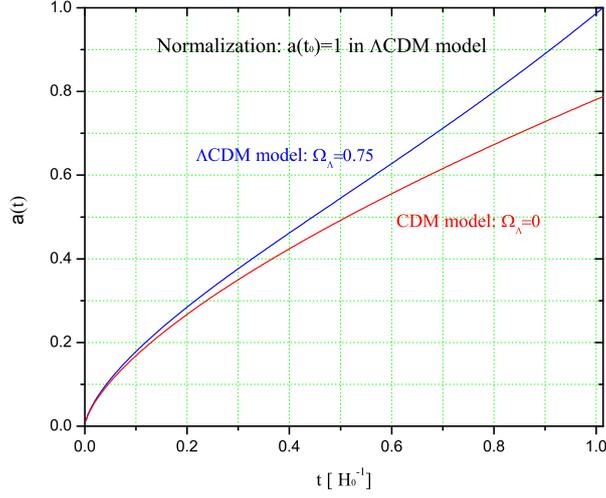


图 2-2 标度因子在有加速膨胀和没有加速膨胀的宇宙中的演化。

它决定了实验探测所关心的方均根强度。定义

$$\langle h^2 \rangle \equiv \int_0^\infty h^2(k, \tau) \frac{dk}{k} \quad (2-84)$$

其中 $h(k, \tau)$ 是残余引力波谱。将(2-38)式代入(2-84)式中，并利用(2-83)式得

$$h(k, \tau) = \frac{4l_{Pl}}{\sqrt{\pi}} k |h_k(\tau)|. \quad (2-85)$$

其中 l_{Pl} 是Planck长度。若将(2-61)式代入(2-84)中，则可以得到

$$h(k, \tau) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} k^{3/2} |h_k(\tau)|. \quad (2-86)$$

本文我们采用引力波的经典描述，即利用式(2-61)和(2-86)进行计算。另一个重要的物理量是引力波的能量密度参数 Ω_{gw} ，其定义为：

$$\Omega_{gw} \equiv \frac{\rho_g}{\rho_c} = \int_{\nu_{low}}^{\nu_{upper}} \Omega_g(\nu) \frac{d\nu}{\nu}, \quad (2-87)$$

其中 $\rho_g = \langle h_{,0}^{ij} h_{ij,0} \rangle / (32\pi G)$ 是引力波的能量密度， ρ_c 是宇宙的临界密度。由此可以得到：

$$\Omega_g(\nu) = \frac{\pi^2}{3} h^2(\nu, \tau_0) \left(\frac{\nu}{\nu_H} \right)^2. \quad (2-88)$$

其中 ν 是引力波的物理频率，由(2-58)式和(2-59)式知 $\nu_H = 1/H_0$ 。这是一个没有量纲的密度参量。这里需要说明的是：该参量对所有波段积分所得到的 Ω_g 可能会出现红外或紫外发散。也就是说频率应该有个积分区间而不

是负无穷到正无穷。频率的下限可以这样确定：只有现在在视界之内的引力波才对 Ω_{gw} 有贡献，因此波长应该小于现在的哈勃半径($\lambda < 1/H_0$)，即 $\nu_{low} \simeq H_0 \sim 2 \times 10^{-18} \text{Hz}$ 。另一方面，考虑到 Parker 的绝热定理 [Parker, 1969]，这里的紫外发散也会避免。该定理认为，对于一个持续时间为 Δt 的膨胀过程，它所产生的引力子波数如果满足 $k > 1/\Delta t$ ，那么该波段的引力波能谱将被压低。因此频率大于暴涨开始的宇宙膨胀速率 $H(\tau_i)$ 的波模，其产生概率会被压低。若根据大统一理论取 $H(\tau_i) \simeq 10^{38} \text{Hz}$ ，由于 $\nu \propto 1/a$ ，因而可以确定频率的上限： $\nu_{upper} \simeq H(\tau_i)a(\tau_i)/a(\tau_0) \simeq 10^{10} \text{Hz}$ 。

现在我们来讨论初始条件的选取。对于宇宙的残余引力波，其初始振幅的大小是由暴涨的能标决定的。但是暴涨的能标具体是多少呢？不同的模型给出了完全不同的结论。对于共动波数为 k 的引力波模在 τ_i 时刻离开视界，对应的波长为 $\lambda_i = 2\pi a(\tau_i)/k = 1/H(\tau_i)$ 。不同波模的引力波对应不同的时刻 τ_i 。由(2-68)式和(2-86)式我们知道初始引力波谱应该有如下形式 [Grishchuk, 1997; Zhang, *et al.*, 2005a]:

$$h(k, \tau_i) = A \left(\frac{k}{k_H} \right)^{2+\beta} \quad (2-89)$$

其中 A 是 $k = k_H$ 时的振幅，正比于(2-66)式中的 A_0 。由于不同的暴涨模型给出的 A 的大小不等，我们通过 WMAP 对 CMB 的观测来确定 A 的值。若 $\beta = -2$ ，即 de Sitter 膨胀，那么方程(2-89)给出的是一个尺度不变的谱。而观测 [Komatsu, *et al.*, 2009; 2010] 表明 $n_s \simeq 1$ ，根据关系 $n_s = 2\beta + 5$ 知： $\beta \simeq -2$ ，故原初引力波谱确实是近似尺度不变的。将引力波的原初功率谱写为 [Spergel, *et al.*, 2003; Peiries, *et al.*, 2003; Verde, *et al.*, 2003]:

$$\Delta_h^2(k) = \Delta_h^2(k_0) \left(\frac{k}{k_0} \right)^{n_t} = h^2(k, \tau_i), \quad (2-90)$$

其中 k_0 是一个基准共动波数，对应的物理波数是 $k_0^p = k_0/a(\tau_0) = 0.002 \text{Mpc}^{-1}$ 。比较式(2-89)和(2-90)得

$$A = \Delta_h(k_0) \left(\frac{k_H}{k_0} \right)^{\frac{n_t}{2}}, \quad (2-91)$$

$$n_t = 2\beta + 4. \quad (2-92)$$

其中， n_t 称为张量型暴涨谱指数。Komatsu 等人根据 WMAP5+BAO+SN 的数据给出了标量型扰动功率谱在 k_0 的大小 [Komatsu, *et al.*, 2009]: $\Delta_{\mathcal{R}}^2(k_0) =$

$(2.445 \pm 0.096) \times 10^{-9}$ 。同时也对比值

$$r \equiv \frac{\Delta_h^2(k_0)}{\Delta_{\mathcal{R}}^2(k_0)} \quad (2-93)$$

作了限制。于是只要知道了 $\Delta_{\mathcal{R}}^2(k_0)$ 和 r 的值，就可以将 $\Delta_h^2(k_0)$ 确定下来。一般说来 r 可能是 k 的函数，但是由于标量和张量原初谱都是近似尺度不变的，因此选择不同的 k ，对 r 的影响不大，我们将 r 取为常数。需要注意的是上面给出的 $\Delta_{\mathcal{R}}^2(k_0)$ 的观测值，是在假设 $r = 1$ 的情况下得到的。于是在本文中， r 有“归一化”的含义，把 $\Delta_{\mathcal{R}}^2(k_0)$ 作为一个基准， r 本身只是个参数。可以得到 $\Delta_h(k_0) = 4.94 \times 10^{-5} r^{1/2}$ 。

2.4.4 残余引力波的转移函数

前面我们给出了残余引力波的解析解，为了便于理解，更加直观的看到残余引力波谱的演化，现在我们讨论一下残余引力波的转移函数。暴涨时期，由

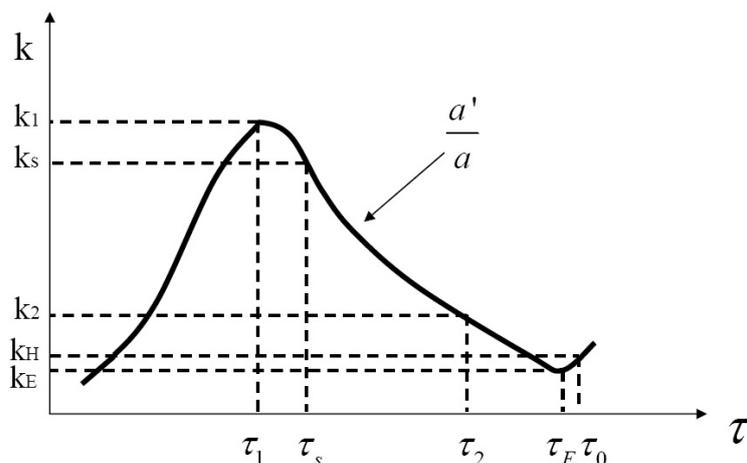


图 2-3 a'/a 随时间的变化。

于宇宙尺度(标度因子)的剧烈膨胀，把引力波的波长迅速拉长，但宇宙视界是缓慢增长的，于是不同波长的引力波依次离开视界，然后又陆续进入视界。如图2-3所示，波数越大离开视界越晚，而重进入视界越早。共动波数 $k > k_1$ 的引力波从未离开视界，随着宇宙膨胀很快的衰减掉了，我们不予考虑。带有下标的 k ，例如 k_x ，表示 $k_x = 2\pi a(\tau_x)/(1/H(\tau_x))$ 。于是根据 $H(\tau) = a'(\tau)/a^2(\tau)$ ，得到：

$$\frac{k_E}{k_H} = \left(\frac{\Omega_m}{\Omega_\Lambda} \right)^{\frac{1}{3\gamma}}, \quad \frac{k_2}{k_E} = \zeta_2^{1/2}, \quad \frac{k_s}{k_2} = \zeta_s, \quad \frac{k_1}{k_s} = \zeta_1^{\frac{1}{1+\beta_s}}. \quad (2-94)$$

$k < k_1$ 的波模离开视界后会依次进入视界，而进入视界后就会按 $1/a$ 的方式衰

减, 那么频率越高的引力波由于进入视界比较早, 其衰减也会越快。下面我们计算引力波的转移函数, 现在时刻的残余引力波与离开视界的原初的引力波通过转移函数联系:

$$h(k, \tau_0) = h(k, \tau_i)T(k) = A \left(\frac{k}{k_H} \right)^{2+\beta} T(k). \quad (2-95)$$

我们分频段讨论:

$k \leq k_E$ 的波段, 对应的波长 $2\pi a(\tau_0)/k$, 比现在的哈勃半径还大, 整个阶段都满足 $k < a'/a$, 所以谱函数仍然保持初始值:

$$h(k, \tau_0) = h(k, \tau_i). \quad (2-96)$$

此频段显然有

$$T(k) = 1. \quad (2-97)$$

$k_E < k \leq k_H$ 的波段, 在 τ_E 之前就已经进入视界, 开始衰减, 但在 τ_0 之前又重新离开视界, $k = k_H$ 的引力波进入视界之后直到现在 τ_0 才刚刚进入视界。而对于 $k_H < k < k_1$ 的引力波进入视界之后至今仍在视界之内。我们将共动波数为 k 的引力波进入视界时刻记为 τ_* , 此时标度因子记为 $a_*(k)$, 重新离开视界的时刻记为 τ_{**} , 此时标度因子记为 $a_{**}(k)$, 于是转移函数写为

$$T(k) = \frac{a_*(k)}{a_{**}(k)} = \frac{a_*(k) a(\tau_E)}{a(\tau_E) a_{**}(k)}. \quad (2-98)$$

由于 τ_* 属于物质为主时期, 根据(2-51)式有

$$\begin{aligned} a_*(k) &= a(\tau_*) = a_m(\tau_* - \tau_m)^2, \\ a(\tau_E) &= a_m(\tau_E - \tau_m)^2, \end{aligned} \quad (2-99)$$

由共动波数的定义: $k_E = 2\pi a(\tau_E)/(1/H(\tau_E))$, $k = 2\pi a(\tau_*)/(1/H(\tau_*))$, 容易得到 $k_E \propto 1/\tau_E$, $k \propto 1/\tau_*$, 于是

$$\frac{a_*(k)}{a(\tau_E)} = \left(\frac{k_E}{k} \right)^2. \quad (2-100)$$

而 τ_{**} 属于加速膨胀阶段, 所以

$$a_{**}(k) = a(\tau_{**}) = l_H |\tau_{**} - \tau_a|^{-\gamma}. \quad (2-101)$$

根据 k 与 τ_{**} 的反比关系容易得到

$$\frac{a(\tau_E)}{a_{**}(k)} = \left(\frac{k_E}{k} \right)^\gamma. \quad (2-102)$$

把(2-100)式和(2-102)式代入(2-10)式中，得到转移函数

$$T(k) = \left(\frac{k_H}{k}\right)^{2+\gamma} (1+z_E)^{-\frac{2+\gamma}{\gamma}}, \quad (2-103)$$

$k_H < k \leq k_1$ 的波段有相似的性质，它们进入视界后至今没有离开视界，因此转移函数可以统一的写成

$$T(k) = \left(\frac{a_*(k)}{a(\tau_0)}\right). \quad (2-104)$$

利用(2-94)式，利用同上类似的计算，得到各波段的转移函数：

$$T(k) = \left(\frac{k_H}{k}\right)^2 (1+z_E)^{-\frac{2+\gamma}{\gamma}}, \quad k_H \leq k \leq k_2; \quad (2-105)$$

$$T(k) = \left(\frac{k_H}{k}\right) \left(\frac{k_H}{k_2}\right) (1+z_E)^{-\frac{2+\gamma}{\gamma}}, \quad k_2 \leq k \leq k_s; \quad (2-106)$$

$$T(k) = \left(\frac{k_H}{k}\right)^{1+\beta_s} \left(\frac{k_s}{k_H}\right)^{\beta_s} \left(\frac{k_H}{k_2}\right) (1+z_E)^{-\frac{2+\gamma}{\gamma}}, \quad k_s \leq k \leq k_1. \quad (2-107)$$

于是各波段的残余引力波谱可近似表示为：

$$h(k, \tau_0) = A \left(\frac{k}{k_H}\right)^{2+\beta}, \quad k \leq k_E; \quad (2-108)$$

$$h(k, \tau_0) = A \left(\frac{k}{k_H}\right)^{\beta-\gamma} (1+z_E)^{-\frac{2+\gamma}{\gamma}}, \quad k_E \leq k \leq k_H; \quad (2-109)$$

$$h(k, \tau_0) = A \left(\frac{k}{k_H}\right)^{\beta} (1+z_E)^{-\frac{2+\gamma}{\gamma}}, \quad k_H \leq k \leq k_2; \quad (2-110)$$

$$h(k, \tau_0) = A \left(\frac{k}{k_H}\right)^{1+\beta} \left(\frac{k_H}{k_2}\right) (1+z_E)^{-\frac{2+\gamma}{\gamma}}, \quad k_2 \leq k \leq k_s; \quad (2-111)$$

$$h(k, \tau_0) = A \left(\frac{k}{k_H}\right)^{1+\beta-\beta_s} \left(\frac{k_s}{k_H}\right)^{\beta_s} \left(\frac{k_H}{k_2}\right) (1+z_E)^{-\frac{2+\gamma}{\gamma}}, \quad k_s \leq k \leq k_1. \quad (2-112)$$

在宇宙的演化过程中，很多物理过程都会对残余引力波谱产生影响，比如中微子的自由流动效应 [Watanabe & Komats, 2006; Miao & Zhang, 2007]、QCD相变 [Schwarz, 1998]和正负电子 [Wang, *et al.*, 2008a]等等，然而这些影响都不明显，我们在此不作讨论。除此之外，很多的参数也会影响引力波谱，例如暴涨谱指数 β 、再加热谱指数 β_s 、暗能量的密度参数 Ω_Λ 以及加速膨

胀指数 γ 等等，具体细节见 [Zhang, *et al.*, 2005a; 2006; Miao & Zhang, 2007]。下面我们主要讨论一下暴涨张量型跑动谱指数对残余引力波谱的影响。

2.5 跑动谱指数对残余引力波谱的影响

上面的讨论中，我们将暴涨谱指数 n_t 视为一个与 k 无关的常数。尽管观测比较支持 $n_t = 0$ ，然而从更一般的角度来讲，我们应该考虑“跑动”的谱指数 $dn_s/d\ln k$ 和 $dn_t/d\ln k$ ，于是将标量型功率谱和张量型功率谱分别写为 [Peiris, *et al.*, 2003]:

$$\Delta_{\mathcal{R}}^2(k) = \Delta_{\mathcal{R}}^2(k_0) \left(\frac{k}{k_0} \right)^{n_s(k_0) - 1 + \frac{1}{2}\alpha_s \ln(k/k_0)}, \quad (2-113)$$

$$\Delta_h^2(k) = \Delta_h^2(k_0) \left(\frac{k}{k_0} \right)^{n_t(k_0) + \frac{1}{2}\alpha_t \ln(k/k_0)}, \quad (2-114)$$

其中 $\alpha_s \equiv dn_s/d\ln k$ ， $\alpha_t \equiv dn_t/d\ln k$ 分别叫做标量型和张量型跑动谱指数。暴涨跑动谱指数 $dn/d\ln k \equiv d^2\Delta^2/d\ln k^2$ 。由于我们只讨论残余引力波而不考虑标量型的密度扰动，因此我们更关心 α_t 。暴涨谱指数一般地定义为

$$n_s(k) - 1 \equiv \frac{d \ln \Delta_{\mathcal{R}}^2}{d \ln k} = n_s(k_0) - 1 + \frac{dn_s}{d \ln k} \ln \left(\frac{k}{k_0} \right), \quad (2-115)$$

$$n_t(k) \equiv \frac{d \ln \Delta_h^2}{d \ln k} = n_t(k_0) + \frac{dn_t}{d \ln k} \ln \left(\frac{k}{k_0} \right). \quad (2-116)$$

在慢滚动暴涨模型中下，

$$n_t = -2\epsilon_V, \quad \alpha_t = 4\epsilon_V\tau_V - 8\epsilon_V^2, \quad (2-117)$$

其中 $\epsilon_V \equiv \frac{M_{pl}^2}{2} \left(\frac{V'}{V} \right)^2$ ， $\tau_V \equiv M_{pl}^2 \left(\frac{V''}{V} \right)$ ， $M_{pl} = m_{pl}/\sqrt{8\pi}$ 是约化普朗克质量，而 $V(\phi)$ 是驱动暴涨的标量场的势函数(具体见后面我们对暗能量模型的讨论)。一般地单标量场模型预言的谱指数为 $n_t \simeq 0$ ， $\alpha_t \simeq 0$ ，即近似尺度不变谱。但是仍然有一些模型能够预言 $n_t > 0$ 的谱指数 [Liddle & Urena-Lopez, 2006]。我们不受慢滚模型的限制，将 n_t 和 α_t 看作两个独立的参数。最近 WMAP5+BAO+SN mean 给出 [Komatsu, *et al.*, 2009]: α_s 不为零时， $n_s = 1.089_{-0.068}^{+0.070}$ ， $\alpha_s = -0.053_{-0.028}^{+0.027}$ ； α_s 为零时， $n_s = 0.970 \pm 0.015$ 。最新的 WMAP7+BAO+H₀ 的观测给出： α_s 不为零时， $n_s = 1.070 \pm 0.060$ ， $\alpha_s = -0.042 \pm 0.024$ ； α_s 为零时， $n_s = 0.973 \pm 0.014$ 。本文我们取 WMAP5+BAO+SN 的观测值。但是目前没有 n_t 和 α_t 的观测值，但通常来说 n_t 应该小于 n_s [Kosowsky & Turner, 1995]。作为试探性讨论，我们取 $n_t = n_s - 1$ ，取一系列的

$\alpha_t \leq 0.01$ 。

当 α_t 不为零时，根据(2-116)式，原初引力波谱(2-89)式写为

$$h(k, \tau_i) = A \left(\frac{k}{k_H} \right)^{2+\beta} A_{\alpha_t}(k), \quad (2-118)$$

其中额外的因子

$$A_{\alpha_t}(k) \equiv \left(\frac{k}{k_0} \right)^{\frac{1}{4}\alpha_t \ln(k/k_0)} \quad (2-119)$$

代表 α_t 引起的对幂律谱的偏离。由(4-45)式，我们将(2-118)完整的表示为

$$h(k, \tau_i) = \Delta_{\mathcal{R}}(k_0) r^{\frac{1}{2}} \left(\frac{k}{k_0} \right)^{2+\beta} A_{\alpha_t}(k). \quad (2-120)$$

举个例子，若取 $\alpha_t = 0.01$ ，频率 $\nu_0 = k_0/(2\pi a(\tau_0)) = 3 \times 10^{-18} \text{Hz}$ 时， $A_{\alpha_t} = 1$ ；当频率 $\nu = 3 \times 10^{-16} \text{Hz}$ 时， $A_{\alpha_t} = 1.055$ ；而当频率 $\nu = 10^9 \text{Hz}$ 时， $A_{\alpha_t} \sim 10^4$ 。因此跑动指数主要影响高频的引力波，引力波出视界之后幅度便都保持不变，而当再进入视界时会按 $1/a(\tau)$ 的方式衰减。不同波模的引力波再次进入视界的时刻不一样， k 越大的波模会越早进入视界，因此衰减的越厉害。而 $k \leq k_E$ 的引力波至今也没有进入视界，而且永远也不会再进入视界(前提是宇宙永远加速膨胀下去)。因此 $k \leq k_E$ 的引力波至今仍然保留了原初谱的信息。所以我们将原初引力波的大小在 k_E “归一化”：

$$h(k_E, \tau_0) = \Delta_{\mathcal{R}}(k_0) r^{\frac{1}{2}} \left(\frac{k_E}{k_0} \right)^{2+\beta+\frac{1}{4}\alpha_t \ln(k_E/k_0)}. \quad (2-121)$$

如果给出 (r, β, α_t) 的值，那么 $h(k_E, \tau_0)$ 的值就能被确定。

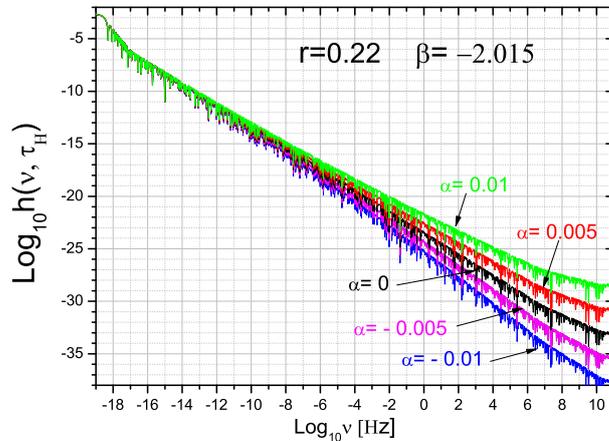


图 2-4 取定 r 和 β ，不同 α_t 对引力波谱 $h(\nu, \tau_0)$ 的影响 [Tong & Zhang, 2009a]。

为了研究跑动谱指数 α_t 对引力波谱 $h(\nu, \tau_0)$ 和能谱 $\Omega_g(\nu)$ 的影响，我们

取定 $\Omega_\Lambda = 0.75$, $\beta_s = -0.3$, 取两组参数 $(r, \beta) = (0.55, -1.956)$ 和 $(r, \beta) = (0.22, -2.015)$ [Tong & Zhang, 2009a], 分别对应着 WMAP5 给出的有标量跑动和无标量跑动的 (r, n_s) 值[Komatsu, *et al.*, 2009]。我们首先看一下 α_t 对引力波谱的影响。如图2-4所示, 当取定 $(r, \beta) = (0.22, -2.015)$ 时, α_t 越大, 引力波谱的幅值越大尤其是在高频部分。比如, $\alpha_t = 0.01$ 和 $\alpha_t = -0.01$, $h(\nu, \tau_0)^2$ 在 $\nu \simeq 10^{-2}\text{Hz}$ 差了3个量级, 在 $\nu \simeq 10^2\text{Hz}$ 差了5个量级, 在 $\nu \simeq 10^4\text{Hz}$ 差了6个量级, 在 $\nu \simeq 10^9\text{Hz}$ 差了8个量级。我们再看一看各参数对引力波能量功率谱 $\Omega_g(\nu)$ 的影响。图2-5画出了 r 和 β 对能谱的影响, r 越大会使 $\Omega_g(\nu)$ 各个波段整体增大, 而 β 越大会使 $\log_{10}(\Omega_g(\nu))$ 的斜率增大, 因此在高频部分增长的很快。 $\beta = -2$ 对应尺度不变谱, $\log_{10}(\Omega_g(\nu))$ 的斜率为零, 这是 de Sitter 方式暴涨。而跑动谱指数对能谱的影响画在了图2-6中, 可以看到与图2-5中的不一样, 当 α_t 不为零时, $\log_{10}(\Omega_g(\nu))$ 形状“变弯”了。在高频端, 很明显, 越大的 α_t 导致越大的 $\Omega_g(\nu)$ 。

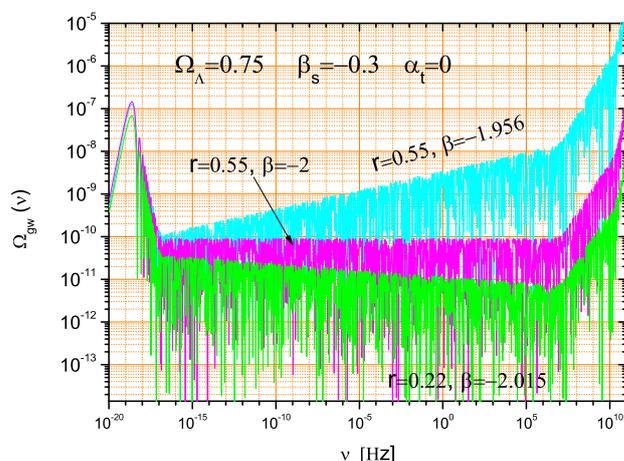


图 2-5 r 和 β 对能量功率谱 $\Omega_g(\nu)$ 的影响 [Tong & Zhang, 2009]。

下面我们分析一下目前正在运行或者将要运行的引力波探测器是否可以探测到这种来自宇宙早期的引力波。作为量级估计, 我们将各探测器的目标灵敏曲线和理论预言的残余引力波幅度进行了比较。图2-7给出了 LIGO [The LIGO Scientific Collaboration]和 AdvLIGO [The Advanced LIGO Team]的灵敏度(strain sensitivity) $\tilde{h}_f(\nu)$ [Maggiore, 2000; Allen & Romano, 1999]。为了比较, 我们将每平方根赫兹的引力波谱 $h(\nu, \tau_0)/\sqrt{\nu}$ 画在了上面。对于参数 $(r, \beta) = (0.55, -1.956)$, LIGO 对 α_t 作了限制: $\alpha_t < 0.013$ 。同样的参数, 我们

²注意, 图中的 τ_H 是当前时刻的共形时间, 本文用 τ_0 表示。

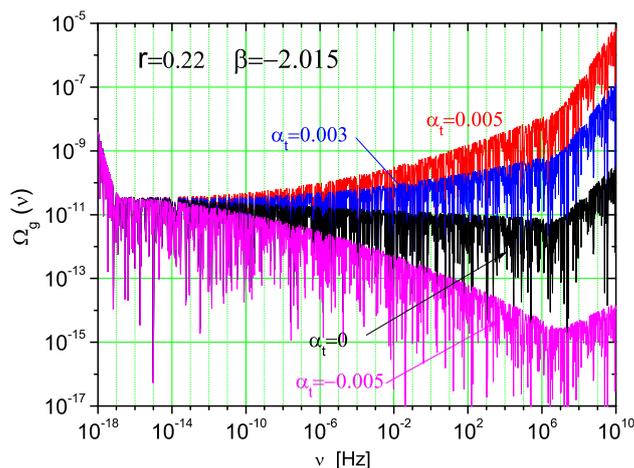


图 2-6 取定 r 和 β , 不同 α_t 对能量功率谱 $\Omega_g(\nu)$ 的影响 [Tong & Zhang, 2009]。

期待 AdvLIGO 的运行对 α_t 作更强的限制。图2-8 对比了空间探测器LISA的灵敏度(信噪比 $S/N = 1$) [The LISA International Science Team; Tinto, *et al.*]与残余引力波的方均根幅度 $h(\nu, \tau_0, \Delta\nu) = h(\nu, \tau_0)\sqrt{\Delta\nu/\nu}$, 其中 $\Delta\nu = 1/1yr \simeq 3 \times 10^{-8}$ 对应着一年的观测时间。可以看出 LISA 非常有希望探测到宇宙残余引力波。图2-9和2-10 给出了共振棒探测器 EXPLORER [Astone,*et al.*, 2008]和 MAGO [Ballatini,*et al.*, 2005]的探测能力, 很明显这种棒探测器的灵敏度要比激光干涉仪的灵敏度要小的多, 而且探测的频段非常窄。

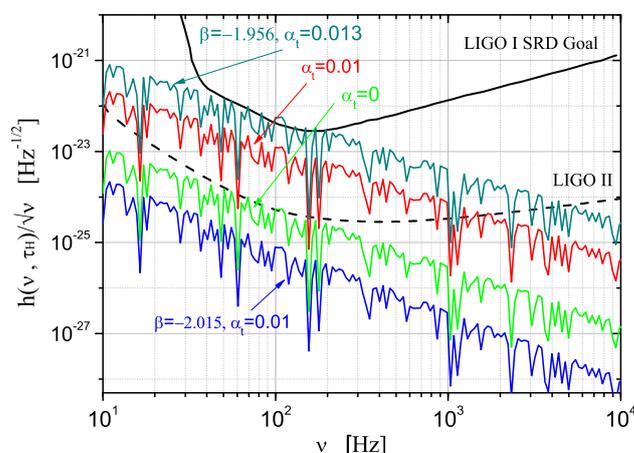


图 2-7 LIGO 和 AdvLIGO 的灵敏度和残余引力波幅度的比较 [Tong & Zhang, 2009a]。

由于至今没有直接探测到引力波, 我们可以根据残余引力波能量密度的

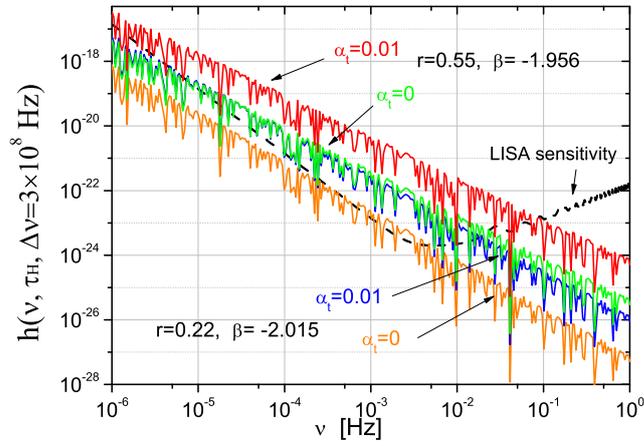


图 2-8 LISA的灵敏度和残余引力波幅度的比较 [Tong & Zhang, 2009a]。

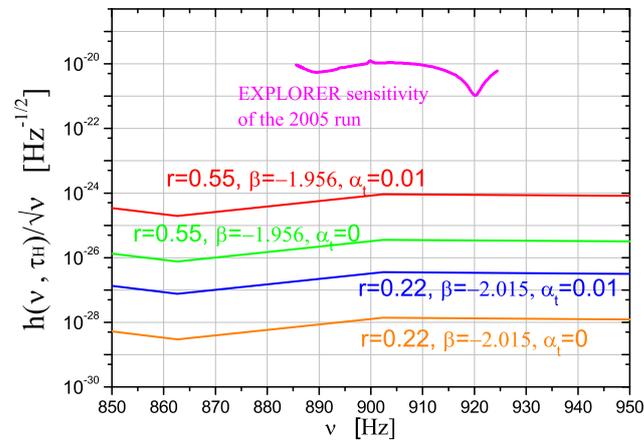


图 2-9 EXPLORER 2005年的运行结果和残余引力波幅度的比较[Tong & Zhang, 2009a]。

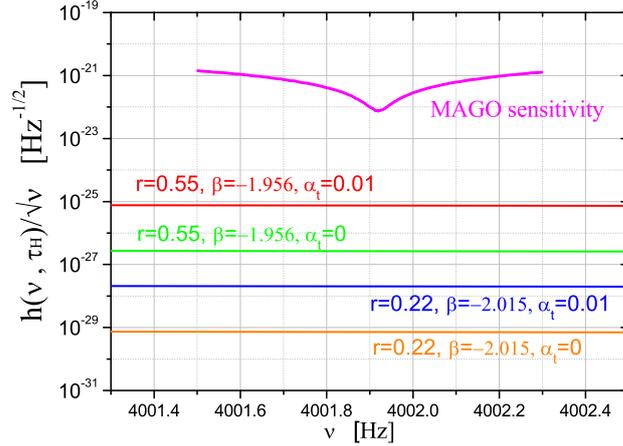


图 2-10 MAGO 的灵敏度和残余引力波幅度的比较 [Tong & Zhang, 2009a]。

上限对跑动常数做一些限制。大爆炸核合成(BBN)发生在温度为几个 Mev 的时期，这个过程对宇宙的总能量密度非常敏感。因此引力波的能量密度 Ω_{gw} 太大会使宇宙膨胀速率增加，这会导致中微子退耦的更早，同时也增大了轻元素的丰度。所以在 BBN 时期，引力波的能量密度不能太大。通过对轻元素丰度的观测，将引力波的能量密度限制为 $h_0^2 \Omega_{gw} < 7.8 \times 10^{-6}$ [Maggiore, 2000; Cyburt, *et al.*, 2005]。而且，对于非绝热的原初扰动，如暴涨产生的残余引力波，对 CMB 功率谱的观测限制将 Ω_{gw} 限制为 $\Omega_{gw} < 8.4 \times 10^{-6}$ [Smith, Pierpaoli & Kamionkowski, 2006]。注意，只有在视界之内的引力波对 Ω_{gw} 有贡献。在 BBN 时期在视界之内的引力波的最低频率为 $\nu \sim 10^{-10}$ Hz，而在 CMB 时期，即复合时期，视界之内的引力波最低频率为 $\nu \sim 10^{-15}$ Hz。将(2-87)式中的 ν_{low} 分别代入 10^{-10} Hz 和 10^{-15} Hz 可以得到来自 BBN 和 CMB 的限制。如图 2-12 (a)所示，对于 $\alpha_t = 0$ ，BBN 和 CMB 的约束条件几乎一样，参数 β 作了限制： $r = 0.55$ 时， $\beta < -1.935$ ； $r = 0.1$ 时， $\beta < -1.92$ 。图 2-12 (b)对跑动谱指数 α_t 作了限制： $r = 0.55$ 时， $\alpha_t < 0.004$ ； $r = 0.1$ 时， $\alpha_t < 0.005$ 。与此同时，我们利用对毫秒脉冲星的观测对引力波的能量功率谱 $\Omega_g(\nu)$ 作了限制。由于引力波的存在，会使脉冲星的电磁脉冲到达我们这里的时间发生延迟。利用这一特点，可以探测频率在 $10^{-9} - 10^{-7}$ Hz 的引力波。例如 PSR B1855+09，对残余引力波能量功率谱做了上限估计 [Kaspi, *et al.*, 1994; Thorsett & Dewey, 1996]: $\Omega_g(\nu_*) h_0^2 < 4.8 \times 10^{-9} (\nu/\nu_*)^2$ ($\nu > \nu_*$)，其中 $\nu_* = 4.4 \times 10^{-9}$ Hz。另一组给出 [Lommen, 2002]: $\Omega_g(\nu_*) h_0^2 < 2 \times 10^{-9} (\nu/\nu_*)^2$ ($\nu > \nu_*$)，其中 $\nu_* = 1.9 \times 10^{-9}$ Hz。图 2-12 给出了观测同理论的对比。毫秒脉冲

星探测器 [Lommen, 2002]把参数为 $(r, \beta) = (0.55, -1.956)$ 的残余引力波限制为 $\alpha_t < 0.01$ 。而 PPTA [Manchester, 2006]经过五年的观测之后，它将把灵敏度提高一个量级，更有希望探测到残余引力波。

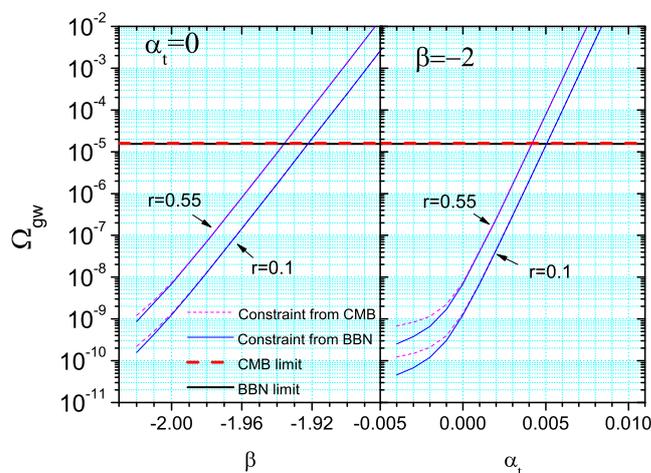


图 2-11 BBN 和 CMB 对 β 和 α_t 的限制。

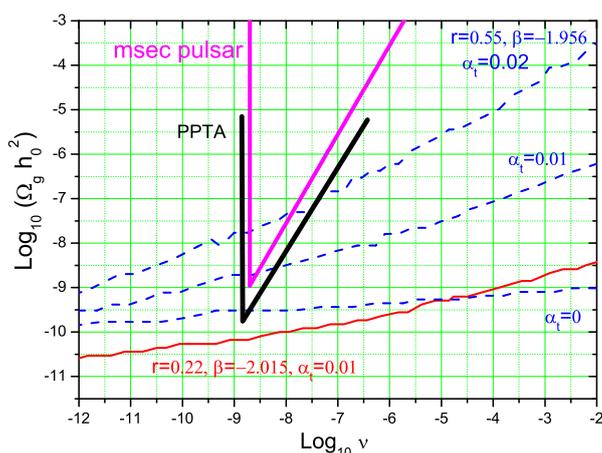


图 2-12 毫秒脉冲星探测器和PPTA对残余引力波能量功率谱 $\Omega_g(\nu)$ 的限制。

2.6 最新 LIGO S5 对残余引力波参数的限制

上一节，我们粗略地将理论预言的引力波同单个引力波探测器的灵敏曲线作了量级的对比，并间接的用引力波的能量密度参数 Ω_{gw} 对 β 和 α_t 作了限制。本节我们较严格的利用最新 LIGO S5 的运行结果同理论给出的残余引力波比较，利用功率谱 $\Omega_g(\nu)$ 直接来限制残余引力波参数。

最近, LIGO S5 利用单个探测器 H1 和 L1 的交叉关联将频率在 100 Hz 附近的引力波能量密度参数的上限定为 $\Omega_g < 6.9 \times 10^{-6}$ [The LIGO Collaboration and The VIRGO Collaboration, 2009], 置信度为 95%。应用交叉关联技术后, 灵敏度比单个探测器的提高了约 100 倍。这很有希望限制残余引力波参数, 比如暴涨谱指数 β 和跑动谱指数 α_t 。对于单个探测器来说, 引力波信号要大于噪音则需满足 [Maggiore, 2000]:

$$S_h(\nu) > (1/F)S_n(f), \quad (2-122)$$

其中 $S_h(\nu) = h_c^2(\nu)/(2\nu)$, 这里 $h_c(\nu) \equiv h(\nu, \tau_0)/\sqrt{2}$ 称为引力波的特征振幅。而 $S_n(\nu) \equiv \tilde{h}_f^2$, 其中 \tilde{h}_f 叫做 strain sensitivity, 单位是 $1/\sqrt{Hz}$ 。F 是约化因子, 对于激光干涉仪探测器, $F = 2/5$; 对于圆柱形棒探测器, $F = 8/15$ 。因此严格说来, 对于单个引力波探测器给出的 \tilde{h}_f , 我们需要用 $h_c(\nu)\sqrt{F/2\nu}$ 同 \tilde{h}_f 比较。若信噪比为 1, 我们可以说该探测器能够测到的最小的 h_c 为

$$h_{\min}^{1d} = (2\nu\tilde{h}_f^2/F)^{1/2}. \quad (2-123)$$

而两个探测器的交叉关联可以大大提高探测器的灵敏度, 其信噪比表示为 [Allen, 1996; Maggiore, 2000]

$$SNR = \left[2T \int_0^\infty d\nu \Gamma^2(\nu) \frac{S_h^2(\nu)}{S_n^2(\nu)} \right]^{1/2}. \quad (2-124)$$

其中 $S_n(\nu) = [P_1(\nu)P_2(\nu)]^{1/2}$ 是两个探测器的交叉噪音功率谱。 $P_1 \equiv \tilde{h}_{f1}^2$ 和 $P_2 \equiv \tilde{h}_{f2}^2$ 分别是两个探测器的噪音功率谱。对于距离不远的两个激光干涉仪, $\Gamma(\nu) \simeq F$ 。注意这里定义的信噪比正比于信号振幅 h_c^2 [Allen, 1996; Allen & Romano, 1999], 而不是正比于 h_c [Maggiore, 2000]。如果探测的频段比较窄, 那么

$$SNR \simeq \left[\frac{T\Delta\nu F^2 h_c^4(\nu)}{2\nu^2 \tilde{h}_{f1}^2(\nu) \tilde{h}_{f2}^2(\nu)} \right]^{1/2}. \quad (2-125)$$

如果取 $SNR = 1$, 且 $\tilde{h}_{f1}(\nu) = \tilde{h}_{f2} = \tilde{h}_f$, 则最小可探测的引力波特征幅度为

$$h_{\min}^{2d} \simeq \left(\frac{2\nu^2 \tilde{h}_f^2(\nu)}{T\Delta\nu F^2} \right)^{1/4} = \frac{1}{(2T\Delta\nu)^{1/4}} h_{\min}^{1d}(\nu). \quad (2-126)$$

正是因子 $\frac{1}{(2T\Delta\nu)^{1/4}}$ 使交叉关联后的灵敏度提高了 100 倍。因此在信噪比为 1 的前提下, 要想探测到引力波, 则需要满足

$$h_c(\nu)\sqrt{F/2\nu} > \tilde{h}_f^{\text{cross}} \equiv \left(\frac{1}{2T\Delta\nu} \right)^{1/4} \tilde{h}_f, \quad (2-127)$$

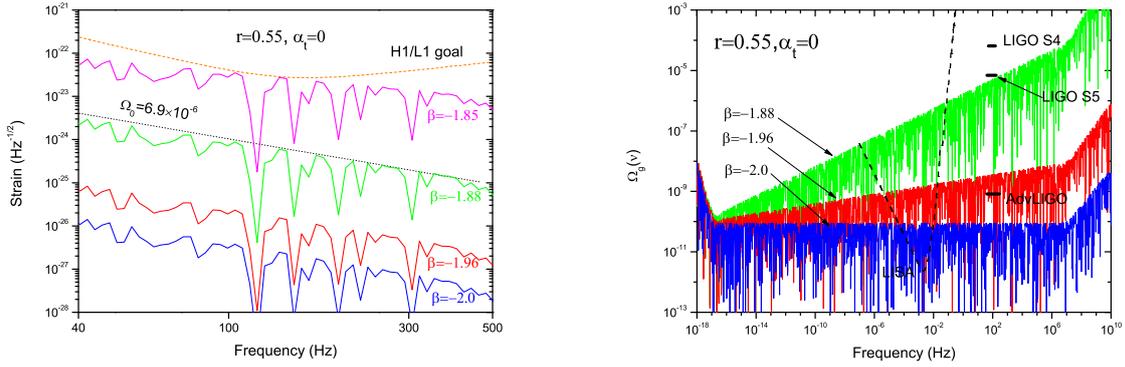


图 2-13 左边：利用引力波谱LIGO S5对残余引力波谱中参数 β 的限制。我们将 $h_c(\nu)\sqrt{F/2\nu}$ 同 H1/L1 的目标曲线 \tilde{h}_f (SNR=1, 置信度为68%) 和交叉关联后的探测曲线(SNR=3.29, 置信度为95%)比较。右边：不同 β 的引力波能量功率谱与各探测器能探测到的 Ω_g^{\min} (对于LIGO S5, $\Omega_g(\nu) = 6.9 \times 10^{-6}$, 置信度为 95%)的对比。其中取了参数 $r = 0.55, \alpha_t = 0$ [Zhang, Tong & Fu, 2010]。

其中 $\tilde{h}_f^{\text{cross}}$ 是两个探测器交叉关联后的 strain sensitivity。严格来讲信噪比满足下面的关系 [Allen & Romano, 1999]:

$$\sqrt{n}SNR \geq \sqrt{2}[\text{erfc}^{-1}(2\alpha) - \text{erfc}^{-1}(2\gamma)], \quad (2-128)$$

其中 n 是运行的周期数, α 是误报率, γ 是探测率(也就是置信水平)。对于交叉关联后的LIGO S5, 运行一个周期, 从2005年11月5日到2007年9月30日($T = 59961600$ s)。置信度为 95%, 即 $\gamma = 0.95$, 误报率取为 $\alpha = 0.05$ ³, 于是式(2-128) 给出: $SNR \simeq 3.29$ 。因此可以说, 若要在 $\geq 90\%$ 的置信水平上探测到随机引力波, 则要求信噪比 $SNR \geq 3.29$ 。如图2-13(左)所示, 在残余引力波取定参数 $r = 0.55, \alpha_t = 0$ 时, 交叉关联的探测器将 β 限制为 $\beta < -1.88$ (置信度为95%), 而单个探测器只能限制为 $\beta < -1.85$ (置信度为68%)。观测表明 n_s 的范围为 (0.96 ~ 1.2), 这与 $\beta < -1.88$ 是自洽的 (利用关系 $n_s = 2\beta + 5$)。根据

$$\Omega_g(\nu) = \frac{2\pi^2}{3} h_c^2(\nu) \left(\frac{\nu}{H_0} \right)^2 \quad (2-129)$$

我们在图2-13(右)中, 将不同 β 的引力波的功率谱 $\Omega_g(\nu)$ 和 LIGO S4, LIGO S5, AdvLIGO 和 LISA 能探测到的最小 Ω_g^{\min} (置信度为95%)作了对比。我们重新作了数值计算, 对于 $\Omega_\Lambda = 0.73$ 有加速膨胀参数 $\gamma = -1.97$ 。在 LIGO S5 的探测频段为 (41.5 – 169.25) Hz, 即 $\Delta\nu \simeq 128$ Hz。在此频带内, 对于 $\beta = -1.88$ 的功率谱 $\Omega_g(\nu)$ 近似为平谱: $\Omega_g(\nu) \propto \nu^{0.24}$ 。而将来要运行的 AdvLIGO 和 LISA 将会对 β 作更强的限制。类似的, 我们也可以对跑动谱指数 α_t 作限制。如图2-

³ α 和 γ 之和不要求必须为1 [Allen & Romano, 1999]。

14(左)所示, 对于固定参数 $r = 0.55, \beta = -2$, 交叉关联将 α_t 限制为 $\alpha_t < 0.01$, 而 H1/L1 只能限制到 $\alpha_t < 0.018$ 。图2-14(右)画出了不同 α_t 的功率谱, 对于 $\alpha_t = 0.01$ 的功率谱, 在频段 $(41.5 \sim 169.25)\text{Hz}$ 有 $\Omega_g(\nu) \propto \nu^{0.45}$ 。我们同样希望 AdvLIGO 和 LISA 能对 α_t 作更强的限制。因为我们只取了两组情况, 要么取定 $\alpha_t = 0$, 要么取定 $\beta = -2$ 。实际上, 由于 β 和 α_t 是相互独立的, 因此在 $\beta - \alpha_t$ 平面内可以取很多合理的点。即使只取这两组参数, 也会存在简并。以 LIGO S5 探测的频段为例, $\beta = -1.88, \alpha_t = 0$ 和 $\beta = -2, \alpha_t = 0.011$ 的功率谱大小近似相等, 见图 2-15。于是 LIGO S5 便不能确定那组是对的, 再加上其他的参数组合, 就更难确定了。然而 LISA 可以在较宽的频段上区分不同参数谱的形状, 可以解除这种参数简并问题。

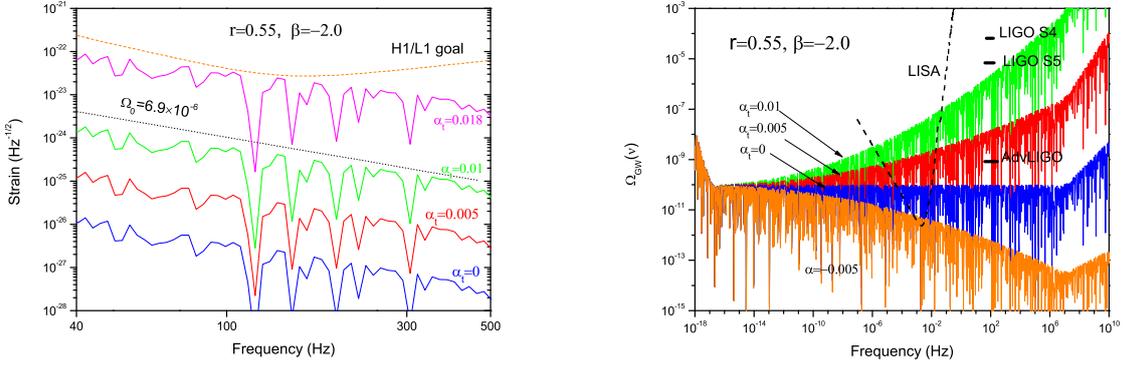


图 2-14 左边: 利用引力波谱 LIGO S5 对残余引力波谱中参数 α_t 的限制。右边: 不同 α_t 的引力波能量功率谱与各探测器能探测到的 Ω_g^{\min} 的对比。其中取了参数 $r = 0.55, \beta = -2$ [Zhang, Tong & Fu, 2010]。

以上还是较粗略的估计, 事实上, 应将 $\Gamma(\nu)$ 写为 [Allen, 1996; Maggiore, 2000]:

$$\Gamma(\nu) = \gamma(\nu)F_{12}. \quad (2-130)$$

对于两个激光干涉仪探测器, $F_{12} = F = 2/5$ 。 $\gamma(\nu)$ 称为约化交叉关联函数(overlap reduction function)[Allen, 1996], 如图2-16所示 [Allen, 1996]。信噪比(2-124)式还可以写为:

$$\text{SNR} = \frac{3H_0^2}{10\pi^2} \sqrt{T} \left[\int_{-\infty}^{\infty} df \frac{\gamma^2(f)\Omega_g^2(f)}{f^6 P_1(f)P_2(f)} \right]^{1/2}. \quad (2-131)$$

根据(2-131)式, 由于 $\text{SNR} \propto \Omega_g(\nu) \propto h_c^2(\nu) \propto r$, 我们以 $r = 0.1$ 为例, 计算了不同 β, α_t 的信噪比, 见表4-1。很明显, 越大的 β 和 α_t 越有希望被探测到, 而对于尺度不变的平台 ($\beta = -2, \alpha_t = 0$), 其信噪比很小, 很难探测到。

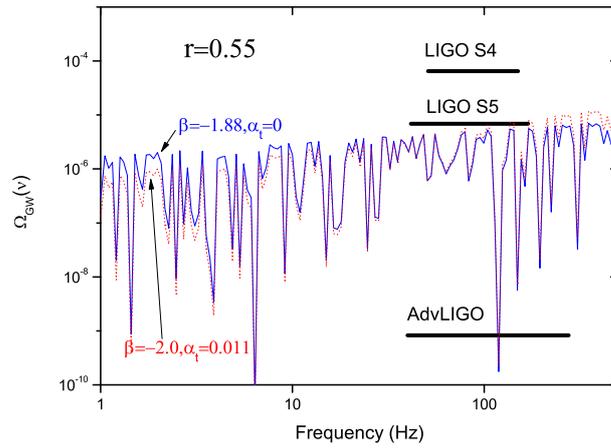


图 2-15 在LIGO的探测频段，两组参数 $(\beta = -1.88, \alpha_t = 0)$ 和 $(\beta = -2, \alpha_t = 0.011)$ 产生的能量功率谱 $\Omega_g(\nu)$ 的简并。

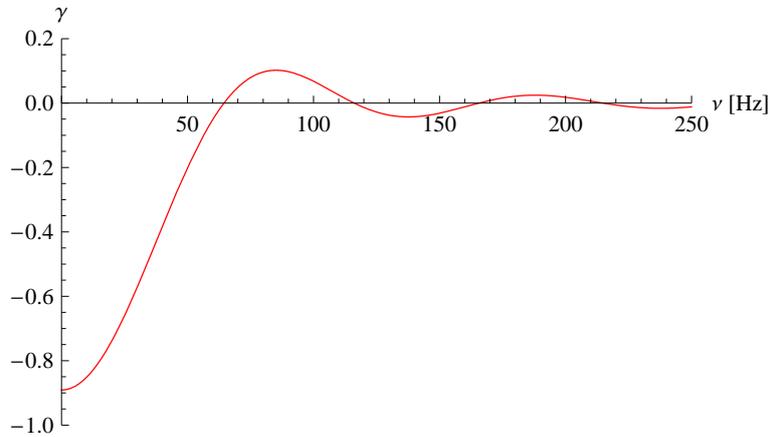


图 2-16 约化交叉关联函数 $\gamma(\nu)$ [Allen, 1996]。

表 2-1 取 $r = 0.1$ ，不同参数的残余引力波被交叉关联的LIGO S5探测的信噪比。

	$\alpha_t = 0$	$\alpha_t = 0.005$	$\alpha_t = 0.007$	$\alpha_t = 0.01$
$\beta = -2$	5.4×10^{-6}	8.0×10^{-4}	6.0×10^{-3}	1.2×10^{-1}
$\beta = -1.96$	2.0×10^{-4}	3.0×10^{-2}	2.2×10^{-1}	4.5
$\beta = -1.90$	4.5×10^{-2}	6.7	5.0×10^1	1.0×10^3
$\beta = -1.88$	2.8×10^{-1}	4.1×10^1	3.0×10^2	6.2×10^3

第3章 微波激光引力波探测器

本章我们介绍一种新型引力波探测器，我们称作微波激光引力波探测器。这种微波激光探测器利用了电磁波(微波激光²)和引力波的相互作用，在引力波与静磁场以及激光的耦合作用下产生了径向扰动光子流。后面我们将看到，这种扰动光子流作为引力波信号可被探测，其大小与激光、引力波和静磁场的强度成正比。这种探测器的灵敏度与很多因素有关，例如激光的功率和单色性、静磁场的强度和宽度、分型膜的反射率、微波接收机的噪音系数等等。我们将讨论探测器的几何构造、工作原理、灵敏度，然后分析这种探测器探测到宇宙残余引力波的可能性。下面我们首先看一下探测器的构造。

3.1 探测器构造

如图3-1所示，微波激光束穿过静磁场沿 z 轴方向传播，磁场 $B_y^{(0)}$ 沿 y 方向，一反射分型膜面沿正 x 方向，被放置在平行于 y - o - z 平面内、距离 z 轴很近的位置。下面我们将看到，引力波与强磁场以及激光的耦合产生了扰动光子流。产生的扰动光子流各个方向都有，是杂乱无章的。我们不妨把沿 x 方向的光子流 $n_x^{(1)}$ 作为探测目标。在某些区域 $n_x^{(1)}$ 为负值，即光子流沿负 x 方向，被分型膜 [Wen, *et al.*, 2002; Zhou, *et al.*, 2003; Hou, *et al.*, 2005] 全反射后形成 $n_x^{(1)'}$ ，可以在 1m 内保持强度基本不变，最终被微波接收机记录到。

3.2 探测原理

3.2.1 高斯光束

我们选择最简单的横电模式(TEM₀₀)—高斯光束。高斯光束的电场强度可由下式表示 [Yariv, 1975]:

$$\psi(x, t) = \frac{\psi_0}{\sqrt{1 + (z/f)^2}} \exp\left(-\frac{r^2}{W^2}\right) \exp\left\{i\left[(k_e z - \omega_e t) - \tan^{-1} \frac{z}{f} + \frac{k_e r^2}{2R} + \delta\right]\right\}, \quad (3-1)$$

其中 ψ_0 是 $z = 0$ 平面内的电场强度， $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 是径向距离， $W = W_0[1 + (z/f)^2]^{1/2}$ 是激光的波束宽度， $k_e = 2\pi/\lambda_e$ 是激光的波数， $f = W_0^2 k_e / 2$ ， $R = z + f^2/z$ 是激光波前的曲率半径， δ 是任意的相因子。高斯光束的 $1/e$ 振幅强度处形成的包络面是双曲面，所以光束在传播过程中发散。某一横截面的强度是

²微波激光，又称脉泽，是频率在微波波段的激光。

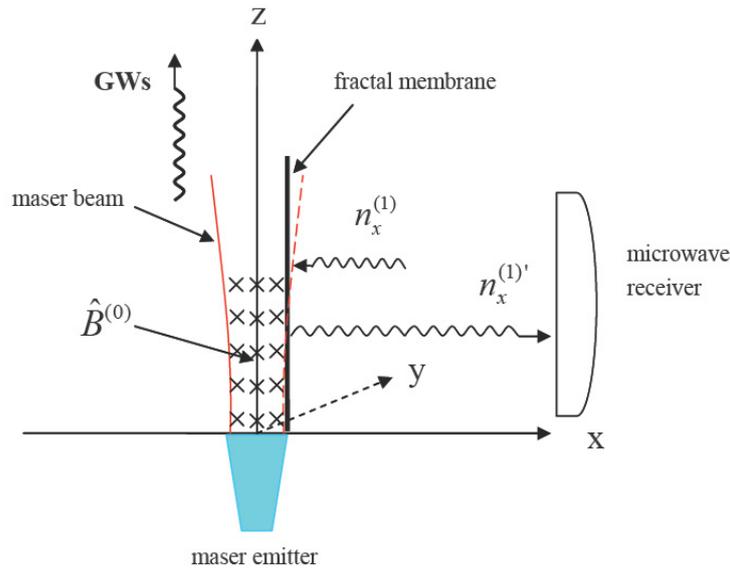


图 3-1 探测装置的结构示意图。微波激光束沿正 z 方向传播，静磁场 $\hat{B}^{(0)}$ 沿正 y 方向。激光束的包络面是双曲面，反射分型模放在激光的包络面上，将沿负 x 方向的那些扰动光子 ($n_x^{(1)} < 0$) 全反射成沿正 x 方向 ($n_x^{(1)'}$)，然后这些光子被微波接收机探测到。被全反射的扰动光子的强度可在约 1m 内保持不变。

高斯分布的，而 $1/e$ 强度处定义为波速宽度 W 。由于高斯光束的发散，有沿径向外流的光子，这些光子和扰动光子掺杂在一起，给探测带来极大困难。为除去这些沿正 x 方向的背景光子流 $n_x^{(0)}$ ，我们采用线性偏振的激光。若是激光的线偏振度为 1，则 $n_x^{(0)}$ 将会被完全除去，那么沿 x 方向的光子流只剩下 $n_x^{(1)}$ 。我们将激光沿 x 方向极化，即

$$\tilde{E}_x^{(0)}(x, t) = \psi(x, t), \quad \tilde{E}_y^{(0)} = \tilde{E}_z^{(0)} = 0, \quad (3-2)$$

这里的“ \sim ”代表随时间变化的量，上标“(0)”表示背景场。于是磁场各分量为 [Jackson, 1999]:

$$\tilde{B}_x^{(0)} = 0, \quad \tilde{B}_y^{(0)} = -\frac{i}{\omega_e} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad \tilde{B}_z^{(0)} = \frac{i}{\omega_e} \frac{\partial \psi}{\partial y}. \quad (3-3)$$

将(3-1)式代入(3-3)式，我们得到 $\tilde{B}_y^{(0)}$ 和 $\tilde{B}_z^{(0)}$ 的具体表示式:

$$\begin{aligned} \tilde{B}_y^{(0)} = & \left\{ \frac{\psi_0}{\omega_e [1 + (z/f)^2]^{1/2}} \left[k_e + \frac{k_e r^2 (f^2 - z^2)}{2(f^2 + z^2)^2} - \frac{f}{f^2 + z^2} \right] \right. \\ & \left. + \frac{i\psi_0 z}{\omega_e f^2 [1 + (z/f)^2]^{3/2}} \left[1 - \frac{2r^2}{W_0^2 [1 + (z/f)^2]} \right] \right\} \\ & \times \exp\left(-\frac{r^2}{W^2}\right) \exp\{i[(k_e z - \omega_e t) + \Phi + \delta]\}; \quad (3-4) \\ \tilde{B}_z^{(0)} = & - \left\{ \frac{\psi_0 k_e y}{\omega_e [1 + (z/f)^2]^{1/2} (z + f^2/z)} + \frac{2i\psi_0 y}{\omega_e W_0^2 [1 + (z/f)^2]^{3/2}} \right\} \end{aligned}$$

$$\times \exp\left(-\frac{r^2}{W^2}\right) \exp\{i[(k_e z - \omega_e t) + \Phi + \delta]\}, \quad (3-5)$$

其中 $\Phi \equiv \frac{k_e r^2}{2R} - \tan^{-1} \frac{z}{f}$ 。由于我们这样定义了坐标系，即激光射向 $z > 0$ 的空间，因此静磁场应该放在 $z > 0$ 的空间区域，

$$\hat{B}^{(0)} = \begin{cases} \hat{B}_y^{(0)} & (0 \leq z \leq l), \\ 0 & (z < 0 \text{ or } z > l), \end{cases} \quad (3-6)$$

这里“ \wedge ”代表与时间无关的静场， l 是静磁场在 z 方向的尺寸。

当空间区域没有引力波时，玻印亭矢量为

$$S = \frac{1}{\mu_0} \langle E \times B \rangle. \quad (3-7)$$

其中 μ_0 是真空的磁导率，“ $\langle \rangle$ ”表示对大于 $1/\nu_e$ 的时间尺度求平均。那么平均背景光子流密度可由关系 $n^{(0)} = S/\hbar\omega_e$ 求出，其分量为 [Li, *et al.*, 2003],

$$n_x^{(0)} = 0, \quad (3-8)$$

$$\begin{aligned} n_y^{(0)} &= -\frac{1}{\mu_0 \hbar \omega_e} \langle \tilde{E}_x^{(0)} \tilde{B}_z^{(0)} \rangle \\ &= \frac{\psi_0^2 k_e y}{2\mu_0 \omega_e [1 + (z/f)^2] (z + f^2/z)} \exp\left(-\frac{2r^2}{W^2}\right), \end{aligned} \quad (3-9)$$

$$\begin{aligned} n_z^{(0)} &= \frac{1}{\mu_0 \hbar \omega_e} \langle \tilde{E}_x^{(0)} \tilde{B}_y^{(0)} \rangle \\ &= \frac{\psi_0^2}{2\mu_0 \omega_e [1 + (z/f)^2]} \left[k_e + \frac{k_e r^2 (f^2 - z^2)}{2(f^2 + z^2)^2} - \frac{f}{f^2 + z^2} \right] \exp\left(-\frac{2r^2}{W^2}\right), \end{aligned} \quad (3-10)$$

值得指出的是，由于我们用了线偏振的激光，导致沿 x 方向的光子流为零。这给探测带来极大的方便，因而比用非极化的激光有明显的优越性 [Li, *et al.*, 2006]。

3.2.2 沿正 z 方向的引力波产生的扰动光子流

我们关心的当然是引力波存在时的情形，因为这是扰动光子流产生的必要条件。本节我们讨论引力波沿正 z 方向时产生的一阶扰动光子流。

1. 弯曲时空中的电磁场

在弯曲时空中，真空中的麦克斯韦方程 [Misner, Thorne & Wheeler, 1973; Weinberg, 1972]:

$$(\sqrt{g} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta}),_{\nu} = 0, \quad (3-11)$$

$$F_{\mu\nu,\sigma} + F_{\nu\sigma,\mu} + F_{\sigma\mu,\nu} = 0, \quad (3-12)$$

其中 $F_{\mu\nu}$ 为电磁场张量, $g \equiv -\det(g_{\mu\nu})$, 逗号表示求普通导数。不失一般性, 我们讨论一束圆偏振的引力波。一般的, 时空度规可写为

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (3-13)$$

$\eta_{\mu\nu}$ 是闵可夫斯基度规(平直时空度规), $h_{\mu\nu}$ 代表引力波对时空度规的贡献。通常引力波的幅度是非常弱的, 即 $|h_{\mu\nu}| \ll 1$, 因此引力波只是对平直时空的扰动。TT 规范下, $h_{\mu\nu}$ 只有两个独立的分量: $h_{11} = -h_{22} \equiv h_{\oplus}$ 和 $h_{12} = h_{21} \equiv h_{\otimes}$ 。由于引力波沿正 z 方向传播, 因此

$$\begin{aligned} h_{\oplus} &= A_{\oplus} \exp [i(k_g z - \omega_g t)], \\ h_{\otimes} &= iA_{\otimes} \exp [i(k_g z - \omega_g t)]. \end{aligned} \quad (3-14)$$

在引力波的影响下, 激光的电磁场会发生扰动。因此总的电磁场分为两部分: 背景电磁场和扰动电磁场。电磁场张量写为

$$F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^{(0)} + F_{\mu\nu}^{(1)}, \quad (3-15)$$

其中 $F_{\mu\nu}^{(0)}$ 代表背景场, $F_{\mu\nu}^{(1)}$ 代表扰动场。具体的写为

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^{(0)} &= \frac{1}{c} \begin{pmatrix} 0 & -\tilde{E}_x^{(0)} & 0 & 0 \\ \tilde{E}_x^{(0)} & 0 & c\tilde{B}_z^{(0)} & -c(\hat{B}_y^{(0)} + \tilde{B}_y^{(0)}) \\ 0 & -c\tilde{B}_z^{(0)} & 0 & c\tilde{B}_x^{(0)} \\ 0 & c(\hat{B}_y^{(0)} + \tilde{B}_y^{(0)}) & -c\tilde{B}_x^{(0)} & 0 \end{pmatrix}, \\ F_{\mu\nu}^{(1)} &= \frac{1}{c} \begin{pmatrix} 0 & -\tilde{E}_x^{(1)} & -\tilde{E}_y^{(1)} & -\tilde{E}_z^{(1)} \\ \tilde{E}_x^{(1)} & 0 & c\tilde{B}_z^{(1)} & -c\tilde{B}_y^{(1)} \\ \tilde{E}_y^{(1)} & -c\tilde{B}_z^{(1)} & 0 & c\tilde{B}_x^{(1)} \\ \tilde{E}_z^{(1)} & c\tilde{B}_y^{(1)} & -c\tilde{B}_x^{(1)} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3-16)$$

由于 $|h_{\mu\nu}| \ll 1$, 因此 $F_{\mu\nu}^{(1)}$ 只保留到 $h_{\mu\nu}$ 的一阶项。 $F_{\mu\nu}^{(1)}$ 来自两部分的贡献: 一部分来自引力波同激光电磁场的耦合, 其大小正比于 $|h_{\mu\nu}|\tilde{B}^{(0)}$; 另一部分来自引力波同静磁场的耦合, 其大小正比于 $|h_{\mu\nu}|\hat{B}^{(0)}$ [Li, *et al.*, 2000; Codina, *et al.*, 1980]。由于实验条件的限制, 后面我们将会看到, 通常 $\tilde{B}^{(0)}/\hat{B}^{(0)} \sim 10^{-5}$ 。因此我们以后只计算由引力波和静磁场的作用产生的扰动电磁场 $F_{\mu\nu}^{(1)}$ 。那么激光的作用是什么呢? 后面我们将看到激光只是提供了相干共振条件 ($\nu_e = \nu_g$), 产生出扰动光子流。

由(3-6)式，空间被分成三部分：I ($z < 0$)、II ($0 \leq z \leq l$)和 III ($z > l$)。首先我们先讨论一下有静磁场存在的 II 区。由(3-14)式可知， $h_{\mu\nu}$ 只是(z,t)的函数，所以由引力波产生的扰动电磁场也应只是(z,t)的函数。将(3-13)、(3-14)和(3-16) 代入(3-11)和(3-12)，并且只保留到 $h_{\mu\nu}$ 的一阶项，可以得到

$$\frac{1}{c^2}\tilde{E}_{x,t}^{(1)} + \tilde{B}_{y,z}^{(1)} = \hat{B}_y^{(0)}h_{\oplus,z} \quad (3-17)$$

$$\tilde{E}_{x,z}^{(1)} + \tilde{B}_{y,t}^{(1)} = 0 \quad (3-18)$$

$$\frac{1}{c^2}\tilde{E}_{y,t}^{(1)} - \tilde{B}_{x,z}^{(1)} = \hat{B}_y^{(0)}h_{\otimes,z} \quad (3-19)$$

$$\tilde{E}_{y,z}^{(1)} - \tilde{B}_{x,t}^{(1)} = 0, \quad (3-20)$$

以及

$$\tilde{E}_{z,t}^{(1)} = \tilde{E}_{z,z}^{(1)} = 0, \quad \tilde{B}_{z,t}^{(1)} = \tilde{B}_{z,z}^{(1)} = 0. \quad (3-21)$$

利用(3-14)式，方程组(3-17)-(3-20)在 II 区的解为[Li, *et al.*, 2003]:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_x^{(1)} &= \frac{i}{2}A_{\oplus}\hat{B}_y^{(0)}k_g c z e^{i(k_g z - \omega_g t)} + b_1 e^{i(k_g z - \omega_g t)} + c_1 e^{i(k_g z + \omega_g t)}, \\ \tilde{B}_y^{(1)} &= \frac{i}{2}A_{\oplus}\hat{B}_y^{(0)}k_g z e^{i(k_g z - \omega_g t)} + b_2 e^{i(k_g z - \omega_g t)} + c_2 e^{i(k_g z + \omega_g t)}, \end{aligned} \quad (3-22)$$

$$\begin{aligned} \tilde{E}_y^{(1)} &= -\frac{1}{2}A_{\otimes}\hat{B}_y^{(0)}c k_g z e^{i(k_g z - \omega_g t)} + i b_3 e^{i(k_g z - \omega_g t)} + i c_3 e^{i(k_g z + \omega_g t)}, \\ \tilde{B}_x^{(1)} &= \frac{1}{2}A_{\otimes}\hat{B}_y^{(0)}k_g z e^{i(k_g z - \omega_g t)} + i b_4 e^{i(k_g z - \omega_g t)} + i c_4 e^{i(k_g z + \omega_g t)}. \end{aligned} \quad (3-23)$$

从(3-21)式，我们可以得到下面的物理解[Li, *et al.*, 2003]

$$\tilde{E}_z^{(1)} = \tilde{B}_z^{(1)} = 0. \quad (3-24)$$

此解对三个区域都成立。其中 b_1 、 c_1 ... b_4 、 c_4 是待定系数，可以由物理的边界条件确定。注意，任何物理的测量都是观测者在自身的局域惯性参考系下进行的，也就是说观测量是物理量在观测者携带的标架上面的投影。由于观测者相对于探测器是静止的，我们可以方便的选观测者的标架，

$$\begin{aligned} e_0^\mu &= (1, 0, 0, 0), \\ e_1^\mu &= (0, 1 - \frac{1}{2}h_{\oplus}, 0, 0), \\ e_2^\mu &= (0, -h_{\otimes}, 1 + \frac{1}{2}h_{\oplus}, 0), \\ e_3^\mu &= (0, 0, 0, 1). \end{aligned} \quad (3-25)$$

可以检验上式满足标架的正交归一性,

$$g_{\mu\nu}e_{\hat{\alpha}}^{\mu}e_{\hat{\beta}}^{\nu} = \eta_{\alpha\beta}. \quad (3-26)$$

因此观测者观测到的电磁场为

$$F_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = F_{\mu\nu}e_{\hat{\alpha}}^{\mu}e_{\hat{\beta}}^{\nu}. \quad (3-27)$$

为简单, 我们假设在 I、III 区中没有沿负 z 方向的扰动光子流 [Li, *et al.*, 2003], 则利用(3-16), (3-22)-(3-27) 和(3-25), 加上边界条件, 即 $F_{\mu\nu}^{(1)}$ 在区域的分界面上连续, 我们可以得到三个区域的电磁场:

(a) I 区 ($\hat{B}^{(0)} = 0$):

$$\tilde{E}_{\hat{x}}^{(1)} = \tilde{E}_{\hat{y}}^{(1)} = \tilde{B}_{\hat{x}}^{(1)} = \tilde{B}_{\hat{y}}^{(1)} = 0; \quad (3-28)$$

(b) II 区 ($\hat{B}^{(0)} = \hat{B}_y^{(0)}$):

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{\hat{x}}^{(1)} &= \frac{i}{2}A_{\oplus}\hat{B}_y^{(0)}ck_gze^{i(k_gz-\omega_gt)}, \\ \tilde{B}_{\hat{y}}^{(1)} &= \frac{i}{2}A_{\oplus}\hat{B}_y^{(0)}k_gze^{i(k_gz-\omega_gt)}, \\ \tilde{E}_{\hat{y}}^{(1)} &= -\frac{1}{2}A_{\otimes}\hat{B}_y^{(0)}ck_gze^{i(k_gz-\omega_gt)} \\ &\quad + \frac{i}{4}A_{\otimes}\hat{B}_y^{(0)}ce^{i(k_gz-\omega_gt)} + \frac{i}{4}A_{\otimes}\hat{B}_y^{(0)}ce^{i(k_gz+\omega_gt)}, \\ \tilde{B}_{\hat{x}}^{(1)} &= \frac{1}{2}A_{\otimes}\hat{B}_y^{(0)}k_gze^{i(k_gz-\omega_gt)} \\ &\quad + \frac{i}{4}A_{\otimes}\hat{B}_y^{(0)}e^{i(k_gz-\omega_gt)} + \frac{i}{4}A_{\otimes}\hat{B}_y^{(0)}e^{i(k_gz+\omega_gt)}; \end{aligned} \quad (3-29)$$

(c) III 区 ($\hat{B}^{(0)} = 0$):

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{\hat{x}}^{(1)} &= \frac{i}{2}A_{\oplus}\hat{B}_y^{(0)}ck_gle^{i(k_gz-\omega_gt)}, \\ \tilde{B}_{\hat{y}}^{(1)} &= \frac{i}{2}A_{\oplus}\hat{B}_y^{(0)}k_gle^{i(k_gz-\omega_gt)}, \end{aligned} \quad (3-31)$$

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{\hat{y}}^{(1)} &= -\frac{1}{2}A_{\otimes}\hat{B}_y^{(0)}ck_gle^{i(k_gz-\omega_gt)}, \\ \tilde{B}_{\hat{x}}^{(1)} &= \frac{1}{2}A_{\otimes}\hat{B}_y^{(0)}k_gle^{i(k_gz-\omega_gt)}; \end{aligned} \quad (3-32)$$

其中 l 满足下面的条件,

$$l = n\lambda_g \quad (n \text{ is an integer}). \quad (3-33)$$

由(3-24)式, 我们很容易得到

$$\tilde{E}_z^{(1)} = \tilde{B}_z^{(1)} = 0. \quad (3-34)$$

此时, 我们可以看出扰动的电磁场正比于引力波的幅度和静磁场的强度。

2. 扰动光子流的产生

下面让我们分别计算一下沿 x , y 方向的扰动光子流密度 $n_x^{(1)}$ 和 $n_y^{(1)}$ 。由光子流密度的定义, 并且只保留到引力波和静磁场的耦合项, 我们得到

$$n_x^{(1)} = \frac{1}{\mu_0 \hbar \omega_e} \langle \tilde{E}_y^{(1)} \tilde{B}_z^{(0)} \rangle_{\nu_g = \nu_e}, \quad (3-35)$$

$$n_y^{(1)} = -\frac{1}{\mu_0 \hbar \omega_e} \langle \tilde{E}_x^{(1)} \tilde{B}_z^{(0)} \rangle_{\nu_g = \nu_e}. \quad (3-36)$$

下标“ $\nu_g = \nu_e$ ”表示只有在引力波的频率等于激光的频率时, 上式求平均才不为零。说明该探测器只响应频率在激光的频率附近的引力波, 这也称共振条件。这样, 产生的扰动光子的频率自然和激光的频率相同。将式(3-1)-(3-3), (3-25)-(3-32) 代入(3-35)、(3-36)两式, 并取 $\delta = \pi/2$ ³, 我们可得到:

(a) I 区 ($z \leq 0$)

$$n_x^{(1)} = 0, \quad n_y^{(1)} = 0; \quad (3-37)$$

(b) II 区 ($0 \leq z \leq l$)

$$\begin{aligned} n_x^{(1)} = & -\frac{A_{\otimes} \hat{B}_y^{(0)} \psi_0 y}{2\mu_0 \hbar \omega_e [1 + (z/f)^2]^{1/2}} \left\{ \frac{k_g z}{2(z + f^2/z)} \sin \Phi \right. \\ & + \frac{z}{W_0^2 [1 + (z/f)^2]} \cos \Phi + \frac{1}{2(z + f^2/z)} \sin(k_g z) \sin(k_g z + \Phi) \\ & \left. + \frac{1}{k_g W_0^2 [1 + (z/f)^2]} \sin(k_g z) \cos(k_g z + \Phi) \right\} \exp\left(-\frac{r^2}{W^2}\right), \end{aligned} \quad (3-38)$$

$$\begin{aligned} n_y^{(1)} = & \frac{A_{\oplus} \hat{B}_y^{(0)} \psi_0 y z}{2\mu_0 \hbar \omega_e [1 + (z/f)^2]^{1/2}} \left\{ \frac{k_g}{2(z + f^2/z)} \cos \Phi \right. \\ & \left. - \frac{1}{W_0^2 [1 + (z/f)^2]} \sin \Phi \right\} \exp\left(-\frac{r^2}{W^2}\right); \end{aligned} \quad (3-39)$$

这里的 $n_y^{(1)}$ 与文献 [Li, *et al.*, 2003] 中的(36)式稍有不同。因为我们将 $n_x^{(1)}$ 作为探测目标, 因此对后面的结论没有影响。

³为简化计算, 我们暂取 $\delta = \pi/2$, 后面我们将作一般性的讨论。

(c) III 区 ($z \geq l$)

$$n_x^{(1)} = -\frac{A_{\otimes} \hat{B}_y^{(0)} \psi_0 y l}{2\mu_0 \hbar \omega_e [1 + (z/f)^2]^{1/2}} \left\{ \frac{k_g}{2(z + f^2/z)} \sin \Phi + \frac{1}{W_0^2 [1 + (z/f)^2]} \cos \Phi \right\} \exp\left(-\frac{r^2}{W^2}\right), \quad (3-40)$$

$$n_y^{(1)} = \frac{A_{\oplus} \hat{B}_y^{(0)} \psi_0 y l}{2\mu_0 \hbar \omega_e [1 + (z/f)^2]^{1/2}} \left\{ \frac{k_g}{2(z + f^2/z)} \cos \Phi - \frac{1}{W_0^2 [1 + (z/f)^2]} \sin \Phi \right\} \exp\left(-\frac{r^2}{W^2}\right). \quad (3-41)$$

从上面光子流密度的表达式可以看出，只有 \otimes 模极化的引力波对 $n_x^{(1)}$ 有贡献，而只有 \oplus 模极化的引力波对 $n_y^{(1)}$ 有贡献。由(3-9)式可以看到，沿 y 方向的背景光子流不为零，这将对探测 $n_y^{(1)}$ 产生极大的干扰。而由(3-8)式，沿 x 方向的背景光子流为零，这也是我们选择 $n_x^{(1)}$ 作为探测对象的主要原因。为全面了解 $n_x^{(1)}$ 时空几何性质，我们画出了它的立体图。如图3-2所示，由于 $n_x^{(1)}$ 的表达式中含有衰减因子 e^{-x^2/W^2} ，因此扰动光子流会随 $|x|$ 增大而振荡衰减。图3-3和图3-4分别给出了 $x = W_0 = 0.05\text{m}$ 时 $n_x^{(1)}$ 随 y, z 的变化和 $z = l = 0.4\text{m}$ 时 $n_x^{(1)}$ 随 x, z 的变化。可以看出， $n_x^{(1)}$ 也会随 $|y|, |z|$ 的增大而振荡衰减。

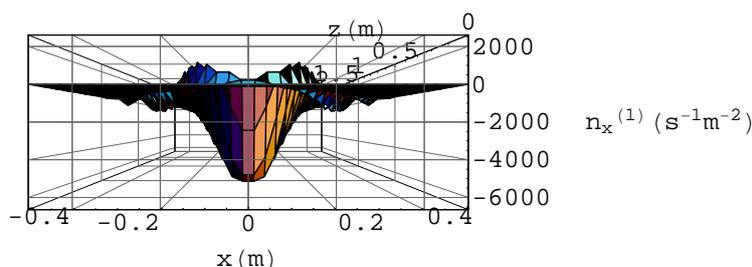


图 3-2 在 $y = 0.03\text{m}$ 处， $n_x^{(1)}$ 作为 x, z 的函数。各参数取为 $A_{\otimes} \sim 10^{-30}$ ， $\psi_0 = 1.8 \times 10^4 \text{ V m}^{-1}$ ， $W_0 = 0.05\text{m}$ ， $\hat{B}_y^{(0)} = 3\text{T}$ ，and $l = 0.4\text{m}$ 。

3.2.3 其它几个方向的引力波产生的扰动光子流

上面我们讨论了引力波沿正 z 方向时产生扰动光子流的情况，本小节我们来讨论一下引力波沿其它几个方向的情况，然后再做一下比较。

A. 引力波沿负 z 方向

此时引力波的的幅度表示为

$$h_{\oplus} = A_{\oplus} \exp i(k_g z + \omega_g t), \quad h_{\otimes} = iA_{\otimes} \exp i(k_g z + \omega_g t) \quad (3-42)$$

观测者的标架如同(3-25)式，根据前面同样的计算程序，我们得到：

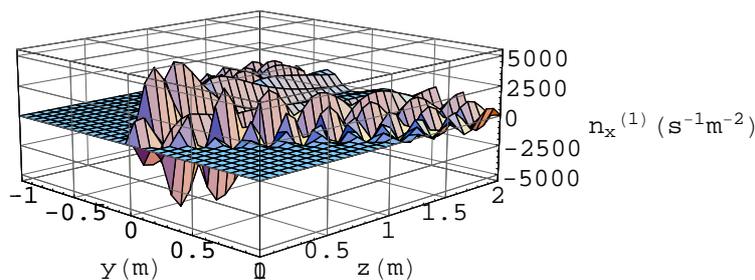


图 3-3 在 $x = 0.05\text{m}$ 的平面, $n_x^{(1)}$ 作为 y, z 的函数。各参数取值同图3-2 [Tong, Zhang & Li, 2008]。

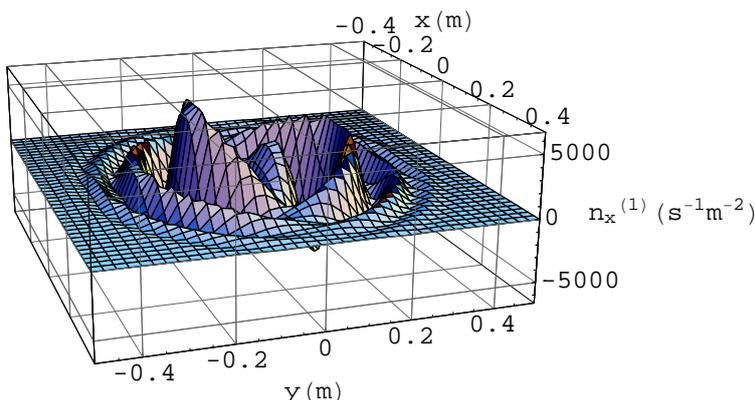


图 3-4 在 $z = 0.4\text{m}$ 处, $n_x^{(1)}$ 作为 x, y 的函数。各参数取值同图3-2 [Tong, Zhang & Li, 2008]。

II 区 ($0 \leq z \leq l$),

$$\begin{aligned}
 n_x^{(1)} = & \frac{A_{\otimes} \hat{B}_y^{(0)} \psi_0 y}{2\mu_0 \hbar \omega_e [1 + (z/f)^2]^{1/2}} \left\{ \frac{k_g(z-l)}{2(z+f^2/z)} \sin(2k_g z + \Phi) \right. \\
 & + \frac{(z-l)}{W_0^2 [1 + (z/f)^2]} \cos(2k_g z + \Phi) + \frac{1}{2(z+f^2/z)} \sin(k_g z) \sin(k_g z + \Phi) \\
 & \left. + \frac{1}{k_g W_0^2 [1 + (z/f)^2]} \sin(k_g z) \cos(k_g z + \Phi) \right\} \exp\left(-\frac{r^2}{W^2}\right); \quad (3-43)
 \end{aligned}$$

III 区 ($z > l$),

$$n_x^{(1)} = 0. \quad (3-44)$$

由于激光发生器在I区 ($z < 0$), 激光和静磁场没有相互作用, 从物理上考虑在此区应该没有扰动光子流。图3-5和图3-6从不同的侧面刻画了 $n_x^{(1)}$ 的时空几何分布。可以看出, 在这种情况下, $n_x^{(1)}$ 也是随 $|x|$, $|y|$, $|z|$ 的增大而振荡衰减的。

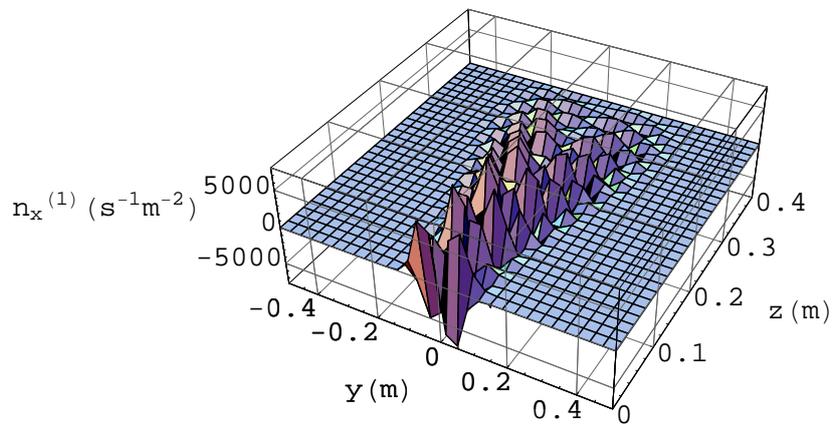


图 3-5 引力波沿负 z 轴传播时, 在 $x = 0.05$ m 处, $n_x^{(1)}$ 作为 (y, z) 的函数。各参数取值同图3-2。

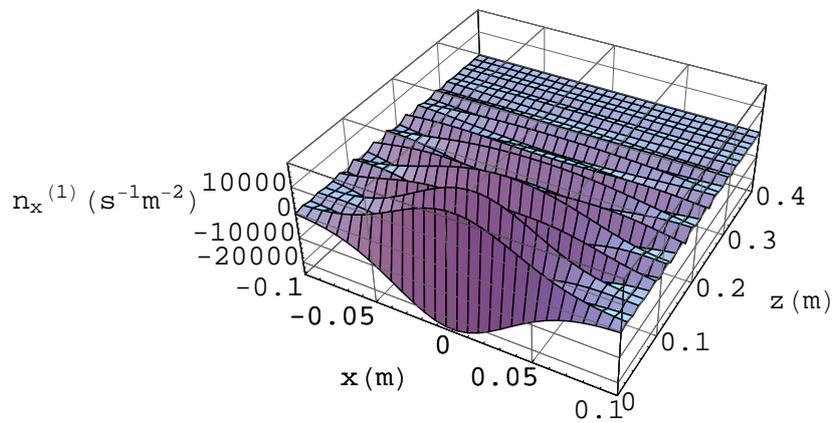


图 3-6 引力波沿负 z 轴传播时, 在 $y = 0.03$ m 处, $n_x^{(1)}$ 作为 (x, z) 的函数。各参数取值同图3-2。

B. 引力波沿正 x 方向

我们将静磁场在 x 方向上局域在 $(-l'_1, l'_2)$, 其中 l' 是磁场在 x 方向的尺度。为方便计算我们取与(3-25)式不同的观测者标架,

$$e_0^\mu = (1, 0, 0, 0), \quad (3-45)$$

$$e_1^\mu = (0, 1, 0, 0),$$

$$e_2^\mu = (0, 0, 1 - \frac{1}{2}h_\oplus, 0)$$

$$e_3^\mu = (0, 0, -h_\otimes, 1 + \frac{1}{2}h_\oplus). \quad (3-46)$$

在区间 $(-l'/2 \leq x \leq l'/2)$ 扰动光子流可计算得到

$$\begin{aligned} n_x^{(1)} = & \frac{A_\otimes \hat{B}_y^{(0)} \psi_0 y}{2\mu_0 \hbar \omega_e [1 + (z/f)^2]^{1/2}} \left\{ \frac{k_g(x + l'_1)}{2(z + f^2/z)} \sin[k_g(z - x) + \Phi] \right. \\ & + \frac{(x + l'_1)}{W_0^2 [1 + (z/f)^2]} \cos[k_g(z - x) + \Phi] + \frac{1}{2(z + f^2/z)} \sin(k_g x) \sin(k_g z + \Phi) \\ & \left. + \frac{1}{k_g W_0^2 [1 + (z/f)^2]} \sin(k_g x) \cos(k_g z + \Phi) \right\} \exp\left(-\frac{r^2}{W^2}\right). \quad (3-47) \end{aligned}$$

其几何位形见图3-7、3-8。

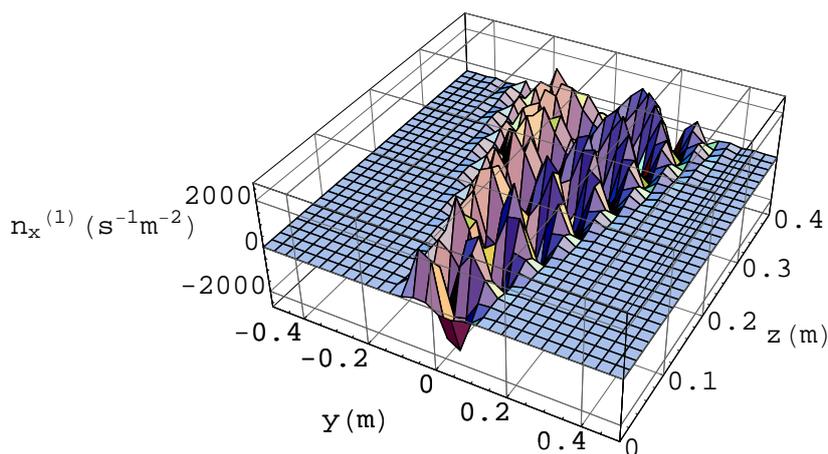


图 3-7 引力波沿正 x 轴传播时, 在 $x = 0.05 \text{ m}$ 处, $n_x^{(1)}$ 作为 (y, z) 的函数。各参数取值同图3-2。

C. 引力波沿负 x 方向

观测者的标架和磁场的尺度都和B一样, 通过和上面类似的计算, 我们得

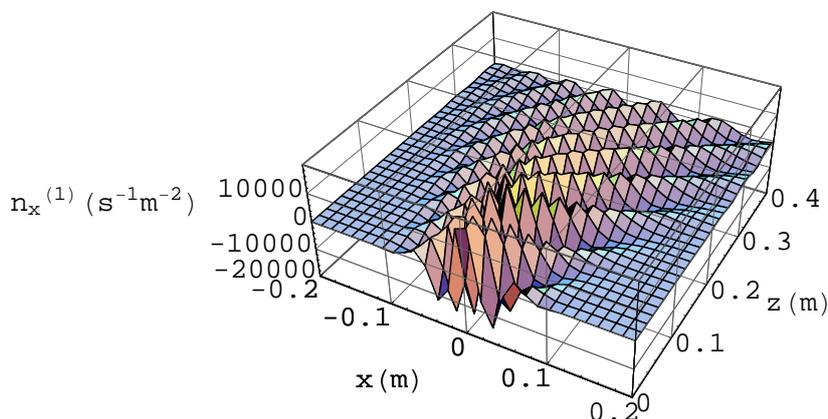


图 3-8 引力波沿正 x 轴传播时, 在 $y = 0.03$ m 处, $n_x^{(1)}$ 作为 (x, z) 的函数。各参数取值同图3-2。

到

$$\begin{aligned}
 n_x^{(1)} = & -\frac{A_{\otimes} \hat{B}_y^{(0)} \psi_0 y}{2\mu_0 \hbar \omega_e [1 + (z/f)^2]^{1/2}} \left\{ \frac{k_g(x - l'_2)}{2(z + f^2/z)} \sin [k_g(z + x) + \Phi] \right. \\
 & + \frac{x - l'_2}{W_0^2 [1 + (z/f)^2]} \cos [k_g(z + x) + \Phi] + \frac{1}{2(z + f^2/z)} \sin(k_g x) \sin(k_g z + \Phi) \\
 & \left. + \frac{1}{k_g W_0^2 [1 + (z/f)^2]} \sin(k_g x) \cos(k_g z + \Phi) \right\} \exp\left(-\frac{r^2}{W^2}\right), \quad (3-48)
 \end{aligned}$$

正如图3-9、3-10所示, 这和引力波沿正 x 方向的情形十分类似。

D. 引力波沿 y 方向

这时我们可以很容易的算出 $\tilde{E}_y^{(1)} = 0$, 因此

$$n_x^{(1)} = 0. \quad (3-49)$$

于是, 观测者观测不到沿 x 扰动光子流。

从上面的分析可以看出, 扰动光子流 $n_x^{(1)}$ 与引力波的传播方向有关, 因此这种探测器可能有敏感的方向选择效应。

3.2.4 各方向扰动光子流的数值计算

为检验扰动光子流对引力波方向的敏感程度, 本小节我们作个定量的数值计算。我们采用如下实验室中可实现的参数:

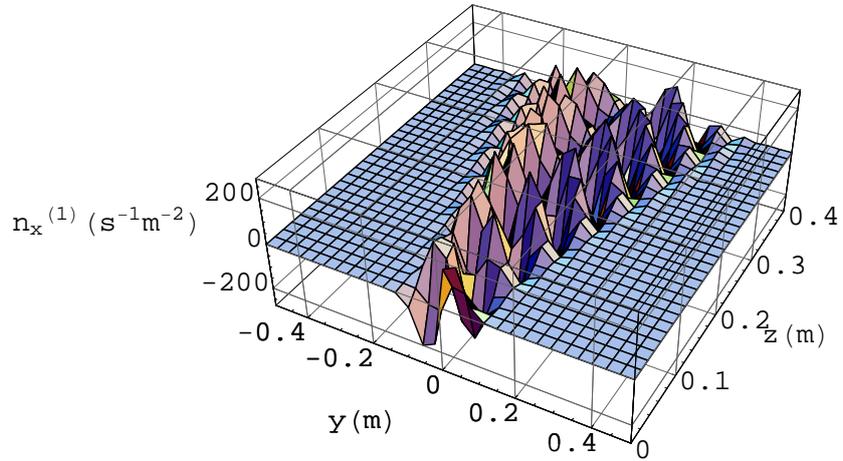


图 3-9 引力波沿负 x 轴传播时, 在 $x = 0.05$ m 处, $n_x^{(1)}$ 作为 (y, z) 的函数。各参数取值同图3-2。

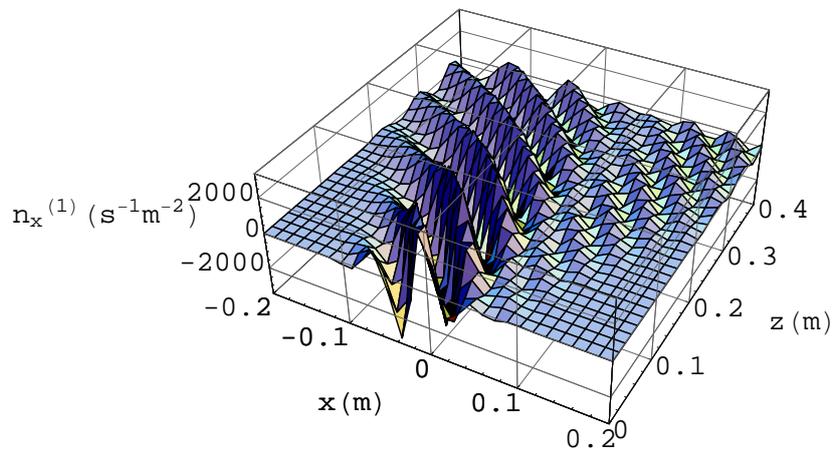


图 3-10 引力波沿正 x 轴传播时, 在 $y = 0.03$ m 处, $n_x^{(1)}$ 作为 (x, z) 的函数。各参数取值同图3-2。

1) 激光的输出功率为 $P = 2\text{kW}$, 这相当于束腰半径 $W_0 = 0.05\text{ m}$ 处的电场强度 $\psi_0 = 1.8 \times 10^4\text{ Vm}^{-1}$ [Cohen, *et al.*, 1995; Abramovich, *et al.*, 1996]。

2) 静磁场的强度 $\hat{B}_y^{(0)} = 3\text{ T}$ [Perenboom, *et al.*, 2001]。

3) 静磁场在 z 方向的尺度 $l = 0.4\text{ m}$ 。

4) 静磁场在 x 方向的尺度 $l' = l'_1 + l'_2 = 0.4\text{ m}$ 。

5) 激光的频率 $\nu_e \simeq 4.5\text{ GHz}$, 在微波波段 [Cohen, *et al.*, 1995; Abramovich *et al.*, 1996]。

由于扰动光子流的强度是沿空间衰减的, 在靠近激光束的地方强度较大, 故而我们z分型膜放在尽量靠近激光的地方。考虑到激光可能未被完全极化, 因此还会有沿正 x 方向的背景光子。所以我们将分型膜放在激光的包络面上 ($x = W_0$), 可以全反射外流的剩余背景光子。下面我们计算一下各个方向来的引力波引起的、通过面积为 Δs 的分型膜的扰动光子流的大小。每秒被分型膜反射的光子数可以通过对 $n_x^{(1)}$ 积分得到,

$$N_x^{(1)} = \int_{\Delta s, n_x^{(1)} < 0} n_x^{(1)}|_{x=0.05} dydz. \quad (3-50)$$

为尽可能得到大的 $N_x^{(1)}$, 我们应有效的放置分型膜, 使其反射的 $n_x^{(1)}$ 最大。由于 $n_x^{(1)}$ 是对 y, z 的双重积分, 通过图3-3, 3-5, 3-7 和3-9, 我们可以在 0.5m^2 的有限尺寸下将分型膜的位置固定在: $x = 0.05\text{m}, 0 \leq y \leq 0.5\text{m}, 0 \leq z \leq 1\text{m}$ 。这里我们暂取 $A_{\otimes} \sim 10^{-30}$, 经数值计算后的 $N_x^{(1)}$ 的结果见表4-2。可以看出: 相同条件下, 沿正 z 方向传播的引力波产生的扰动光子流稍大, 而沿 y 方向的引力波不会产生扰动光子流。这说明该探测器对方向有一定的选择效应。

表 3-1 分型膜反射的、各方向的引力波引起的单位时间光子数。

Direction of GWs	$N_x^{(1)'} (s^{-1})$
+z	$\sim 1.1 \times 10^2$
-z	$\sim 5.5 \times 10$
+x	$\sim 1.3 \times 10^2$
-x	$\sim 1 \times 3.5$
$\pm y$	~ 0

3.2.5 相位差对扰动光子流的影响

为减小计算量, 前面我们讨论了相因子 $\delta = \pi/2$ 的特例, 下面我们做一个一般性讨论。一般地, 扰动光子流会依赖于 δ 。图3-11给出了四种情况下, $N_x^{(1)'}$

随 δ 的变化关系。其中(a)、(b)、(c)、(d)分别是引力波沿正 z 、负 z 、正 x 和负 x 的情况。如图所示, 这四种情况下扰动光子流随相位 δ 的变化都很小(误差小于6%)。因此在后面的讨论中, 我们忽略相因子对扰动光子流的影响。

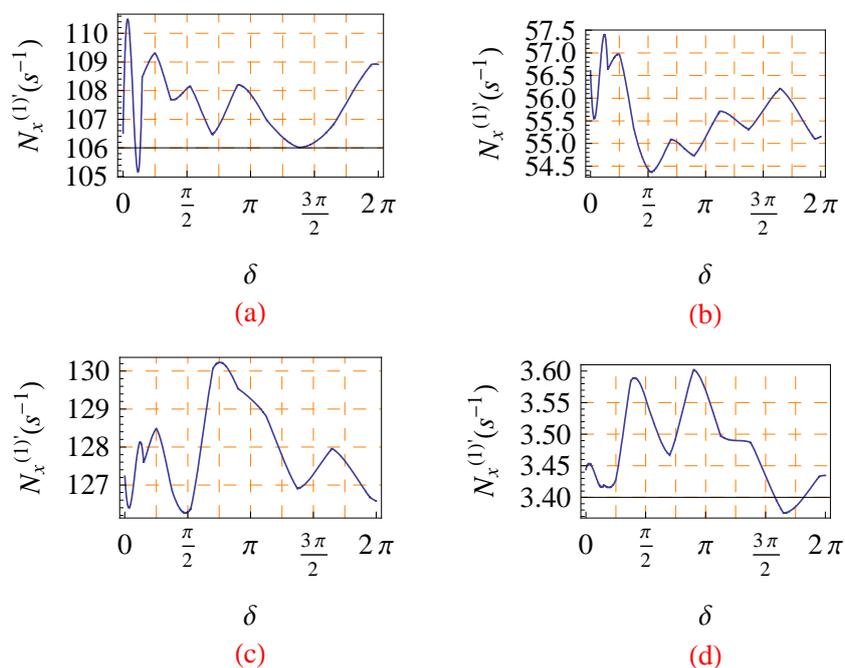


图 3-11 $N_x^{(1)}$ 随相因子 δ 的微小起伏. (a), (b), (c), (d)分别表示入射的引力波沿 $+z$, $-z$, $+x$, $-x$ 方向。

3.3 探测高频残余引力波

3.3.1 探测器在实验室中的实现

从前面的讨论中, 我们得知了这种探测器的一些性质。针对这些性质, 我们构想一下探测器的设计方案, 并初步讨论一下其在实验室中的实现。

一般说来, 具体的探测中会有各种各样的噪音。例如, 热噪音、电磁噪音、地震噪音、shot 噪音等等。这些噪音会从不同的角度影响探测精度。由于我们这种探测的频率为 4.5GHz 左右, 而地震波的频率通常比这低很多(大约是1Hz的量级), 因此地震波不是这种探测器的主要噪音, 然而地震波有可能引起探测器的空间震动, 因此最好还是将探测器放在一个防震装置上面。稳定激光的频率及振幅可以很好的削弱 shot 噪音, 本文将不作讨论。故而热噪音和电磁噪音成为该探测器的两大主要噪音。日常的电磁信号以及微波背景辐射都会成为电磁噪音。我们可以用法拉第罩将整个探测器装置遮蔽起来, 屏蔽掉外来的电磁波。而法拉第罩的内表面可完全吸收电磁波, 也就是理想中的绝对黑

体。但是不能说罩内就没有干扰的电磁信号了，因为环境达到热平衡后，法拉弟罩的内壁会辐射热光子(可认为是黑体谱)。另一个问题是，总得让激光射出去，因此必须在法拉弟罩上开一小孔，而这个小孔用完全透射的分型膜封闭，当然最理想的是单向膜，也就是只允许电磁波出去不允许电磁波进去。还有一点需要考虑，在罩内大气分子会对激光散射，从而产生噪音，因此内部环境最好是真空。

3.3.2 探测器的灵敏度

通过上面的分析，现在只有热噪音成为我们探测的最大威胁了。接下来我们初步讨论一下在热噪音的限制下该探测器的灵敏度。

信号的功率可表示为

$$S = \eta |N_x^{(1)'}| \hbar \omega_e, \quad (3-51)$$

其中 η 是分型膜的反射率($0 \leq \eta \leq 1$)。由表4-2和图3-11中的(a)、(c)可以看出，当引力波沿正 z 或正 x 方向传播时，

$$N_x^{(1)' } \sim 10^2 \text{ (s}^{-1}\text{)} \quad (3-52)$$

我们姑且假设入射引力波都是沿正 z 或正 x 方向，通过(3-50)式和(3-52)式，我们得到 $N_x^{(0)'}$ 更一般的表达式，

$$N_x^{(1)' } = |N_x^{(1)}| \simeq \frac{7A_{\otimes} \hat{B}_y^{(0)} \psi_0}{\mu_0 \hbar \omega_e} \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}. \quad (3-53)$$

微波接收机输入端的热噪音功率为

$$N_{\text{in}} = k_B T B, \quad (3-54)$$

其中 k_B 为玻尔兹曼常数， T 是噪音的温度， B 是探测器的探测频率宽度。对于频率为 ν_e 的激光， B 可以估计为 ν_e/Q 。这里 Q 是激光共振腔的品质因数，反映了激光的单色性。接收机内部会产生额外的热噪音，因此在接收机输出端的噪音最小功率为

$$S_{\text{min}} = N_{\text{in}} f_0 M, \quad (3-55)$$

这里的 $M \geq 1$ 代表最小输出信噪比。 $f_0 > 1$ 是接收机的噪声系数，其定义为接收机输入端的信噪比与输出端的信噪比的比值。我们可以按如下方式估算探测器的灵敏度：利用式(3-53)-(4-45)，且令 $M = 1$ ，可得到能探测到的最小引力波

振幅,

$$h_{\min} \simeq \frac{6.4\mu_0 k_B T f_0}{\eta \hat{B}_y^{(0)} \psi_0 Q} \times 10^{11}, \quad (3-56)$$

其中 $h_{\min} \equiv A_{\otimes \min}$. 如果我们沿用 3.2 节中参数 ψ_0 、 $\hat{B}_y^{(0)}$ 所给定的值, 并取环境温度 $T \sim 1\text{mK}$ [Zemansky & Dittman, 1981], $f_0 \sim 2$, $\eta \sim 99.99\%$ [Wen, *et al.*, 2002; Zhou, *et al.*, 2003; Hou, *et al.*, 2005], (3-56) 式结果为

$$h_{\min} \simeq 4 \times 10^{-30}. \quad (3-57)$$

然而, 实际上引力波并不是沿某个固定方向来的, 很可能是从各个方向来的, 比如宇宙残余引力波。为此我们需要引入一个约化因子 F [Maggiore, 2000]。正如表 4-2 和图 3-11 所示, 该探测器对各方向的引力波的响应各不相同, 因此约化因子 F 不容易确定。但是我们可以估计一下 F 的范围。一方面我们只保留沿正 z 而忽略其他方向的引力波, 如上所述, 探测器的灵敏度正比于扰动光子流密度 $n_x^{(1)}$, 根据 $n_x^{(1)} \propto \tilde{E}_y^{(1)} \propto \partial h_{\otimes}(z, t)/\partial z \propto k_z h_{\otimes}(z, t)$, 而 $k_z \propto k \cos \theta_1$ (其中 θ_1 是入射引力波方向与正 z 方向的夹角), 此时 F 可估计为

$$F = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi/2} \cos \theta_1 d\hat{\Omega} = \frac{1}{4}. \quad (3-58)$$

另一方面, 我们假设引力波沿 $-z, \pm x$ 方向产生的 $N_x^{(1)'}$ 与沿 $+z$ 方向的引力波产生的 $N_x^{(1)'}$ (式(3-52)) 具有相同的量级。由于 $n_x^{(1)} \propto k_x h_{\otimes}(x, t)$, 且 $k_z \propto k_x \propto k \sin \theta_2$ (这里 θ_2 是入射引力波方向与正 y 方向的夹角)。于是, F 可估计为

$$F = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \sin \theta_2 d\hat{\Omega} = \frac{\pi}{4}. \quad (3-59)$$

如此我们便确定了 F 的上下限, 该探测器的 F 在 $1/4$ 和 $\pi/4$ 之间。于是考虑到约化因子对探测器灵敏度的影响, (3-57) 式变为

$$h_{\min} \simeq (5.1 \times 10^{-30} \sim 1.6 \times 10^{-29}). \quad (3-60)$$

3.3.3 探测残余引力波可能性

上面我们计算了探测器的灵敏度, 那么引力波源的幅度有多大呢? 正如上一章指出, 通常天文过程产生的引力波的频率都远小于 4.5GHz , 有些高频源如原初黑洞的爆发及恒星内部粒子的热碰撞产生的引力辐射的频率会高于 GHz [Bisnovatyi-Kogan & Rudenko, 2004]。除此之外, 宇宙极早期 (能标 $\sim 10^{19} \text{GeV}$) 会产生具有黑体谱频率分布的引力波背景的 [Zel'dovich & Novikov, 1983; Buonanno, 2003]。若没有宇宙早期的暴涨, 演化到今天, 对应的温度

$T \sim 1\text{K}$ ，其幅度在 4.5GHz 附近约为 10^{-32} 。但 WMAP 对 CMB 观测的数据 [Spergel, *et al.*, 2003; 2007] 支持暴涨学说。于是经暴涨后，这种热平衡的背景引力波温度 $T \sim 10^{-27}\text{K}$ ，因此完全可以忽略了。而残余引力波的频率范围异常宽广， $10^{-18} - 10^{11}\text{Hz}$ ，是一种很好的探测源。下面我们把加速膨胀宇宙中的残余引力波 [Zhang, *et al.*, 2005a; 2005b; Miao & Zhang, 2007] 的理论值与探测器的灵敏度作一下比较，看其是否能够被探测到？首先看一下残余引力波的方均根幅度。在高频近似下，残余引力波可看成是平面波。由于残余引力波的随机性，场 h_{ij} 的平均值为零： $\langle 0|h_{ij}(\mathbf{x}, \tau)|0\rangle = 0$ 。但其方差不为零 [Grishchuk, 2001]:

$$\langle h^2 \rangle \equiv \langle 0|h^{ij}(\mathbf{x}, \tau)h_{ij}(\mathbf{x}, \tau)|0\rangle \equiv \int_0^\infty h^2(\nu, \tau) \frac{d\nu}{\nu}, \quad (3-61)$$

其中 $h(\nu, \tau)$ 是残余引力波的谱幅度， τ 是共形时。图3-12刻画了现在时刻的引力波谱 $h(\nu, \tau_H)$ ，其中暴涨参数 $\beta = -1.9$ ，张量形扰动与标量形扰动的贡献比 $r = 0.22$ ，暗能量的比重 $\Omega_\Lambda = 0.75$ ，以及三种不同的再加热参数 $\beta_s = -0.3, 0, 0.5$ [Miao & Zhang, 2007]。知道了 $h(\nu, \tau_H)$ 后，谱能量密度 $\Omega_g(\nu)$ 便可求出，

$$\Omega_g(\nu) = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{\nu}{\nu_H}\right)^2 h^2(\nu, \tau_H), \quad (3-62)$$

其中 $\nu_H = H_0 \sim 2 \times 10^{-18}\text{Hz}$ 是哈勃常数。

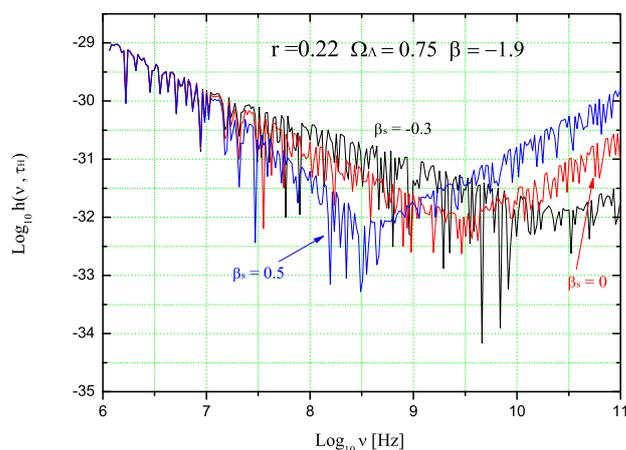


图 3-12 高频段的残余引力波谱。其中各参数取为 $r = 0.22$ ， $\Omega_\Lambda = 0.75$ ， $\beta = -1.9$ 。在 4.5GHz ，引力波谱对不同的 β_s 值很敏感 [Miao & Zhang, 2007]。

由于只有在共振条件，即引力波的频率等于激光束的频率时，该探测器才能响应，故该探测器的探测频带很窄， $\Delta\nu \simeq \nu_0/Q$ ， $\nu_0 \simeq 4.5\text{GHz}$ 为探测的中心频率。于是，只有那些频率在 ν_0 附近的引力波才会响应该探测器。积

分(3-61)式,

$$\int_0^{\infty} h^2(\nu, \tau_H) \frac{d\nu}{\nu} \simeq h^2(\nu_g, \tau_H) \frac{\Delta\nu}{\nu_g} \simeq h^2(\nu_g, \tau_H)/Q, \quad (3-63)$$

我们得到频率在 ν_0 附近的残余引力波的方均根幅度,

$$h_{\text{rms}} \equiv \sqrt{\frac{\langle h^2 \rangle}{2}} \simeq \frac{h(\nu_g, \tau_H)}{\sqrt{2Q}}, \quad (3-64)$$

上式中的 $\sqrt{2}$ 是考虑到 \otimes 和 \oplus 两种极化模式的贡献相等。在 $\nu_0 \sim 4.5$ GHz 附近, $\beta_s = 0.5$ 的模型, 理论值给出,

$$h(\nu_g, \tau_H) \sim 8 \times 10^{-32}. \quad (3-65)$$

从而方均根为

$$h_{\text{rms}} \simeq 1.8 \times 10^{-34}. \quad (3-66)$$

比较(3-60)式和(3-66)式, 我们发现探测器的灵敏度距离探测目标—加速膨胀宇宙中的高频残余引力波还有约4个量级的差距。但是我们还有增大探测器灵敏度的空间, 主要有以下改进方案: (1) $h_{\text{min}} \propto 1/Q$, 而 $h_{\text{rms}} \propto 1/\sqrt{Q}$, 两者的比值 $h_{\text{rms}}/h_{\text{min}} \propto \sqrt{Q}$ 。比如, 若 Q 增大到 10^9 , 那么 $h_{\text{rms}}/h_{\text{min}} \propto 10^{(2)}$, 探测灵敏度距离探测目标只有两个量级的差距了。目前, 可见光波段的激光器的 Q 已达到 10^{13} [Barber, *et al.*, 2006], 氢微波激光器的 $Q \sim 10^9$ [Wang, 1989; Howe & Walls, 1983; Kleppner, *et al.*, 1964]。(2) 如(3-56)式所示, 探测器的灵敏度与环境温度有关, 降低环境的温度可更有利于探测。若环境温度 T 降为 $50\mu\text{K}$ [Lounasmaa, 1989], 那么探测灵敏度将提高20倍。(3) 增加静磁场强度, 会线性地提高灵敏度, 我们期待能够获得更强的静磁场。(4) 增加激光的功率也会提高探测器的灵敏度, 若激光的功率增大两个量级, 则灵敏度会增加一个量级。另外, 增加静磁场有引力波的作用尺度也有利于仪器的探测 [Li, *et al.*, 2003]。表3-2给出了我们选择的参数和有可能改善的参数下探测的可能性。综

表 3-2 目前的探测性能和有可能改善的探测性能。

参数	Q	T	$\hat{B}_y^{(0)}$	P	$h_{\text{rms}}/h_{\text{min}}$
现在选取值	10^5	1 mK	3 T	2 kW	$(1.1-3.5) \times 10^{-5}$
可能改善值	10^9	$50 \mu\text{K}$	30 T	20 kW	1.8-5.6

上所述, 改善后的参数值将可以使该探测器能够探测到加速膨胀宇宙中的残余引力波, 因此这种探测器具有极大的可行性。另外, 正如前一章讲述的, 不同

的引力波跑动谱指数 α_t 在高频段产生的引力波谱差别很大。如果该探测器足够灵敏了，那么也有可能来确定 α_t 。但 β_s 和 α_t 会在GHz有简并，即不同的两组参数 (β_s, α_t) 产生相同的引力波幅值，由于在较宽频段上引力波谱形状不同，这种简并可以通过探测频率稍低一点（100MHz）的探测器来打破。这就是下一章我们要讨论的环形波导腔探测器。

第4章 环形波导腔引力波探测器

本章我们介绍另一种基于引力波和电磁波的相互作用的引力波探测器——环形波导腔探测器。环形波导腔中的线偏振电磁波在引力波的影响下，其偏振矢量(通常指电场强度矢量)会绕着其传播方向偏转，其偏转角度正比于引力波的强度。该探测器的探测频率(约100MHz)依赖于环形波导腔的尺寸(环的半径)，在共振条件(引力波的频率等于电磁波的频率)下，这种偏转效应将得到线性的累积放大。Cruise 小组根据这种效应已经初步建造了引力波探测器。我们详细介绍这种引力波探测器的工作原理，讨论各个方向来引力波对该探测器的响应，然后将理论预言的加速膨胀宇宙中残余引力波的幅度与该探测器的灵敏度进行比较，分析其探测的可能性。

4.1 探测器构造

图4-1描绘了环形波导腔探测装置的结构。我们用 $\{x^\mu\}$ 来标记四维时空的坐标系，这里 $\mu = 0, 1, 2, 3$ 且 $x^0 \equiv ct$ 。如图所示，环形波导管被放置在 (x, y) 面内。环行腔的半径为 R ，其横截面的长宽分别为 a 和 b ($a > b$, 且 $a, b \ll R$)。在腔内注入 TE_{10} 模式的线偏振的电磁波，偏振方向沿 x^3 轴。电磁波的频率 $\nu_e \sim 10^{11}$ Hz(微波)，对应的波长 $\lambda_e \sim 3$ mm。该电磁波在环形腔中传播的群速度为 [Li & Zhao, 1997]:

$$v = c\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_e}{2a}\right)^2}, \quad (4-1)$$

其中 c 为光速。众所周知， TE_{10} 模式的电磁波在波导中传播的最大波长为 $\lambda_{\max} = 2a$ 。实验室中，我们可取 $a \simeq 2$ cm。那么由(4-1)式可知 $v \simeq c$ ，其偏离 $(1 - v/c) \sim 10^{-3}$ 。因此电磁波在环形波导中的角速度为:

$$\omega_0 = \frac{v}{R} \simeq \frac{c}{R}. \quad (4-2)$$

下面我们将看到，这种引力波探测器正是能探测角频率为 ω_0 的引力波。也就是说，只有引力波的频率 $\nu_g \simeq \omega_0/2\pi$ 时才响应该探测器。例如，若取 $R = 1$ m，则引力波的相应频率为 $\nu_g \simeq 5 \times 10^7$ Hz。所以这种探测器可以通过调节 R 的大小来有目的的探测不同频段的引力波。

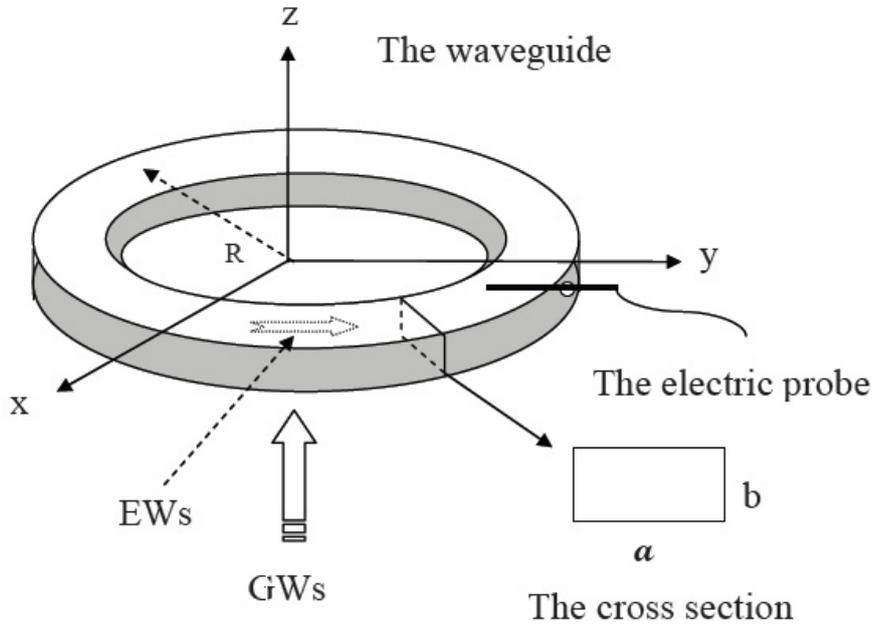


图 4-1 波导腔探测器示意图。

4.2 探测原理

在坐标系 $\{x^\mu\}$ 中，电磁波的极化四矢量表示为 Π^μ 。它是实单位矢量，且与电磁波的四波矢 P^μ 正交 [Misner, Thorne & Wheeler, 1973]，即满足：

$$\Pi_\mu P^\mu = 0, \quad (4-3)$$

$$\Pi_\mu \Pi^\mu = 1. \quad (4-4)$$

由于电磁波波矢是零矢量，即

$$P_\mu P^\mu = 0, \quad (4-5)$$

因而在 Π^μ 上面加上任意倍数的 P^μ ，(4-3)式和(4-4)式仍满足，所以也就不影响物理测量。假设一束电磁波沿正 x^1 轴传播，其波矢为 $P^\mu = (P^0, P^1, 0, 0)$ 。为满足零矢量，有 $P^0 = P^1$ 。由(4-3)式，我们可以把电磁波的极化矢量一般的写为 $\Pi^\mu = (\Pi^0, \Pi^0, \Pi^2, \Pi^3)$ 。既然可以在 Π^μ 上面加上任意倍数的 P^μ ，那么总能找到合适的常数 κ 使得 $\kappa P^0 + \Pi^0 = 0$ 。所以总可以把极化矢量写为 $\Pi^\mu = (0, 0, \Pi^2, \Pi^3)$ 。由 Π^μ 的归一性，有：

$$|\Pi^2|^2 + |\Pi^3|^2 = 1. \quad (4-6)$$

这样电磁波的电场矢量 E 便与其极化空间三矢量 Π 的方向一致了。TE₁₀ 模的

线偏振电磁波被注入波导的初始时刻，其极化矢量沿 x^3 轴方向(电场 E 垂直于横截面边长 a)，即

$$\Pi^\mu = (0, 0, 0, 1). \quad (4-7)$$

当有引力波作用于此环形波导腔时，在腔内传播的电磁波的偏振矢量会发生偏转，因而会产生出 E^2 分量。用电场探测棒可以测量 E^2 的大小，如图4-1所示。下面我们详细讨论一下 E 的这种偏转效应。为简单起见，现考虑一束单频引力波经过该探测器的区域，其波长远大于波导内电磁波频率 ($\lambda_g \gg \lambda_e$)，即满足“几何光学”近似 [Misner, Thorne & Wheeler, 1973]。在这种近似下，电磁波的偏振矢量作平行移动，

$$\frac{d\Pi^\mu}{ds} + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \Pi^\nu \frac{dx^\sigma}{ds} = 0, \quad (4-8)$$

其中 s 是仿射参量。我们可以取 $s = t/T_0$, $T_0 = 2\pi/\omega_0$ 是电磁波在环形腔内传播一周需要的时间。当 s 由 0 变到 1，则说明电磁波传播了一周。这样电磁波波前的坐标可写为

$$x^\mu = R \left(\frac{2\pi cs}{v}, -\sin 2\pi s, \cos 2\pi s, 0 \right), \quad (4-9)$$

其中 v 是电磁波的群速度。通过计算(4-8)式，我们可以计算出 $\Delta\Pi^2$ ，从而得到偏转角度 $\alpha \simeq \sin \alpha = |\Delta\Pi^2|$ 。那么电磁探测棒可以测量到 $E^2 \simeq E_0\alpha$ 。棒两端的电压 $V = E_0\alpha l \sin(2\pi\nu_e t)$ ，其中 l 是探测棒的长度。后面我们将看到偏转角度 α 与引力波幅度成正比。所以可以说，探测到 α 也就探测到了引力波。

4.3 计算偏转角度

探测器在实验室中通常是固定好的，而引力波信号可能是随机的从各个方向传来。下面我们讨论几种特殊方向(正 x 、 y 、 z 方向)来的单频平面引力波引起的 Π 的偏转。

4.3.1 引力波沿正 z 方向传播

引力波沿正 z 方向传播时，其四维波矢量为 $k^\mu = (2\pi/\lambda_g, 0, 0, 2\pi/\lambda_g)$ 。为简单起见，我们设引力波与电磁波的相位差为 0。这样由于引力波和电磁波的传播速度都为 c ，所以引力波的相位可以表示为：

$$\phi = k_\mu x^\mu = -2\pi s \frac{\omega}{\omega_0}, \quad (4-10)$$

其中 x^μ 由(4-9)式表示，这里我们用了爱因斯坦求和约定，即相同的上下指标表示求和。 $\omega = 2\pi c/\lambda_g$ 是引力波的角频率。注意，正如上面提到的 ω_0 是电磁波在环形腔内传播的角速度，而不是电磁波本身的角频率。在 TT 规范下，时空度规为：

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + h_{\oplus} & h_{\otimes} & 0 \\ 0 & h_{\otimes} & 1 - h_{\oplus} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4-11)$$

以及

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - h_{\oplus} & -h_{\otimes} & 0 \\ 0 & -h_{\otimes} & 1 + h_{\oplus} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4-12)$$

其中 $h_{\oplus} \equiv h_{11}$ 和 $h_{\otimes} \equiv h_{12}$ 代表引力波的两个偏振模式： \oplus 模式和 \otimes 模式。一般说来， h_{\oplus} 和 h_{\otimes} 的相位差是随机的，也就是非相干的，这点类似于自然光。我们先讨论一下“线性偏振”的引力波，也就是 h_{\oplus} 和 h_{\otimes} 有固定的零相位差。这样我们有：

$$\begin{aligned} h_{\oplus} &= A_{\oplus} \cos \phi; \\ h_{\otimes} &= A_{\otimes} \cos \phi, \end{aligned} \quad (4-13)$$

这里 A_{\oplus} 和 A_{\otimes} 是两种模式的振幅。由于电磁波偏振矢量的偏转是由引力波引起的，我们可以想到偏转角度会很小。以后的讨论中，我们认为 Π^3 始终近似为 1^1 。那么由(4-8)式和(4-9)可知，我们只需要计算联络分量： Γ_{30}^2 ， Γ_{31}^2 和 Γ_{32}^2 。

¹ Π^3 始终近似为1 证明如下：
由方程(4-8)可知，当 $\mu = 3$ 时，有

$$\frac{d\Pi^3}{ds} = -\Gamma_{\nu\sigma}^3 \Pi^\nu \frac{dx^\sigma}{ds}. \quad (*)$$

因为 Π^μ 只有两个不为零的分量： Π^2 和 Π^3 ，所以我们只需要计算 $\Gamma_{2\sigma}^3$ 和 $\Gamma_{3\sigma}^3$ 。经过计算，只有两个不为零的分量： $\Gamma_{21}^3 = \frac{\pi}{\lambda_g} A_{\otimes} \sin \phi$ 和 $\Gamma_{22}^3 = -\frac{\pi}{\lambda_g} A_{\oplus} \sin \phi$ 。代入 (*) 式得：

$$\Pi^3 = \cos \delta \simeq 1 - \frac{\delta^2}{2}. \quad (**)$$

其中 $\delta \equiv \frac{1}{2} |A_{\oplus} \sin \frac{\omega}{\omega_0} 2\pi s \frac{\omega/\omega_0}{(\omega/\omega_0)^2 - 1} - A_{\otimes} (1 - \cos(\omega/\omega_0) 2\pi s) \frac{(\omega/\omega_0)^2}{(\omega/\omega_0)^2 - 1}|$ 。所以在保留到 $A_{\mu\nu}$ 的线性项的情况下， $\Pi^3 = 1$ 。

根据(4-11)式和(4-12)计算得:

$$\begin{aligned}\Gamma_{30}^2 &= 0, \\ \Gamma_{31}^2 &= -\pi A_{\otimes} \sin \phi / \lambda_g, \\ \Gamma_{32}^2 &= \pi A_{\oplus} \sin \phi / \lambda_g.\end{aligned}\quad (4-14)$$

积分(4-8)式, 得到电磁波传播一圈 Π^2 的增量:

$$\Delta \Pi^2 = \int_0^1 \frac{d\Pi^2}{ds} ds = - \int_0^1 \Gamma_{3\sigma}^2 \Pi^3 \frac{dx^\sigma}{ds} ds. \quad (4-15)$$

再将(4-9)式和(4-14)上式得:

$$\Delta \Pi^2 = \frac{2\pi^2 R}{\lambda_g} \int_0^1 \left(A_{\otimes} \sin \left(2\pi s \frac{\omega}{\omega_0} \right) \cos 2\pi s - A_{\oplus} \sin \left(2\pi s \frac{\omega}{\omega_0} \right) \sin 2\pi s \right) ds. \quad (4-16)$$

积分上式有:

$$\Delta \Pi^2 = \frac{A_{\otimes}}{2} (1 - \cos(2\pi\varpi)) \frac{\varpi^2}{\varpi^2 - 1} - \frac{A_{\oplus}}{2} \sin(2\pi\varpi) \frac{\varpi}{\varpi^2 - 1}. \quad (4-17)$$

其中 $\varpi \equiv \omega/\omega_0$ 。可见, $\Delta \Pi^2$ 与引力波的频率有关。下面针对(4-17)式, 我们展开讨论。

(1) 引力波的角频率等于电磁波在环形波导腔内循环绕转的角频率, 即 $\omega = \omega_0$ 。这被称作共振条件。对(4-17)式取极限 $\varpi \rightarrow 1$, 得:

$$\Delta \Pi^2 = -\frac{\pi A_{\oplus}}{2}. \quad (4-18)$$

可见这时只有 \oplus 模式偏振的引力波才对 $\Delta \Pi^2$ 有贡献。这正是 Cruise 得到的结果 [Cruise, 2000]。

(2) 如果引力波只有 \otimes 模式, 即 $A_{\oplus} = 0$, 则(4-17)式变为

$$\Delta \Pi^2 = \frac{A_{\otimes}}{2} (1 - \cos(2\pi\varpi)) \frac{\varpi^2}{\varpi^2 - 1}. \quad (4-19)$$

我们画出了 $\Delta \Pi^2$ 对 ϖ 的依赖关系, 见图4-2。 $\Delta \Pi$ 的最大值 $1.864A_{\otimes}$ 出现在 $\varpi = 1.434$ 处; 最小值 $-0.643A_{\otimes}$ 出现在 $\varpi = 0.743$ 处。

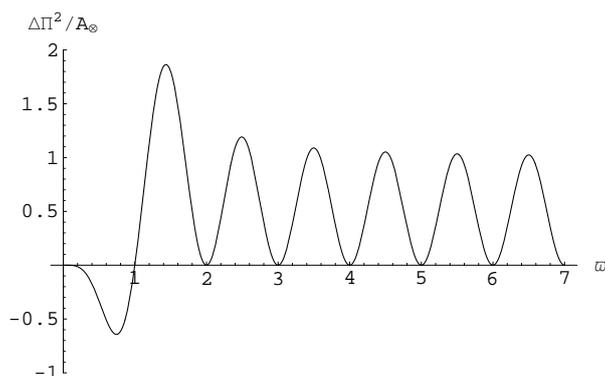


图 4-2 当 $A_{\oplus} = 0$ 时, $\Delta\Pi^2$ 随 ϖ 的变化。 $\Delta\Pi^2$ 在 $\varpi = 1.434$ 处有最大值 $1.864A_{\otimes}$, 在 $\varpi = 0.743$ 处有最小值 $-0.643A_{\otimes}$ 。注意: (1) $\varpi \gg 1$ 且 ϖ 是半整数时, $\Delta\Pi^2 = A_{\otimes}$; (2) ϖ 是整数时, $\Delta\Pi^2 = 0$; (3) $\varpi \rightarrow 0$ 时 $\Delta\Pi^2 = 0$ 。

(3) 如果引力波只有 \oplus 模式, 即 $A_{\otimes} = 0$, 则(4-17)式变为

$$\Delta\Pi^2 = -\frac{A_{\oplus}}{2} \sin(2\pi\varpi) \frac{\varpi}{\varpi^2 - 1}. \quad (4-20)$$

如图4-3所示, $\Delta\Pi$ 在 $\varpi = 1.036$ 处有一最小值 $-1.585A_{\oplus}$ 。

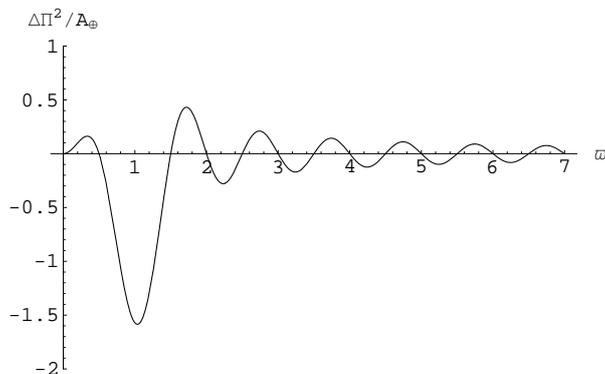


图 4-3 当 $A_{\otimes} = 0$ 时, $\Delta\Pi^2$ 随 ϖ 的变化。 $\Delta\Pi^2$ 在 $\varpi = 1.036$ 处有最小值 $-1.585A_{\oplus}$ 。

(4) 若引力波两种偏振的振幅相等, 即 $A_{\otimes} = A_{\oplus} = A$ (这里 A 为实数), 那么(4-17)式化为:

$$\Delta\Pi^2 = \frac{A}{2} (\varpi - \varpi \cos(2\pi\varpi) - \sin(2\pi\varpi)) \frac{\varpi}{\varpi^2 - 1}. \quad (4-21)$$

图4-4画出了这种情况下 $\Delta\Pi^2$ 随 ϖ 的变化曲线。

下面我们讨论一下“圆偏振”的引力波对 Π 的影响。设 $A_{\oplus} = iA_{\otimes} = A$, 则

$$\begin{aligned} h_{\oplus} &= A_{\oplus} \cos \phi; \\ h_{\otimes} &= A_{\otimes} \sin \phi. \end{aligned} \quad (4-22)$$

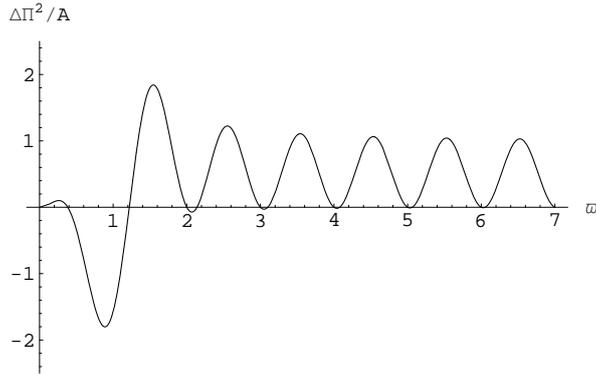


图 4-4 当 $A_{\otimes} = A_{\oplus} = A$ 时, $\Delta\Pi^2$ 随 ϖ 的变化。 $\Delta\Pi^2$ 在 $\varpi = 1.546$ 处有最大值 1.842, 在 $\varpi = 0.889$ 处有最小值 -1.802。

通过和上面类似的计算可得两个不为零的联络分量:

$$\begin{aligned}\Gamma_{31}^2 &= \pi A \cos \phi / \lambda_g, \\ \Gamma_{32}^2 &= \pi A \sin \phi / \lambda_g.\end{aligned}\tag{4-23}$$

从而得到 Π^2 的增量为

$$\Delta\Pi^2 = \frac{A\varpi \sin(2\pi\varpi)}{2(1+\varpi)},\tag{4-24}$$

如图4-5所示。

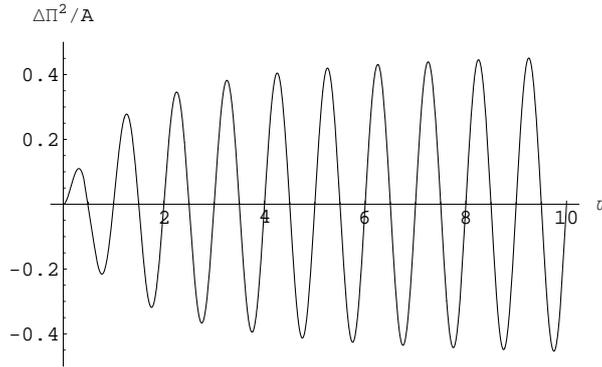


图 4-5 对于圆极化的引力波, $\Delta\Pi^2$ 和 ϖ 的关系。 $\Delta\Pi^2$ 的值总是小于 $A/2$ 。

4.3.2 引力波沿正 x 方向传播

引力波沿正 x 方向传播时, 其四维波矢量为 $k^\mu = (2\pi/\lambda_g, 2\pi/\lambda_g, 0, 0)$ 。则其相位可以表示为:

$$\phi = -(2\pi s + \sin(2\pi s))\omega/\omega_0.\tag{4-25}$$

注意现在的时空度规不同于引力波沿 z 方向的情形之下了，而是

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + h_{\oplus} & h_{\otimes} \\ 0 & 0 & h_{\otimes} & 1 - h_{\oplus} \end{pmatrix}, \quad (4-26)$$

以及

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - h_{\oplus} & -h_{\otimes} \\ 0 & 0 & -h_{\otimes} & 1 + h_{\oplus} \end{pmatrix}. \quad (4-27)$$

根据上面类似的分析，对于“线性偏振”的引力波，我们得到需要的两个非零联络分量

$$\begin{aligned} \Gamma_{30}^2 &= \pi A_{\otimes} \sin \phi / \lambda_g, \\ \Gamma_{31}^2 &= -\pi A_{\otimes} \sin \phi / \lambda_g. \end{aligned} \quad (4-28)$$

积分(4-8)式，得到

$$\begin{aligned} \Delta\Pi^2 &= \frac{2\pi^2 r A_{\otimes}}{\lambda_g} \int_0^1 (1 + \cos(2\pi s)) \sin\left(\frac{\omega}{\omega_0}(2\pi s + \sin(2\pi s))\right) ds \\ &= A_{\otimes} \sin^2(\pi\varpi). \end{aligned} \quad (4-29)$$

可见， $\Delta\Pi$ 随 ϖ 在 0 到 A_{\otimes} 之间震荡，而且只有 \times 模式偏振的引力波有贡献。同样的计算，对于“圆偏振”的引力波，我们得到需要的两个非零联络分量

$$\begin{aligned} \Gamma_{30}^2 &= -\pi A \cos \phi / \lambda_g, \\ \Gamma_{31}^2 &= \pi A \cos \phi / \lambda_g. \end{aligned} \quad (4-30)$$

进一步得到：

$$\begin{aligned} \Delta\Pi^2 &= \frac{2\pi^2 r A}{\lambda_g} \int_0^1 (1 + \cos(2\pi s)) \cos\left(\frac{\omega}{\omega_0}(2\pi s + \sin(2\pi s))\right) ds. \\ &= \frac{A}{2} \sin(2\pi\varpi). \end{aligned} \quad (4-31)$$

$\Delta\Pi$ 随 ϖ 在 $-1/2A$ 和 $1/2A$ 之间震荡。

4.3.3 引力波沿正 y 方向传播

当引力波沿正 y 方向传播时, 时空度规为:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + h_{\oplus} & 0 & h_{\otimes} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & h_{\otimes} & 0 & 1 - h_{\oplus} \end{pmatrix}, \quad (4-32)$$

以及

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - h_{\oplus} & 0 & -h_{\otimes} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -h_{\otimes} & 0 & 1 + h_{\oplus} \end{pmatrix}. \quad (4-33)$$

经计算, 所有需要的联络分量均为零, 从而导致

$$\Delta\Pi^2 = 0. \quad (4-34)$$

因此沿正 y 方向传播的引力波, 无论什么样的偏振方式都不会引起 Π 的偏转。

4.4 电磁波偏振矢量偏转的累积效应

这一节我们讨论一下, 当电磁波在环形波导腔内传播了 n 圈后, Π^2 的增量有多大? 这在具体探测中才是具有实际意义的。

首先, 考虑线性偏振的引力波沿正 z 轴传播引起的累加效应。积分(4-16)式, 积分限从 0 到 n , 我们得到 n 圈 $\Delta\Pi^2$ 的变化量

$$(\Delta\Pi^2)_n = \frac{A_{\otimes}}{2} [1 - \cos(2\pi n\varpi)] \frac{\varpi^2}{\varpi^2 - 1} - \frac{A_{\oplus}}{2} \sin(2\pi n\varpi) \frac{\varpi}{\varpi^2 - 1}. \quad (4-35)$$

类似上面, 我们讨论几种特殊情况。

(1) $A_{\otimes} = 0$ 。图4-6给出了10圈后 $(\Delta\Pi^2)_{10}$ 随 ϖ 的变化关系。在 $\varpi \simeq 1$ 时, $(\Delta\Pi^2)_{10}$ 有一最小值 $(\Delta\Pi^2)_{\min} \sim -15.71$ 。与图4-3($n = 1$)相比, 在 $\varpi \rightarrow 1$ 时, $|(\Delta\Pi^2)_{10}|$ 比 $|(\Delta\Pi^2)_1|$ 大了约10倍。表4-1给出了几个 n 值下的 $\Delta\Pi^2$ 的最小值。可以看出, 两者近似成线性关系。实际上, 这种线性关系可以通过

对(4-35)式取极限 $\varpi \rightarrow 1$ 得到,

$$(\Delta\Pi^2)_n = -\frac{n\pi A_{\oplus}}{2}. \quad (4-36)$$

这和 Cruise 得到的结果是一致的 [Cruise, 2000]。

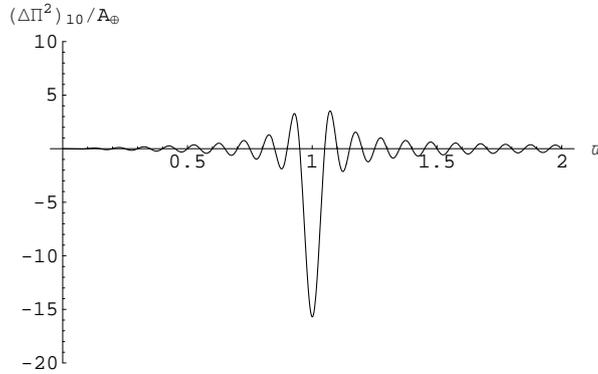


图 4-6 $A_{\otimes} = 0$, $n = 10$ 的情况。 $(\Delta\Pi^2)_n$ 在 $\varpi = 1.00038$ 处有最小值 $-15.071A_{\oplus}$ 。

表 4-1 The case $A_{\otimes} = 0$. The amplitude of $(\Delta\Pi^2)_n$ increases linearly with n , as $\varpi \rightarrow 1$.

n	ϖ_{\min}	$\Delta\Pi^2_{\min}/A_{\oplus}$
1	1.036	-1.585
10	1.00038	-15.71
100	~ 1	-157.08
1000	~ 1	-1570.8
2000	~ 1	-3141.6
10000	~ 1	-15708

⟨2⟩ $A_{\oplus} = 0$ 。表4-2给出了 $(\Delta\Pi^2)_{\max}$ 和 $(\Delta\Pi^2)_{\min}$ 随 n 的累积效应。显然, $(\Delta\Pi^2)_{\max}$ 和 $(\Delta\Pi^2)_{\min}$ 都与 n 成线性关系。图4-7画出了 $n = 10$ 时的情形。

表 4-2 $A_{\oplus} = 0$ 的情况。 $(\Delta\Pi^2)_n$ 的极值随 n 的变化。

n	ϖ_{\max}	$\Delta\Pi^2_{\max}/A_{\otimes}$	ϖ_{\min}	$\Delta\Pi^2_{\min}/A_{\otimes}$
1	1.434	1.864	0.743	-0.643
10	1.038	12.027	0.964	-10.761
100	1.0037	114.456	0.9963	-113.189
1000	1.00037	1138.85	0.99963	-1137.58
2000	1.00019	2277.07	0.99982	-2275.8
10000	1.00004	11382.8	0.999963	-11381.5

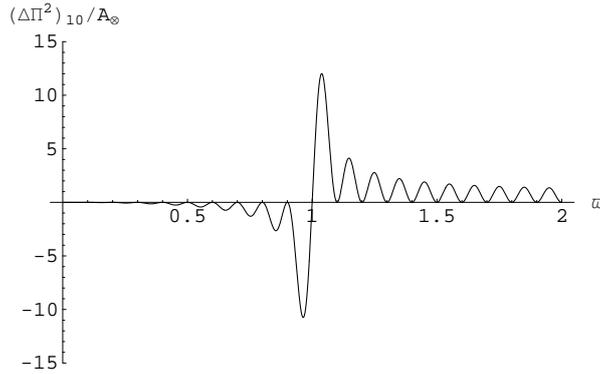


图 4-7 $A_{\oplus} = 0$, $n = 10$ 的情况。 $(\Delta\Pi^2)_n$ 在 $\varpi = 1.038$ 处有最大值 $\Delta\Pi_{max}^2 = 12.027A_{\otimes}$, 在 $\varpi = 0.964$ 处有最小值 $\Delta\Pi_{min}^2 = -10.761A_{\otimes}$ 。

〈3〉 $A_{\oplus} = A_{\otimes} = A$ 。表4-3给出了 $(\Delta\Pi^2)_{max}$ 和 $(\Delta\Pi^2)_{min}$ 随 n 的累积效应。显然, $(\Delta\Pi^2)_{max}$ 和 $(\Delta\Pi^2)_{min}$ 都与 n 成线性关系。图4-8画出了 $n = 10$ 时的情形。

表 4-3 $A_{\oplus} = A_{\otimes}$ 的情况。 $(\Delta\Pi^2)_n$ 的极值随 n 的变化。

n	ϖ_{max}	$\Delta\Pi_{max}^2/A_{\otimes}$	ϖ_{min}	$\Delta\Pi_{min}^2/A_{\otimes}$
1	1.546	1.842	0.889	-1.802
10	1.055	11.05	0.982	-20.214
100	1.0055	103.504	0.9981	-205.148
1000	1.00055	1028.1	0.99981	-2054.59
2000	1.00027	2055.43	0.999907	-4109.52
10000	1.00005	10274.1	0.999981	-20549

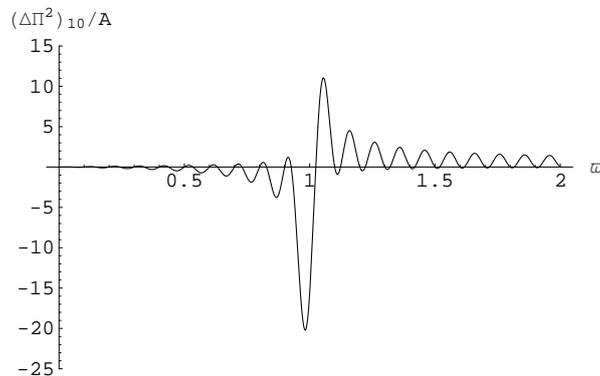


图 4-8 $A_{\otimes} = A_{\oplus} = A$, $n = 10$ 的情况。 $(\Delta\Pi^2)_n$ 在 $\varpi = 1.055$ 有最大值 $\Delta\Pi_{max}^2 = 11.05A$, 在 $\varpi = 0.982$ 处有最小值 $\Delta\Pi_{min}^2 = -20.214A$ 。

对于圆偏振沿正 z 方向传播的的引力波, 同样的分析可得,

$$(\Delta\Pi^2)_n = \frac{A\varpi \sin(2\pi n\varpi)}{2(1 + \varpi)}. \quad (4-37)$$

从图4-9可以看出，在这种情况下， $(\Delta\Pi^2)_n$ 并不随 n 的增大而累积，而是比图4-5更加快速的振荡。

其次，我们看一下引力波沿正 x 方向的情况。对于线性偏振的，我们计算得出

$$(\Delta\Pi^2)_n = A_{\otimes} \sin^2(n\pi\varpi). \quad (4-38)$$

对于圆偏振的，我们得出

$$(\Delta\Pi^2)_n = \frac{A \sin(2n\pi\varpi)}{2}. \quad (4-39)$$

由(4-38)式和(4-39)式可以看出，沿正 x 方向传播的引力波，无论其偏振方式如何都不会引起 $\Delta\Pi^2$ 的累加效应。

从上面的分析我们可以得出如下结论：频率约为 $\omega_0/2\pi$ 、沿正 z 方向线性偏振的引力波可以使 $|\Pi^2|$ 线性增加。从对称性的考虑，同频率沿负 z 方向线性偏振的引力波也可以使 $|\Pi^2|$ 线性增加，但变化方向相反。沿正负 z 轴方向圆偏振的引力波虽然也产生 $\Delta\Pi^2 \neq 0$ ，但是 $\Delta\Pi^2$ 不随电磁波传播圈数 n 的增大而增大，仅仅是在震荡，所以在探测上不具实际意义。沿正负 x 轴的引力波，无论其偏振方式， $\Delta\Pi^2$ 也都不产生累积效应，而是按各自的方式震荡。而沿正负 y 轴的引力波根本不影响 Π^2 ，也就是 Π^2 始终保持为零。

既然 $\Delta\Pi^2$ 随 n 的增大而线性的增加，那么自然是 n 越大越利于探测。然而由于电磁波在波导腔内传播时在波导壁上形成电流，所以会有热损耗，因此电磁波传播的圈数是有限的。最大圈数 n 可以这样估算：电磁波传播 n 圈后，能量衰减为刚注入时的 $1/e$ ，这时 n 近似等于波导的品质因数 Q 。不同材料构成的

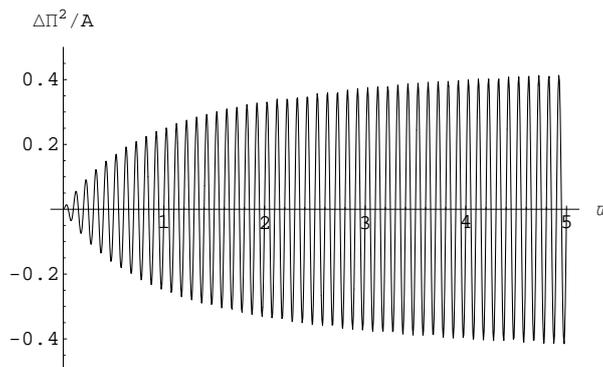


图 4-9 $A_{\otimes} = A_{\oplus} = A$, $n = 10$ 的情况。 $(\Delta\Pi^2)_n$ 在 $\varpi = 1.055$ 处有最大值 $\Delta\Pi^2_{max} = 11.05A$ ，在 $\varpi = 0.982$ 处有最小值 $\Delta\Pi^2_{min} = -20.214A$ 。

波导有不同的品质因数。Cruise 小组 [Cruise & Ingley, 2005; 2006] 用铜材料制造波导腔，其品质因数 $Q \simeq 2000$ 。由于这种探测器只响应沿 z 轴方向、频率在 ν_e 附近的引力波。因而这种探测器很难探测由天体过程产生的引力波，如中子星自转、致密双星绕转、超新星爆发，黑洞并合等。因为这些过程产生的引力波要么频率太低，要么方向性太强，或者是发生的机率非常小。但宇宙残余引力波的频率范围很宽，在 $10^{-18} - 10^{11}$ Hz [Zhang, *et al.*, 2005; 2006; Miao & Zhang, 2007]，并且是各向同性的，因此可以作为一个理想的探测目标。

4.5 探测残余引力波

这一节，我们将用这种探测器来探测宇宙残余引力波，并将理论预言的引力波的幅值与探测器的灵敏度进行比较，分析其探测的可能性。

4.5.1 探测器的灵敏度

由上一节的分析可知，这种波导引力波探测器的灵敏度取决于 $\mathbf{\Pi}$ 的偏转角度 $\alpha \simeq |\Delta\Pi^2|$ 。为简单，我们只看一种情况，即由 (4-36) 式表示的偏转角度。首先我们具体的看一下波导的品质因数 Q ，其定义为

$$Q = 2\pi \frac{W}{\Delta W}. \quad (4-40)$$

这里 W 是电磁波在某一时间 t 的能量， ΔW 是在此传播一圈之后损失的能量。所以在实际探测中，我们应该选用能量损耗小的材料。由 (4-40) 式，我们可以计算出，当电磁波传播了 $n = Q/2\pi$ 时²，能量降为原来的 $1/e$ 。(4-36) 式可以由 Q 重新表示为

$$\alpha = \frac{1}{4} h Q. \quad (4-41)$$

这里我们假设引力波的幅度非常小，且在电磁波传播 n 圈的时间尺度内保持为

²(4-40) 式可以重新写为

$$\Delta W \simeq -\frac{dW}{dn} = \frac{2\pi W}{Q},$$

分离变量并积分两边，

$$-\int_{W_0}^{W_0/e} \frac{dW}{W} = \int_0^n \frac{2\pi}{Q} dn,$$

得：

$$n = \frac{Q}{2\pi}.$$

常数。偏振矢量的偏转造成 $E^2 \neq 0$ ，而这可以被电磁探测棒探测。如图4-10所示，将探测棒垂直于刚注入电磁波时的电场方向。在偏转角度为 α 时，探测棒

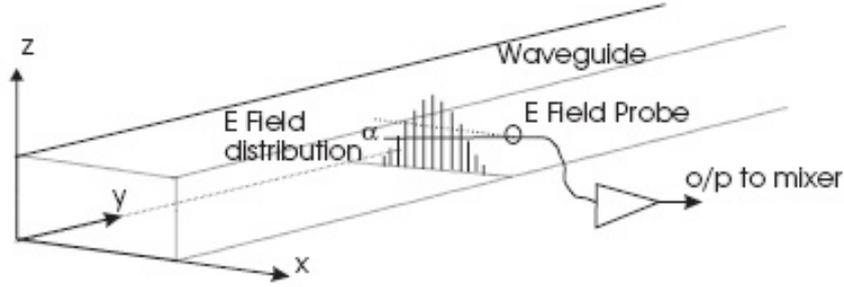


图 4-10 $A_{\otimes} = A_{\oplus} = A$, $n = 10$ 的情况。 $(\Delta\Pi^2)_n$ 在 $\varpi = 1.055$ 处有最大值 $\Delta\Pi_{max}^2 = 11.05A$ ，在 $\varpi = 0.982$ 处有最小值 $\Delta\Pi_{min}^2 = -20.214A$ 。

上面的信号功率为

$$P_{sig} = \frac{E_0^2 l^2 \alpha^2}{Z}, \quad (4-42)$$

其中 E_0 是 TE_{10} 电磁波的振幅，其大小是由电磁波在波导内的能量密度决定的。 l 是电磁探测棒的长度， Z 是棒的阻抗。由电磁学我们知道

$$\frac{E_0^2}{Z} = \frac{P}{ab}, \quad (4-43)$$

这里 P 是电磁波的功率， a 、 b 分别是波导横截面的长和宽。于是

$$P_{sig} = Pl^2 \alpha^2 / ab. \quad (4-44)$$

这种探测器的主要噪音是热噪音。下面我仅讨论探测器在热噪音限制下的灵敏度。噪音的功率可由 kTB 来表征，则由(4-44)式我们可以得出信噪比为

$$S/N = \frac{fPl^2 \alpha^2}{abkTB}, \quad (4-45)$$

其中 $f \in (0, 1)$ 是电磁探测棒转化为电信号的效率， k 是玻尔兹曼常数， T 是噪音的温度， B 是探测器的探测频段。若探测器响应信号的最低限是信噪比为 1，则由(4-45)式，得到该探测器所能探测的最小偏转角度为

$$\alpha_{min} = \sqrt{\frac{abkTB}{fPl^2}}. \quad (4-46)$$

因此由(4-41)、(4-46)两式，可以估算出探测器的灵敏度为

$$h_{min} = 4\sqrt{\frac{2\pi abkTB}{fP_{in}Q^3l^2}}, \quad (4-47)$$

其中 $P_{in} = 2\pi P/Q$ 是电磁波的注入功率。由此可见， Q 以两种方式影响了探测器的灵敏度：第一，波导腔内循环电磁波的功率 P 与注入时相比，放大了 $Q/2\pi$ 倍；第二，经过 $Q/2\pi$ 圈后，偏振矢量的偏转角度是一圈的 $Q/2\pi$ 倍。这两种效应鲜明的体现在(4-47)式中。注意，(4-47)式成立的条件是假设在 Q 圈的时间尺度内，引力波的幅度保持为常数。对于在此时间尺度内幅度变化的随机引力波信号，偏转角度是按 $\alpha \propto \sqrt{Q}$ 方式累积的 [Cruise & Ingley, 2005]。因此对于幅度变化的随机引力波信号，探测器的灵敏度为

$$h_{min} = 4\sqrt{\frac{abkTB}{fP_{in}Q^2l^2}}. \quad (4-48)$$

从(4-47)式和(4-48)式可以看出，增大波导腔的品质因数和电磁波的注入功率、减小环境的温度有助于提高探测器的灵敏度。品质因数的另一种含义告诉我们，这种探测器的响应频率有个宽度， $\Delta\nu \simeq \nu/Q$ 。我们把响应中心频率 $\nu_0 = \omega_0/2\pi$ 附近、 $\Delta\nu$ 区间的频率范围称为共振频段。进入探测器的引力波信号通常有一个较宽的频率范围，但只有在共振频段的引力波才能被探测器“过滤”。结论是：只有那些付立叶分量非常接近共振中心频率 ν_0 的引力波信号才能响应这种探测器。另外，值得说明的是，引力波幅度的变化在时间尺度小于 Q/ν_0 时可以被忽略，于是(4-47)式对于幅值变化的随机引力波信号也适用 [Cruise & Ingley, 2005; Bendat & Piersol, 1986]。

通过两个或多个探测器对信号的交叉关联可以提高探测的灵敏度。Cruise小组 [Cruise & Ingley, 2005]给出了两个探测器交叉关联后的灵敏度

$$\frac{h_{min}}{\sqrt{\nu}} \simeq 5 \times 10^{-15} Hz^{-1/2}. \quad (4-49)$$

这样比单个探测器的灵敏度大约提高了 14 倍，与用下列参数： $P_{in} = 69mW$ ， $T = 300K$ ， $Q = 2000$ ， $(ad)/l^2 = 0.5$ ， $f > 0.9$ 得出的灵敏度差了大约 4 倍因子。

4.5.2 高频残余引力波探测的可能性

加速膨胀宇宙中的残余引力波谱已经给出 [Zhang, *et al.*, 2005; 2006; Miao & Zhang, 2007], 见图4-11。(4-49)式给出的是被探测的最小每 $\text{Hz}^{1/2}$ 的方均根幅

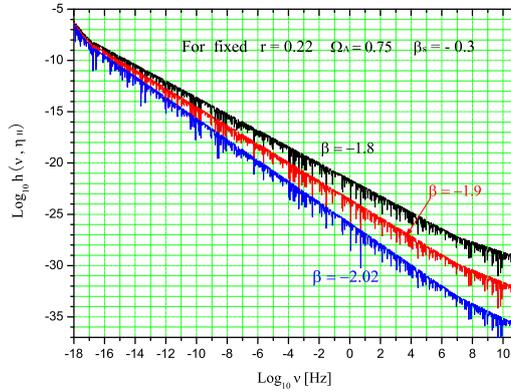


图 4-11 不同 β 的残余引力波谱 $h(\nu, \eta_0)$ 。

度。因而我们需要把预言的引力波谱相应的重新调节, 即 [Grishchuk, 2001]

$$\frac{h(\nu)}{\sqrt{\nu}}, \quad (4-50)$$

这里的 $h(\nu)$ 是现在时刻的引力波谱幅值 $h(\nu, \eta_H)$ 的简写。由于该探测器的工作频率约为 $\nu_0 \simeq 10^8 \text{Hz}$, 因此我们需要计算引力波谱幅值 $h(\nu_0, \eta_H)$ 。从图4-11可直接读出

$$h(\nu_0) = \begin{cases} 10^{-28} & (\beta = -1.8); \\ 10^{-31} & (\beta = -1.9); \\ 10^{-34} & (\beta = -2.02). \end{cases} \quad (4-51)$$

因此在 100MHz 附近, 每 $\text{Hz}^{1/2}$ 方均根幅度为

$$\frac{h(\nu_0)}{\sqrt{\nu_0}} = \begin{cases} 10^{-32} & (\beta = -1.8); \\ 10^{-35} & (\beta = -1.9); \\ 10^{-37} & (\beta = -2.02). \end{cases} \quad (4-52)$$

比较(4-50)和(4-52)两式可以看出,即使是理论预言的最大幅值($\beta = -1.8$)距离探测器的灵敏度还有 17 个量级, 可见探测的难度相当大。通过优化变频器、使用

低温放大器以及交叉关联等可以使探测器的灵敏度再提高 $10^4 \sim 10^5$ 倍。即使这样，也还有 12 个量级的差距。如图 4-12 所示，在 $\nu > 10^7 \text{Hz}$ 时， $h(\nu)$ 不仅与 β 有关，而且与 β_s 有关。若想通过该实验确定残余引力波谱曲线以定出 β_s ，所

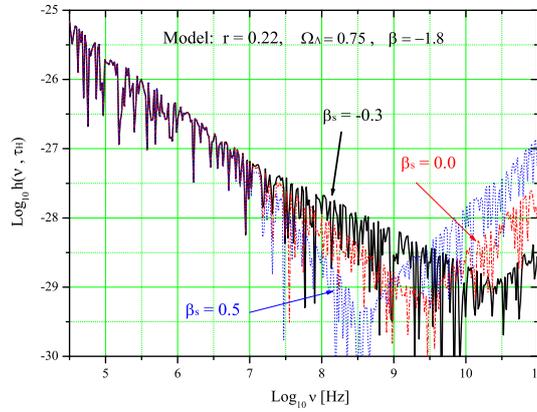


图 4-12 对于固定的 $\beta = -1.8$ ，不同 β_s 的残余引力波谱 $h(\nu, \eta_0)$ 。

需要的的精度就更高了。目前来看，这是很难做到的。

由图 4-11 可知，频率越低，引力波谱值会越高。为提高探测的可能性，我们可以向低频段发展。另一方面增大环形波导腔的半径 R ，也可以降低探测频率。例如，如果将 R 增大到 50m，则相应的探测频率为 $\nu_0 \simeq 10^6 \text{Hz}$ 。由图 4-11 可读出此时对应的引力波谱幅值为 $h(\nu_0) \sim 10^{-26} (\beta = -1.8)$ ，对应的 $h(\nu_0)/\sqrt{\nu_0} \sim 10^{-29} \text{Hz}^{-1/2}$ 。

第 5 章 暗能量模型

5.1 暗能量简介

在过去的十几年间，除了看不见的暗物质之外，宇宙学家越来越倾向于承认另一种看不见的物质—暗能量。与暗物质不同，暗能量具有负压强。正是这种负压强产生的斥力驱动了宇宙近期的加速膨胀。综合各种观测，包括宇宙微波背景辐射(CMB)、温度各向异性功率谱、宇宙大尺度结构(LSS)、Ia型超新星、Ly- α forest 功率谱等观测数据，人们给出了宇宙学的标准模型：暴涨+ Λ CDM 模型。要想与观测到的宇宙膨胀速率吻合，暗能量大约要占宇宙中 73% 的组分，而物质部分只占大约 27%，其中 23% 为暗物质，4% 为重子物质。辐射只占很小的一部分，约为 10^{-5} 。

首先我们暂且假设宇宙为正压强的理想流体，其物态定义为

$$w = \frac{p}{\rho}, \quad (5-1)$$

其中 w 假设为一个常数。通过解 Friedmann 方程(1-7)和(1-8)并取定 $K = 0$ ，得到

$$H = \frac{2}{3(1+w)(t-t_0)}, \quad (5-2)$$

$$a(t) \propto (t-t_0)^{\frac{2}{3(1+w)}}, \quad (5-3)$$

$$\rho \propto a^{-3(1+w)}, \quad (5-4)$$

其中 t_0 为一常数。注意以上方程组不适用于 $w = -1$ 。辐射为主时期， $w = 1/3$ ， $a(t) \propto (t-t_0)^{1/2}$ ， $\rho \propto a^{-4}$ ；物质为主时期， $w = 0$ ， $a(t) \propto (t-t_0)^{2/3}$ ， $\rho \propto a^{-3}$ 。而宇宙加速膨胀要求 $w < -1/3$ 。对于 $w = -1$ ，方程(1-9)给出 ρ 为常数，而方程(1-7)给出

$$a \propto e^{Ht}, \quad (5-5)$$

这正是 de-Sitter 宇宙。以上都是考虑 $w \geq -1$ 的情况。近年来，有些观测支持 $w < -1$ [Alam, *et al.*, 2004; Astier, *et al.*, 2006; Conley, *et al.*, 2006; Wood-Vasey, *et al.*, 2007; Davis, *et al.*, 2007; Freedman, *et al.*, 2009]。当 $w < -1$ 时，

方程(5-3)给出一个宇宙收缩的解。除此之外，还有一个宇宙膨胀的解

$$a(t) = (t_s - t)^{\frac{2}{3(1+w)}}, \quad (5-6)$$

其中 t_s 是一个常数。有意思的是这个解会导致某些量如 H 、 a 、 R 在某个有限的时间趋于无穷大 [Copeland, *et al.*, 2006]，这就是所谓的“宇宙大撕裂问题” [Caldwell, *et al.*, 2003; Nesseris & Pervolaropoulos, 2004]。若 w 不是常数，则由方程(1-9)得出

$$\rho \propto \exp \left[3 \int_0^z [1 + w(z')] d \ln (1 + z') \right]. \quad (5-7)$$

比如，Linder 用两个常数来刻画物态 [Linder, 2003]

$$w(z) = w_0 + w_a \frac{z}{1+z} = w_0 + w_a(1 - a). \quad (5-8)$$

5.1.1 暗能量的一些观测证据

最早的证据是 1998 年人们对 Ia 型超新星的观测揭示现阶段宇宙在加速膨胀 [Riess, *et al.*, 1998; 1999; 2004; Perlmutter, *et al.*, 1999; Tonry, *et al.*, 2003]。接下来对超新星的观测更加支持了原初的结果。哈勃空间望远镜(HST) [Knop, *et al.*, 2003]将超新星观测到红移 $z \simeq 1.8$ ，而两个大型地面巡天 SNLS (Supernova Legacy Survey) [Astier, *et al.*, 2006]和 ESSENCE (Equation of State: Supernovae Trace Cosmic Expansion) [Miknaitis, *et al.*, 2007]在 $z \sim 0.3 - 0.9$ 之间观测了几百颗超新星。下面我们具体说一下怎样对超新星观测。天体光度距离定义为

$$d_L(z) \equiv \sqrt{\frac{L}{4\pi F}} = (1+z)r(z), \quad (5-9)$$

其中 L 为天体的光度， F 为测量到的能流密度， $r(z)$ 是红移为 z 的天体的共动距离：

$$r(z) = \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} = \int_{1/(1+z)}^1 \frac{da}{a^2 H(a)} \quad (K = 0), \quad (5-10)$$

$$r(z) = |K|^{-1/2} \chi \left[|K|^{1/2} \int_0^z dz' / H(z') \right] \quad (K \neq 0), \quad (5-11)$$

其中 $K > 0$ 时 $\chi(x) = \sin(x)$ ， $K < 0$ 时 $\chi(x) = \sinh(x)$ 。不难看出，这是一个依赖于宇宙学模型的量。在平直空间里($K = 0$)，由 Friedmann 方程(1-7)易得

$$r(z) = \frac{1}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{\Omega_m(1+z')^3 + (1-\Omega_m)(1+z')^{3(1+w)} + \Omega_r(1+z')^4}} \quad (5-12)$$

其中 $w = p/\rho$ 是暗能量的状态方程。上式利用了关系 $\rho_c \equiv \rho_c(t_0) =$

$3H_0^2/8\pi G$, $\rho_c = 1.8731h^2 \times 10^{-29} \text{g cm}^{-3}$ 是宇宙临界密度。 h 是以 $100 \text{ km sec}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ 为单位的哈勃常数。 $\Omega_m = \rho_m(t_0)/\rho_c$ 表示现在的物质密度参数, 而 $\Omega_r \sim 8 \times 10^{-5}$ 表示的是光子和相对论性中微子的能量密度参数。距离模量 μ 定义为:

$$\mu(z) \equiv m - M = 5 \log_{10}(d_L/\text{Mpc}) + 25, \quad (5-13)$$

其中 m 是视亮度, M 是绝对亮度。对于已知绝对亮度 M 的天体, 即标准烛光, 通过对视亮度的观测, 就能够限制宇宙学模型, 继而根据亮度—红移关系限制宇宙的膨胀历史。Ia 型超新星(SNIa) 就是这样的标准烛光 [Leibundgut, 2001]。它们提供了对暗能量状态方程的最强约束, 也是对暗能量的最有效和最成熟的观测。SNIa 是由碳氧白矮星从伴星吸积质量达到 Chandrasekhar 极限时产生的热核爆发, 其光度曲线在早期是由 ^{56}Ni 的放射衰变提供, 几个星期后则是 ^{60}Co 的衰变提供 [Hillebrandt & Niemeyer, 2000]。峰值光度是由爆发时产生的 ^{56}Ni 的质量决定的 [Arnett, 1982]: 如果白矮星燃烧充分的话, 预期会有 $\sim 0.6M_\odot$ 的 ^{56}Ni 产生。因此, 尽管 SNIa 爆发的动力学细节仍然不清楚 [Hoefflich, 2004; Plewa, *et al.*, 2004], SNIa 都有着相似的峰值亮度。这个峰值可以达到典型星系的亮度, 因此可以在很远处被观测到。这就是 SNIa 作为宇宙学标准烛光的原因。

除了超新星之外, 还有其他的一些独立的观测也支持宇宙加速膨胀。CMB 温度各向异性的观测 [Jaffe, *et al.*, 2001; Pryke, *et al.*, 2002] 为宇宙加速膨胀提供了早期的证据。CMB 角功率谱第一个峰位置的观测揭示现在的宇宙是非常平坦的 [Bennett, *et al.*, 2003]。另外暗能量的存在会通过积分的 Sachs-Wolfe(ISW)效应 [Sachs & Wolfe, 1967] 影响 CMB 大尺度上的各向异性。这种效应可以通过 CMB 和星系、射电源的交叉关联探测到 [Boughn & Crittenden, 2004; Afshordi, *et al.*, 2004]。SDSS (Sloan Digital Sky Survey) 测量到重子声速振荡(BAO)的两点相关函数在 $100h^{-1} \text{ Mpc}$ ($h \sim 0.7$) 的尺度上有一个小鼓包 [Eisenstein, *et al.*, 2005], 这可以作为探测暗能量的一个有利工具。图5-1给出了Ia型超新星观测与宇宙学模型之间的关系。很明显 $(\Omega_m, \Omega_\Lambda) = (0.3, 0.7)$ 的模型与观测符合的最好。这里 Ω_Λ 是暗能量占的比例, 而且用宇宙学常数来刻画暗能量, 称为宇宙学常数模型(LCDM)。这是人们研究的最普遍的一种模型。图5-2和图5-3给出了超新星、微波背景辐射和重子声速振荡 [Eisenstein, *et al.*, 2005; Percival, *et al.*, 2007] 的观测结果对 LCDM 模型的参数联合约束情况。我们可以看出, 观测支持暗能量约占 70%, 物态方程 $w \simeq -1$ 。最新 WMAP7 的观测 [Komatsu, *et al.*,

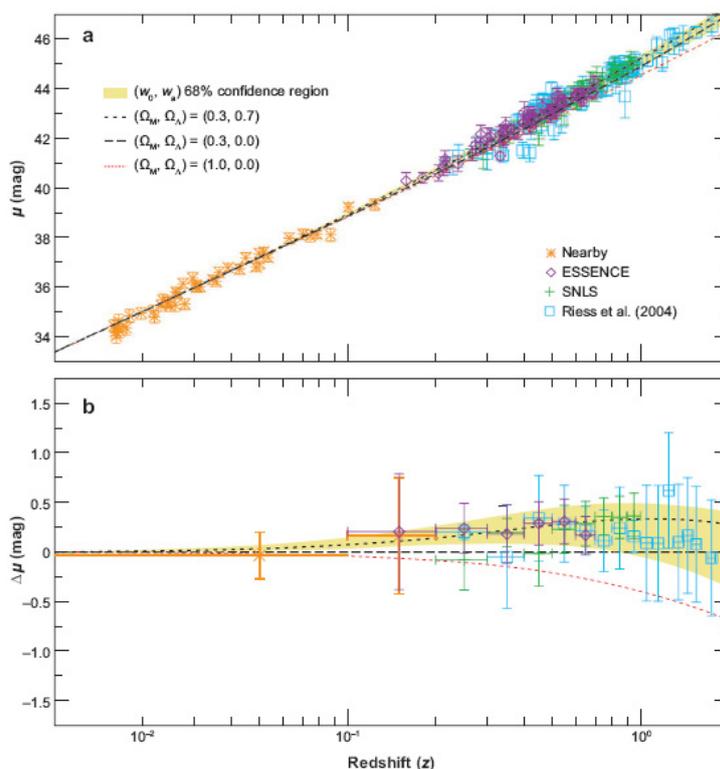


图 5-1 SNIa 的测量结果：ESSENCE(紫色菱形)与 SNLS (绿色叉号)，低红移 SN (橙色雪花状)，Riess 等人 2004 年编辑的 SN 其加上来自 HST 的观测结果(蓝色方形)。上图：三种不同的宇宙学模型下的距离模量与红移关系和观测数据的对比。下图：各模型减掉模型 $\Omega_\Lambda = 0, \Omega_m = 0.3$ 的距离模数差 [Frieman, *et al.*, 2008]。(基于文献 [Wood-Vasey,*et al.*, 2007])。

2010]、重子声速振荡的观测 [Percival, *et al.*, 2010]以及对哈勃常数的测量 [Riess, *et al.*, 2009]联合表明： $\Omega_\Lambda = 0.728^{+0.015}_{-0.016}$ (68% CL), $w = -1.10 \pm 0.14$ (68% CL)。对星系团中 X 射线辐射的能量与星系团总质量比值的测量也揭示了暗能量的存在 [Allen, *et al.*, 2004; 2007]。而通过星系团中古老恒星的年龄测定可以将宇宙的年龄限制为： $12 \text{ Gyr} \leq t_0 \leq 15 \text{ Gyr}$ [Krauss & Chaboyer, 2003]，这与 SCDM 模型($\Omega_m = 1$)计算出来的宇宙年龄不一致，而将 Ω_m 约束为 $0.2 < \Omega_m < 0.3$ ，这与 LCDM 模型是一致的。另外，弱引力透镜很有潜力成为未来探测暗能量的最有力的工具 [Hu, 2002; Huterer, 2002]。总之现在几乎所有的宇宙学数据都与暗能量的存在是自洽的。详细可见综述性文章 [Frieman, *et al.*, 2008; Copeland, *et al.*, 2006]。目前对加速膨胀的解释除了暗能量的存在之外，也有人认为需要修正引力理论，人们更普遍接受的是存在一种我们未知的物质，由这种物质驱动宇宙加速膨胀。

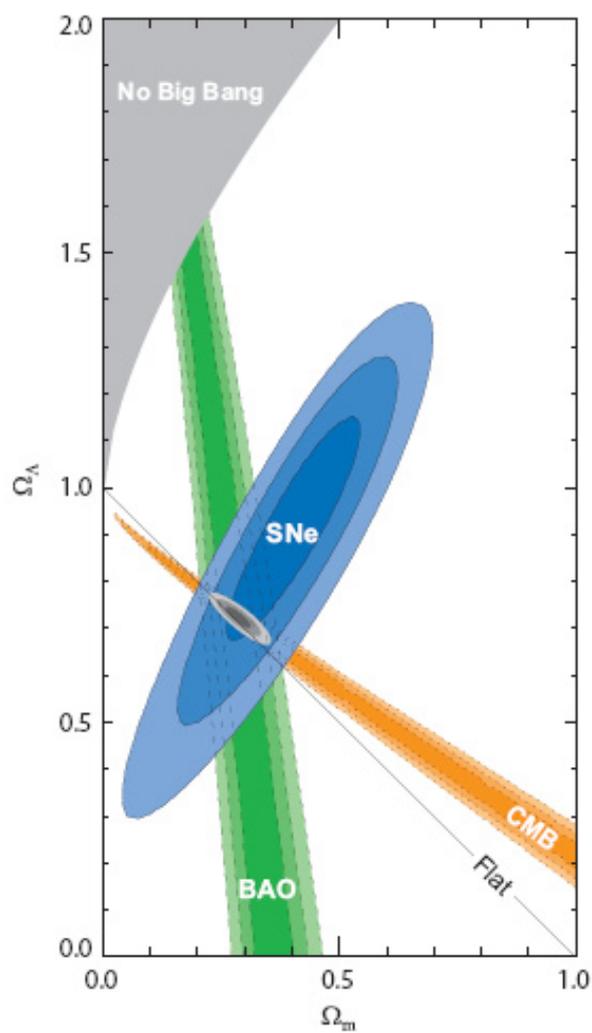


图 5-2 用 SN, CMB 和 BAO 约束 Ω_m 和 Ω_Λ 的联合置信区域。颜色从深到浅依次为 68.3%、95.4% 和 99.7% 的置信水平。其中取定 $w = -1$ [Kowalski, *et al.*, 2008]。

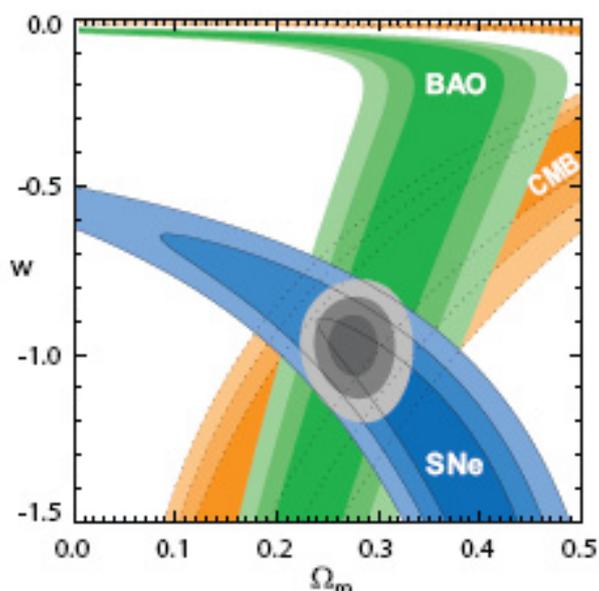


图 5-3 与图5-2同样的数据来约束 Ω_m 和常数状态方程 w 的联合置信区域。其中取定 $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$ [Kowalski, *et al.*, 2008]。

5.1.2 一些暗能量模型

尽管天文观测揭示了暗能量的存在，但是目前物理学家对于暗能量的物理本质仍然处于一个探讨阶段，还没有达到揭示暗能量精细物理本质的程度，但已经有了很多种暗能量模型。下面我们主要介绍两种最流行的模型。

♡ 宇宙学常数模型

暗能量最简单的候选者是引入宇宙学常数[Copeland, *et al.*, 2006]。它的状态方程恒为 -1 ，能量密度是个常数。该常数最初是在 1917 年 Einstein 为构造一个静态的宇宙而引入的，但是现在的观测发现该模型却能够很好的解释现阶段宇宙的加速膨胀。引入宇宙学常数后，爱因斯坦方程变为

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (5-14)$$

而 Friedmann 方程(1-7)和(1-9)变为

$$H^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{K}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (5-15)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}, \quad (5-16)$$

其中 $\Lambda = 8\pi G\rho_\Lambda$ 。若引入等效密度和压强

$$\tilde{\rho} = \rho + \frac{\Lambda}{8\pi G}, \quad \tilde{p} = p - \frac{\Lambda}{8\pi G}, \quad (5-17)$$

那么方程(5-15)和(5-16)又简化到方程(1-7)和(1-9)。从粒子物理的角度出发，一般认为该常数起源于真空的零点振动能，即所谓的真空能。广义协变性原理要求真空能的能动张量必须是一个常数乘以度规张量的形式，即 $T_{\Lambda}^{\mu\nu} = \rho_{\Lambda} g^{\mu\nu}$ 。由于 T_{ν}^{μ} 的对角元 (T_0^0, T_i^i) 表示的是流体的能量密度以及压强的相反数，而 $g_{\nu}^{\mu} = \delta_{\nu}^{\mu}$ 是Kronecker符号，所以真空能的压强等于负的能量密度： $p_{\Lambda} = -\rho_{\Lambda}$ 。能量密度的计算可以用量子力学的方法得到。量子场的每一个模的零点能都是 $\omega/2$ ，所以能量密度写为：

$$\rho_{\Lambda} = \frac{1}{2} \sum_{fields} g_i \int_0^{\infty} \sqrt{k^2 + m^2} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \simeq \sum_{fields} \frac{g_i k_{max}^4}{16\pi^2}. \quad (5-18)$$

其中 g_i 是场的自由度，对波色子 g_i 是正号，费米子是负号， k_{max} 是积分动量截断。求和号是对所有量子场的，包括夸克，轻子，规范场等等。

♡ 标量场模型

与宇宙学常数模型不同，暗能量可能是动力学模型。正如导致宇宙早期暴涨的主要候选者为标量场 Higgs子一样，暗能量也可能是一种标量场。当标量场具有正则的动能项的时候，称之为 Quintessence 模型[Ratra & Peebles, 1988; Peebles & Ratra, 1988; Caldwell, *et al.*, 1998]。与引力最小耦合的 Quintessence 场的拉式量为：

$$\mathcal{L}_{\phi} = \frac{1}{2} \partial^{\mu} \phi \partial_{\nu} \phi - V(\phi). \quad (5-19)$$

假设标量场 ϕ 的分布是均匀并且各向同性的，在平直的FRW度规下其对应的能量密度和压强分别为：

$$\rho_{\phi} = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (5-20)$$

$$p_{\phi} = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (5-21)$$

对于 $V(\phi) > 0$ ，Quintessence 场的物态方程对应的区间为： $-1 < w_{\phi} < 1$ 。为了得到小于 -1 的状态方程，人们通常也考虑具有非正则动能项的 Phantom 模型[Caldwell, 2002]和 K-essence 模型[Chiba, *et al.*, 2000; Armendariz-Picon, *et al.*, 2000; 2001]。这些模型或者可以得到大于 -1 的物态，或者可以得到小于 -1 的物态，但是却很难得到状态方程跨越 -1 的情况。为了使得 w 能够跨越 -1 ，人们又构造了 Quintom 模型[Feng, *et al.*, 2005; Hu, 2005; Zhao & Zhang, 2006c]。但是在这些模型中，随着动力学的演化，会出现大撕裂问题，即相关物理量会出现奇点。

当然还有一些其他的模型：例如 Tachyon 场模型 [Sen, 2002], Chaplygin gas [Kamenshchik, *et al.*, 2001], Holographic 模型 [Li, 2004], 等等。对于大多数暗能量模型，存在两个主要的问题，即精细调节问题和巧合性问题。下面我们以宇宙学常数模型为例，介绍一下这两个问题。

5.1.3 暗能量模型存在的主要问题

◇ 精细调节问题

正如方程(5-18)所示，要想避免真空能无穷大，积分变量 k 就必须有一个截断。如果暗能量是一个单场，那么要达到临界密度，动量截断必须满足 $k_{max} < 0.01 \text{ eV}$ 。这个能标低于目前我们已知的所有物理过程。泡利在上世纪30年代曾经用电子的质量作为 k_{max} ，发现计算得到的宇宙尺度 H^{-1} 甚至都不到月球 [Straumann, 2002]。如果取截断为 Planck 能标 $\simeq 10^{19}\text{GeV}$ ，即量子场论在经典时空度规失效的能标，这样真空能会超过临界质量 120 个数量级。这就是著名的宇宙学常数问题 [Weinberg, 1989]。从观测角度上，真空能和“裸”的宇宙学常数 Λ 是无法区分的，通常引入等效真空能密度

$$\rho_{\text{eff}} = \rho_{\text{vac}} + \Lambda/8\pi G. \quad (5-22)$$

如果观测到的是等效真空能，即 $\rho_{\text{eff}} \sim \rho_c$ ，那么就要求 ρ_{vac} 和 ρ_Λ 在 120 个量级上相抵消，这似乎是不可能的。因此，宇宙学常数问题也被人们称为精细调节问题。

◇ 巧合性问题

宇宙学常数为什么恰好是这么大？观测给出今天的暗能量密度和物质密度处于同一个量级，即 $\rho_m \sim \rho_\Lambda$ 。但是物质与宇宙学常数有截然不同的演化行为： $\rho_m \propto a^{-3}$ ，而 $\rho_\Lambda = \text{常数}$ 。这样问题就来了，暴涨以后宇宙尺度因子膨胀了几十个量级，为什么恰恰在今天达到了 $\rho_m \sim \rho_\Lambda$ ？为了得到这个结果，就必须要求在宇宙早期对 ρ_m 和 ρ_Λ 做非常精细的调节，才能演化出今天暗能量密度与物质密度同量级的结果。这就是所谓的巧合性问题。但是应该指出这个问题在很多动力学模型中都可以得到很好的回答。例如在 Quintessence 模型中，如果取势能函数为 $V = V_0\phi^{-\alpha}$ 的形式，那么该模型在宇宙演化中具有追踪行为，可以很好的避免巧合性问题。

5.2 真空能衰减模型

正如前一节讲过的，宇宙学常数模型的真空能密度由方程(5-18)给出，动量

截断的能标取为普朗克能标的话，会比宇宙临近密度大 120 个量级。即使退一步，将动量截断取为 QCD 相变的能标，真空能密度仍比临近密度大 40 个量级 [Carneiro, 2007]。这是宇宙学常数模型遇到的难题。为解决这种难题，人们开始考虑宇宙学常数项可能会随着宇宙膨胀衰减 [Ozer & Taha, 1986, 1987; Freese, *et al.*, 1987]。这种猜想可作如下的解释 [Borges & Carneiro, 2005; Carneiro, 2007]：方程(5-18)是在平直时空中计算的，根据爱因斯坦场方程，方程的左边为零(因为所有 Ricci 张量的分量和 Ricci 标量都为零)，那么方程右边也应该为零。正如前面指出的真空能密度 ρ_{vac} 是一个很大的数，那么要使方程自治，方程左边应该加入一个“裸”的宇宙学常数 Λ 。于是方程(5-14)的 00 分量为

$$\Lambda = -8\pi G\rho_{\text{vac}}. \quad (5-23)$$

由方程(5-22)可以看出，等效真空能严格为零，那么就意味着真空能和宇宙学常数严格抵消。但我们的宇宙是一个弯曲的时空(不要和三维空间平直混淆了)，方程(5-18)应该在弯曲时空中计算。这样计算出来的真空能不再被宇宙学常数严格抵消，得到一个有限的、随着宇宙膨胀不断衰减的等效真空能密度。在宇宙早期，等效真空能密度很大，随着宇宙膨胀一直衰减到今天观测到的宇宙临界密度。

在弯曲时空中准确应用量子场论是一个困难的挑战。Schützhold 认为目前观测到的真空能是由量子迹反常造成的 [Schützhold, 2002]，这样真空能密度正比于哈勃参数 $\rho_{\text{eff}} \approx m^3 H$ 。如果将 m 取为 QCD 相变的能标，得出的真空能与目前的观测值是一致的。我们把这种真空能随时间衰减的模型称为 DV(decay vacuum)模型。为表示方便，下面我们仍用 ρ_Λ 表示等效真空能密度。

5.2.1 DV 模型的宇宙学解

在宇宙学原理的框架下，这真空能只是时间的函数，与空间坐标无关。我们将衰减的真空能密度写为

$$\rho_\Lambda = \Lambda = \sigma H, \quad (5-24)$$

其中 σ 是一个量级为 m^3 的正常数，而且我们采用了自然单位制 $8\pi G = c = \hbar = 1$ 。另外，协变性要求

$$p_\Lambda = -\rho_\Lambda. \quad (5-25)$$

我们可以将宇宙中物质和辐射的物态方程统一写为

$$p = (\omega - 1)\rho. \quad (5-26)$$

对于物质成分($p = 0$), $\omega = 1$; 而对于辐射成分($p = \rho/3$), $\omega = 4/3$ 。于是我们得到两个独立的方程

$$\rho_T = 3H^2, \quad (5-27)$$

$$\dot{\rho}_T + 3H(\rho_T + p_T) = 0, \quad (5-28)$$

其中 ρ_T 和 p_T 分别为总能量密度和总压强。根据(5-25)式, 方程(5-28)可以写为

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = -\dot{\Lambda}. \quad (5-29)$$

很容易看出, 如果 Λ 是个常数, 上式又变成了连续性方程。能量守恒要求, 衰减的真空能会导致物质的产生。我们在此不考虑物质产生的微观细节, 而仅仅研究宏观现象。常数 σ 可以由(5-24)和(5-27)两式确定:

$$\sigma = 3\Omega_\Lambda H_0. \quad (5-30)$$

因此 σ 可由 Ω_Λ 和 H_0 的观测值来确定。由(5-27)和(5-28)两式容易得出如下微分方程

$$2\dot{H} + 3\omega H^2 - \sigma\omega H = 0. \quad (5-31)$$

这个方程决定了 H 的演化行为, 从而也就决定了暗能量密度的演化行为。其解为

$$t = \frac{2}{\sigma\omega} \ln \left| \frac{3H}{3H - \sigma} \right| \quad (5-32)$$

其中积分常数通过约定时间的起点为零而选取的。从上式很容易看出, 在宇宙早期 $H \gg \sigma$, $t \rightarrow 0$ 。由于 $\rho = (3H - \sigma)H \geq 0$, 且 $H = \dot{a}/a \geq 0$, 那么 $3H - \sigma \geq 0$ 。于是(5-32)式为

$$t = \frac{2}{\sigma\omega} \ln \left(\frac{3H}{3H - \sigma} \right), \quad (5-33)$$

将 H 反解出来得

$$H = \frac{\sigma/3}{1 - \exp(-\sigma\omega t/2)}. \quad (5-34)$$

积分上式很容易得出标度因子

$$a = C[\exp(\sigma\omega t/2)]^{\frac{2}{3\omega}}, \quad (5-35)$$

其中 C 是积分常数。将(5-34)式代入(5-24)式和(5-27)式，得到

$$\Lambda = \frac{\sigma^2/3}{1 - \exp(-\sigma\omega t/2)}, \quad (5-36)$$

$$\rho = \frac{\sigma^2}{12} \sinh^{-2}(\sigma\omega t/4). \quad (5-37)$$

而由(5-34)很容易得到暗能量占的比重随时间的演化

$$\Omega_\Lambda(t) \equiv \frac{\Lambda}{\rho + \Lambda} = \frac{\sigma}{3H} = 1 - \exp(-\sigma\omega t/2). \quad (5-38)$$

根据(5-35)式，我们可将能量密度都表示成 a 的函数

$$\rho = \frac{\sigma^2}{3} \left(\frac{C}{a}\right)^{3\omega/2} \left[1 + \left(\frac{C}{a}\right)^{3\omega/2}\right]. \quad (5-39)$$

$$\Lambda = \frac{\sigma^2}{3} \left[1 + \left(\frac{C}{a}\right)^{3\omega/2}\right], \quad (5-40)$$

根据减速参数的定义： $q = -\ddot{a}a/\dot{a}^2$ ，由(5-35)式容易得到

$$q = \frac{3\omega}{2} \exp(-\sigma\omega t/2) - 1. \quad (5-41)$$

♣ 辐射为主时期

辐射为主时期对应着 $\omega = 4/3$ ，这时标度因子为

$$a = C[\exp(2\sigma t/3) - 1]^{1/2}, \quad (5-42)$$

当 $\sigma t \ll 1$ ，有

$$a \approx C\left(\frac{2\sigma t}{3}\right)^{1/2}, \quad (5-43)$$

这与我们前面讨论的标准宇宙学模型中 $a \propto t^{1/2}$ 的行为一致。另一方面，能量密度表达式为

$$\rho_r = \frac{\sigma^2 C^4}{3a^4} + \frac{\sigma^2 C^2}{3a^2}, \quad (5-44)$$

$$\Lambda = \frac{\sigma^2}{3} + \frac{\sigma^2 C^2}{3a^2}. \quad (5-45)$$

在 $a \rightarrow 0$ 的极限下，有

$$\rho_r = \frac{\sigma^2 C^4}{3a^4} = \frac{3}{4t^2}, \quad (5-46)$$

$$\Lambda = \frac{\sigma^2 C^2}{3a^2} = \frac{\sigma}{2t}. \quad (5-47)$$

这说明在辐射为主早期，辐射成分的能量密度 ρ_r 的演化行为与标准宇宙学模型中的一致，而暗能量的密度按 t 的负一次方的方式衰减。(5-44)式的第一项是通常标准宇宙学模型中辐射能量密度的衰减方式，而第二项反映了偏离于标准宇宙学模型， ρ_r 比通常衰减的要慢，这体现了一部分辐射成分的产生，而产生的这部分辐射来自于暗能量的衰减。由于在早期(5-44)式的第一项占主导，因此我们预期第二项不会影响宇宙早期发生的一些过程，比如原初核合成等等 [Borges & Carneiro, 2005]。

♣ 物质为主时期

下面我们讨论一下物质为主时期的情况。标度因子有如下形式($w = 1$)

$$a = C[\exp(\sigma t/2) - 1]^{2/3}. \quad (5-48)$$

注意常数 C 与(5-42)式不同，具体值由连接条件来定。在早期， $\sigma t \ll 1$ ，上式近似为

$$a = C(\sigma t/2)^{2/3}, \quad (5-49)$$

这与标准宇宙学模型中的情形是一致的，这样也不会影响到结构形成。在方程(5-39)和(5-40)中代入 $\omega = 1$ ，得

$$\rho_m = \frac{\sigma^2 C^3}{3a^3} + \frac{\sigma^2 C^{3/2}}{3a^{3/2}}, \quad (5-50)$$

$$\Lambda = \frac{\sigma^2}{3} + \frac{\sigma^2 C^{3/2}}{3a^{3/2}}. \quad (5-51)$$

(5-50)的第一项是通常的演化行为，第二项对应着物质的产生，而产生的这部分物质是由暗能量的衰减提供的(见(5-51)式第二项)。

♣ 暗能量为主时期

在未来， $\sigma t \gg 1$ 的极限下，宇宙以暗能量为主导，方程(5-48)、(5-50)和(5-51)有如下渐进行为

$$a = C \exp(\sigma t/3), \quad (5-52)$$

$$\rho \approx 0, \quad (5-53)$$

$$\Lambda = \sigma^2/3. \quad (5-54)$$

这时标度因子按 e 指数膨胀， Λ 也衰减成一个常数。这正是 de Sitter 宇宙。由(5-34)式，在未来极限下，哈勃参数变成一个常数： $H = \sigma/3 = \sqrt{\Lambda/3}$ 。而当 $t \rightarrow \infty$ 时，由(5-41)式，减速参数 $q \rightarrow -1$ ，这正是 de Sitter 宇宙的特征。

观测表明，我们恰处在由物质为主过渡到暗能量为主要的时代。图5-4画出了 DV 模型和 LCDM 模型的 $\Omega_\Lambda(z)$ 和 $\Omega_m(z)$ 的近期演化。很明显他们的演化不同，而且今天的 Ω_m 的值不同也会影响自身的演化。从图中我们可以看到，DV 模型与 LCDM 模型预言的进入暗能量为主要的时代(z_Λ)不同，而且同是 DV 模型，不同的 Ω_m 也给出不同的 z_Λ 。LCDM 模型给出 $z_\Lambda \sim 0.4$ ，而 DV 模型($\Omega_m = 0.27$)给出 $z_\Lambda \sim 1$ 。但 $t \rightarrow \infty (z \rightarrow -1)$ ，他们有共同的行为： $\Omega_\Lambda(z) \rightarrow 1, \Omega_m(z) \rightarrow 0$ 。

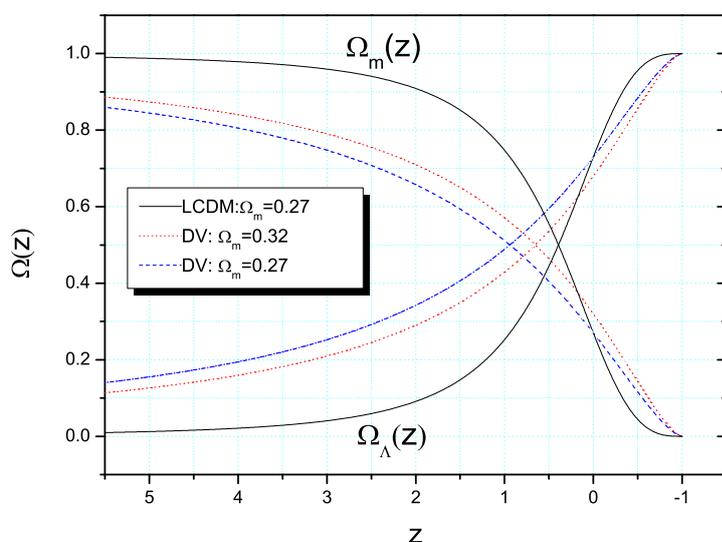


图 5-4 DV 模型和 LCDM 模型预言的 $\Omega(z)$ 随红移 z 的演化。

如果我们约定 $a(t_0) = 1$ ，由(5-48)式我们可以确定出常数 C ，

$$C = \left(\frac{\Omega_m}{1 - \Omega_m} \right)^{2/3}. \quad (5-55)$$

下面我们讨论一下该模型几种观测检验。

5.2.2 高红移宇宙年龄问题对 DV 模型的检验

如前所述，宇宙学常数的引入缓解了宇宙年龄问题。DV 模型给出的宇宙年龄可通过(5-34)、(5-35)和(5-38)式导出 [Carneiro, *et al.*, 2006]

$$t_0 H_0 = \frac{2 \ln \Omega_m}{3(\Omega_m - 1)}, \quad (5-56)$$

如果取 $\Omega_m \simeq 0.27, h = 0.71$ [Komatsu, *et al.*, 2009], 那么宇宙年龄 $t_0 \sim 16\text{Gyr}$ 。而高红移宇宙年龄问题同样棘手。从 x 射线数据中读出的 Fe/O 的丰度比可以估计出类星体 APM 08279+5255 在红移 $z = 3.91$ 时的年龄为 2-3Gyr [Hasinger, *et al.*, 2002]。Friaca 等人独立的给出该类星体在 $z = 3.91$ 时的年龄为 2.1Gyr [Friaca, *et al.*, 2005]。这样, 宇宙学模型在 $z = 3.91$ 时预言出的宇宙年龄应至少大于 2Gyr。对于一种宇宙学模型, 给出的宇宙年龄可以通过 Friedmann 方程统一表达成

$$t(z) = \int_z^\infty \frac{d\tilde{z}}{(1+\tilde{z})H(\tilde{z})}. \quad (5-57)$$

由于 $z = 3.91$ 是物质为主时期, 因此取 $\omega = 1$ 。由方程(5-50)和(5-51)知

$$\rho_T = \frac{\sigma^2}{3} \left[1 + \left(\frac{C}{a} \right)^{3/2} \right]^2. \quad (5-58)$$

结合(5-27)和(5-55)两式, 并利用关系: $1+z = 1/a$, 容易得出

$$H(z) = H_0[1 - \Omega_{m0} + \Omega_{m0}(1+z)^{3/2}]. \quad (5-59)$$

这与 LCDM 模型中哈勃参数不同, 在 LCDM 模型中

$$H(z) = H_0[1 - \Omega_{m0} + \Omega_{m0}(1+z)^3]^{1/2}. \quad (5-60)$$

由此可以断定 DV 模型和 LCDM 模型预言的宇宙年龄不同。为表示方便, 我们引入记号

$$T(z) \equiv H_0 t(z). \quad (5-61)$$

注意宇宙学模型预言的 $T(z)$ 是与 H_0 无关的量, 这一点由(5-57)式很容易看出。图5-5给出了 DV 模型和 LCDM 模型预言的 $T(z)$, 其中我们在 DV 模型中取了两个今天的物质密度参数 $\Omega_m = 0.27$ 和 $\Omega_m = 0.32$, 而在 LCDM 模型中, 我们只取了 $\Omega_m = 0.27$ 。同时我们也标出了类星体 APM 08279+5255 的 $T(3.91)$ 。对于同样的年龄 $t_{\text{qua}} = (2.0 - 3.0)$, 当取 $h = 0.72$ [Freedman, *et al.*, 2001]时, $T_{\text{qua}} = (0.147, 0.221)$; 而当取 $h = 0.62$ [Sandage, *et al.*, 2006]时, $T_{\text{qua}} = (0.127, 0.190)$ [Tong & Zhang, 2009b]。很明显, 如果宇宙学模型与观测自洽, 则必须满足

$$T_{\text{qua}}(3.91) \geq T_{\text{qua}}. \quad (5-62)$$

而从图中我们可以看出 LCDM 在高红移宇宙年龄问题上遇到困难。即使 T_{qua} 的下限也比 LCDM 模型预言的 $T(3.91)$ 大。但 DV 模型缓解了高红移宇宙年龄问题, 越小的 Ω_m 值越能更好的解决该问题。

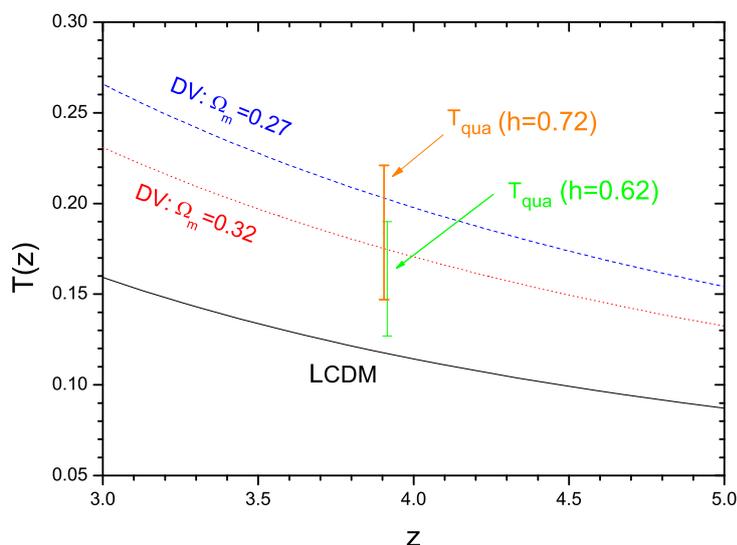


图 5-5 DV 模型和 LCDM 模型预言的 $T(z)$ 随红移 z 的演化。同时我们也画出了类星体 APM 08279+5255 的 $T(3.91)$ ，用 T_{qua} 表示，其中我们取年龄区间 $t_{\text{qua}} = (2.0 - 3.0)\text{Gyr}$ ，而且分别取了 $h = 0.72$ 和 $h = 0.62$ 两个值。

5.2.3 Statefinder 诊断对 DV 模型的检验

为区别不同的暗能量模型，人们提出了新的几何诊断：Statefinder [Sahni, *et al.*, 2003; Alam, *et al.*, 2003] 和 Om [Sahni, *et al.*, 2008]。本小节我们讨论一下 Statefinder 诊断，下一小节我们将讨论 Om 诊断。Statefinder 诊断的两个参数定义为 [Sahni, *et al.*, 2003]：

$$r \equiv \frac{\ddot{a}}{aH^3}, \quad s \equiv \frac{r-1}{3(q-1/2)}, \quad (5-63)$$

其中 $q = \ddot{a}/(aH^2)$ 是减速参数，因此减速参数包含标度因子的二阶导数的信息，Statefinder 诊断参数包含标度因子的三阶导数信息，而且它们的值可预期被未来的 SNAP 计划观测到 [Alam, *et al.*, 2003]，因此得到了人们的极大关注 [Gorini, *et al.*, 2003; Zimdahl & Pavon, 2004]。 q ， r 和 s 可用总能量密度 ρ_T 和总压强 p_T 表示为

$$q = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{3p_T}{\rho_T} \right), \quad (5-64)$$

$$r = 1 + \frac{9(\rho_T + p_T)\dot{p}_T}{2\rho_T\dot{\rho}_T}, \quad (5-65)$$

$$s = \frac{\rho_T + p_T}{p_T} \frac{\dot{p}_T}{\dot{\rho}_T}. \quad (5-66)$$

由于我们只关心低红移 r, s 的演化情况，因此参数 ω 还是取为 1(物质为主)。这样我们有

$$q = \frac{3}{2}\Omega_m(z) - 1, \quad (5-67)$$

$$r = 1 - \frac{9}{4}\Omega_m(z)(1 - \Omega_m(z)), \quad (5-68)$$

$$s = \frac{1}{2}\Omega_m(z), \quad (5-69)$$

其中 $\Omega_m(z) = \rho_m(z)/\rho_T(z)$ 。利用(5-48)、(5-50)和(5-51)三式得

$$\Omega_m(z) = \frac{\Omega_m(1+z)^{3/2}}{[1 - \Omega_m + \Omega_m(1+z)^{3/2}]}. \quad (5-70)$$

将上式分别代入方程(5-67)-(5-69)中得 [Tong & Zhang, 2009b]:

$$q = \frac{3\Omega_m(1+z)^{3/2}}{2[1 - \Omega_m + \Omega_m(1+z)^{3/2}]} - 1, \quad (5-71)$$

$$r = 1 - \frac{9\Omega_m(1 - \Omega_m)(1+z)^{3/2}}{4[1 - \Omega_m + \Omega_m(1+z)^{3/2}]^2}, \quad (5-72)$$

$$s = \frac{\Omega_m(1+z)^{3/2}}{2[1 - \Omega_m + \Omega_m(1+z)^{3/2}]}. \quad (5-73)$$

很显然，上述参数的演化依赖于 Ω_m 的值。图5-6画出了 DV 模型($\Omega_m = 0.27$ 和 $\Omega_m = 0.32$)、LCDM 模型、Yang-Mills 凝聚(YMC)模型(见下一节)、quiescence 模型和 kinessence 模型的 $r(z)$ 和 $s(z)$ 的演化行为。我们发现与其他几种暗能量模型不同，DV 模型的 $r(z)$ 在 $z \sim 1$ 附近有个最小值。而 DV 模型的 $s(z)$ 与 kinessence 模型非常类似。我们没有画出 $q(z)$ 的演化，是因为 $q(z)$ 和 $s(z)$ 是线性关系。由(5-71)和(5-73)知， $q = 3s - 1$ 。而 LCDM 模型的 Statefinder 参数很容易由(5-64)-(5-66)式得到： $q = -1$ ， $r = 1$ ， $s = 0$ 。图5-7给出了 Statefinder 参数 (r, s) 和 (r, q) 轨迹。从 $r - s$ 图我们看到 DV 模型的 (r, s) 会最终趋向于 LCDM 模型(1,0)。而 $r - s$ 图表明 DV 模型和 LCDM 模型的 (r, q) 都是从 SCDM 模型(1,0.5)过渡到 SSU 模型(1, -1)，但过渡的方式不同。

5.2.4 Om 诊断对 DV 模型的检验

上一小节中，我们可以看到 Statefinder 诊断可以很好的区别不同的暗能量模型。本小节我们讲述另一种几何诊断— Om 诊断，其定义为 [Sahni, *et al.*,

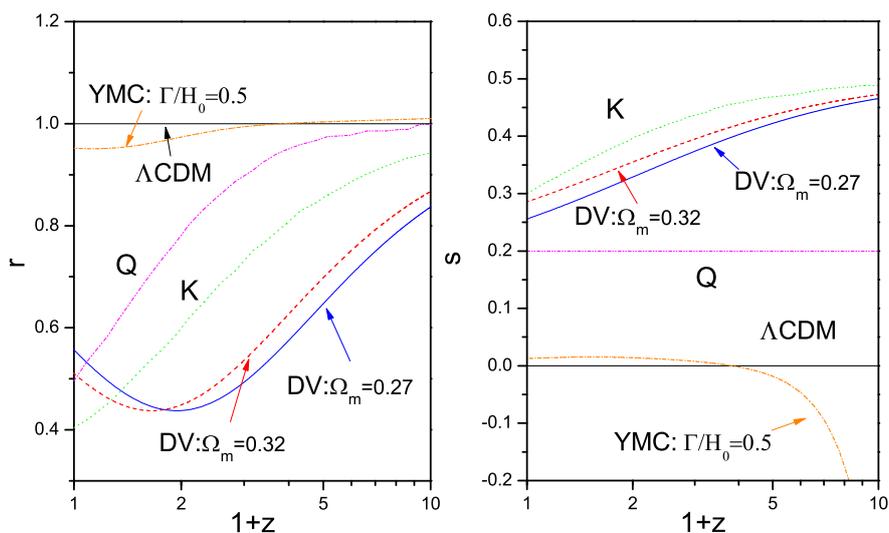


图 5-6 DV 模型中 Statefinder 参数 $r(z)$ 和 $s(z)$ 的演化 [Tong & Zhang, 2009b]。作为比较，我们也画出其他几种暗能量模型的情况，包括： Λ CDM 模型、Yang-Mills 模型、quiescence(Q) 模型和 kinessence(K) 模型 [Sahni, *et al.*, 2003]。

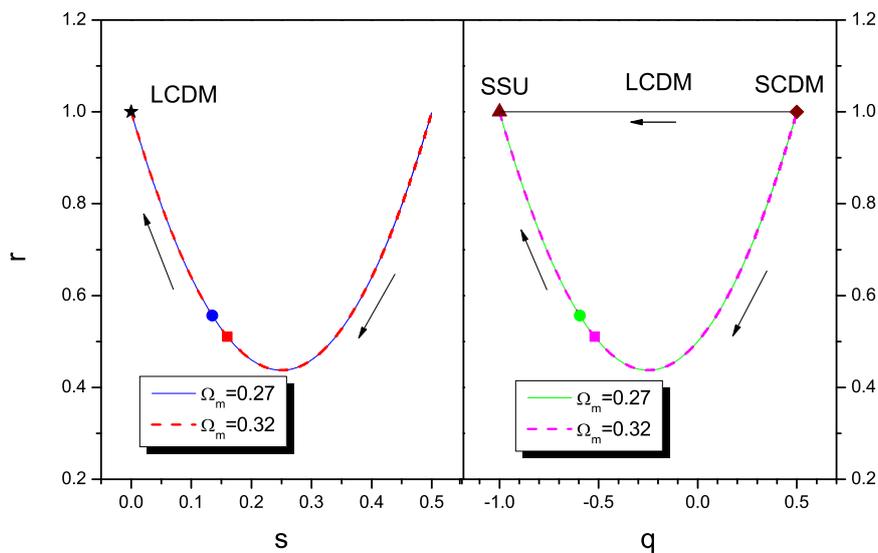


图 5-7 DV 模型的 Statefinder 参数 (r, s) 和 (r, q) 轨迹。圆点表示 $\Omega_m = 0.27$ 时的当前值，方点表示 $\Omega_m = 0.32$ 时的当前值。三角形表示 SSU(稳态宇宙学模型)，菱形表示 SCDM(标准冷暗物质模型)。

2008]:

$$Om(x) = \frac{h^2(x) - 1}{x^3 - 1}, \quad (5-74)$$

其中 $x \equiv (1+z)$, $h(x) \equiv H(x)/H_0$ 。由于 Statefinder 参数最高涉及到标度因子的三阶导数, 而 Om 最高涉及到标度因子的一阶导数, 所以更加容易从观测数据中得出。将(5-59)式代入(5-8)式中, 得到DV模型的 Om

$$Om(x) = \frac{(1 - \Omega_{m0} + \Omega_{m0}x^{3/2})^2 - 1}{x^3 - 1}. \quad (5-75)$$

对于 LCDM 模型, 由(5-60)很容易得

$$Om(x) = \Omega_m. \quad (5-76)$$

图5-8画出了DV模型、LCDM模型和 YMC模型[Tong & Zhang, 2009b]的 $Om(z)$ 的演化。当 $z \rightarrow 0$ 时, DV模型的 $Om(z)$ 趋于 LCDM模型 $Om(0) = \Omega_m$, 二者发生简并。而在高红移二者不同, 因此由高红移的观测数据可以区分 DV模型和 LCDM模型。如果数据足够准确, 还可以确定 Ω_m 。而 YMC模型在 $z \rightarrow 0$ 时不会与 LCDM模型简并。

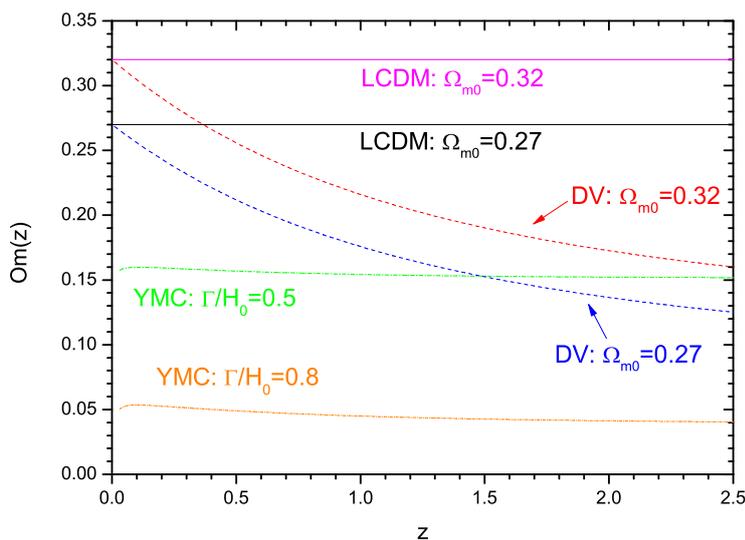


图 5-8 三种暗能量模型的 $Om(z)$ [Tong & Zhang, 2009b]。

5.3 Yang-Mills 凝聚暗能量模型

目前标量场模型的物理本质不是很清楚。在粒子物理中, 标量场描述的

Higgs 粒子至今仍然没有发现。因此有必要考虑暗能量的其他一些可能的理论模型，比如矢量场模型。规范 Yang-Mills 凝聚(YMC)模型正是一种矢量场，这个模型最早是被 Zhang 引入宇宙学研究 [Zhang, 1994]。和普通的标量场模型相比，YMC模型能够很容易实现大于或者小于 -1 的物态，而不需要引入其他比较奇怪的势能，而且可以随意调节的参数很少，因此减少了模型构造的随意性。Yang-Mills规范场原本是粒子物理中用来描述物质间相互作用的场，是用来描述强子囚禁夸克的真空象模型，同时仍然保持了正常量子场的特性，如 Lorentz 不变性，规范对称性等。该模型中，强子中的夸克所处的真空环境正好满足 $p = -\rho$ 。我们由此假设宇宙空间可以像强子中的QCD真空一样，充满了这种 YM 凝聚，考察该规范场是否可以作为暗能量。YM规范场是粒子物理的基石。有效 Yang-Mills 场结构是理论计算的结果，不可随意改变。需要注意的是，我们这里的暗能量模型涉及的YMC，不是 QCD 胶子场、弱电统一规范场，例如 Z^0 和 W^\pm 。

在重整化的有效 YM 场理论 [Savvidi, 1977; Matinyan & Savvidi, 1978; Adler & Piran, 1982; 1984]中，其跑动的耦合参数为 [Weinberger, 1996; Politzer, 1973]:

$$g^2(F) = \frac{1}{b} \left[\frac{1}{\tau} - \eta \frac{\ln|\tau|}{\tau^2} + \eta^2 \frac{\ln^2|\tau| - \ln|\tau| + C}{\tau^3} + O\left(\frac{1}{\tau^3}\right) \right], \quad (5-77)$$

这里 $\tau \equiv \ln|F/e\kappa^2|$ 。Callan-Symanzik 参数 $b = (11N - 2N_f)/48\pi^2$ ，其中 N 表示 SU(N)规范场， N_f 是夸克的味数。下面我们忽略费米子的贡献，而且只在SU(2)的范畴内考虑问题。SU(2) 规范群情况下， $b = \frac{11 \cdot 2}{3(4\pi)^2}$ ， $\eta \equiv \frac{2\beta_1}{\beta_0} \simeq 0.84$ 。 $F \equiv -\frac{1}{2}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} = E^2 - B^2$ 是YMC的序参数。 a 是规范群指数，对于SU(2)群， $a = 1, 2, 3$ 。参数 κ 是单位为质量平方的重整化尺度。参数 $C \equiv \frac{8\beta_0\beta_2}{\beta_1^2} - 1$ ，其中 $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ 都是依赖于 SU(N) 的常数 [Weiberger, 1996; Muta, 2000]。注意 Lorentz 不变性在有效 YM 理论中是始终存在的，因为拉式量是由协变的 $F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}$ 组成的 [Pagels & Tomboulis, 1978; Adler, 1983; Zhang, 1994]。知道了跑动耦合参数，就能够得到有效拉式量：

$$\mathcal{L}_{eff} = \frac{F}{2g^2(F)}. \quad (5-78)$$

将该模型推广到 FRW 度规中，考虑与引力最小耦合的 YM 场的作用量为

$$S = \int \sqrt{-g} \left[-\frac{R}{16\pi G} + \mathcal{L}_{eff} \right] d^4x, \quad (5-79)$$

其中 $g \equiv -\text{Det}g_{\mu\nu}$ 。将作用量对 $g_{\mu\nu}$ 变分得到 Einstein 场方程，其中 YM 场的能

量-动量张量为

$$T_{\mu\nu} = \sum_a \frac{g_{\mu\nu}}{4g^2} F^a_{\sigma\delta} F^{a\sigma\delta} + \epsilon F^a_{\mu\sigma} F^{a\sigma}_{\nu}, \quad (5-80)$$

其中 ϵ 是 YMC 的介电常数:

$$\epsilon = 2 \frac{\partial L_{eff}}{\partial F} = b \ln \left| \frac{F}{\kappa^2} \right|. \quad (5-81)$$

需要指出, YMC 的能量动量张量由三部分组成, 即 $T_{\mu\nu} = \Sigma_a^{(a)} T_{\mu\nu}$ 。而每一部分都不可能是各向同性, 这是矢量场模型的一个基本特征。如果这导致总的暗能量也是各向异性的, 则可能导致宇宙的各向异性膨胀, 这与观测到的均匀各向同性的 CMB 是矛盾的。但是这里我们可以假设规范场只是时间的函数, 取 $A_\mu = \frac{i}{2} \sigma_a A_\mu^a$ [Zhang, 1994], 因此 $A_0 = 0, A_i^a = \delta_i^a A(t)$ 。按照通常定义

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad (5-82)$$

其中 f^{abc} 是规范场的结构常数, 对于 $SU(2)$ 规范场, 有 $f^{abc} = \epsilon^{abc}$ 。 $F^{a\mu}_{\nu}$ 的矩阵表示为 [Misner, Thorne & Wheeler, 1973]

$$F^{a\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

因此容易得 $F = E^2 - B^2$, 其中 $E^2 = \Sigma_{i=1}^3 E_i^2$ 和 $B^2 = \Sigma_{i=1}^3 B_i^2$ 。为简化讨论, 我们这里只考虑 $F = E^2$ 的纯电场情况。有磁场时, 如果磁场为主导, 是不能够实现负压强, 因此不能作为暗能量模型。下面我们将由浅入深的讨论 YMC 暗能量模型。

5.3.1 量子 1-loop 的 YMC 暗能量模型

首先我们来考虑最简单的情况, 即 YMC 理论的一圈近似。将跑动耦合参数(5-77)式中的 η 取为 0, 于是 $g^2(F) = \frac{1}{b\tau}$ 。这样可以写出有效拉式量:

$$L_{eff} = \frac{1}{2} b F \left(\ln \left| \frac{F}{\kappa^2} \right| - 1 \right) \quad (5-83)$$

在下面的讨论中我们可以看到, YMC 的能标是由参数 $\kappa^{1/2} \sim 10^{-3} \text{eV}$ 给出的, 这个能标远比 QCD 和弱电统一的小。需要指出的是, 重整化参数 κ 是一圈 YMC 模型的唯一参数, 它的大小是通过与观测对比确定的。通过对方程(5-83)作变分, 我们可以得到平直 FRW 度规下的 YMC 的能量密度与压强 [Zhang,

1994; Zhao & Zhang, 2006c]:

$$\rho_y = \frac{1}{2}\epsilon E^2 + \frac{1}{2}bE^2, \quad (5-84)$$

$$p_y = \frac{1}{6}\epsilon E^2 - \frac{1}{2}bE^2. \quad (5-85)$$

YMC 的状态方程:

$$w_y = \frac{p_y}{\rho_y} = \frac{y-3}{3y+3}, \quad (5-86)$$

其中

$$y \equiv \frac{\epsilon}{b} = \ln \left| \frac{E^2}{\kappa^2} \right| \quad (5-87)$$

是一个无量纲的量。这样(5-84)式可以写为:

$$\rho_y = \frac{1}{2}b\kappa^2(1+y)e^y. \quad (5-88)$$

从这个表达式可以看到, 为了保证能量密度是一个有物理意义的正数, y 的取值范围是 $y > -1$, 这样 $F > \kappa^2/e \simeq 0.368\kappa^2$ 。我们先来看看状态方程 w_y 的渐进行为。由方程(5-84)和(5-85), YMC 在 $y \gg 1$, 即 $F \gg \kappa^2$ 时, $w_y = \frac{1}{3}$, 这类似于辐射; 当 $y = 3$, 即 $F = e^3\kappa^2$ 时, $w_y = 0$, 这类似于物质; 当 $y = 0$, 即 $F = \kappa^2$ 时, YMC 则表现出宇宙学常数的特点, $w_y = -1$, 我们称之为临界点, 这时 YMC 对应的临界能量密度为 $\rho_y = \frac{1}{2}b\kappa^2$ [Zhang, Xia & Zhao, 2007]; 最后当 $-1 < y < 0$, 即 $\kappa^2/e < F < \kappa^2$, $w_y < -1$ 。从上面的分析发现, YMC 具有跟踪的性质, 而且理论上可以实现 w_y 跨越 -1 。普通的 Quintessence 模型不能实现小于 -1 的物态。虽然 Phantom 和 K-essence 模型可以实现, 但是这两类模型在理论上都存在一些其他更严峻的困难 [Armendariz-Picon, *et al.*, 1999; Bonvin, *et al.*, 2006]。

现在我们将 YMC 模型纳入宇宙学模型中。宇宙分为三种组成部分, 暗能量, 辐射和物质, 其中物质包括重子物质和暗物质。暗能量就用 YMC 模型描述, 物质部分用无压强的非相对论尘埃描述, 辐射部分由 CMB 光子和其它相对论粒子 (如无质量的中微子) 组成。由于假设宇宙是平的, 那么总能量密度参数 $\Omega = \Omega_y + \Omega_m + \Omega_r = 1$, 其中 $\Omega_y = \rho_y/\rho$, $\Omega_m = \rho_m/\rho$, 和 $\Omega_r = \rho_r/\rho$ 。所以 Friedmann 方程写为:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho_y + \rho_m + \rho_r), \quad (5-89)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho_y + 3p_y + \rho_m + 2\rho_r), \quad (5-90)$$

其中方程(5-90)用到了 $p_m = 0, p_r = \frac{1}{3}\rho_r$ 三部分的动力学演化方程可以根据各自的性质得到:

$$\dot{\rho}_y + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho_y + p_y) = -Q_m - Q_r, \quad (5-91)$$

$$\dot{\rho}_m + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho_m = Q_m, \quad (5-92)$$

$$\dot{\rho}_r + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho_r + p_r) = Q_r, \quad (5-93)$$

其中 Q_m 和 Q_r 分别表示 YMC 与物质和辐射之间的能量交换。这里的耦合作用只是一个唯象的模型。当 $Q_m > 0$ 时, YMC 将能量转移至物质中, 可以理解为 YMC 衰减为一对物质粒子; $Q_m < 0$ 则是物质的能量转移至 YMC 中。对于辐射与 YMC 的耦合参数 Q_r 也是类似的性质。这样我们就引入了三个模型参数: Q_m, Q_r 和 κ 。联立(5-91), (5-92)和(5-93)三式可以看出, 总能量仍然是守恒的。

在下面的计算中, 为了标记简单, 我们用 YMC 的临界能量密度 $\frac{1}{2}b\kappa^2$ 为单位重新标度: $x \equiv \rho_m/\frac{1}{2}b\kappa^2, r \equiv \rho_r/\frac{1}{2}b\kappa^2$, 并假设耦合速率正比于暗能量的密度, 引入 $Q_m \equiv \Gamma\rho_y, Q_r \equiv \Gamma'\rho_y$ 其中无量纲参数 x 和 r 是重新标度后的物质与辐射的能量密度, 而 Γ 和 Γ' 分别表征暗能量衰变成物质和辐射的速率用 x, y 和 r 表示的动力学演化方程(5-89), (5-91) - (5-93)变为:

$$\frac{dy}{dN} + \frac{4y}{2+y} = -\frac{(\Gamma + \Gamma')(1+y)}{H(2+y)}, \quad (5-94)$$

$$\frac{dx}{dN} + 3x = \frac{\Gamma}{H}(1+y)e^y, \quad (5-95)$$

$$\frac{dr}{dN} + 4r = \frac{\Gamma'}{H}(1+y)e^y, \quad (5-96)$$

其中变量 $N = \ln a(t)$, $H = \sqrt{\frac{4}{3}\pi G b \kappa^2 [(1+y)e^y + x + r]}$ 是 Hubble 参数。通过方程(5-88), 并利用关系 $\rho_y(t_0) = \Omega_y \rho_c \simeq 0.73\rho_c$ 可以确定 κ 的大小。当然这之前我们需要知道 $y(t_0)$ 。计算给出方程(5-88)中的因子 $(1+y)e^y \simeq 0.8$ [Zhang, Xia & Zhao, 2007], 这样有 $\rho_y \simeq 0.8 \times \frac{1}{2}b\kappa^2 \simeq 0.73\rho_c$, 所以有

$$\kappa^{1/2} \simeq 5 \times 10^{-3} h_0 \text{ eV}. \quad (5-97)$$

由于这个能标远远小于粒子模型的标准能标，我们倾向于认为这里的 YMC 是粒子物理标准模型之外新的物理，也就是说，精细调节问题在我们的模型中是存在的，YMC 模型不能解释这个问题。由(5-97)式，我们很容易得出 $\sqrt{\frac{4}{3}\pi G b \kappa^2} \simeq H_0$ 。在这里我们只讨论暗能量部分衰减为物质的情况，即 $\Gamma > 0, \Gamma' = 0$ 。(更详细的讨论见 [Zhang, Xia & Zhao, 2007])。而且只讨论两种耦合方式： $\Gamma/H_0 = 0.5$ 和 $\Gamma/H = 0.5$ 。

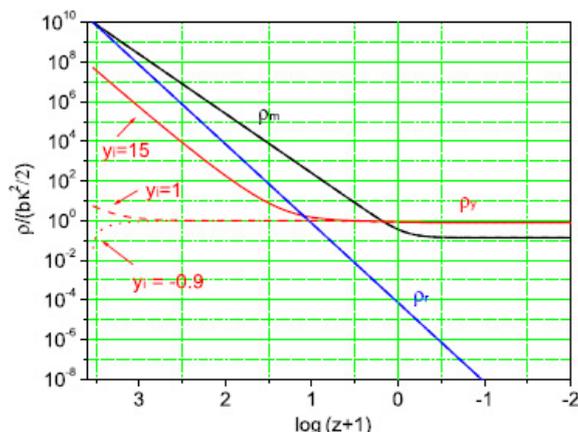


图 5-9 $\Gamma' = 0, \Gamma/H_0 = 0.5$: 能量密度的演化情况。在 $\rho_{yi} = (10^{-10}, 10^{-2})\rho_{mi}$ 范围内在早期始终存在跟踪解 [Zhang, Xia & Zhao, 2007]。

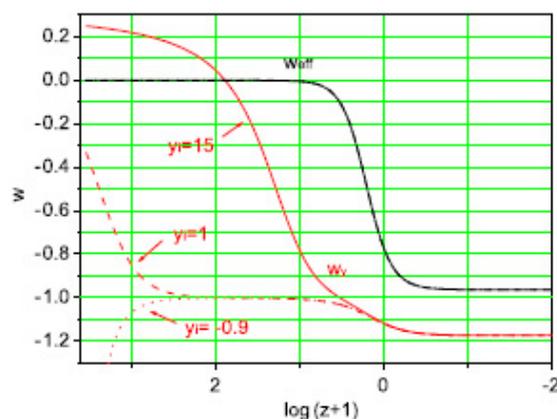


图 5-10 $\Gamma' = 0, \Gamma/H_0 = 0.5$: 状态方程的演化。由于耦合效应， w_y 通过了 -1 ，最后在 $z = 0$ 时 ~ -1.17 [Zhang, Xia & Zhao, 2007]。

(1) $\Gamma/H_0 = 0.5$ 的情况。为保证现在时刻的宇宙各成分的能量密度为： $\Omega_y \simeq 0.73$ 、 $\Omega_m \simeq 0.27$ 和 $\Omega_r \simeq 10^{-5}$ 。在初始时刻红移 $z \simeq 3454$ 的 t_i ，辐射和物质相等，同取为 $x_i = r_i = 1.0 \times 10^{10}$ ，而初始的 YMC 能量密度可以取一个很宽的范围 $y_i = (1, 15)$ ，这对应着 $\Omega_{yi} = (10^{-10}, 3 \times 10^{-3})$ 。图5-9画出了各种宇宙成分能量密度的演化 [Zhang, Xia & Zhao, 2007]。从图中可以看出，不

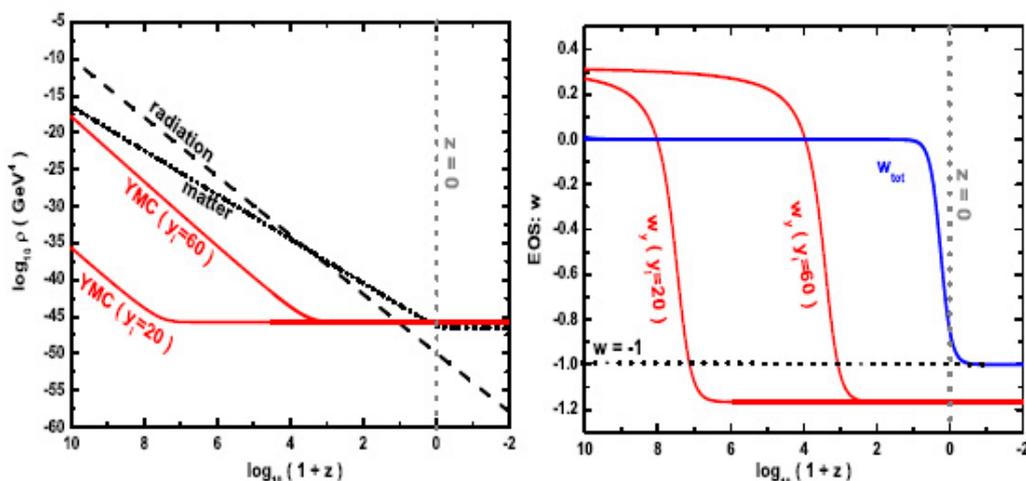


图 5-11 $\Gamma' = 0$, $\Gamma/H = 0.5$: 能量密度和状态方程的演化。由于耦合效应, w_y 在很早通过了 -1 , 最后在 $z = 0$ 时 ~ -1.17 [Zhao, Zhang & Tong, 2009]。

同的初始值 Ω_{yi} 能演化出同样的现在值 $\Omega_y(t_0) \simeq 0.73$, 这说明 YMC 模型很好的解决了巧合性问题。在开始阶段, $\rho_y(t)$ 比 $\rho_m(t)$ 小, 并且跟着 $\rho_m(t)$ 演化。之后, 在 $z \sim 0.48$ 的时候, $\rho_y(t)$ 不再跟随 $\rho_m(t)$ 演化, 而是近似变为一个常数, 并且超过 $\rho_m(t)$, 在宇宙中占据主导地位, 这标志着加速膨胀阶段的开始。此模型中物质为主阶段足够长, 不会影响到结构形成。由于 YMC 和物质之间的耦合, ρ_m 最终不再减少, 而是被拉平变成一个常数。事实上, 在图 5-9 中, 三条 $\rho_m(t)$ 曲线对应于三个不同的 y_i , 但是这三条曲线实在太接近以至于重合在一起, $\rho_r(t)$ 也是类似的情况。图 5-10 给出了 YMC 状态方程和总的有效状态方程 ($w_{eff} = p_T/\rho_T$) 的演化, 可以看到, 在 $z \sim 2$ 时 YMC 的状态方程 w_y 实现了跨越 -1 。在现在时刻 $z = 0$, $w_y \simeq -1.1$, 最后达到渐进值 $w_y \simeq -1.17$ 。这个跨越 -1 的过程可以这样理解, 由于耦合, YMC 损失能量提供给物质部分, 因此 YMC 的场的强度 F 会减得比 κ^2 小, 导致 $w_y < -1$ 。而总有效物态 w_{eff} 趋于 -1 。

(2) $\Gamma/H = 0.5$ 的情况。图 5-11 左边画出的能量密度演化与图 5-9 给出的类似, 但将初始红移取为 $z_i = 10^{10}$ 。而图 5-11 右边状态方程的演化与图 5-10 差别较大。暗能量的物态在很早就直接迅速下降为一常数 $w_y \simeq -1.17$, 没有经过趋于 -1 的阶段。这是由于此耦合速度 Γ 正比于哈勃参数 H 。在早期, H 是很大的, 因此早期的 Γ 也很大。直到近期, $H \rightarrow H_0$, Γ 才与前一种的相等。总物态也趋于 -1 , 与前一种耦合方式一样。

注意, 当 YMC 不与其他成分有能量交换时, 物质密度和辐射密度各自按

$\rho_m \propto a^{-3}$ 和 $\rho_r \propto a^{-4}$ 独立的衰减，而 YMC 的物态最终趋于 -1 ，而不会小于 -1 ，见图 5-12。

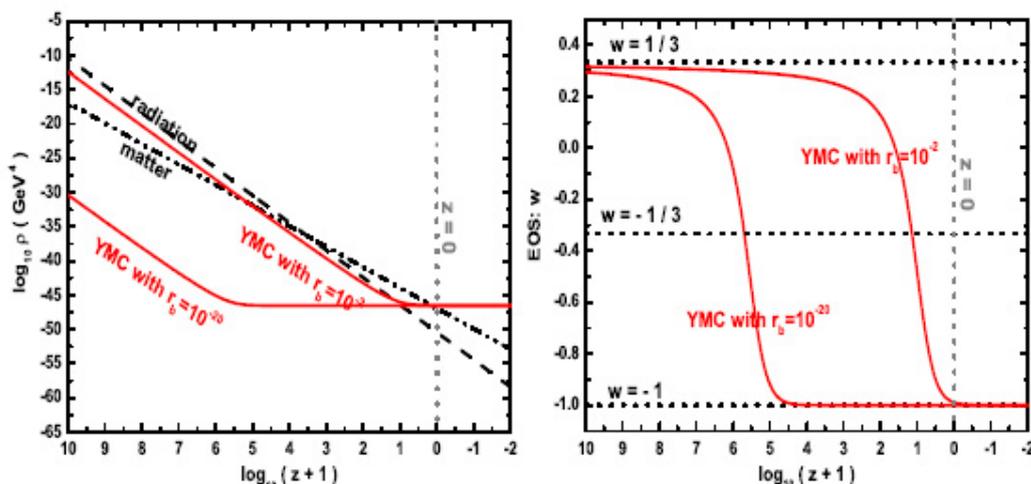


图 5-12 模型 1, $\Gamma = 0$, $\Gamma' = 0$: 能量密度和状态方程的演化。 w_y 在趋于 -1 ，但始终不能跨越 -1 [Zhao, Zhang & Tong, 2009]。

5.3.2 量子 2-loop 的 YMC 暗能量模型

上面我们简单讨论了一圈 YMC 暗能量模型的性质，现在我们考虑更高阶的近似，即两圈近似。将方程(5-77)右面的表达式取到第二项，即 [Jones, 1974; Caswell, 1974]:

$$g^2(F) = \frac{1}{b\tau} - \frac{2b_1 \ln|\tau|}{b^3 \tau^2} + O\left(\frac{1}{\tau^2}\right), \quad (5-98)$$

与一圈模型同样的 $\tau \equiv \ln|F/e\kappa^2| \equiv y - 1$ 。根据 $L_{eff} = F/2g^2(F)$ ，其有效拉氏量为：

$$L_{eff} = \frac{b}{2}F \left[\ln \left| \frac{F}{e\kappa^2} \right| + \eta \ln \left| \ln \left| \frac{F}{e\kappa^2} \right| + \delta \right| \right], \quad (5-99)$$

其中 $\eta \equiv \frac{2b_1}{b^2} \simeq 0.84$ ， $b_1 = \frac{17N^2}{3(4\pi)^4}$ 是两圈部分的贡献。 b 和 κ 的定义和一圈时完全一样。无单位的量 δ 是表征高阶修正的一个参数。方程(5-99)的有效拉氏量仍然保持了规范不变性和 Lorentz 不变性。

两圈 YMC 的能量密度和压强可写为：

$$\rho_y = \frac{b}{2}F \left[y + 1 + \eta \left(\ln|y - 1 + \delta| + \frac{2}{y - 1 + \delta} \right) \right], \quad (5-100)$$

$$p_y = \frac{b}{6}F \left[y - 3 + \eta \left(\ln|y - 1 + \delta| - \frac{2}{y - 1 + \delta} \right) \right]. \quad (5-101)$$

其状态方程写为：

$$w = \frac{p_y}{\rho_y} = \frac{y - 3 + \eta \left(\ln |y - 1 + \delta| - \frac{2}{y-1+\delta} \right)}{3 \left[y + 1 + \eta \left(\ln |y - 1 + \delta| + \frac{2}{y-1+\delta} \right) \right]}. \quad (5-102)$$

对上面的表达式，如果取 $\eta = 0$ 就退化为一圈时的对应公式(5-84)，(5-85)和(5-86)。作为对比，我们把两种模型的 ρ_y ， p_y 和 w 都画在图5-13中，不难看出，两圈模型的 ρ_y ， p_y 和 w 都和一圈的非常相似，只是幅度略微高一些。在高端 $y \rightarrow \infty$ ， ρ_y 和 p_y 都是正值， $w \rightarrow 1/3$ 。在 $y < 2.3$ 的低能端， $w < 0$ ，而在一圈模型中 $y < 3$ 时， $w < 0$ ；而 $y < -0.8$ 时弱能条件被破坏[Zhang, 2002; Hawking & Ellis, 1973; Parker & Zhang, 1991]， $\rho_y + p_y < 0$ ，同时 w 越过 -1 ，而这些在一圈模型中发生在 $y < 0$ 。根据方程(5-100)中的 ρ_y 等于暗能量的密度 $\sim 0.73\rho_c$ ，可以定出 $\kappa^{1/2} \simeq 7.6 h_0^{1/2} \times 10^{-3} eV$ [Tong, Zhang & Xia, 2009]，其中 $h_0 \simeq 0.72$ 。

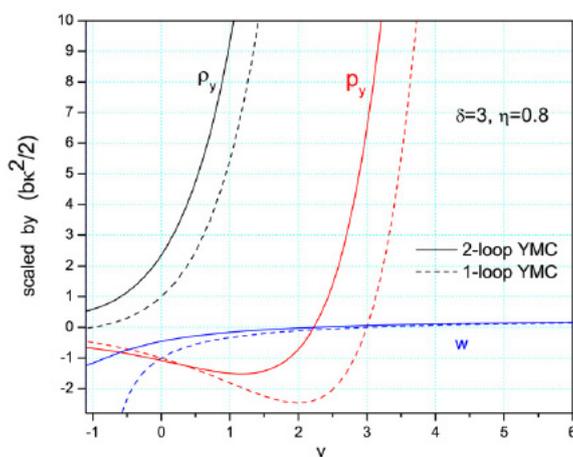


图 5-13 ρ_y ， p_y 和 w 作为变量 $y = \ln(F/\kappa^2)$ 的函数图像两圈模型(实线)与一圈模型(虚线)对比 [Xia & Zhang, 2007]。

对于两圈模型，方程组(5-91)-(5-93)仍然适用，(5-94)-(5-96)变为：

$$\frac{dy}{dN} = \frac{-4y - 4\eta \left(\ln |y - 1 + \delta| + \frac{1}{y-1+\delta} \right) - \frac{\Gamma+\Gamma'}{H} \left[y + 1 + \eta \left(\ln |y - 1 + \delta| + \frac{2}{y-1+\delta} \right) \right]}{y + 2 + \eta \left(\ln |y - 1 + \delta| + \frac{3}{y-1+\delta} - \frac{2}{(y-1+\delta)^2} \right)}, \quad (5-103)$$

$$\frac{dx}{dN} = -3x + \frac{\Gamma}{H} \left[y + 1 + \eta \left(\ln |y - 1 + \delta| + \frac{2}{y-1+\delta} \right) \right] e^y, \quad (5-104)$$

$$\frac{dr}{dN} = -4r + \frac{\Gamma'}{H} \left[y + 1 + \eta \left(\ln |y - 1 + \delta| + \frac{2}{y-1+\delta} \right) \right] e^y. \quad (5-105)$$

作为例子，我们取参数 $\delta = 3$ ， $\Gamma/H_0 = 0.2$ 和 $\gamma/H_0 = 1.2 \times 10^{-4}$ 。图5-14给出了

宇宙各组分量能量密度的动力学演化。跟一圈模型一样，YMC有跟踪行为。在辐射为主阶段，YMC随着辐射演化 $\rho_y \propto \rho_r \propto a(t)^{-4}$ ，在物质为主阶段则是随着物质部分，近似以 $\rho_y \propto \rho_m \propto a(t)^{-3}$ 的规律演化，而最终近似为一常数。YMC的初始值也取了比较宽的范围 $\Omega_{yi}(z_i = 3454) \simeq (10^{-10}, 10^{-2})$ ，而得到了同样的现在值，所以两圈模型同样解决了巧合性问题。由于YMC与物质和辐射都有耦合，物质和辐射的能量密度最终都会被拉平，近似为常数。两条虚线表示没有耦合作用时，物质和辐射各自的演化方式。YMC的状态方程同一圈的模型一样，我们不再讨论。

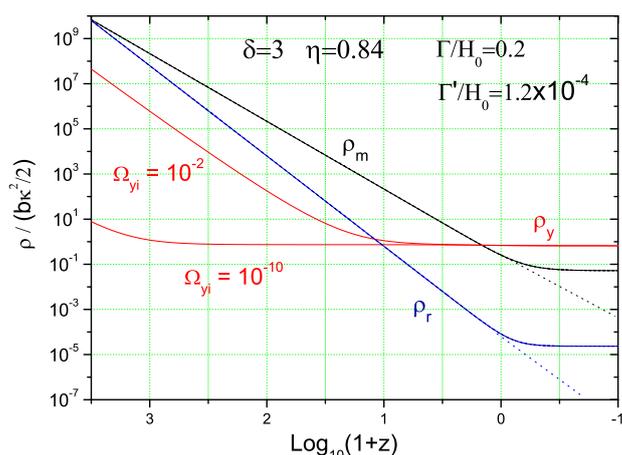


图 5-14 两圈 YMC 模型能量密度演化，参数 $\gamma = 0.2$ ， $\delta = 3.0$ 。YMC 的初始能量密度在范围 $\rho_{yi} = (10^{-27} \sim 10^{-2})\rho_{ri}$ 内都会存在跟踪解， $\rho_y(t)$ 会在红移 $z \sim 0.6$ 时开始占主导 [Tong, Zhang & Xia, 2009]。

当然我们还可以取不同的模型参数值，例如 $\Gamma/H_0 \simeq (0 \sim 0.6)$ 和 $\delta \simeq (3 \sim 7)$ 。通过计算我们发现，越大的 δ 和 γ 在 $z = 0$ 时刻会得到越小的 w 。例如，固定 $\gamma = 0.5$ ， $\delta = 7 \Rightarrow w \simeq -1.18$ ，而固定 $\delta = 3$ ，则有 $\gamma = 0.1 \Rightarrow w \simeq -1.02$ ，这个结果就十分接近于 Λ CDM 模型了，而且 w 跨越 -1 时的红移为 $z \sim 0.35$ ，十分接近 SN Gold+HST [Riess, *et al.*, 2007] 的结果。如果未来的观测证明 $w < -1$ ，那么我们模型中就必须有 $\gamma > 0$ ，否则 $\gamma = 0$ 。

在此基础上，三圈修正 YMC 模型也作了类似的研究[Wang, Zhang & Xia, 2008]，但由于是更高阶修正，其效应已经很小，基本结论也一致，我们在此不列述了。

5.3.3 YMC 的 Statefinder

模型的正确与否，必须与观测相比较。利用无化学演化的星系的微分年

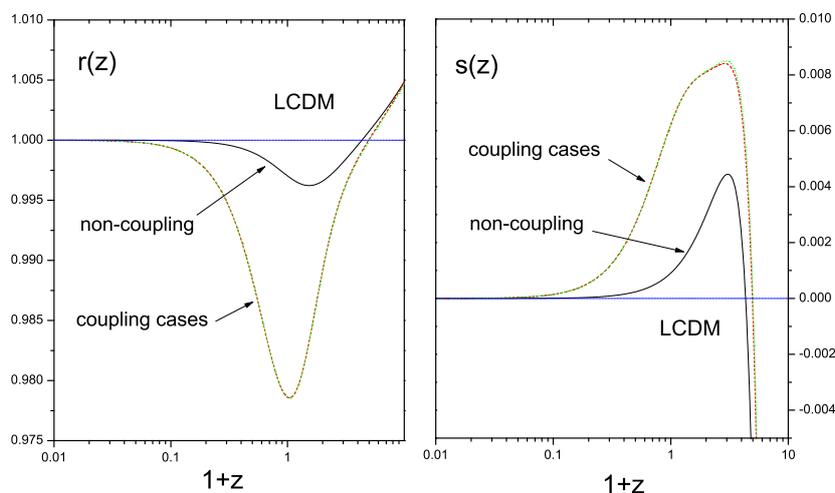


图 5-15 左边: YMC 模型 $r(z)$ 随红移的演化 ($z < 10$)。右边: $s(z)$ 随红移的演化 ($z < 5$)。为比较, 我们也画出了 LCDM 的 (r, s) [Tong, Zhang & Xia, 2009]。

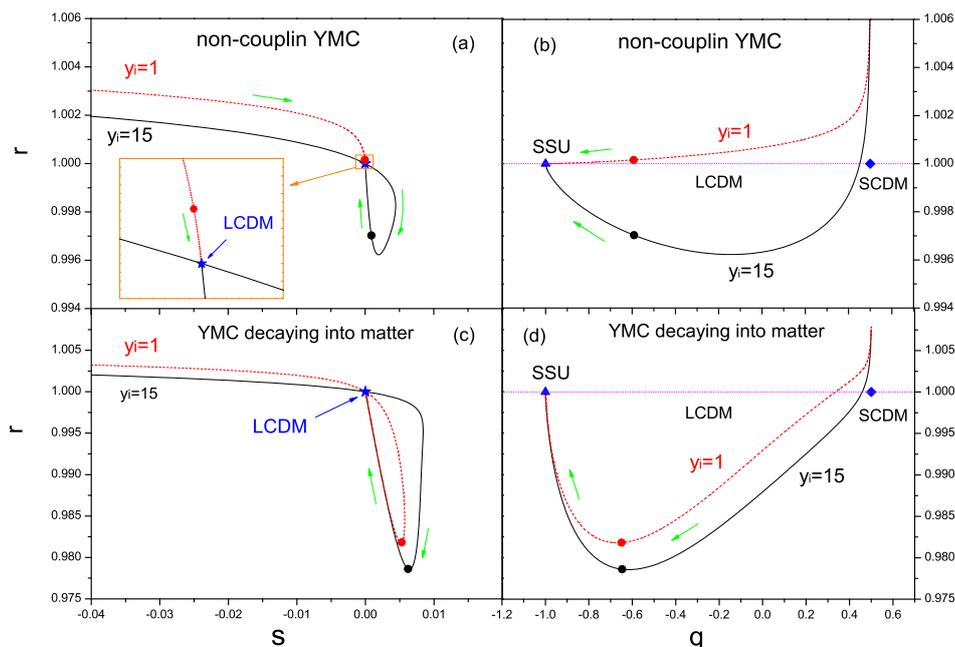


图 5-16 两圈 YMC 模型中 statefinder 在 $r-s$ 平面和 $r-q$ 平面的演化。圆点表示现在时刻的值, 五角星代表 LCDM 模型, 菱形代表 SCDM 模型, 三角形代表 SSU 模型 [Tong, Zhang & Xia, 2009]。

龄，可以在 $0 \leq z \leq 1.8$ 范围内给出 9 个 Hubble 参数 $H(z)$ 的观测点 [Simon, *et al.*, 2005]。这个结果可以用来约束暗能量模型 [Samushia & Ratra, 2006]。

上一节中我们讨论了 DV 模型的 Statefinder 诊断，现在我们分析一下两圈 YMC 的 Statefinder 诊断。我们仍用上一小节中的耦合常数 $\Gamma/H_0 = 0.2$ 和 $\Gamma/H_0 = 1.2 \times 10^{-4}$ 。由 Statefinder 的定义式(5-63)，我们容易得出两圈 YMC 最一般的 Statefinder 表达式

$$r = 1 + \frac{9}{2}\Omega_y w(1+w) - \frac{3}{2}\Omega_y \frac{\dot{w}}{H} + 2\Omega_r + \frac{3\Gamma}{2H}\Omega_y w + \frac{\Gamma'}{2H}\Omega_y(3w-1), \quad (5-106)$$

$$s = \frac{3\Omega_y w(1+w) - \Omega_y \frac{\dot{w}}{H} + \frac{4}{3}\Omega_r + \frac{\Gamma}{H}\Omega_y w + \frac{\Gamma'}{3H}\Omega_y(3w-1)}{3\Omega_y w + \Omega_r}, \quad (5-107)$$

其中 $\Omega_y = \rho_y/\rho_T$ ， $\Omega_r = \rho_r/\rho_T$ ，“.”表示对时间求一阶导数。而减速参数为

$$q = -\frac{\ddot{a}}{aH^2} = \frac{1}{2}(1 + 3\Omega_y w + \Omega_r). \quad (5-108)$$

注意以上的表达式中，为了表达完整，我们没有忽略辐射的贡献。在宇宙早期， $\Omega_r \rightarrow 1$ ， $\Omega_y \rightarrow 0$ ，我们有如下渐进行为

$$r \rightarrow 3, \quad s \rightarrow \frac{4}{3}, \quad q \rightarrow 1. \quad (5-109)$$

图5-15画出了 $z < 10$ 耦合和无耦合的 YMC，以及 LCDM 的 Statefinder 参数演化。其中我们取了初始条件 $\Omega_{yi} = 10^{-2}$ 。由于我们讨论的是低红移参数的演化行为，其结论对初始条件的选取不敏感。我们发现，YMC 模型的 (r, s) 非常接近于 LCDM 模型。 $z < 10$ 时，耦合 YMC 的 r 与 LCDM 的差别仅为 2%，而无耦合 YMC 的 r 与 LCDM 的差别仅为 0.4%。而对于参数 s ， $z < 5$ 时，耦合的和无耦合的 YMC 与 LCDM 的差别分别为 0.8% 和 0.4%。这种微小的差别从图5-6中可以更醒目的看出。图5-16描述了耦合、无耦合两圈 YMC 模型 (r, s) 和 (r, q) 的轨迹。在 $r-s$ 平面，YMC 最终会趋向于 LCDM $(1, 0)$ 。而在 $r-q$ 平面，YMC 会最终趋向于 SSU 模型。与 DV 模型或者其它一些模型 [Sahni, *et al.*, 2003] 不同的是，YMC 并不是由 SCDM 模型 $(r, q) = (1, 0.5)$ 出发。这里特别要强调的是，SCDM 的 $s = 4/3$ [Tong, Zhang & Xia, 2009] 而不是 1 [Sahni, *et al.*, 2003]。原因是在不忽略辐射项时，SCDM 模型的 r 和 q 为

$$r = 1 + 2\Omega_r, \quad q = \frac{1}{2}(1 + \Omega_r), \quad (5-110)$$

因此根据 s 的定义有

$$s \equiv \frac{r-1}{3(q-1/2)} = \frac{4}{3}. \quad (5-111)$$

5.4 有效标量场模型

前面我们讲过，最流行的暗能量模型当属 LCDM 模型和标量场模型。目前有各种各样的标量场模型，包括 Quintessence [Ratra & Peebles, 1988; Peebles & Ratra, 1988; Caldwell, *et al.*, 1998], Phantom [Caldwell, 2002; Carroll, Hoffman & Trodden, 2003; Caldwell, Kamionkowski & Weinberg, 2003], k-essence [Chiba, Okabe & Yamaguchi, 2000; Armendariz-Picon, Mukhanov & Steinhardt, 2000; 2001], quintom [Feng, Wang & Zhang, 2005; Wei, Cai & Zeng, 2005; Zhao & Zhang, 2006d], 等等 [Copeland, Sami & Tsujikawa, 2006]。这些模型各有各的优缺点。例如，Quintessence 模型要解决巧合性问题需要构造特殊的势函数($V(\phi) \propto e^{-\phi}, \phi^{-\alpha}$ 等)，Phantom 模型为避免大撕裂问题也需要构造特殊的势能函数($V(\phi) = V_0[\cosh(\alpha\phi/m_{\text{pl}})]^{-1}$)，quintom 模型为实现物态光滑地跨越 -1 ，引入了两个标量场。本节我们讨论一下有效标量场模型。

5.4.1 模型

由 YMC 拉氏量的启发，我们构造了一种新的标量场的拉氏量 [Tong, Zhang & Fu, 2010]

$$\mathcal{L}_\phi = \left(-\frac{1}{2}(\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi) - V(\phi) \right) \ln \left| \frac{\frac{1}{2}(\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi) - V(\phi)}{\alpha\beta} \right|, \quad (5-112)$$

其中 $V(\phi)$ 是自相互作用势， α 是一个能量标度参数， β 是一个任意实常数。该拉氏量与一圈的 YMC 模型的拉氏量很类似，同样也是有个对数项，但它是一个标量场而不是矢量场。与 Quintessence 场的拉氏量相比，它多了个对数项因子。对数项在有效量子理论里面是很常见的，例如 Coleman-Weinberg 势 [Coleman & Weinberg, 1973]、有效引力 [Park & Ravel, 1999] 以及 YM 场 [Pagels & Tomboulis, 1978; Adler & Piran, 1982; 1984; Zhang, 1994]。假设 ϕ 是均匀各向同性的，那么它只是时间的函数，即 $\phi = \phi(t)$ 。于是作用量写为

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2}(\dot{\phi})^2 - V(\phi) \right] \ln \left| \frac{\frac{1}{2}(\dot{\phi})^2 - V(\phi)}{\alpha e} \right|. \quad (5-113)$$

将上式对 ϕ 作变分，可得场方程

$$\ddot{\phi} + \left(3H + \frac{\dot{\zeta}}{\zeta + 1 - \beta} \right) \dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} = 0, \quad (5-114)$$

其中 $\zeta \equiv \ln |(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V)/\alpha|$ 。这比 Quintessence 场方程多了一项 $(\dot{\zeta}/(\zeta - 1 + \beta))\dot{\phi}$ 。为简单计算，我们取 $\beta = 1$ 。将作用量对度规 $g^{\mu\nu}$ 作变分，得到标量场的能量密

度和压强

$$\rho_\phi = T_0^0 = \alpha \left[\left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right) \left(\ln \left| \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \right| - 1 \right) + \dot{\phi}^2 \right], \quad (5-115)$$

$$p_\phi = -\frac{1}{3} T_i^i = \alpha \left[\left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \right) \left(\ln \left| \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \right| - 1 \right) \right]. \quad (5-116)$$

考虑暗能量只与暗物质有能量交换，那么能量密度的动力学方程为

$$\dot{\rho}_\phi + 3H(\rho_\phi + p_\phi) = -\Gamma\rho_\phi, \quad (5-117)$$

$$\dot{\rho}_m + 3H\rho_m = \Gamma\rho_\phi, \quad (5-118)$$

$$\dot{\rho}_r + 3H(\rho_r + p_r) = 0. \quad (5-119)$$

辐射的能量密度按 $\rho_r \propto a^{-4}$ 的方式独立的衰减。

下面我们讨论最简单的情况： $V(\phi) = 0$ 。那么能量密度和压强可以写为

$$\rho_\phi = \alpha e^\varepsilon (\varepsilon + 1), \quad (5-120)$$

$$p_\phi = \alpha e^\varepsilon (\varepsilon - 1), \quad (5-121)$$

其中 $\varepsilon = \ln(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2/\alpha)$ 。暗能量的密度是正定的， $\rho_\phi > 0$ ，这要求 $\varepsilon > -1$ 。状态方程为

$$w = \frac{\rho_\phi}{p_\phi} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}. \quad (5-122)$$

在高端端， $\varepsilon \gg 1$ ，则 $w \rightarrow 1$ ，这与 YMC 不同(YMC 在高端端， $w \rightarrow 1/3$)。在临界点 $\varepsilon = 0$ ，有 $w = -1$ 。而在 $-1 < \varepsilon < 0$ 时， $w < -1$ 。因此有效标量场也很容易实现物态跨越 -1 。定义 $x \equiv \rho_m/\alpha$ ， $r = \rho_r \equiv \alpha$ ，方程(5-117)-(5-119)可写为

$$\varepsilon' + \frac{6\varepsilon}{\varepsilon + 2} + \frac{\gamma(\varepsilon + 1)}{h(\varepsilon + 2)} = 0, \quad (5-123)$$

$$x' + 3x - \frac{\gamma}{h}(1 + \varepsilon)e^\varepsilon = 0, \quad (5-124)$$

$$r' + 4r = 0, \quad (5-125)$$

其中 “ $' \equiv d/d \ln a$ ”， $\gamma \equiv \Gamma/(\frac{8\pi G\alpha}{3})^{1/2}$ ， $h \equiv [x + r + e^\varepsilon(1 + \varepsilon)]^{1/2}$ 。我们讨论一下两种特例： $\gamma = 0$ 和 $\gamma = 0.2$ 。

♠ 无耦合: $\gamma = 0$

$\gamma = 0$ 意味着暗能量和物质之间没有能量交换, 那么物质 $\rho_m \propto a^{-3}$ 。为解微分方程组(5-123)-(5-125), 我们取初始时刻 $z_i = 10^8$ 。为得到 $\Omega_m \sim 0.27$, $\Omega_r \sim 5 \times 10^{-5}$, 初始条件取为: $x_i = 2.52 \times 10^{23}$, $r_i = 5.38 \times 10^{27}$ 。而暗能量可以取很宽的初始条件 $0 \leq \varepsilon_i \leq 55$, 这对应着 $\rho_{\phi i}$ 跨越 25 个量级, 因此这种模型可以很好的解释巧合性问题。作为示例, 我们取了三个初始值 $\varepsilon_i = 0, 10, 50$ 。图5-17画出了暗能量密度和物态的演化, 我们发现当取暗能量密度初值比较大时(例如 $\varepsilon_i = 50$), 早期有效标量场的密度比 YMC 的密度下降的快。这是因为在早期 YMC 的物态 $w = 1/3$, 而早期有效标量场的物态 $w = 1$ 。而对于 $w =$ 常数, 有 $\rho \propto a^{-3(1+w)}$, 因此在早期 $\rho_\phi \propto a^{-6}$, $\rho_y \propto a^{-4}$ 。所以 YMC 在早期跟踪辐射, 而有效标量场的密度早期下降的比辐射还要快。暗能量的物态 w_ϕ 从 1 很快下降到 -1 , 总的物态

$$w_{tot} = p_T/\rho_T = \Omega_\phi(t)w_\phi(t) \quad (5-126)$$

最后也趋向于 -1 , 因为在 $t \rightarrow \infty$ 时, 有 $\Omega_\phi \rightarrow 1$, $w_\phi \rightarrow -1$ 。而 $\varepsilon_i = 0$ 时, $\rho_\phi = \rho_c =$ 常数, $w_\phi = -1 =$ 常数, 这与 LCDM 的性质一样。因此从宏观现象的意义上讲, LCDM 模型只是无耦合有效标量场模型的一个特例。参数 α 必须通过观测来确定。我们的计算表明, 在 $(0, 55)$ 之间的任意 ε_i 都有 $\varepsilon_0 \equiv \varepsilon(z=0) = 0$, 因此由方程(5-120)得 $\alpha \simeq 0.73\rho_c$ 。我们无法说明为什么 α 必须恰好取这个值才能与观测一致, 所以精细调节问题在该模型中仍然存在。

♠ 耦合: $\gamma = 0.2$

同无耦合的情形一样, 我们也必须保证理论预言的能量密度与目前的观测值一致。因此我们取 $x_i = 2.18 \times 10^{23}$, 这个值之所以比无耦合时 x_i 的值, 是因为暗能量会将一部分能量转移到物质中去。辐射的初值跟前面一样, 因为我们没有考虑暗能量和辐射的能量交换。暗能量的初始条件也和上面的一样, $\Omega_{\phi i} = (0, 55)$ 。从图5-18中我们看出, 由于暗能量和物质的耦合, 在未来某个时候物质的密度近似变为常数, 而暗能量的物态也会小于 -1 。根据我们计算, $\Omega_\phi(t \rightarrow \infty) = 0.94$, $\Omega_m(t \rightarrow \infty) = 0.06$, 于是当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\rho_\phi/\rho_m =$ 常数, 因此这是一个“scaling solution” [Copeland, Liddle & Wands, 1998]。计算还表明, $w_\phi(t_0) \simeq -1.05$, $w_\phi(t \rightarrow \infty) \simeq -1.07$ 。正如 YMC 一样, 有效标量场模型物态也可以光滑的跨越 -1 。注意这时我们可以检验 w_{tot} 最后也趋向于 -1 , 只需将 $\Omega_\phi = 0.94$ 和 $w_\phi = -1.07$ 代入方程(5-126)中即可验证, 后面我们还会理论证明这一结论。

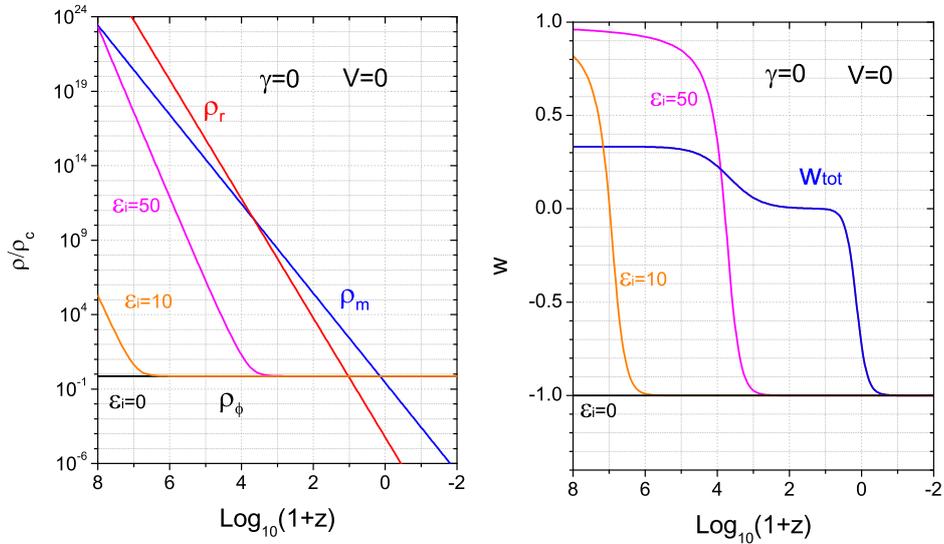


图 5-17 无耦合的有效标量场能量密度和物态的演化。

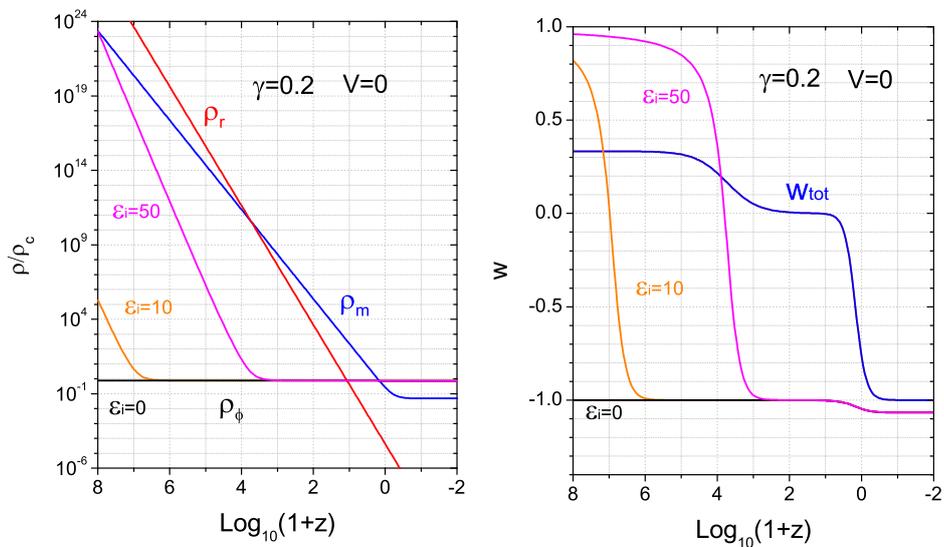


图 5-18 耦合($\gamma = 0.2$)的有效标量场能量密度和物态的演化。

5.4.2 有效标量场的吸引子解

下面我们以 $\gamma = 0.5$ 为例来讨论一下有效标量场的吸引子解。对于耦合在一起变量为 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的一阶微分方程组:

$$\dot{x} = f(x, y, t), \quad \dot{y} = g(x, y, t), \quad (5-127)$$

其中 f 和 g 是变量 x , y 和 t 的函数。如果 f 和 g 不显含 t , 那么系统(5-127)就是一个自动系统 [Copeland, Liddle & Wands, 1998]。如果这个自动系统在某个点 (x_c, y_c) 有

$$(f, g)|_{(x_c, y_c)} = 0, \quad (5-128)$$

那么点 (x_c, y_c) 称为固定点或者临界点。进一步, 如果在 $t \rightarrow \infty$ 时有

$$(x(t), y(t)) \rightarrow (x_c, y_c) \quad (5-129)$$

则 (x_c, y_c) 被称为吸引子解。方程(5-123)和(5-124)就是一组这样的自动系统(这里我们忽略辐射 $r = 0$, 因此 $h = \sqrt{x + (1 + \varepsilon)e^\varepsilon}$)。令方程(5-123)和(5-124)中 $\varepsilon'_c = x'_c = 0$, 我们得到

$$6\varepsilon_c = -\frac{\gamma}{h_c}(1 + \varepsilon_c), \quad (5-130)$$

$$x_c = -2\varepsilon_c e^\varepsilon. \quad (5-131)$$

以 $\gamma = 0.2$ 为例, 解上面的方程容易得

$$\varepsilon_c = -0.077, \quad x_c = 0.1426. \quad (5-132)$$

我们计算发现, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $(\varepsilon, x) \rightarrow (\varepsilon_c, x_c)$ 。因此这是一个吸引子解。在固定点, 暗能量的密度参数为

$$\Omega_\phi = \frac{(1 + \varepsilon_c)e^{\varepsilon_c}}{(1 + \varepsilon_c)e^{\varepsilon_c} + x_c} = \frac{1 + \varepsilon_c}{1 - \varepsilon_c}, \quad (5-133)$$

其中上式我们利用了(5-131)式。结合方程(5-122), 有

$$w_{tot} = \Omega_\phi w_\phi = -1. \quad (5-134)$$

因此当 $t \rightarrow \infty$ 时, 吸引子解给出总物态为 -1 , 这也从理论上证明了上一小节中讨论的耦合和无耦合模型中的都提到的这个结论。所以此结论与 γ 的具体取值是无关的。下面我们分析一下, 这个固定点是否是稳定的。假设暗能量和物

质分别在固定点处有小扰动

$$\varepsilon = \varepsilon_c + \delta\varepsilon, \quad x = x_c + \delta x, \quad (5-135)$$

代入程(5-123)和(5-124)中有

$$\begin{pmatrix} \delta\varepsilon' \\ \delta x' \end{pmatrix} = \mathcal{M} \begin{pmatrix} \delta\varepsilon \\ \delta x \end{pmatrix}, \quad (5-136)$$

矩阵 \mathcal{M} 为

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} G_{,\varepsilon} + R_{,\varepsilon} & R_{,x} \\ F_{,\varepsilon} & F_{,x} - 3 \end{pmatrix}_{(\varepsilon=\varepsilon_c, x=x_c)}, \quad (5-137)$$

其中 $G \equiv -\frac{6\varepsilon}{2+\varepsilon}$, $R \equiv -\frac{\gamma(\varepsilon+1)}{h(\varepsilon+2)}$, $F \equiv -R(\varepsilon+2)e^\varepsilon$ 。方程组(5-136)的解的形式为

$$\delta\varepsilon = C_1 e^{\mu_1 N} + C_2 e^{\mu_2 N}, \quad (5-138)$$

$$\delta\varepsilon = C_3 e^{\mu_3 N} + C_4 e^{\mu_4 N}, \quad (5-139)$$

其中 C_1, C_2, C_3, C_4 是积分常数, μ_1 和 μ_2 是矩阵(5-140)的两个本征值。如果固定点是稳定的, 则至少要满足下列两个条件之一 [Copeland, Sami & Tsujikawa, 2006]: (1) \mathcal{M} 的两个本征值都为负值(stable node); (2) \mathcal{M} 的两本征值的实部都为负值, 且 $|\mathcal{M}|$ 是负的(stable spiral)。将吸引子解(5-132)代入(5-140)式中, 得

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} -3.1659 & 0.1205 \\ 0.5095 & -3.2146 \end{pmatrix}, \quad (5-140)$$

其本征值为

$$\mu_1 = -3.4392, \quad \mu_2 = -2.8372. \quad (5-141)$$

因此吸引子解(5-132)是稳定。

5.4.3 观测对有效标量场的限制

前面我们结合观测利用高红移宇宙年龄、Statefinder 诊断以及 Om 诊对 DV 模型和 YMC 模型做了一些检验和限制, 现在我们用卡方分析对有效标量场模型的参数做一些限制。我们用三种独立的实验观测数据, 包括: Ia 型超新星数据 [Hicken, *et al.*, 2009; Kowalski, 2008] (包括 Union+CfA3 的共 397 颗超新星)、SDSS 对 BAO 的观测 [Eisenstein, *et al.*, 2005]和 WMAP5 对 CMB 的观测

[Komatsu, *et al.*, 2009]。

首先, 对于超新星, 卡方估计值为

$$\chi_{SN}^2(p; \mu_0) = \sum_{i=1}^{397} \frac{[\mu_{obs}(z_i) - \mu_{th}(z_i)]^2}{\sigma_i^2}, \quad (5-142)$$

其中 p 代表一系列的参数, 例如 Ω_m 和 γ 。 μ_{obs} 是观测到的距离模数, 具体的值见文献 [Hicken, *et al.*, 2009] 中的表一。 μ_{th} 是理论给出的距离模数, 其定义式见(5-13), 也可以写成

$$\mu_{th}(z) \equiv 5 \log_{10} D_L(z) + \mu_0, \quad (5-143)$$

其中 $\mu_0 \equiv 42.38 - 5 \log_{10} h_0$, 而

$$D_L(z) = H_0(1+z) \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \quad (5-144)$$

是以哈勃距离为单的光度距离。参数 μ_0 可以被积分掉 [Nesseris & Perivolaropoulos, 2005]。其次, 与 BAO 相应的卡方估计值为

$$\chi_{BAO}^2 = \frac{(A - A_{obs})^2}{\sigma_A^2}, \quad (5-145)$$

其中

$$A \equiv \frac{\sqrt{\Omega_m} H_0}{H(z_b)^{1/3}} \left[\frac{1}{z_b} \int_0^{z_b} \frac{dz}{H(z)} \right]^{2/3}, \quad (5-146)$$

$z_b = 0.35$ 是观测样品中的一个典型红移。 A 的观测值表示为

$$A_{obs} = 0.469(n_s/0.98)^{-0.35} \pm 0.017, \quad (5-147)$$

其中 $n_s = 0.96$ 是原初扰动的谱指数, $\sigma_A = 0.017$ 。最后, CMB 的卡方估计值为

$$\chi_{CMB}^2 = \frac{(R - R_{obs})^2}{\sigma_R^2}, \quad (5-148)$$

其中

$$R \equiv \sqrt{\Omega_m} H_0 \int_0^{z_{rec}} \frac{dz}{H(z)}, \quad (5-149)$$

$z_{rec} = 1090$ 是复合时期的红移。 WMAP5 给出

$$R_{obs} = 1.710 \pm 0.019, \quad (5-150)$$

其中 $\sigma_R = 0.019$ 。于是总的卡方值为

$$\chi^2 = \chi_{SN}^2 + \chi_{BAO}^2 + \chi_{CMB}^2. \quad (5-151)$$

注意 A 和 R 是与 H_0 无关的量，因此 χ_{BAO}^2 和 χ_{CMB}^2 中并不含 μ_0 。

对于无耦合的有效标量场模型， χ^2 只有一个自由参数 Ω_m 。计算卡方的最小值得 $\chi_{\min}^2 = 467.620$ ，此时对应着 $\Omega_m = 0.273$ 。具体的，我们得到如下结果： $\Omega_m = 0.273^{+0.015}_{-0.014}$ (68.3%的置信度)； $\Omega_m = 0.273^{+0.030}_{-0.028}$ (95.4%的置信度)； $\Omega_m = 0.273^{+0.045}_{-0.041}$ (99.7%的置信度)。我们发现同样的数据对 LCDM 模型作卡方检验也得到同样的结果，因此在近期无耦合的有效标量场模型与 LCDM 模型无法区分。对于 $\gamma = 0.2$ 的模型，通过计算我们发现，在 $\Omega_m = 0.297$ 时卡方有最小值 $\chi_{\min}^2 = 510.192$ 。具体的有： $\Omega_m = 0.297^{+0.015}_{-0.014}$ (68.3%的置信度)； $\Omega_m = 0.297^{+0.030}_{-0.028}$ (95.4%的置信度)； $\Omega_m = 0.297^{+0.046}_{-0.041}$ (99.7%的置信度)。我们还发现， γ 越大，得到的 χ_{\min}^2 越大。所以目前的观测更支持无耦合模型，但是如果有强烈的观测证据显示暗能量的物态小于 -1 ，那么耦合模型就不能轻易被排除。除此之外，我们把 γ 当作自由参数也做了卡方分析。我们得到 $\chi_{\min}^2 = 465.520$ 对应 $\Omega_m = 0.279$ ， $\gamma = -0.066$ 。这样得到的现在的暗能量物态为 $w_0 = -0.99$ 。联合置信区间如图 5-19 所示，观测更支持 $\gamma < 0$ ，即物质将能量转移到暗能量中。不幸的是，这会导致在不久的将来出现 $\rho_m < 0$ ，而这是违背物理的。这些结果都是基于现有的观测数据，人们期待着更完备更精确的观测数据。

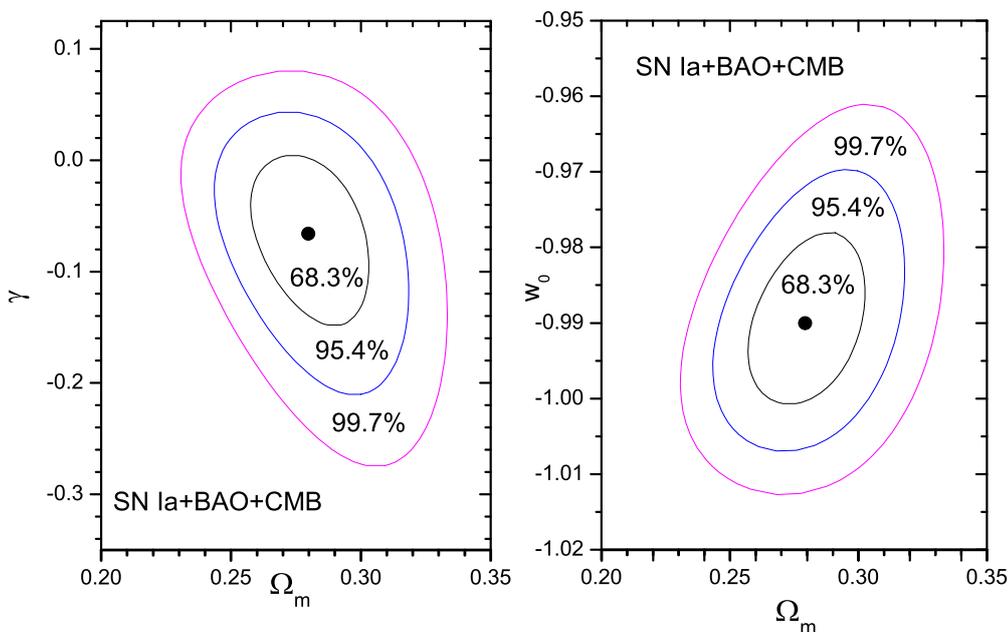


图 5-19 SN, BAO 和 CMB 约束的参数空间 $\Omega_m - \gamma$ 和 $\Omega_m - w_0$ 。

第6章 总结与展望

6.1 总结

在这篇论文中，我们主要讨论了三个方面的内容：残余引力波，高频引力波探测器和宇宙暗能量。下面我们对这几个方面的内容以及主要结论分别总结如下：

我们首先讨论了宇宙残余引力波。为方便讨论，我们先简要介绍了引力波的基本理论，宇宙中的引力波源以及分频段的探测方法。接着重点讲述了残余引力波的产生和演化。残余引力波产生于宇宙暴涨时期，形成了近似尺度不变的谱。然后经过了再加热时期，辐射为主时期，物质为主时期和加速膨胀时期，最终演化成今天的残余引力波谱。它的频段非常宽，大约从 10^{-18}Hz 到 10^{10}Hz 。我们统一使用共形时间的幂律形式来描述各个阶段的尺度因子，区别在于各阶段的指数不同。那么各个阶段的引力波解析解很容易得到，是贝赛尔函数和诺依曼函数的组合。为物理上直观的理解，我们计算了各个波段的转移函数。在宇宙视界之外的引力波，幅度保持为常数，而视界之内引力波的幅度以反比于宇宙标度因子的方式衰减： $h_k \propto 1/a$ 。不同波数的引力波进入视界的时间不同，波数越大(波长越小)的引力波越早进入视界，因此也就衰减的越厉害。于是频率高的引力波幅度越低，比如 $h(\nu = 10^{10}\text{Hz})/h(\nu = 10^{-18}\text{Hz}) \sim 10^{-29}$ 。然后我们分析了暴涨的跑动谱指数 α_t 对引力波谱及能量功率谱的影响，发现在高频段，不同 α_t 的引力波谱差别很大，而低频部分则影响较小。例如：当取定 $(r, \beta) = (0.22, -2.015)$ 、 $\alpha_t = 0.01$ 和 $\alpha_t = -0.01$ ， $h(\nu, \tau_0)$ 在 $\nu \simeq 10^{-2}\text{Hz}$ 差了3个量级，在 $\nu \simeq 10^2\text{Hz}$ 差了5个量级，在 $\nu \simeq 10^4\text{Hz}$ 差了6个量级，在 $\nu \simeq 10^9\text{Hz}$ 差了8个量级。通过我们画出的功率谱图可以看到，正的 α_t 会使功率谱偏离与幂律谱，在高频部分“往上弯”；而负的 α_t 会使功率谱偏离与幂律谱，在高频部分“往下弯”。接着，作为量级上的估计，我们把理论预言的残余引力波同当前正在运行或者未来将要运行的引力波探测器的灵敏度作了对比，包括地面激光干涉仪引力波探测器LIGO, AdvLIGO, 空间干涉仪探测器LISA, 地面低温共振棒探测器EXPLORER以及共振腔探测器MAGO。目前正在运行的探测器很难探测到残余引力波，而将要运行的AdvLIGO和LISA则很有希望，我们也希望计划中的DECIGO, BBO能早日运行，这给宇宙早期残余引力波的探测带来

更大的希望。最后我们比较严格地用最近LIGOS5的运行结果对 β 和 α_t 作了限制。LIGO S5利用了交叉关联技术，将单个探测器L1和H1联合使用，把灵敏度提高了两个量级。在残余引力波取定参数 $r = 0.55, \alpha_t = 0$ 时，交叉关联的探测器将 β 限制为 $\beta < -1.88$ ，而单个探测器只能限制为 $\beta < -1.85$ 。对于固定参数 $r = 0.55, \beta = -2$ ，交叉关联将 α_t 限制为 $\alpha_t < 0.01$ ，而H1/L1只能限制到 $\alpha_t < 0.018$ 。由于LIGO S5的探测频段比较窄 $\Delta\nu \sim 120\text{Hz}$ ，那么在该频段不同参数的引力波谱会发生简并，但是不同的参数 r, β 和 α_t 对引力波谱影响的方式不同。 r 会使整个频段的引力波谱增加或减小， β 会使谱在高频部分明显的增加或减小但总保持幂律形式，而 α_t 虽然也是在高频部分明显的影响引力波谱但会使其偏离与幂律的形式。这样我们可以通过多波段观测来破除这种简并，比如在LIGO S5频段的简并，可以通过LISA来破除。根据Allen给出的约化交叉关联函数 $\gamma(\nu)$ ，我们计算了不同参数 (β, α_t) 的残余引力波的信噪比，由于信噪比正比于参数 r ，我们只计算了 $r = 0.1$ 的情况，其它 r 值的信噪比可以自然的得到。

接着我们讨论了两种高频引力波探测器。首先，微波激光引力波探测器是一个新的思路。一束线偏振激光通过一个强磁场区域在引力波的影响下，在垂直于激光传播的径向方向产生了扰动光子流，其衰减比零阶光子流要慢，通过分型膜可以将扰动光子流的信号很好的保存1m左右，然后被微波接收机探测到。这里利用了激光和引力波的共振效应，因此该探测器探测的引力波的频率就是激光的频率，故探测频段很窄。我们计算了引力波沿各个方向产生的扰动光子流，发现引力波沿z轴正方向时，产生的扰动光子流强度最大，该探测器对引力波的入射方向有一定敏感性。由此我们估计了该探测器的约化因子 $1/4 < F < \pi/4$ 。接着我们粗略计算出了探测器的灵敏度，它与很多因素有关，如激光的功率、静磁场强度、环境的温度、激光的品质因数、激光与静磁场的作用尺度等。当取定如下参数后，

1) 激光的输出功率为 $P = 2\text{kW}$ ，这相当于束腰半径 $W_0 = 0.05\text{m}$ 处的电场强度 $\psi_0 = 1.8 \times 10^4\text{Vm}^{-1}$ 。

2) 静磁场的强度 $\hat{B}_y^{(0)} = 3\text{T}$ 。

3) 静磁场在z方向的尺度 $l = 0.4\text{m}$ 。

4) 静磁场在x方向的尺度 $l' = l'_1 + l'_2 = 0.4\text{m}$ 。

5) 激光的频率 $\nu_e \simeq 4.5\text{GHz}$ 。我们计算得到可探测的最小幅值为 $h_{\min} \simeq 4 \times 10^{-30}$ ，距离探测目标大约还有4个量级的差距。由于理论预言残余引力波的频率上限约为 $\nu_g \sim 10^{11}\text{Hz}$ ，因此100GHz以上的微波激光[Loughborough, 2007]可以被用来检验是否有高于 10^{11}Hz 的残余引力波，以验证理论预言的正确与否。

其次我们介绍了另一种高频引力波探测器，环形波导腔探测器。在环形腔中传播的电磁波的偏振矢量在引力波的影响下会沿与传播方向垂直的方向偏转，偏转角度正比于引力波的振幅。我们通过对偏振矢量偏转的计算发现这种波导引力波探测器实际上只能探测沿垂直于环形波导平面的方向(或有该方向分量)、线性偏振的引力波。其他方向或是非线性偏振模式的引力波是不能被探测的。残余引力波虽然是一种理想的探测源，但由于其幅度非常小，所以探测起来非常困难。就目前Cruise小组的装置，加速膨胀宇宙中的残余引力波的幅度比探测器的灵敏度还至少小12个量级。

最后我们讨论的是暗能量问题。首先介绍暗能量的一些观测证据：对超新星Ia的观测，CMB各向异性的观测，重子声速振荡的观测，对星系团中X射线辐射的能量与星系团总质量比值的测量等等。然后我们介绍了两种最流行的模型：宇宙学常数模型和标量场模型，以及暗能量模型中普遍存在的两个主要问题：精细调节问题和巧合性问题。接着介绍了我们在真空能衰减模型、两圈Yang-Mills场凝聚模型和有效标量场模型做过的一些工作。真空能衰减模型认为暗能量的能量密度正比于哈勃参数 H ，一定程度上缓解了精细调节问题，同时也比较容易解释高红移宇宙年龄问题。而耦合的YMC模型更加容易解释高红移宇宙年龄问题。我们也画出了真空衰减模型和两圈YMC模型的Statefinder和 Om 诊断。这两种诊断比较容易区分LCDM模型和真空能衰减模型。但Statefinder诊断很难区分LCDM模型和YMC模型，与之相比， Om 诊断更有效。随着观测技术的发展，我们可以通过Statefinder和 Om 诊断利用观测数据来鉴别暗能量模型。在量子YM场模型的启发下，我们构造了有效标量场的拉氏量。通过计算，我们发现该模型可以很好的解释巧合性问题，但是不能解决精细调节问题。能标参数 α 需要通过观测来确定。LCDM模型只是无耦合有效标量场模型的一个特例。通过稳定性分析，我们发现该模型的动力学演化稳定，不受小扰动的影响，是稳定的吸引子解。另外，我们发现该模型的状态方程 w 在演化到达宇宙现阶段时可以达到 -1 ，如果暗能量和物质有耦合，状态方程 w 则可以自然地跨越 -1 ，而不必引入比较奇怪的场。最后，我们利用Ia型超新星、重子声速振荡(BAO)和微波背景辐射(CMB)的观测数据，我们对有效标量场模型作了 χ^2 分析。当取定耦合常数 γ 时，我们发现观测更支持无耦合模型($\gamma = 0$)，而把 γ 也去为模型参数时，发现 χ^2 最小值给出 $\gamma = -0.066$ 。但是 $\gamma < 0$ 会使物质的能量密度在未来为负值，这在物理上是不能接受的，因此我们期待更完备的观测数据来作更准确的检验。

6.2 展望

残余引力波携带着宇宙早期的信息，很多物理过程如中微子退耦，QCD相变，正负电子对湮灭等等都在残余引力波谱上留下了烙印，因此残余引力波是研究宇宙早期最重要的手段之一。随着各种各样引力波探测器的建造、运行，我们越来越有希望探测到引力波，乃至“看到”宇宙早期的容貌。未来要运行或发射的探测器如AdvLIGO, LISA, DECIGO, BBO等等会对引力波的探测带来很大希望。除了引力波探测器以外，CMB的功率谱上也携带了残余引力波的信息，这也是探测残余引力波的一个重要手段。CMB的研究目前已经两次获得诺贝尔奖的肯定。最近几年CMB功率谱的研究取得了举世瞩目的成就，尤其是WMAP观测结果的出现，大大提高了对暴涨和其它宇宙学参数的限制。虽然目前还没有从观测上最终发现宇宙残余引力波存在的证据，但是下一代望远镜，特别是Planck将再次大大提高观测精度，完全有可能最终并首次发现宇宙的残余引力波，这对暴涨模型以及广义相对论的确认将具有决定性的意义。毫秒脉冲星观测，也将取得重要的进展。在我们更为关心的理论研究方面，也将有更多的工作需要作，例如孤立的引力波源对残余引力波的污染如何？其它的一些非单场暴涨所预言的引力波大小如何？目前以及未来的一些观测可能对其有何限制？其它的一些宇宙学现象，例如宇宙磁场，湍流等等这些问题都是我们将来的研究课题。

微波激光引力波探测器现在只是理论设计的起步阶段，但由于建造的费用要比激光干涉仪小，而且是其它波段探测的一个有益的补充，所以建造这样一个探测器是非常有必要的。由于不同的参数 β , β_s 和 α_t 都会在高频部分明显的影响残余引力波谱，这种探测器如能探测到残余引力波，那么将有助于限制这些参数。而环形波导腔探测器也有很大的提升空间，总起来说有下面几种思路：(1) 应用低温装置降低环境的温度，来减小热噪音；(2) 增加波导的品质因数，是电磁波在波导腔内传播的有效圈数增加；(3) 提高电磁波注入的功率 P_{in} ；(4) 利用多个探测器交叉关联。另一方面，引力波谱的幅度在低频时更大，因而更有希望被探测到，所以该探测器可以向低频段发展。

目前许多不同的观测证据都直接或者间接地证明了暗能量的存在，并且有些观测倾向于暗能量具有 $w < -1$ 的物态。如何理解暗能量的物理本质，以及如何从观测上更好地限制暗能量的状态方程以及其演化行为仍然是目前宇宙学研究最重要的课题之一。此外，还有很多更为深入的问题需要研究：例如如何自然的解决巧合性问题和精细调节问题？YMC暗能量的密度扰动行为如何？怎样

最有效的探测到暗能量？这一系列的问题都是值的我们去探索的。

参考文献

- [1] A. Abramovich, *et al.*, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A 375, 164 (1996).
- [2] S. Adler, Nucl. Phys. B 217, 3881 (1983).
- [3] S. Adler and T. Piran, Phys. Lett. B 117, 91 (1982); Rev. Mod. Phys. 56, 1 (1984).
- [4] N. Afshordi, Y. S. Loh and M. A. Strauss, Phys. Rev. D 69, 083524 (2004).
- [5] U. Alam, V. Sahni, T. D. Saini and A. A. Starobinsky, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 344, 1057 (2003).
- [6] U. Alam, V. Sahni, T. D. Saini and A. A. Starobinsky, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 354, 275 (2004).
- [7] A. Albrecht and P. J. Steinhardt, Phys. Rev. Lett. 48, 1220 (1982).
- [8] B. Allen, gr-qc/9604033.
- [9] B. Allen and J. Romano, Phys. Rev. D 59, 102001 (1999).
- [10] S. W. Allen, *et al.*, MNRAS, 353, 457 (2004).
- [11] S. W. Allen, *et al.*, MNRAS, 383, 879 (2007).
- [12] M. Ando, *et al.*, Phys. Rev. Lett. 86, 3950 (2001).
- [14] C. Armendariz-Picon, T. Damour and V. Mukhanov, Phys. Lett. B 458, 209 (1999).
- [14] C. Armendariz-Picon, V. Mukhanov and P. J. Steinhardt, Phys. Rev. Lett. 85, 4438 (2000); Phys. Rev. D 63, 103510 (2001).
- [15] W. D. Arnett, Astrophys. J. 253, 785 (1982).
- [16] P. Astier, *et al.*, Astron. Astrophys. 447, 31 (2006).
- [18] P. Astone, *et al.*, Astropart. Phys. 25, 114028 (2008).
- [18] P. Astone, *et al.*, Europhys. Lett. 12, 5 (1990); G. Pallottino, in “Gravitational Waves, Sources and Detectors,” pp 159 (Singapore, World Scientific, 1997); E. Mauceli, *et al.*, Phys. Rev. D54, 1264 (1996); D. Blair, *et al.*, Phys. Rev. Lett. 74, 1908 (1995); M. Cerdonio, *et al.*, Class. Quant. Grav. 14, 1491 (1997).
- [19] R. Ballatini, *et al.*, INFN Report No. INFN/TC-05/05, (2005).
- [20] R. Ballatini, *et al.*, arXiv:gr-qc/0502054, INFN Technical Note INFN/TC-05/05, (2005).
- [21] Z. W. Barber, *et al.*, Phys. Rev. Lett. 96, 083002 (2006).

-
- [22] J. S. Bendat and A. G. Piersol, *Random Data* (New York: Wiley) pp 15-20 (1986).
- [23] C. L. Bennett *et al.*, *Astrophys. J. Suppl.* 148, 1 (2003).
- [24] G. S. Bisnovatyi-Kogan and V. N. Rudenko, *Class. Quantum Grav.* 21, 3347 (2004).
- [25] H. Bondi, *Nature*, 179, 1072 (1957).
- [26] C. Bonvin, C. Caprini, and R. Durrer, astro-ph/0606584.
- [27] S. Boughn and R. Crittenden, *Nature*, 427, 45 (2004).
- [28] H. A. Borges and S. Carneiro, *Gen. Rel. Grav.* 37, 1385 (2005).
- [29] A. Buonanno, gr-qc/0303085.
- [30] R. R. Caldwell, M. Kamionkowski and N. N. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* 91, 071301 (2003).
- [31] R. R. Caldwell, *Phys. Lett. B* 545, 23 (2002).
- [32] R. R. Caldwell, R. Dave and P. J. Steinhardt, *Phys. Rev. Lett.* 80, 1582 (1998).
- [33] R. R. Caldwell, M. Kamionkowski and N. N. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* 91, 071301 (2003).
- [34] S. Carneiro, C. Pigozzo and H. A. Borges, *Phys. Rev. D* 74, 023532 (2006).
- [35] S. Carneiro, *J. Phys. A* 40, 6841 (2007).
- [36] S. M. Carroll, M. Hoffman and M. Trodden, *Phys. Rev. D* 68, 023509 (2003).
- [37] T. Chiba, T. Okabe and M. Yamaguchi, *Phys. Rev. D* 62, 023511 (2000).
- [38] J. M. Codina, J. Graells and C. Martín, *Phys. Rev. D* 21, 2731 (1980).
- [39] M. Cohen, *et al.*, *Phys. Rev. E* 54, 4178 (1995).
- [40] S. Coleman and E. Weinberg, *Phys. Rev. D* 7, 1888 (1973).
- [41] A. Conley, *et al.*, *Astrophys. J.* 644, 1 (2006).
- [42] E. J. Copeland, A. R. Liddle and D. Wands, *Phys. Rev. D*, 57, 4686 (1998); T. Barreiro, E. J. Copeland and N. J. Nunes, *Phys. Rev. D* 61, 127301 (2002).
- [43] E. J. Copeland, M. Sami and S. Tsujikawa, *Int. J. Mod. Phys. D* 15, 1753 (2006).
- [44] J. Crowder and N. J. Cornish, *Phys. Rev. D* 72 083005 (2005); N. Seto, *Phys. Rev. D* 73, 063001 (2006).
- [45] A. M. Cruise, *Class. Quantum. Grav.* 17, 2525 (2000).
- [47] A. M. Cruise, R. M. J. Ingley, *Class. Quantum. Grav.* 22, s479 (2005).
- [47] A. M. Cruise, R. M. J. Ingley, *Class. Quantum. Grav.* 23, 6185 (2006).
- [48] R. H. Cyburt, B. D. Field, K. A. Olive, and E. Skillman, *Astropart. Phys.* 23, 313

- (2005).
- [49] T. Damour and A. Vilenkin, *Phys. Rev. Lett.* 85, 3761 (2000); *Phys. Rev. D* 64, 064008 (2001).
- [50] T. M. Davis, *et al.*, *Astrophys. J.* 666, 716 (2007).
- [51] J. Degallaix, B. Slagmolen, C. Zhao, L. Ju, and D. Blair, *Gen. Relativ. Gravit.* 37, 1581 (2005); P. Barriga, C. Zhao, and D. G. Blair, *Gen. Relativ. Gravit.* 37, 1609 (2005).
- [52] D. J. Eisenstein, *et al.*, *Astrophys. J.* 633, 560 (2005).
- [53] B. Feng, X. L. Wang and X. M. Zhang, *Phys. Lett. B* 607, 35 (2005); W. Hu, *Phys. Rev. D* 71, 047301 (2005).
- [54] V. Ferrari, *Annalen Phys.* 1, 3 (2000).
- [55] É.É. Flanagan and S. A. Hughes, *New J. Phys.* 7, 204 (2005).
- [56] W. L. Freedman, *et al.*, *Astrophys. J.* 553, 47 (2001).
- [57] W. L. Freedman, *et al.*, arXiv:0907.4524.
- [58] K. Freese, *et al.*, *Nucl. Phys. B* 287, 797 (1987).
- [59] A. Freise, *et al.*, *Class. Quant. Grav.* 22, S869 (2005); <http://www.virgo.infn.it/>.
- [60] A. C. S. Friaca, J. S. Alcaniz and J. A. S. Lima, *MNRAS*, 362, 1295 (2005).
- [61] J. A. Frieman, M. S. Turner and D. Huterer, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* 46, 385 (2008).
- [62] V. Gorini, A. Kamenshchik and U. Moschella, *Phys. Rev. D*, 67, 063509 (2003).
- [63] L. Grishchuk, *JETP* 40, 409 (1975).
- [64] L. Grishchuk, *Phys. Rev. D* 48, 3513 (1993); *Phys. Rev. Lett.* 70, 2371 (1993); *Class. Quant. Grav.* 10, 2449, (1993).
- [65] L. P. Grishchuk, *Class. Quant. Grav.* 14, 1445 (1997).
- [66] L. P. Grishchuk, *Lect. Notes Phys.* 526, 167 (2001); L. P. Grishchuk, arXiv: 0707.3319.
- [67] A. H. Guth, *Phys. Rev. D* 23, 347 (1981).
- [68] G. Hasinger, N. Scharrel and S. Komossa, *Astrophys. J.* 573, L77 (2002).
- [69] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of Spacetime*, (Cambridge University Press) (1973).
- [70] W. Hillebrandt and J. C. Niemeyer, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* 38, 191 (2000).
- [71] M. Hicken, *et al.*, *Astrophys. J.* 700, 1097 (2009).

-
- [72] G. Hobbs, *et al.*, arXiv:0911.5206.
- [73] P. Hoeflich, astro-ph/0409170.
- [74] B. Hou, *et al.*, Optics Express 13, 9149 (2005).
- [75] D. A. Howe and F. L. Walls, IEEE Transactions On Instrumentation And Measurement, Vol. Im-32, No. 1, March (1983).
- [76] W. Hu and S. Dodelson, Annu. Rev. Astron. Astrophys. 40, 171 (2002).
- [77] R. A. Hulse and J. H. Taylor, Astrophys. J. 195, L51 (1975).
- [78] D. Huterer, Phys. Rev. D 65, 063001 (2002).
- [79] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics* 3rd ed (Wiley, New York) (1999).
- [80] A. H. Jaffe, *et al.*, Phys. Rev. Lett. 86, 3475 (2001).
- [81] D. R. T. Jones, Nucl. Phys. B 75, 531 (1974); W. E. Caswell, Phys. Rev. Lett. 33, 244 (1974).
- [82] V. M. Kaspi, J. H. Taylor and M. F. Ryba, Astrophys. J. 428, 713 (1994).
- [83] D. Kleppner, H. C. Berg, S. B. Crampton and N. F. Ramsey, Phys. Rev 38, A972 (1964).
- [84] J. Khoury, B.A. Ovrut, P.J. Steinhardt and N. Turok, Phys. Rve. D 64, 123522 (2001); J. Khoury, *et al.*, Phys. Rev. D 65, 086007 (2002).
- [85] R. A. Knop, *et al.*, Astrophys. J. 598, 102 (2003).
- [86] K. D. Kokkotas, Reviews in Modern Astrophysics 20, 140 (2008).
- [87] E. W. Kolb and M. S. Turner, *The Early Universe*, (Addison-Wesley, Reading, MA, 1990).
- [88] E. Komatsu, *et al.*, Astrophys. J. Suppl. Ser. 180, 330 (2009).
- [89] E. Komatsu, *et al.*, arXiv:1001.4538.
- [90] A. Kosowsky and M.S. Turner, Phys. Rev. D 52, R1739 (1995).
- [91] M. Kowalski, *et al.*, Astrophys. J. 686, 749 (2008).
- [92] L. M. Krauss and B. Chaboyer, Science, 299, 65 (2003).
- [93] K. Kuroda, *et al.*, Int. J. Mod. Phys. D 8, 557 (2000).
- [94] B. Leibundgut, Ann. Rev. Astron. Astrophys. 39, 67 (2001).
- [95] F. Y. Li, M. X. Tang and D. P. Shi, Phys. Rev. D 67, 104008 (2003).
- [96] F. Y. Li, *et al.*, gr-gc/0604109.
- [97] F.Y. Li, *et al.*, Eur. Phys. J. C 56, 407 (2008).

-
- [98] F. Y. Li, M. X. Tang, J. Luo, and Y. C. Li, Phys. Rev. D 62, 044018 (2000).
- [100] C. Z. Li and F. Z. Zhao, *Electrodynamics Tutorial*, (Publishing Company of National University of Defense Technology, 1997).
- [100] M. Li, Phys. Lett. B 603, 1 (2004).
- [101] A. R. Liddle and D. H. Lyth, *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure*, (Cambridge University Press) (2000).
- [102] A. Liddle and L. Urena-Lopez, Phys. Rev. Lett. 97, 161301 (2006).
- [103] A. Linde, Phys. Lett. B 108, 389 (1982).
- [104] E. V. Linder, Phys. Rev. Lett. 90, 091301 (2003).
- [105] A. N. Lommen, astro-ph/0208572.
- [106] D. V. Lounasmaa, Physics Today, 42(10), 26 (1989).
- [107] Loughborough, Antennas and Propagation Conference, LAPC, 2-3 April, pp 325-328 (2007).
- [108] M. Maggiore, Physics Reports 331, 283 (2000).
- [109] R. N. Manchester, Chin. J. Astron. Astrophys. 6, 139 (2006).
- [110] H. X. Miao and Y. Zhang, Phys. Rev. D 75, 104009 (2007).
- [111] G. Miknaitis, *et al.*, MNRAS 362, 1301 (2007).
- [112] C. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler, *Gravitation*, (San Francisco: Freeman), pp 73, (1973).
- [113] T. Muta, *Foundations of Quantum Chromodynamics*, (World Scientific) (2000).
- [114] S. Nesseris and L. Perivolaropoulos, Phys. Rev. D 70, 123529 (2004).
- [115] S. Nesseris and L. Perivolaropoulos, Phys. Rev. D 72, 123519 (2005).
- [116] W. T. Ni, Class. Quant. Grav 26, 075021 (2009).
- [117] W. T. Ni, S. Shiomi, and A. C. Liao, Class. Quant. Grav. 21, S641 (2004); W. T. Ni, Int. J. Mod. Phys. D 17, 921 (2008).
- [118] M. Ozer and O. Taha, Phys. Lett. A 171, 363 (1986); Nucl. Phys. B 287, 776 (1987).
- [119] H. Pagels and E. Tomboulis, Nucl. Phys. B 143, 485 (1978).
- [120] L. Parker, Phys. Rev. 183, 1057 (1969).
- [121] L. Parker and Y. Zhang, Phys. Rev. D 44, 2421 (1991); Y. Zhang, Comm. Theor. Phys. 30, 603 (1998).
- [122] L. Parker and A. Raval, Phys. Rev. D 60, 063512 (1999).

-
- [123] H. V. Peiris, *et al.*, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* 148, 213 (2003).
- [124] W. J. Percival, *et al.*, *MNRAS* 381, 1053 (2007).
- [125] W. J. Percival, *et al.*, *MNRAS* 401, 2148 (2010).
- [126] J. Perenboom, *et al.*, *Physica B* 529, 294 (2001).
- [127] T. Plewa, A. C. Calder and D. Q. Lamb, *Astrophys. J. Lett.* 612, 37 (2004).
- [128] H. D. Politzer, *Phys. Rev. Lett.* 30, 1346 (1973); D. J. Gross and F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* 30, 1343 (1973); D. R. T. Jones, *Nucl. Phys. B* 75, 531 (1974); W. E. Caswell, *Phys. Rev. Lett.* 33, 244 (1974).
- [129] C. Pryke, *et al.*, *Astrophys. J.* 568, 46 (2002).
- [130] P. J. E. Peebles and B. Ratra, *Astrophys. J.* 325, L17 (1988); C. Wetterich, *Nucl. Phys. B* 302, 668 (1988); *A&A* **301**, 321 (1995); R. R. Caldwell, R. Dave and P. J. Steinhardt, *Phys. Rev. Lett.* 80, 1582 (1998); I. Zlatev, L. Wang and P. J. Steinhardt, *Phys. Rev. Lett.* 82, 896 (1999); P. J. Steinhardt, L. Wang and I. Zlatev, *Phys. Rev. D* 59, 123504 (1999).
- [131] B. Ratra and P. J. E. Peebles, *Phys. Rev. D* 37, 3406 (1988).
- [132] A. G. Riess, *et al.*, *Astron. J.* 116, 1009 (1998); *Astrophys. J.* 117, 707 (1999); *Astron. J.* 607, 665 (2004); S. Perlmutter, *et al.*, *Astrophys. J.* 517, 565 (1999); J. L. Tonry, *et al.*, *Astrophys. J.* 594, 1 (2003).
- [133] A. G. Riess, *et al.*, *Astrophys. J.* 659, 98 (2007).
- [134] A. G. Riess, *et al.*, *Astrophys. J.* 699, 539 (2009).
- [135] R. K. Sachs and Q. M. Wolfe, *Astrophys. J.* 147, 73 (1967).
- [136] V. Sahni, T. D. Saini, A. A. Starobinsky and U. Alam, *JETP Lett.* 77, 201 (2003); U. Alam, V. Sahni, T. D. Saini, A. A. Starobinsky, *MNRAS* 344, 1057 (2003).
- [137] V. Sahni, A. Shafieloo and A. A. Starobinsky, *Phys. Rev. D* 78, 103502 (2008).
- [138] L. Samushia and B. Ratra, *Astrophys. J. Lett.* 650, 5 (2006).
- [139] A. Sandage, *et al.*, *Astrophys. J.* 653, 843 (2006).
- [140] M. Santos, *et al.*, *Astrophys. J.* 598, 756 (2003).
- [141] S. Sasaki, *Prog. Theor. Phys.* 76, 1036 (1986).
- [142] G. K. Savvidi, *Phys. Lett. B* 71, 133, (1977); S. G. Matinyan and G. K. Savvidi, *Nucl. Phys. B* 134, 539 (1978).
- [143] Schützhold, *Phys. Rev. Lett.* 89, 081302 (2002).
- [144] D. J. Schwarz, *Mod. Phys. Lett. A* 13, 2771 (1998).

-
- [145] U. Seljak, *et al.*, Phys. Rev. D 71, 103515 (2005); U. Seljak, A. Slosar and P. McDonald, JCAP 0610, 014 (2006).
- [146] A. Sen, JHEP 0204, 48 (2002); JHEP 0207, 065 (2002).
- [147] N. Seto, S. Kawamura, and T. Nakamura, Phys. Rev. Lett. 87, 221103 (2001); S. Kawamura, *et al.*, Class. Quant. Grav. 23, S125 (2006).
- [148] J. Simon, L. Verde and R. Jimenez, Phys. Rev. D 71, 123001 (2005).
- [149] T. L. Smith, E. Pierpaoli and M. Kamionkowski, Phys. Rev. Lett. 97, 021301 (2006).
- [150] D. N. Spergel, *et al.*, Astrophys. J. Suppl. Ser. 148, 175 (2003).
- [151] D. N. Spergel, *et al.*, Astrophys. J. Suppl. Ser. 170, 377 (2007).
- [152] N. Straumann, gr-qc/0208027.
- [153] H. Takahashi, H. Tagoshi, and (TAMA Collaboration), Classical Quantum Gravity 21, S697 (2004).
- [154] M. Tegmark, *et al.*, Astrophys. J., 606, 702 (2004); Phys. Rev. D 69, 103501 (2004); A. C. Pope, *et al.*, Astrophys. J. 607, 655 (2004); W. J. Percival, *et al.*, MNRAS 327, 1297 (2001); U. Seljak, *et al.*, Phys. Rev. D, 71 103515 (2005);
- [155] The Advanced LIGO Team, <http://www.ligo.caltech.edu/advLIGO/>.
- [156] The LIGO Scientific Collaboration, <http://www.ligo.caltech.edu/>.
- [157] The LIGO Collaboration and The VIRGO Collaboration, Nature 460, 990 (2009).
- [158] The LISA International Science Team, <http://lisa.nasa.gov/>; <http://www.srl.caltech.edu/lisa/>.
- [159] S. E. Thorsett and R. J. Dewey, Phys. Rev. D 53, 3468 (1996).
- [160] M. Tinto, *et al.*, <http://www.srl.caltech.edu/shane/sensitivity/MakeCurve.html>.
- [161] M. L. Tong, Y. Zhang, and F. Y. Li, Phys. Rev. D 78, 024041 (2008).
- [162] M. L. Tong and Y. Zhang, Phys. Rev. D 80, 084022 (2009).
- [163] M. L. Tong and Y. Zhang, Phys. Rev. D 80, 023503 (2009).
- [164] M. L. Tong, Y. Zhang and T. Y. Xia, Int. J. Mod. Phys. D 18, 797 (2009).
- [165] M. L. Tong, Y. Zhang and Z. W. Fu, submitted (2010).
- [166] G. Veneziano and M. Gasperini, hep-th/0207130.
- [167] L. Verde, *et al.*, Astrophys. J. Suppl. Ser. 148, 195 (2003).
- [168] H. T. M. Wang, Proceedings of the IEEE, 77, 7 (1989).
- [169] S. Wang, Y. Zhang, T. Y. Xia, and H. X. Miao, Phys. Rev. D 77, 104016 (2008).

- [170] S. Wang, Y. Zhang and T. Y. Xia, JCAP 10, 037 (2008).
- [171] Y. Watanabe and E. Komatsu, Phys. Rev. D 73, 123515 (2006).
- [172] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, (John Wiley) (1972).
- [173] S. Weinberg, Rev. Mod. Phys. 61, 1 (1989).
- [174] S. Weinberg, *The Quantum Field Theory of Fields*, Volume II, pp 156, Cambridge, (1996).
- [175] W. J. Wen, *et al.*, Phys. Rev. Lett. 89, 223901 (2002).
- [176] B. Willke, *et al.*, Class. Quant. Grav. 19, 1377 (2002);
The GEO600 Team, <http://geo600.aei.mpg.de/>;
H. Lück, *et al.*, arXiv:1004.0339.
- [177] W. M. Wood-Vasey, *et al.*, Astrophys. J. 666, 694 (2007).
- [178] T. Y. Xia and Y. Zhang, Phys. Lett. B 656, 19 (2007).
- [179] A. Yariv, *Quantum Electronics*, 2nd ed (Wiley, New York) (1975).
- [180] Ya. I. Zel'dovich and I. D. Novikov, *The Structure and Evolution of the Universe*, (Chicago, University of Chicago Press), pp 157 (1983).
- [181] M. W. Zemansky and R. H. Dittman, *Heat and Thermodynamics*, sixth edition (Mcgraw-Hill international compang) section 18.7 (1981).
- [182] Y. Zhang, Phys. Lett. B 340, 18 (1994); Class. Quant. Grav. 13, 2145 (1996); Chin. Phys. Lett. 14, 237 (1997); Chin. Phys. Lett. 15, 622 (1998); Chin. Phys. Lett. 19, 1569 (2002).
- [183] Y. Zhang, Gen. Rel. Grav. 34, 2155 (2002); Y. Zhang, Gen. Rel. Grav. 35, 689 (2003); Y. Zhang, Chin. Phys. Lett. 20, 1899 (2003); Chin. Phys. Lett. 21, 1183 (2004).
- [184] Y. Zhang, Y. F. Yuan, W. Zhao and Y. T. Chen, Class. Quant. Grav. 22, 1383 (2005).
- [185] Y. Zhang, W. Zhao, Y. F. Yuan, and T. Y. Xia, Chin. Phys. Lett. 20, 1871 (2005).
- [186] Y. Zhang, *et al.*, Class. Quant. Grav. 23, 3783 (2006).
- [187] W. Zhao and Y. Zhang, Phys. Rev. D 74, 043503 (2006).
- [188] W. Zhao and Y. Zhang, Class. Quant. Grav. 23, 3405 (2006); Phys. Lett. B 640, 69 (2006).
- [189] W. Zhao and Y. Zhang, Phys. Rev. D 73, 123509 (2006).
- [190] Y. Zhang, T. Y. Xia and W. Zhao, Class. Quant. Grav. 24, 3309 (2007).

- [191] Y. Zhang, M. L. Tong and Z. W. Fu, to appear in PRD Rapid communication (2010).
- [192] W. Zhao, D. Baskaran, P. Coles, Phys. Lett. B 680, 411 (2009).
- [193] W. Zhao, Y. Zhang and M. L. Tong, arXiv:0909.3874.
- [194] L. Zhou, *et al.*, Appl. Phys. Lett. 82, 1012 (2003).
- [195] W. Zimdahl and D. Pavon, Gen. Rel. Grav. 36, 1483 (2004).

致 谢

2005年秋，作为一名研究生，我幸运的来到中国科学技术大学天体物理中心学习。时光如梭，转眼五年过去了。这五年留给我太多的回忆，是令我难以忘怀的。这其中有成功后的喜悦，也有冥思苦想的疲惫。我觉得只要自己付出汗水了，尽力了，成果如何并不那么重要了，因为每个人的能力是不一样的，把自己尽量做到最好就行了。科大给我提供了理想的科研环境，让我勇敢地向我的理想迈进。科大人的奋斗精神使我终生受益，科大校园的学习氛围令我感叹不已。

在这五年中，有很多的老师 and 同学给予了我莫大的帮助，在此奉上诚挚的谢意。首先要感谢我的导师张杨教授，感谢您将我带入科学的殿堂，让我认识到浩瀚宇宙的奥妙；感谢您的言传身教，手把手地教会我科研的方法和技巧，让我在以后的学习道路上认清方向；感谢您的宽容、大度、热情和耐心，让我这样一个基础很差的学生找到一些自信。走到今天，我的每一个微小进步都浸透着您的功劳和心血。张老师严谨的治学态度和乐观的生活理念像灯塔一样照亮我的人生道路。师恩难忘，教泽流长！

另外，我要感谢天体物理中心的向守平教授、程福臻教授、褚耀泉教授、朱杏芬教授、袁业飞教授、王廷贵教授、林宣滨副教授、孔旭教授、王俊贤教授、张家铝院士、周又元院士、董小波副教授、朱清风副教授、王慧元副教授、王宇副教授、陈次星老师、杨建明老师、王春成老师等给予我学业上的帮助。系里的奚玮红老师、程路华老师、陆山老师和张孝东老师等也一并感谢。

我还要感谢赵文师兄和夏天阳师兄平日里给我的建设性意见和启发性指导，拓展了我思考问题的方法，锻炼了我解决问题的能力，并开阔了视野，增长了知识，使我能够顺利完成课题！也感谢我的同学徐生年、肖婷、姜鹏、毛业伟、庐宜，和天体物理中心的舒新文、李广兴、崔昱东、刘腾、郑振亚、张少华、蔡铮、方祺、付正文等，以及云南天文台的王建国和我的有益讨论。无论在学习和生活上，他们都给予了我太多的关怀和鼓励，是他们给了我一个友爱的环境，帮我渡过难关，使我全身心的投入学习研究。

最后感谢时刻关心和支持我的父母和妻子，他们一直是我强大的后盾，他们伴我度过了多少艰难坎坷的岁月！他们的支持和鼓励是我不断前进的动力！我将尽我的最大努力，继续开拓，继续奋斗，继续前进，不辜负他们的期望。祝他们永远幸福、快乐、安康！

致 谢

谨以此文献给所有关心和爱护我的亲人和朋友！

攻读学位期间的论文发表情况

- (1) **Relic gravitational waves with a running spectral index and its constraints at high frequencies**
M.L. Tong* and Y. Zhang, Phys. Rev. D, 80, 084022, (2009).
- (2) **Cosmic age, statefinder, and Om diagnostics in the decaying vacuum cosmology**
M.L. Tong* and Y. Zhang, Phys. Rev. D, 80, 023503, (2009).
- (3) **Using a polarized maser to detect high-frequency relic gravitational waves**
M.L. Tong*, Y. Zhang and F.Y. Li, Phys. Rev. D, 78, 024041, (2008).
- (4) **Statefinder parameters for quantum effective Yang-Mills condensate dark energy model**
M.L. Tong*, Y. Zhang and T.Y. Xia, Int. J. Mod. Phys. D, 18, 797, (2009).
- (5) **Detecting Very-High-Frequency Relic Gravitational Waves by a Waveguide**
M.L. Tong* and Y. Zhang, Chin. J. Astron. Astrophys, 8, 314, (2008).
- (6) **Constraints upon the spectral indices of relic gravitational waves by LIGO S5**
Y. Zhang, M.L. Tong* and Z.W. Fu, accepted for publication in Phys. Rev. D.
- (7) **Quantum Yang-Mills Condensate Dark Energy Models**
W. Zhao, Y. Zhang and M.L. Tong*, arXiv:0909.3874, accepted for publication in the book "Dark Energy: Theories".
- (8) **An effective scalar dark energy with an equation of state crossing -1**
M.L. Tong*, Y. Zhang and Z.W. Fu, submitted.
- (9) **Analytical spectra of RGW and its induced CMB anisotropies and polarization**
Y. Zhang, M.L. Tong* and W. Zhao, submitted.