The microscopic convexity of level sets of solutions for elliptic and parabolic equations

陈传强 and 麻希南

Citation: 中国科学: 数学 **48**, 1205 (2018); doi: 10.1360/N012017-00251

View online: http://engine.scichina.com/doi/10.1360/N012017-00251

View Table of Contents: http://engine.scichina.com/publisher/scp/journal/SSM/48/10

Published by the 《中国科学》杂志社

中国科学: 数学 2018 年 第 48 卷 第 10 期: 1205～1218
SCIENTIA SINICA Mathematica
《中国科学》杂志社 SCIENCE CHINA PRESS
论 文

椭圆和抛物方程解的水平集的微观凸性

献给王斯雷教授 85 华诞

陈传强[1], 麻希南[2*]

1. 浙江工业大学应用数学系, 杭州 310023;
2. 中国科学技术大学数学科学学院, 合肥 230026
E-mail: chuanqiangchen@zjut.edu.cn, xinan@ustc.edu.cn

收稿日期: 2017-11-23; 接受日期: 2018-02-05; 网络出版日期: 2018-10-10; * 通信作者
浙江省自然科学基金 (批准号: LY17A010022) 和国家自然科学基金 (批准号: 11771396 和 11471188) 资助项目

摘要 偏微分方程解的水平集是一个重要研究对象, 与偏微分方程解的存在性、唯一性和正则性紧密相关. 本文介绍椭圆和抛物方程解的水平集的微观凸性原理.

关键词 水平集 常秩定理 微观凸性

MSC (2010) 主题分类 35K20, 35B30

1 引言

偏微分方程的凸性研究可以追溯到 20 世纪 20 年代. Caratheodory 早在 1920 年就利用共形映射的方法得到了二维凸区域上的 Green 函数的水平集的凸性 (参见文献 [1]). 1952 年, Pogorelov [2] 利用最小主半径的先验估计以及形变的方法研究了二维预定主半径的凸超曲面的存在性 (亦称 Christoffel 问题). 之后, Pogorelov [3] 用类似的方法研究了高维 Minkowski 问题. 1957 年, Gabriel [4,5] 引进了凹性函数来证明三维凸区域上的 Green 函数的水平集的严格凸性. Makar-Limanov [6] 在 1971 年证明了有界光滑凸区域 Ω 上的边值问题

$$\begin{cases} \Delta u(x) = -2, & x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

的解的函数 $-u^{\frac{1}{2}}$ 是凸的, 进而得到了 u 的水平集是凸的. Korevaar [7] 在 1983 年通过建立凹性极值原理得到了一类拟线性方程的解的凸性. 1985 年, Caffarelli 和 Friedman [8] 推导了二维凸区域上一类半线性椭圆方程解的常秩定理 (Singer 等 [9] 在同年也有类似的结果), 由此得到了对应解的严格凸性.

英文引用格式: Chen C Q, Ma X N. The microscopic convexity of level sets of solutions for elliptic and parabolic equations (in Chinese). Sci Sin Math, 2018, 48: 1205–1218, doi: 10.1360/N012017-00251

对于抛物方程, Brascamp 和 Lieb [10] 在 1976 年就已证明了有界凸区域 Ω 上的热方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\Delta u(x,t), & (x,t)\in\Omega\times(0,+\infty),\\ u(x,t)=0, & (x,t)\in\partial\Omega\times[0,+\infty),\\ u(x,0)=u_0(x), & x\in\Omega\end{cases}$$

的解的函数 $\log u$ 对任意的 $t>0$ 是 Ω 上的凹函数 (即 $\log u$ 关于变量 x 凹), 如果 $\log u_0$ (u_0 是给定的边界为零的正函数) 是 Ω 上的凹函数. 显然, 他们的结果已蕴含在文献 [11,12] 的结果中. 从上面的结果出发, Brascamp 和 Lieb 在该文献中还得到了

$$\begin{cases}\Delta u+\lambda_1 u=0, & x\in\Omega,\\ u=0, & x\in\partial\Omega\end{cases}$$

的解的函数 $\log u$ 也是凹的, 即 Laplace 算子的第一特征函数具有 log- 凹性.

由上面列举的关于凸性研究的早期经典结果, 我们可以看到, 偏微分方程的凸性研究是一个广泛的论题, 我们既可以研究其解的水平集的凸性, 也可以研究其解本身的凸性, 甚至于研究解的某个函数的凸性等.

对于解的水平集的凸性, Gabriel [4,5] 的证明方法对其后期的研究具有深远的意义. 他在文献 [4,5] 中引进凹性函数

$$Q(x,y)=u\left(\frac{x+y}{2}\right)-\min\{u(x),u(y)\},\quad (x,y)\in\Omega\times\Omega$$

来检测函数 u 的水平集的凸性. 我们可以验证: 函数 u 的水平集严格凸等价于凹性函数 $Q(x,y)$ 在 $\Omega\times\Omega$ 上严格大于零. 此后, Lewis [13] 在 1977 年利用该方法得到了凸环上 p- 调和函数的 Dirichlet 问题

$$\begin{cases}\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)=0, & x\in\Omega=\Omega_0\backslash\overline{\Omega_1},\\ u=0, & x\in\partial\Omega_0,\\ u=1, & x\in\partial\Omega_1\end{cases}$$

的解的水平集的严格凸性, 其中 $1<p<+\infty$, Ω_0 和 Ω_1 是 $\mathbb{R}^n$ 中的两个有界凸区域并且 $\overline{\Omega_1}\subset\Omega_0$. 1982 年, Caffarelli 和 Spruck [14] 推广该方法到一类半线性椭圆方程的 Dirichlet 问题

$$\begin{cases}\triangle u=f(u), & x\in\Omega=\Omega_0\backslash\overline{\Omega_1},\\ u=0, & x\in\partial\Omega_0,\\ u=1, & x\in\partial\Omega_1,\end{cases}$$

其中 Ω_0 和 Ω_1 是 $\mathbb{R}^n$ 中的两个凸区域; 证明了在 f 单增、连续且 $f(0)=0$ 的条件下, 该问题解的水平集的严格凸性. Gabriel 的这种方法在之后还有很多推广, 而且还被应用于研究解本身的凸性. 事实上, 解的水平集的凸性还可以通过拟凹包络和曲率估计等方法来研究. 我们可以通过文献 [15,16] 和 [17–20] 来体会这两种方法的主要思想.

发展到现在, 偏微分方程的凸性研究已形成了一套系统的研究方法. 本文将要讨论微观凸性, 即常秩定理及其应用. 对偏微分方程, 其解的 Hesse 矩阵的秩是一个重要的量. 特别是对凸解, 其满秩反

映了该解的严格凸性. 偏微分方程的凸解在很长时间里都是一个重要的课题, 而其研究方法主要分为宏观方法和微观方法. 宏观凸性方法是利用弱极值原理, 研究解与解的凸包络之间的关系, 即在方程满足一定的结构条件下, 利用弱极值原理证明解与解的凸包络是相等的. 而微观凸性方法则是利用强极值原理, 建立常秩定理, 即对满足一定结构条件的偏微分方程, 在局部上建立解的 Hesse 矩阵的常秩性, 并且利用连续性方法得到解的整体凸性. 对于微观凸性方法, 其关键是建立常秩定理. 本文主要介绍对应于椭圆和抛物方程解的水平集的微观凸性方法及相关结果.

2　椭圆方程解的水平集的微观凸性

对于椭圆偏微分方程解 $u(x)$, 其中 x 属于定义域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, 解 u 高度为常数 c 的水平集定义为

$$\Sigma_x^c := \{x \in \Omega \mid u(x) = c\}. \tag{2.1}$$

相应地, 上水平集定义为 $\{x \in \Omega \mid u(x) \geqslant c\}$, 下水平集定义为 $\{x \in \Omega \mid u(x) \leqslant c\}$. 水平集的性质会反映出解 u 的性质, 所以, 水平集是一个重要的研究对象. 下 (上) 水平集都是凸集的解称为拟凸 (凹) 解, 是偏微分方程很重要的一类解.

2.1　刻画解的水平集的凸性

假设 $u(x) \in C^2(\Omega)$, 并且对任意 $x \in \Omega$ 有 $|\nabla u| \neq 0$, 其中 $\nabla u = (u_1, \ldots, u_n)$ 为 u 的梯度, 则由隐函数定理, 水平集 $\Sigma_x^c = \{x \in \Omega \mid u(x) = c\}$ 局部为凸. 如果 $\Sigma_x^c = \{x \in \Omega \mid u(x) = c\}$ 是凸的, 则 Σ_x^c 关于内法向的第二基本形式是半正定的. 令 $a(x) = \{a_{ij}(x)\}_{n-1\times n-1}$ 为 Σ_x^c 的曲率矩阵, 则 a 是半正定的. 旋转坐标, 使得 $u_n \neq 0$, 则曲率矩阵局部有表示

$$a_{ij} = -\frac{|u_n|}{|\nabla u| {u_n}^3} A_{ij}, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n-1, \tag{2.2}$$

其中

$$\begin{aligned} A_{ij} =& h_{ij} - \frac{u_i u_l h_{jl}}{W(1+W)u_n^2} - \frac{u_j u_l h_{il}}{W(1+W)u_n^2} + \frac{u_i u_j u_k u_l h_{kl}}{W^2(1+W)^2 u_n^4}, & (2.3)\\ h_{ij} =& u_n^2 u_{ij} + u_{nn} u_i u_j - u_n u_j u_{in} - u_n u_i u_{jn}, & (2.4)\\ W =& \frac{|\nabla u|}{|u_n|}. & (2.5) \end{aligned}$$

本文中, 在不产生混淆的情形下, 根据 Einstein 求和约定, 求和式中略去求和号, 两个相同指标表示求和.

2.2　水平集的微观凸性

为了建立椭圆方程解的水平集的微观凸性, 我们经常假设解在定义域内没有临界点, 这样水平集的曲率矩阵可以局部表示为 (2.2). 因此, 水平集问题一般考虑凸环上边值问题. 下面介绍凸环上的调和函数的水平集凸性, 考虑如下方程:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & x \in \Omega = \Omega_0 \backslash \overline{\Omega_1}, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega_0, \\ u = 1, & x \in \partial\Omega_1, \end{cases} \tag{2.6}$$

其中 $\Omega=\Omega_0\setminus\overline{\Omega}_1$ 为 $\mathbb{R}^n$ $(n\geqslant 2)$ 的 C^2 凸环, 即 Ω_0 和 Ω_1 都是 C^2 有界凸区域, 并且 $\overline{\Omega}_1\subset\Omega_0$.

由 Kawohl [21] 的工作知 $|\nabla u|\neq 0$, 进而对任意 $c\in(0,1)$, 水平集 $\Sigma_x^c=\{x\in\Omega:u=c\}$ 为 $n-1$ 维超曲面.

定理 2.1 [5,13] 假设 $\Omega=\Omega_0\setminus\overline{\Omega}_1$ 为 $\mathbb{R}^n$ $(n\geqslant 2)$ 的 C^2 凸环, $u\in C^2(\overline{\Omega})$ 满足方程 (2.6), 则对任意常数 $c\in(0,1)$, 水平集 Σ_x^c 都是严格凸的.

根据 Caffarelli 和 Friedman [8] 的常秩定理的想法, Korevaar [22] 给出了定理 2.1 的一个微观凸性的证明, 关键是建立相应水平集的曲率矩阵的常秩定理. 根据文献 [22,23], 我们给出如下常秩定理.

定理 2.2 [22] 假设 $\Omega=\Omega_0\setminus\overline{\Omega}_1$ 为 $\mathbb{R}^n$ $(n\geqslant 2)$ 的 C^2 凸环, $u\in C^2(\overline{\Omega})$ 为满足方程 (2.6) 拟凹解, 则对任意常数 $c\in(0,1)$, 水平集 Σ_x^c 的曲率矩阵在 Ω 上保持常秩.

证明 由调和函数的正则性理论, 有 $u\in C^\infty(\Omega)\cap C^2(\overline{\Omega})$. 由 Kawohl [21] 的工作知 $|\nabla u|\neq 0$, 进而对任意 $c\in(0,1)$, 水平集的曲率矩阵可以局部表示为 (2.2).

假设 $a(x)$ 在点 $x_0\in\Omega$ 达到极小秩 l. 假设 $l\leqslant n-2$, 否则 $l=n-1$, $a(x)$ 保证常秩 $l=n-1$, 易知定理 2.2 显然成立. 选择坐标, 使得 $u_n>0$, 则存在 x_0 小邻域 $\mathcal{O}$, 使得 $\{a_{ij}\}$ 的 l 个 "好" 特征值有正下界, 其他 $n-1-l$ 个 "坏" 特征值在邻域里充分小. 令 G 为 "好" 特征值的下标集, B 为 "坏" 特征值的下标集. 对任意固定的点 $x\in\mathcal{O}$, $\{a_{ij}\}$ 表达式为 (2.2), 选取合适的坐标系 $e_1,\dots,e_{n-1},e_n$ 使得

$$|\nabla u(x)|=u_n(x)>0,\quad \{u_{ij}\}_{1\leqslant i,j\leqslant n-1}\ \text{对角}. \tag{2.7}$$

不失一般性, 假设 $u_{11}\leqslant u_{22}\leqslant\cdots\leqslant u_{n-1n-1}$, 则在点 $x\in\mathcal{O}$, 由表达式 (2.2) 易知 $\{a_{ij}\}_{1\leqslant i,j\leqslant n-1}$ 是对角的, 并且 $a_{11}\geqslant a_{22}\geqslant\cdots\geqslant a_{n-1,n-1}$. 由假设知, 存在依赖于 $\|u\|_{C^4}$ 和 $\mathcal{O}$ 的常数 $\delta>0$, 使得对任意点 $x\in\mathcal{O}$ 有 $a_{11}\geqslant a_{22}\geqslant\cdots\geqslant a_{ll}>\delta$. 为简单起见, 记 $G=\{1,\dots,l\}$ 和 $B=\{l+1,\dots,n-1\}$ 分别表示 "好" 和 "坏" 特征值的下标集. 在不混淆的情形下, 也记

$$G=\{a_{11},\dots,a_{ll}\},\qquad B=\{a_{l+1,l+1},\dots,a_{n-1,n-1}\}. \tag{2.8}$$

取辅助函数

$$\phi(x)=\sigma_{l+1}(a_{ij}), \tag{2.9}$$

其中 σ_{l+1} 为 $l+1$ 阶基本对称多项式. 按照文献 [8,24] 中的记号, 对定义在 $\mathcal{O}$ 上的函数 h 和 g, 如果存在只依赖 $\|u\|_{C^4}$ 和 n (不依赖 x) 的正常数 C_1 和 C_2 使得 $(h-g)(x)\leqslant(C_1\phi+C_2|\nabla\phi|)(x)$, $\forall\,x\in\mathcal{O}$, 则记 $h\lesssim g$. 如果 $h\lesssim g$, 并且 $g\lesssim h$, 则记 $h\sim g$.

由 ϕ 的定义, 可得

$$a_{ii}\sim 0,\quad \forall\,i\in B, \tag{2.10}$$

$$h_{ii}\sim 0,\quad u_{ii}\sim 0,\quad \forall\,i\in B. \tag{2.11}$$

对 ϕ 求一次导数, 可得

$$\phi_\alpha=\sum_{ij=1}^{n-1}\frac{\partial\sigma_{l+1}(a)}{\partial a_{ij}}a_{ij,\alpha}\sim\sigma_l(G)\sum_{i\in B}a_{ii,\alpha}\sim -u_n^{-3}\sigma_l(G)\sum_{i\in B}h_{ii,\alpha}\sim -u_n^{-3}\sigma_l(G)\sum_{i\in B}[u_n^2u_{ii\alpha}-2u_nu_{in}u_{i\alpha}],$$

即有

$$\sum_{i\in B}a_{ii,\alpha}\sim 0,\quad \sum_{i\in B}h_{ii,\alpha}\sim 0,\quad \sum_{i\in B}[u_n^2u_{ii\alpha}-2u_nu_{in}u_{i\alpha}]\sim 0. \tag{2.12}$$

进而可得

$$\sum_{i\in B} u_{iij} \sim 0, \quad \forall\, j. \tag{2.13}$$

对 ϕ 求两次导数, 可得

$$\phi_{\alpha\alpha} = \sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{\partial \sigma_{l+1}(a)}{\partial a_{ij}} a_{ij,\alpha\alpha} + \sum_{i,j,k,l=1}^{n-1} \frac{\partial^2 \sigma_{l+1}(a)}{\partial a_{ij}\partial a_{kl}} a_{ij,\alpha} a_{kl,\alpha} \sim \sigma_l(G) \sum_{j\in B} \left[a_{jj,\alpha\alpha} - 2\sum_{i\in G} \frac{a_{ij,\alpha} a_{ij,\alpha}}{a_{ii}} \right], \tag{2.14}$$

而

$$\sum_{j\in B} \sum_{\alpha=1}^{n} \left[a_{jj,\alpha\alpha} - 2\sum_{i\in G} \frac{a_{ij,\alpha}^2}{a_{ii}} \right] \sim 2u_n^{-3} \sum_{j\in B, i\in G} \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{[u_n u_{ij\alpha} - 2u_{i\alpha} u_{jn}]^2}{u_{ii}}. \tag{2.15}$$

对 $i\in G$, 由 $a_{ii} = -\frac{u_{ii}}{u_n} > 0$, 易知 $u_{ii} < 0$. 所以,

$$\Delta\phi(x) = 2u_n^{-3} \sigma_l(G) \sum_{j\in B, i\in G} \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{[u_n u_{ij\alpha} - 2u_{i\alpha} u_{jn}]^2}{u_{ii}} + O(\phi + |\nabla\phi|) \leqslant C(\phi + |\nabla\phi|).$$

又由

$$\phi(x) \geqslant 0, \quad x \in \mathcal{O}; \quad \phi(x_0) = 0, \tag{2.16}$$

则通过椭圆方程的强极值原理可推出

$$\phi(x) = \sigma_{l+1}(a_{ij}) \equiv 0, \quad x \in \mathcal{O}. \tag{2.17}$$

进而由连续性方法知, $\sigma_{l+1}(a_{ij}) \equiv 0$, $x\in\Omega$, 即曲率矩阵 $\{a_{ij}\}$ 在 Ω 上保持常秩 l. 定理 2.2 成立. □

注 2.1　证明了定理 2.2 以后, 就可以用区域形变的方法证明定理 2.1, 而定理 2.2 的作用就是区域形变过程中, 相应解的水平集保持严格凸性, 即保持常秩 $n-1$.

注 2.2　文献 [19] 给出了水平集的 Gauss 曲率的最优的下界估计, 他们的方法可以给出定理 2.1 的一个新证明.

注 2.3　对于一般椭圆偏微分方程解的水平集的微观凸性分析, 可以参见文献 [23].

3　抛物方程解的水平集的微观凸性

对于抛物偏微分方程的解 $u(x,t)$, 其中 (x,t) 属于定义域 $\Omega\times[0,T)\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$, 固定时间 t, 可以类似椭圆方程去定义解的空间水平集. 解 u 高度为常数 c 的空间水平集定义为

$$\Sigma_x^{c,t} := \{x\in\Omega \mid u(x,t) = c\}. \tag{3.1}$$

相应地, 空间上水平集定义为 $\{x\in\Omega \mid u(x,t) \geqslant c\}$, 空间下水平集定义为 $\{x\in\Omega \mid u(x,t) \leqslant c\}$. 空间下 (上) 水平集都是凸集的解称为空间拟凸 (凹) 解. 如果不固定时间 t, 则可以定义解的时空水平集. 解 u 高度为常数 c 的时空水平集定义为

$$\Sigma_{x,t}^{c} := \{(x,t)\in\Omega\times[0,T) \mid u(x,t) = c\}. \tag{3.2}$$

相应地, 时空上水平集定义为 $\{(x,t)\in\Omega\times[0,T)\mid u(x,t)\geqslant c\}$, 时空下水平集定义为 $\{(x,t)\in\times[0,T)\mid u(x,t)\leqslant c\}$. 时空下 (上) 水平集都是凸集的解称为时空拟凸 (凹) 解.

本节将介绍凸环上的热方程解的空间水平集和时空水平集的微观凸性原理, 考虑如下方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\Delta u,\quad (x,t)\in\Omega\times(0,T), \tag{3.3}$$

相应初边值条件为

$$\begin{cases}u(x,0)=u_0(x), & x\in\Omega=\Omega_0\backslash\overline{\Omega_1},\\ u(x,t)=0, & (x,t)\in\partial\Omega_0\times[0,T),\\ u(x,t)=1, & (x,t)\in\overline{\Omega}_1\times[0,T),\end{cases} \tag{3.4}$$

其中 $\Omega=\Omega_0\setminus\overline{\Omega}_1$ 为 $\mathbb{R}^n$ $(n\geqslant 2)$ 的凸环, 即 Ω_0 和 Ω_1 都是有界凸区域, 并且 $\overline{\Omega}_1\subset\Omega_0$.

3.1 刻画解的空间水平集和时空水平集的凸性

假设 $u(x,t)\in C^{2,1}(\Omega\times[0,T))$, 并且对固定的 t, 有 $|\nabla u|\neq 0$, $\forall\, x\in\Omega$, 其中 $\nabla u=(u_1,\ldots,u_n)$ 为 u 的空间梯度, 则由隐函数定理知, 水平集 $\Sigma_x^{c,t}=\{x\in\Omega\mid u(x,t)=c\}$ 局部为凸. 如果 $\Sigma_x^{c,t}=\{x\in\Omega\mid u(x,t)=c\}$ 是凸的, 则 $\Sigma_x^{c,t}$ 关于内法向的第二基本形式是半正定的. 令 $\widetilde{a}(x,t)=\{\widetilde{a}_{ij}(x,t)\}_{n-1\times n-1}$ 为 $\Sigma_x^{c,t}$ 的曲率矩阵, 则 $\widetilde{a}$ 是半正定的. 旋转坐标, 使得 $u_n\neq 0$, 则曲率矩阵局部有表示

$$\widetilde{a}_{ij}=-\frac{|u_n|}{|\nabla u|{u_n}^3}\widetilde{A}_{ij},\quad 1\leqslant i,j\leqslant n-1, \tag{3.5}$$

其中

$$\widetilde{A}_{ij}=\widetilde{h}_{ij}-\frac{u_iu_l\widetilde{h}_{jl}}{\widetilde{W}(1+\widetilde{W})u_n^2}-\frac{u_ju_l\widetilde{h}_{il}}{\widetilde{W}(1+\widetilde{W})u_n^2}+\frac{u_iu_ju_ku_l\widetilde{h}_{kl}}{\widetilde{W}^2(1+\widetilde{W})^2u_n^4}, \tag{3.6}$$

$$\widetilde{h}_{ij}=u_n^2u_{ij}+u_{nn}u_iu_j-u_nu_ju_{in}-u_nu_iu_{jn}, \tag{3.7}$$

$$\widetilde{W}=\frac{|\nabla u|}{|u_n|}. \tag{3.8}$$

如果对任意的 (x,t), 有 $|Du|\neq 0$, 其中 $Du=(u_1,\ldots,u_n,u_t)$ 为 u 的时空梯度, 则由隐函数定理知, 水平集 $\Sigma_{x,t}^c=\{(x,t)\in\Omega\times[0,T)\mid u(x,t)=c\}$ 局部为凸. 如果 $\Sigma_{x,t}^c$ 是凸的, 则 $\Sigma_{x,t}^c$ 关于内法向的第二基本形式是半正定的. 令 $\hat{a}(x,t)=\{\hat{a}_{ij}(x,t)\}_{n\times n}$ 为 $\Sigma_{x,t}^c$ 的曲率矩阵, 则 $\hat{a}$ 是半正定的. 如果 $u_t\neq 0$, 则曲率矩阵局部有表示

$$\hat{a}_{\alpha\beta}=-\frac{|u_t|}{|Du|{u_t}^3}\hat{A}_{\alpha\beta},\quad 1\leqslant\alpha,\beta\leqslant n, \tag{3.9}$$

其中

$$\hat{A}_{\alpha\beta}=\hat{h}_{\alpha\beta}-\frac{u_\alpha u_\gamma\hat{h}_{\beta\gamma}}{\hat{W}(1+\hat{W})u_t^2}-\frac{u_\beta u_\gamma\hat{h}_{\alpha\gamma}}{\hat{W}(1+\hat{W})u_t^2}+\frac{u_\alpha u_\beta u_\gamma u_\eta\hat{h}_{\gamma\eta}}{\hat{W}^2(1+\hat{W})^2u_t^4}, \tag{3.10}$$

$$\hat{h}_{\alpha\beta}=u_t^2u_{\alpha\beta}+u_{tt}u_\alpha u_\beta-u_tu_\beta u_{\alpha t}-u_tu_\alpha u_{\beta t},\quad 1\leqslant\alpha,\beta\leqslant n, \tag{3.11}$$

$$\hat{W}=\frac{|Du|}{|u_t|}, \tag{3.12}$$

在任意一个点 (x_0,t_0), 如果 $u_t(x_0,t_0)>0$, $u_n(x_0,t_0)=|\nabla u(x_0,t_0)|>0$, $u_i(x_0,t_0)=0$, $i=1,\dots,n-1$, 则有

$$1-\frac{u_n^2}{\hat{W}(1+\hat{W})u_t^2}=\frac{\hat{W}u_t^2+\hat{W}^2u_t^2-u_n^2}{\hat{W}(1+\hat{W})u_t^2}=\frac{1}{\hat{W}}+\frac{\sum_{l=1}^{n-1}u_l^2}{\hat{W}(1+\hat{W})u_t^2}, \tag{3.13}$$

所以, 对 $1\leqslant i,j\leqslant n-1$, 有

$$\begin{aligned}\hat{A}_{ij}=&\,\hat{h}_{ij}-\frac{u_iu_n\hat{h}_{jn}}{\hat{W}(1+\hat{W})u_t^2}-\frac{u_ju_n\hat{h}_{in}}{\hat{W}(1+\hat{W})u_t^2}-\frac{u_i\sum_{l=1}^{n-1}u_l\hat{h}_{jl}}{\hat{W}(1+\hat{W})u_t^2}\\&-\frac{u_j\sum_{l=1}^{n-1}u_l\hat{h}_{il}}{\hat{W}(1+\hat{W})u_t^2}+\frac{u_iu_ju_n^2\hat{h}_{nn}}{\hat{W}^2(1+\hat{W})^2u_t^4}+T_{ij},\end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}\hat{A}_{in}=&\,\hat{h}_{in}-\frac{u_iu_n\hat{h}_{nn}}{\hat{W}(1+\hat{W})u_t^2}-\frac{u_n^2\hat{h}_{in}}{\hat{W}(1+\hat{W})u_t^2}-\frac{u_n\sum_{l=1}^{n-1}u_l\hat{h}_{il}}{\hat{W}(1+\hat{W})u_t^2}+\frac{u_iu_n^3\hat{h}_{nn}}{\hat{W}^2(1+\hat{W})^2u_t^4}\\&-\frac{u_i\sum_{l=1}^{n-1}u_l\hat{h}_{nl}}{\hat{W}(1+\hat{W})u_t^2}+2\frac{u_iu_n^2\sum_{l=1}^{n-1}u_l\hat{h}_{nl}}{\hat{W}^2(1+\hat{W})^2u_t^4}+T_{in}\\=&\,\hat{h}_{in}\bigg[\frac{1}{\hat{W}}+\frac{\sum_{l=1}^{n-1}u_l^2}{\hat{W}(1+\hat{W})u_t^2}\bigg]-\frac{u_iu_n\hat{h}_{nn}}{\hat{W}(1+\hat{W})u_t^2}\bigg[\frac{1}{\hat{W}}+\frac{\sum_{l=1}^{n-1}u_l^2}{\hat{W}(1+\hat{W})u_t^2}\bigg]-\frac{u_n\sum_{l=1}^{n-1}u_l\hat{h}_{il}}{\hat{W}(1+\hat{W})u_t^2}\\&-\frac{u_i\sum_{l=1}^{n-1}u_l\hat{h}_{nl}}{\hat{W}(1+\hat{W})u_t^2}+2\frac{u_i\sum_{l=1}^{n-1}u_l\hat{h}_{nl}}{\hat{W}(1+\hat{W})u_t^2}\bigg[1-\frac{1}{\hat{W}}-\frac{\sum_{l=1}^{n-1}u_l^2}{\hat{W}(1+\hat{W})u_t^2}\bigg]+T_{in}\\=&\,\frac{1}{\hat{W}}\hat{h}_{in}-\frac{u_iu_n\hat{h}_{nn}}{\hat{W}^2(1+\hat{W})u_t^2}-\frac{u_n\sum_{l=1}^{n-1}u_l\hat{h}_{il}}{\hat{W}(1+\hat{W})u_t^2}+\frac{\hat{h}_{in}\sum_{l=1}^{n-1}u_l^2}{\hat{W}(1+\hat{W})u_t^2}+\frac{u_i\sum_{l=1}^{n-1}u_l\hat{h}_{nl}}{\hat{W}(1+\hat{W})u_t^2}\bigg[1-\frac{2}{\hat{W}}\bigg]+T_{in},\end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned}\hat{A}_{nn}=&\,\hat{h}_{nn}-2\frac{u_nu_l\hat{h}_{nl}}{\hat{W}(1+\hat{W})u_t^2}+\frac{u_n^2u_ku_l\hat{h}_{kl}}{\hat{W}^2(1+\hat{W})^2u_t^4}\\=&\,\hat{h}_{nn}-2\frac{u_n^2\hat{h}_{nn}}{\hat{W}(1+\hat{W})u_t^2}+\frac{u_n^4\hat{h}_{nn}}{\hat{W}^2(1+\hat{W})^2u_t^4}-2\frac{u_n\sum_{l=1}^{n-1}u_l\hat{h}_{nl}}{\hat{W}(1+\hat{W})u_t^2}\\&+2\frac{u_n^3\sum_{l=1}^{n-1}u_l\hat{h}_{nl}}{\hat{W}^2(1+\hat{W})^2u_t^4}+\frac{u_n^2\sum_{k,l=1}^{n-1}u_ku_l\hat{h}_{kl}}{\hat{W}^2(1+\hat{W})^2u_t^4}\\=&\,\hat{h}_{nn}\bigg[\frac{1}{\hat{W}}+\frac{\sum_{l=1}^{n-1}u_l^2}{\hat{W}(1+\hat{W})u_t^2}\bigg]^2-2\frac{u_n\sum_{l=1}^{n-1}u_l\hat{h}_{nl}}{\hat{W}(1+\hat{W})u_t^2}\bigg[\frac{1}{\hat{W}}+\frac{\sum_{l=1}^{n-1}u_l^2}{\hat{W}(1+\hat{W})u_t^2}\bigg]\\&+\frac{\sum_{k,l=1}^{n-1}u_ku_l\hat{h}_{kl}}{\hat{W}(1+\hat{W})u_t^2}\bigg[1-\frac{1}{\hat{W}}-\frac{\sum_{l=1}^{n-1}u_l^2}{\hat{W}(1+\hat{W})u_t^2}\bigg]\\=&\,\frac{1}{\hat{W}^2}\hat{h}_{nn}-2\frac{u_n\sum_{l=1}^{n-1}u_l\hat{h}_{nl}}{\hat{W}^2(1+\hat{W})u_t^2}+2\frac{\sum_{l=1}^{n-1}u_l^2\hat{h}_{nn}}{\hat{W}^2(1+\hat{W})u_t^2}+\frac{\sum_{k,l=1}^{n-1}u_ku_l\hat{h}_{kl}}{\hat{W}(1+\hat{W})u_t^2}\bigg[1-\frac{1}{\hat{W}}\bigg]+T_{nn},\end{aligned} \tag{3.16}$$

其中 $T_{\alpha\beta}$ $(1\leqslant\alpha,\beta\leqslant n)$ 为包含至少三个 u_i $(1\leqslant i\leqslant n-1)$ 的项.

3.2　空间水平集的微观凸性

本小节先建立解的空间水平集的微观凸性原理, 即常秩定理. 下面结果是 Chen 等 [25] 得到的.

定理 3.1 [25]　假设 $\Omega=\Omega_0\backslash\overline{\Omega}_1$ 为 $\mathbb{R}^n$ $(n\geqslant 2)$ 的凸环, $u\in C^{4,3}(\Omega\times[0,T))$ 为满足方程 (3.3) 和 (3.4) 的时空拟凹解, 并且 $u_t>0$, $|\nabla u|>0$, 则对固定 $t\in(0,T)$ 和任意常数 $c\in(0,1)$, 空间水平集 $\Sigma_x^{c,t}$ 的曲率矩阵在 Ω 上保持常秩 $l(t)$, 并且当 $0<t_1\leqslant t_2<T$ 时有 $l(t_1)\leqslant l(t_2)$.

证明 首先, 对任意 $c \in (0,1)$, 空间水平集的曲率矩阵可以局部表示为 (3.5). 假设 $\widetilde{a}(x,t)$ 在点 $(x_0,t_0) \in \Omega \times (0,T)$ 达到极小秩 l. 假设 $l \leqslant n-2$, 否则 $l = n-1$, $\widetilde{a}(x,t)$ 保证常秩 $l = n-1$, 易知定理 3.1 显然成立. 选择坐标, 使得 $u_n > 0$, 则存在 (x_0,t_0) 抛物小邻域 $\mathcal{O} \times (t_0-\delta, t_0]$, 使得 $\{\widetilde{a}_{ij}\}$ 的 l 个 "好" 特征值有正下界, 其他 $n-1-l$ 个 "坏" 特征值在邻域里充分小. 令 G 为 "好" 特征值的下标集, B 为 "坏" 特征值的下标集. 对任意固定的点 $(x,t) \in \mathcal{O} \times (t_0-\delta, t_0]$, $\{\widetilde{a}_{ij}\}$ 表达式为 (3.5), 选取合适的坐标系 $e_1, \ldots, e_{n-1}, e_n$ 使得

$$|\nabla u(x,t)| = u_n(x,t) > 0, \quad \{u_{ij}\}_{1 \leqslant i,j \leqslant n-1} \text{ 对角.} \tag{3.17}$$

不失一般性, 假设 $u_{11} \leqslant u_{22} \leqslant \cdots \leqslant u_{n-1n-1}$, 则在点 $(x,t) \in \mathcal{O} \times (t_0-\delta, t_0]$, 由表达式 (3.5) 易知 $\{\widetilde{a}_{ij}\}_{1 \leqslant i,j \leqslant n-1}$ 是对角的, 并且 $\widetilde{a}_{11} \geqslant \widetilde{a}_{22} \geqslant \cdots \geqslant \widetilde{a}_{n-1,n-1}$. 由假设知, 存在依赖于 $\|u\|_{C^4}$ 和 $\mathcal{O} \times (t_0-\delta, t_0]$ 的常数 $\sigma > 0$, 使得对任意点 $(x,t) \in \mathcal{O} \times (t_0-\delta, t_0]$ 有 $\widetilde{a}_{11} \geqslant \widetilde{a}_{22} \geqslant \cdots \geqslant \widetilde{a}_{ll} > \sigma$. 为简单起见, 记 $G = \{1, \ldots, l\}$ 和 $B = \{l+1, \ldots, n-1\}$ 分别表示 "好" 和 "坏" 特征值的下标集. 在不混淆的情形下, 也记

$$G = \{\widetilde{a}_{11}, \ldots, \widetilde{a}_{ll}\}, \quad B = \{\widetilde{a}_{l+1,l+1}, \ldots, \widetilde{a}_{n-1,n-1}\}. \tag{3.18}$$

取辅助函数

$$\phi(x) = \sigma_{l+1}(\widetilde{a}_{ij}), \tag{3.19}$$

其中 σ_{l+1} 为 $l+1$ 阶基本对称多项式. 按照文献 [8,24] 中的记号, 对定义在 $\mathcal{O}$ 上的函数 h 和 g, 如果存在只依赖 $\|u\|_{C^4}$ 和 n (不依赖 x 和 t) 的正常数 C_1 和 C_2 使得 $(h-g)(x,t) \leqslant (C_1\phi + C_2|\nabla\phi|)(x,t)$, $\forall\,(x,t) \in \mathcal{O} \times (t_0-\delta, t_0]$, 则记 $h \lesssim g$. 如果 $h \lesssim g$, 并且 $g \lesssim h$, 则记 $h \sim g$.

由 ϕ 的定义, 可得

$$\widetilde{a}_{ii} \sim 0, \quad \forall\, i \in B, \tag{3.20}$$

$$\widetilde{h}_{ii} \sim 0, \quad u_{ii} \sim 0, \quad \forall\, i \in B. \tag{3.21}$$

对 ϕ 求一次导数, 可得

$$\begin{aligned}
\phi_\alpha &= \sum_{ij=1}^{n-1} \frac{\partial \sigma_{l+1}(\widetilde{a})}{\partial \widetilde{a}_{ij}} \widetilde{a}_{ij,\alpha} \sim \sigma_l(G) \sum_{i \in B} \widetilde{a}_{ii,\alpha} \sim -u_n^{-3} \sigma_l(G) \sum_{i \in B} \widetilde{h}_{ii,\alpha} \\
&\sim -u_n^{-3} \sigma_l(G) \sum_{i \in B} [u_n^2 u_{ii\alpha} - 2u_n u_{in} u_{i\alpha}], \\
\phi_t &\sim -u_n^{-3} \sigma_l(G) \sum_{j \in B} [u_n^2 u_{jjt} - 2u_n u_{jn} u_{jt}],
\end{aligned} \tag{3.22}$$

即有

$$\sum_{i \in B} \widetilde{a}_{ii,\alpha} \sim 0, \quad \sum_{i \in B} \widetilde{h}_{ii,\alpha} \sim 0, \quad \sum_{i \in B} [u_n^2 u_{ii\alpha} - 2u_n u_{in} u_{i\alpha}] \sim 0. \tag{3.23}$$

进而可得

$$\sum_{i \in B} u_{iij} \sim 0, \quad \forall\, j. \tag{3.24}$$

对 ϕ 求两次导数, 可得

$$\phi_{\alpha\alpha}=\sum_{i,j=1}^{n-1}\frac{\partial\sigma_{l+1}(\widetilde{a})}{\partial\widetilde{a}_{ij}}\widetilde{a}_{ij,\alpha\alpha}+\sum_{i,j,k,l=1}^{n-1}\frac{\partial^2\sigma_{l+1}(\widetilde{a})}{\partial\widetilde{a}_{ij}\partial\widetilde{a}_{kl}}\widetilde{a}_{ij,\alpha}\widetilde{a}_{kl,\alpha}\sim\sigma_l(G)\sum_{j\in B}\left[\widetilde{a}_{jj,\alpha\alpha}-2\sum_{i\in G}\frac{\widetilde{a}_{ij,\alpha}\widetilde{a}_{ij,\alpha}}{\widetilde{a}_{ii}}\right], \tag{3.25}$$

而

$$\begin{aligned}\sum_{j\in B}\sum_{\alpha=1}^{n}\left[\widetilde{a}_{jj,\alpha\alpha}-2\sum_{i\in G}\frac{\widetilde{a}_{ij,\alpha}^2}{\widetilde{a}_{ii}}\right]\sim&-u_n^{-3}\sum_{j\in B}[u_n^2\Delta u_{jj}-6u_nu_{nj}\Delta u_j+6u_{nj}^2\Delta u]\\&+2u_n^{-3}\sum_{j\in B,i\in G}\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{[u_nu_{ij\alpha}-2u_{i\alpha}u_{jn}]^2}{u_{ii}}.\end{aligned} \tag{3.26}$$

对 $i\in G$, 由 $\widetilde{a}_{ii}=-\frac{u_{ii}}{u_n}>0$, 易知 $u_{ii}<0$. 所以,

$$\begin{aligned}\Delta\phi-\phi_t&\sim-u_n^{-3}\sum_{j\in B}[-4u_nu_{nj}u_{jt}+6u_{nj}^2u_t]+2u_n^{-3}\sigma_l(G)\sum_{j\in B,i\in G}\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{[u_nu_{ij\alpha}-2u_{i\alpha}u_{jn}]^2}{u_{ii}}\\&\sim-2u_n^{-3}\sum_{j\in B}\sigma_l(G)\frac{1}{u_t}\left[u_tu_{nj}+\frac{\hat{h}_{jn}}{u_t}\right]^2+2u_n^{-3}\sigma_l(G)\sum_{j\in B,i\in G}\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{[u_nu_{ij\alpha}-2u_{i\alpha}u_{jn}]^2}{u_{ii}}\\&\leqslant C(\phi+|\nabla\phi|),\end{aligned}$$

其中用到了 $j\in B$ 时

$$-4u_nu_{nj}u_{tj}+6u_{nj}^2u_t=\frac{2}{u_t}\left[u_tu_{nj}+\frac{\hat{h}_{jn}}{u_t}\right]^2-2\frac{\hat{h}_{jn}^2}{u_t^3}=\frac{2}{u_t}\left[u_tu_{nj}+\frac{\hat{h}_{jn}}{u_t}\right]^2+O(\phi). \tag{3.27}$$

又由

$$\phi(x,t)\geqslant0,\quad(x,t)\in\mathcal{O}\times(t_0-\delta,t_0];\quad\phi(x_0,t_0)=0, \tag{3.28}$$

则通过抛物方程的强极值原理可推出

$$\phi(x,t)=\sigma_{l+1}(\widetilde{a}_{ij})\equiv0,\quad(x,t)\in\mathcal{O}\times(t_0-\delta,t_0]. \tag{3.29}$$

进而由连续性方法可知, 固定时间 t, 曲率矩阵 $\{\widetilde{a}_{ij}\}$ 在 Ω 上保持常秩 $l(t)$, 并且当 $t_1<t_2$ 时有 $l(t_1)\leqslant l(t_2)$. 定理 3.1 成立. □

注 3.1 定理 3.1 假设解 u 为时空拟凹解, 主要为了处理 (3.27). 如果只假设解 u 为空间拟凹解, 我们得不到 (3.27), 不能证明定理 3.1.

注 3.2 对于一般抛物偏微分方程, 需要方程满足一个特殊的结构条件, 才可以建立解的空间水平集的微观凸性分析, 参见文献 [26].

注 3.3 如果 $u_0(x)=0$ 在 Ω 上成立, 并且 $T=+\infty$, 则根据文献 [27] 的结果, 热方程 (3.3) 和 (3.4) 的解是时空拟凹的, 并且易知 $u_t>0$ 和 $|\nabla u|>0$ 成立. 结合定理 3.1, 可以知道此时解的空间水平集 $\Sigma_x^{c,t}$ 是严格凸的.

3.3 时空水平集的微观凸性

抛物方程时空凸解的常秩定理首先由文献 [28, 29] 得到, 它们在时空凸水平集的第二基本形式的常秩定理研究中起到重要作用. Chen 等 [25] 建立解的时空水平集的常秩定理如下:

定理 3.2 [25] 假设 $\Omega=\Omega_0\setminus\overline{\Omega}_1$ 为 $\mathbb{R}^n$ $(n\geqslant 2)$ 的 $C^{2,\alpha}$ 凸环, $u\in C^{4,3}(\Omega\times[0,T))$ 为满足方程 (3.3) 和 (3.4) 的时空拟凹解, 并且 $u_t>0$, $|\nabla u|>0$, 则对固定 $t\in(0,T)$ 和任意常数 $c\in(0,1)$, 时空水平集 $\Sigma_{x,t}^c$ 的曲率矩阵在 Ω 上保持常秩 $l(t)$, 并且当 $0<t_1\leqslant t_2<T$ 时有 $l(t_1)\leqslant l(t_2)$.

证明 首先, 对任意 $c\in(0,1)$, 时空水平集的曲率矩阵可以局部表示为 (3.9). 假设 $\hat{a}(x,t)$ 在点 $(x_0,t_0)\in\Omega\times(0,T)$ 达到极小秩 l. 假设 $l\leqslant n-1$, 否则 $l=n$, $\widetilde{a}(x,t)$ 保证常秩 $l=n$, 易知定理 3.2 显然成立. 在点 (x_0,t_0), 选取坐标 $e_1,\ldots,e_{n-1},e_n$ 使得

$$|\nabla u(x_0,t_0)|=u_n(x_0,t_0)>0,\quad \{u_{ij}\}_{1\leqslant i,j\leqslant n-1}\ \text{对角}. \tag{3.30}$$

不失一般性, 假设 $u_{11}\leqslant u_{22}\leqslant\cdots\leqslant u_{n-1n-1}$, 则在点 (x_0,t_0), 曲率矩阵 $\{\hat{a}_{ij}\}_{1\leqslant i,j\leqslant n-1}$ 对角, 并且 $\hat{a}_{11}\geqslant\hat{a}_{22}\geqslant\cdots\geqslant\hat{a}_{n-1n-1}$, 则存在常数 $\sigma_0>0$ 使得

情形 1

$$\begin{aligned}&\hat{a}_{11}\geqslant\cdots\geqslant\hat{a}_{l-1l-1}\geqslant\sigma_0,\quad \hat{a}_{ll}=\cdots=\hat{a}_{n-1n-1}=0,\\&\hat{a}_{nn}-\sum_{i=1}^{l-1}\frac{\hat{a}_{in}^2}{\hat{a}_{ii}}\geqslant\sigma_0,\quad \hat{a}_{in}=0,\quad l\leqslant i\leqslant n-1;\end{aligned}$$

情形 2

$$\begin{aligned}&\hat{a}_{11}\geqslant\cdots\geqslant\hat{a}_{ll}\geqslant\sigma_0,\quad \hat{a}_{l+1l+1}=\cdots=\hat{a}_{n-1n-1}=0,\\&\hat{a}_{nn}=\sum_{i=1}^{l}\frac{\hat{a}_{in}^2}{\hat{a}_{ii}},\quad \hat{a}_{in}=0,\quad l+1\leqslant i\leqslant n-1.\end{aligned}$$

首先处理情形 1. 存在 (x_0,t_0) 抛物小邻域 $\mathcal{O}\times(t_0-\delta,t_0]$, 对任意固定的点 $(x,t)\in\mathcal{O}\times(t_0-\delta,t_0]$, $\{\hat{a}_{ij}\}$ 表达式为 (3.9), 选取合适的坐标系 $e_1,\ldots,e_{n-1},e_n$ 使得

$$|\nabla u(x,t)|=u_n(x,t)>0,\quad \{u_{ij}\}_{1\leqslant i,j\leqslant n-1}\ \text{对角}. \tag{3.31}$$

不失一般性, 假设 $u_{11}\leqslant u_{22}\leqslant\cdots\leqslant u_{n-1n-1}$, 则在点 $(x,t)\in\mathcal{O}\times(t_0-\delta,t_0]$, 由表达式 (3.9) 易知 $\{\hat{a}_{ij}\}_{1\leqslant i,j\leqslant n-1}$ 是对角的, 并且 $\hat{a}_{11}\geqslant\hat{a}_{22}\geqslant\cdots\geqslant\hat{a}_{n-1,n-1}$. 由假设知, 存在依赖于 $\|u\|_{C^4}$ 和 $\mathcal{O}\times(t_0-\delta,t_0]$ 的常数 $\sigma>0$, 使得对任意点 $(x,t)\in\mathcal{O}\times(t_0-\delta,t_0]$ 有 $\hat{a}_{11}\geqslant\hat{a}_{22}\geqslant\cdots\geqslant\hat{a}_{l-1l-1}\geqslant\sigma$, 并且 $\hat{a}_{nn}-\sum_{i=1}^{l-1}\frac{\hat{a}_{in}^2}{\hat{a}_{ii}}\geqslant\sigma$. 为简单起见, 记 $G=\{1,\ldots,l-1\}$ 和 $B=\{l,\ldots,n-1\}$ 分别表示 “好” 和 “坏” 特征值的下标集. 在不混淆的情形下, 也记

$$G=\{\hat{a}_{11},\ldots,\hat{a}_{l-1l-1}\},\quad B=\{\hat{a}_{l,l},\ldots,\hat{a}_{n-1,n-1}\}. \tag{3.32}$$

易知此时有

$$\hat{a}_{ij}=\frac{|\nabla u|}{|Du|}\widetilde{a}_{ij},\quad 1\leqslant i,j\leqslant n-1, \tag{3.33}$$

此时, 空间水平集的曲率矩阵 $\widetilde{a}=\{\widetilde{a}_{ij}\}_{n-1\times n-1}$ 在点 (x_0,t_0) 达到极小秩 $l-1$, 定理 3.1 此时成立. 由定理 3.1 可得对任意点 $(x,t)\in\mathcal{O}\times(t_0-\delta,t_0]$ 有 $a_{ii}=0,\forall\, i\in B$. 进而,

$$\hat{a}_{ii}=0,\quad \forall\, i\in B. \tag{3.34}$$

记 $M=(\hat{a}_{ij})_{n-1\times n-1}$, 则

$$\sigma_{l+1}(M)=\sigma_l(M)\equiv 0,\quad \forall\,(x,t)\in\mathcal{O}\times(t_0-\delta,t_0]. \tag{3.35}$$

所以,

$$0\leqslant\sigma_{l+1}(\hat{a})\leqslant\sigma_{l+1}(M)+\hat{a}_{nn}\sigma_l(M)=0, \tag{3.36}$$

即有

$$\sigma_{l+1}(\hat{a})\equiv 0,\quad \forall\,(x,t)\in\mathcal{O}\times(t_0-\delta,t_0]. \tag{3.37}$$

下面考虑情形 2. 存在 (x_0,t_0) 抛物小邻域 $\mathcal{O}\times(t_0-\delta,t_0]$, 对任意固定的点 $(x,t)\in\mathcal{O}\times(t_0-\delta,t_0]$, $\{\hat{a}_{ij}\}$ 表达式为 (3.9), 选取合适的坐标系 $e_1,\ldots,e_{n-1},e_n$ 使得

$$|\nabla u(x,t)|=u_n(x,t)>0,\quad \{u_{ij}\}_{1\leqslant i,j\leqslant n-1}\text{ 对角}. \tag{3.38}$$

不失一般性, 假设 $u_{11}\leqslant u_{22}\leqslant\cdots\leqslant u_{n-1n-1}$, 则在点 $(x,t)\in\mathcal{O}\times(t_0-\delta,t_0]$, 由表达式 (3.9) 易知 $\{\hat{a}_{ij}\}_{1\leqslant i,j\leqslant n-1}$ 是对角的, 并且 $\hat{a}_{11}\geqslant\hat{a}_{22}\geqslant\cdots\geqslant\hat{a}_{n-1,n-1}$. 由假设知, 存在依赖于 $\|u\|_{C^4}$ 和 $\mathcal{O}\times(t_0-\delta,t_0]$ 的常数 $\sigma>0$, 使得对任意点 $(x,t)\in\mathcal{O}\times(t_0-\delta,t_0]$ 有 $\hat{a}_{11}\geqslant\hat{a}_{22}\geqslant\cdots\geqslant\hat{a}_{ll}\geqslant\sigma$. 为简单起见, 记 $G=\{1,\ldots,l\}$ 和 $B=\{l+1,\ldots,n-1\}$ 分别表示 "好" 和 "坏" 特征值的下标集. 在不混淆的情形下, 也记

$$G=\{\hat{a}_{11},\ldots,\hat{a}_{ll}\},\quad B=\{\hat{a}_{l,l},\ldots,\hat{a}_{n-1,n-1}\}. \tag{3.39}$$

首先, 定理 3.1 此时成立. 根据定理 3.1 的证明过程易知如下常秩性质:

$$u_{ii}=0,\quad \forall\,i\in B, \tag{3.40}$$

$$u_{ni}=0,\quad \forall\,i\in B, \tag{3.41}$$

$$u_{ij\alpha}=0,\quad \forall\,i\in B,\quad j\in G,\quad \alpha=1,\ldots,n. \tag{3.42}$$

取辅助函数

$$\phi(x)=\sigma_{l+1}(\hat{a}_{ij}), \tag{3.43}$$

其中 σ_{l+1} 为 $l+1$ 阶基本对称多项式. 按照文献 [8,24] 中的记号, 对定义在 $\mathcal{O}$ 上的函数 h 和 g, 如果存在只依赖 $\|u\|_{C^4}$ 和 n (不依赖 x 和 t) 的正常数 C_1 和 C_2 使得 $(h-g)(x,t)\leqslant(C_1\phi+C_2|\nabla\phi|)(x,t)$, $\forall\,(x,t)\in\mathcal{O}\times(t_0-\delta,t_0]$, 则记 $h\lesssim g$. 如果 $h\lesssim g$, 并且 $g\lesssim h$, 则记 $h\sim g$.

由 ϕ 的定义和常秩性质, 可得

$$\hat{a}_{ii}=0,\quad \forall\,i\in B, \tag{3.44}$$

$$\hat{a}_{nn}-\sum_{i\in G}\frac{\hat{a}_{in}^2}{\hat{a}_{ii}}\sim 0. \tag{3.45}$$

对 ϕ 求一次导数, 可得

$$\phi_\alpha\sim\sigma_l(G)\bigg[\hat{a}_{nn,\alpha}-2\sum_{i\in G}\frac{\hat{a}_{in}}{\hat{a}_{ii}}\hat{a}_{in,\alpha}+\sum_{i,j\in G}\frac{\hat{a}_{in}}{\hat{a}_{ii}}\frac{\hat{a}_{jn}}{\hat{a}_{jj}}\hat{a}_{ij,\alpha}\bigg],\quad \alpha=1,\ldots,n, \tag{3.46}$$

$$\begin{aligned}\phi_t &\sim \sigma_l(G)\bigg[\hat{a}_{nn,t} - 2\sum_{i\in G}\frac{\hat{a}_{in}}{\hat{a}_{ii}}\hat{a}_{in,t} + \sum_{i,j\in G}\frac{\hat{a}_{in}}{\hat{a}_{ii}}\frac{\hat{a}_{jn}}{\hat{a}_{jj}}\hat{a}_{ij,t}\bigg]\\ &\sim \sigma_l(G)\bigg(-\frac{|u_t|}{|Du|u_t{}^3}\bigg)\bigg[\hat{A}_{nn,t} - 2\sum_{i\in G}\frac{\hat{A}_{in}}{\hat{A}_{ii}}\hat{A}_{in,t} + \sum_{i,j\in G}\frac{\hat{A}_{in}}{\hat{A}_{ii}}\frac{\hat{A}_{jn}}{\hat{A}_{jj}}\hat{A}_{ij,t}\bigg]\\ &\sim \sigma_l(G)\bigg(-\frac{|u_t|}{|Du|u_t{}^3}\bigg)\frac{1}{\hat{W}^2}\bigg[\hat{h}_{nn,t} - 2\sum_{i\in G}\frac{\hat{h}_{in}}{\hat{h}_{ii}}\hat{h}_{in,t} + \sum_{i,j\in G}\frac{\hat{h}_{in}}{\hat{h}_{ii}}\frac{\hat{h}_{jn}}{\hat{h}_{jj}}\hat{h}_{ij,t}\bigg],\end{aligned}\tag{3.47}$$

即有

$$\hat{a}_{nn,\alpha} - 2\sum_{i\in G}\frac{\hat{a}_{in}}{\hat{a}_{ii}}\hat{a}_{in,\alpha} + \sum_{i,j\in G}\frac{\hat{a}_{in}}{\hat{a}_{ii}}\frac{\hat{a}_{jn}}{\hat{a}_{jj}}\hat{a}_{ij,\alpha} \sim 0.\tag{3.48}$$

进而可得

$$\hat{A}_{nn,\alpha} - 2\sum_{i\in G}\frac{\hat{A}_{in}}{\hat{A}_{ii}}\hat{A}_{in,\alpha} + \sum_{i,j\in G}\frac{\hat{A}_{in}}{\hat{A}_{ii}}\frac{\hat{A}_{jn}}{\hat{A}_{jj}}\hat{A}_{ij,\alpha} \sim 0, \quad \alpha = 1,\ldots,n,\tag{3.49}$$

$$\hat{h}_{nn,\alpha} - 2\sum_{i\in G}\frac{\hat{h}_{in}}{\hat{h}_{ii}}\hat{h}_{in,\alpha} + \sum_{i,j\in G}\frac{\hat{h}_{in}}{\hat{h}_{ii}}\frac{\hat{h}_{jn}}{\hat{h}_{jj}}\hat{h}_{ij,\alpha} \sim 0, \quad \alpha = 1,\ldots,n.\tag{3.50}$$

对 ϕ 求两次导数, 可得

$$\begin{aligned}\phi_{\alpha\alpha} \sim{}& \bigg[\sigma_l(G) + \hat{a}_{nn}\sigma_{l-1}(G) - \sum_{i\in G}\hat{a}_{in}^2\sigma_{l-2}(G\mid i)\bigg]\sum_{m\in B}\hat{a}_{mm,\alpha\alpha}\\ &+ \sigma_l(G)\bigg[\hat{a}_{nn,\alpha\alpha} - 2\sum_{i\in G}\frac{\hat{a}_{in}}{\hat{a}_{ii}}\hat{a}_{in,\alpha\alpha} + \sum_{i,j\in G}\frac{\hat{a}_{in}}{\hat{a}_{ii}}\frac{\hat{a}_{jn}}{\hat{a}_{jj}}\hat{a}_{ij,\alpha\alpha}\bigg] - 2\sigma_l(G)\sum_{i\in G}\frac{1}{\hat{a}_{ii}}\bigg[\hat{a}_{in,\alpha} - \sum_{j\in G}\frac{\hat{a}_{jn}}{\hat{a}_{jj}}\hat{a}_{ij,\alpha}\bigg]^2\\ \sim{}& \sigma_l(G)\bigg(1+\sum_{i\in G}\frac{\hat{a}_{in}^2}{\hat{a}_{ii}^2}\bigg)\bigg(-\frac{|u_t|}{|Du|u_t{}^3}\bigg)\sum_{m\in B}\hat{h}_{mm,\alpha\alpha} + \sigma_l(G)\bigg(-\frac{|u_t|}{|Du|u_t{}^3}\bigg)\frac{1}{\hat{W}^2}\bigg[\hat{h}_{nn,\alpha\alpha} - 2\sum_{i\in G}\frac{\hat{h}_{in}}{\hat{h}_{ii}}\hat{h}_{in,\alpha\alpha}\\ &+ \sum_{i,j\in G}\frac{\hat{h}_{in}}{\hat{h}_{ii}}\frac{\hat{h}_{jn}}{\hat{h}_{jj}}\hat{h}_{ij,\alpha\alpha}\bigg] - 2\sigma_l(G)\bigg(-\frac{|u_t|}{|Du|u_t{}^3}\bigg)\frac{1}{\hat{W}^2}\sum_{i\in G}\frac{1}{\hat{h}_{ii}}\bigg[\hat{h}_{in,\alpha} - \sum_{j\in G}\frac{\hat{h}_{jn}}{\hat{h}_{jj}}\hat{h}_{ij,\alpha}\bigg]^2.\end{aligned}\tag{3.51}$$

进而通过复杂的计算可得

$$\begin{aligned}\Delta\phi - \phi_t \sim{}& \sigma_l(G)\bigg(1 + \sum_{i\in G}\frac{\hat{a}_{in}^2}{\hat{a}_{ii}^2}\bigg)\bigg(-\frac{|u_t|}{|Du|u_t{}^3}\bigg)\sum_{i\in B}\Delta\hat{h}_{ii} + \sigma_l(G)\bigg(-\frac{|u_t|}{|Du|u_t{}^3}\bigg)\frac{1}{\hat{W}^2}\bigg[(\Delta\hat{h}_{nn} - \hat{h}_{nn,t})\\ &- 2\sum_{i\in G}\frac{\hat{h}_{in}}{\hat{h}_{ii}}(\Delta\hat{h}_{in} - \hat{h}_{in,t}) + \sum_{i,j\in G}\frac{\hat{h}_{in}}{\hat{h}_{ii}}\frac{\hat{h}_{jn}}{\hat{h}_{jj}}(\Delta\hat{h}_{ij} - \hat{h}_{ij,t})\bigg]\\ &- 2\sigma_l(G)\bigg(-\frac{|u_t|}{|Du|u_t{}^3}\bigg)\frac{1}{\hat{W}^2}\sum_{i\in G}\frac{1}{\hat{h}_{ii}}\sum_{\alpha=1}^n\bigg[\hat{h}_{in,\alpha} - \sum_{j\in G}\frac{\hat{h}_{jn}}{\hat{h}_{jj}}\hat{h}_{ij,\alpha}\bigg]^2\\ \sim{}& \sigma_l(G)\bigg(\frac{|u_t|}{|Du|u_t{}^3}\bigg)\frac{1}{\hat{W}^2}\sum_{i\in G}\frac{1}{\hat{h}_{ii}}\bigg[\hat{h}_{in,n} - \sum_{j\in G}\frac{\hat{h}_{jn}}{\hat{h}_{jj}}\hat{h}_{ij,n} - \hat{h}_{in}\bigg[\frac{u_{nn}}{u_n} - \frac{u_{nt}}{u_t} - \sum_{i\in G}\frac{\hat{h}_{in}}{\hat{h}_{ii}}\frac{u_{in}}{u_n}\bigg]\bigg]^2\\ &+ \sigma_l(G)\bigg(\frac{|u_t|}{|Du|u_t{}^3}\bigg)\frac{1}{\hat{W}^2}\sum_{i\in G}\frac{1}{\hat{h}_{ii}}\bigg[\hat{h}_{in,i} - \sum_{j\in G}\frac{\hat{h}_{jn}}{\hat{h}_{jj}}\hat{h}_{ij,i} - \hat{h}_{ii}\bigg[\frac{u_{nn}}{u_n} - \frac{u_{nt}}{u_t} - \sum_{i\in G}\frac{\hat{h}_{in}}{\hat{h}_{ii}}\frac{u_{in}}{u_n}\bigg]\bigg]^2\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sigma_l(G)\left(\frac{|u_t|}{|Du|{u_t}^3}\right)\frac{1}{\hat{W}^2}\sum_{i\in G}\frac{1}{\hat{h}_{ii}}\sum_{\alpha\in G,\alpha\neq i}\left[\hat{h}_{in,\alpha}-\sum_{j\in G}\frac{\hat{h}_{jn}}{\hat{h}_{jj}}\hat{h}_{ij,\alpha}\right]^2\\
&\lesssim 0,
\end{aligned}
\tag{3.52}
$$

其中用到了 $i\in G$ 时 $\hat{h}_{ii}<0$. 又由

$$
\phi(x,t)\geqslant 0,\quad (x,t)\in\mathcal{O}\times(t_0-\delta,t_0];\quad \phi(x_0,t_0)=0,\tag{3.53}
$$

则通过抛物方程的强极值原理可推出

$$
\phi(x,t)=\sigma_{l+1}(\hat{a}_{ij})\equiv 0,\quad (x,t)\in\mathcal{O}\times(t_0-\delta,t_0].\tag{3.54}
$$

综合情形 1 和 2, 由连续性方法知, 固定时间 t, 曲率矩阵 $\{\hat{a}_{ij}\}$ 在 Ω 上保持常秩 $l(t)$, 并且当 $t_1<t_2$ 时有 $l(t_1)\leqslant l(t_2)$. 定理 3.2 成立. □

注 3.4 对于一般抛物偏微分方程, 需要方程满足一个特殊的结构条件, 才可以建立解的时空水平集的微观凸性分析, 参见文献 [30].

致谢 感谢审稿人的细心审阅.

参考文献

1 Ahlfors L V. Conformal Invariants: Topics in Geometric Function Theory. McGraw-Hill Series in Higher Mathematics. New York: McGraw-Hill Book, 1973

2 Pogorelov A V. On the question of the existence of a convex surface with a given sum principal radii of curvature (in Russian). Uspekhi Mat Nauk, 1953, 8: 127–130

3 Pogorelov A V. The Minkowski Multidimensional Problem. New York: John Wiley & Sons, 1978

4 Gabriel R M. An extended principle of the maximum for harmonic functions in 3-dimensions. J Lond Math Soc (2), 1955, 30: 388–401

5 Gabriel R M. A result concerning convex level surfaces of 3-dimensional harmonic functions. J Lond Math Soc (2), 1957, 32: 286–294

6 Makar-Limanov L G. Solution of Dirichlet's problem for the equation $\Delta u=-1$ on a convex region. Math Notes Acad Sci USSR, 1971, 9: 52–53

7 Korevaar N J. Capillary surface convexity above convex domains. Indiana Univ Math J, 1983, 32: 73–81

8 Caffarelli L A, Friedman A. Convexity of solutions of semilinear elliptic equations. Duke Math J, 1985, 52: 431–456

9 Singer I, Wong B, Yau S T, et al. An estimate of gap of the first two eigenvalues in the Schrodinger operator. Ann Sc Norm Super Pisa Cl Sci (5), 1985, 12: 319–333

10 Brascamp H J, Lieb E H. On extensions of the Brunn-Minkowski and Prékopa-Leindler theorems, including inequalities for log concave functions, and with an application to the diffusion equation. J Funct Anal, 1976, 22: 366–389

11 Borell C. Geometric properties of some familiar diffusions in $\mathbb{R}^n$. Ann Probab, 1993, 21: 482–489

12 Borell C. Diffusion equations and geometric inequalities. Potential Anal, 2000, 12: 49–71

13 Lewis J L. Capacitary functions in convex rings. Arch Ration Mech Anal, 1977, 66: 201–224

14 Caffarelli L A, Spruck J. Convexity properties of solutions to some classical variational problems. Comm Partial Differential Equations, 1982, 7: 1337–1379

15 Bianchini C, Longinetti M, Salani P. Quasiconcave solutions to elliptic problems in convex rings. Indiana Univ Math J, 2009, 58: 1565–1590

16 Colesanti A, Salani P. Quasi-concave envelope of a function and convexity of level sets of solutions to elliptic equations. Math Nachr, 2003, 258: 3–15

17 Guan P F, Xu L. Convexity estimates for level sets of quasiconcave solutions to fully nonlinear elliptic equations. J Reine Angew Math, 2013, 2013: 41–67

18 Longinetti M. Convexity of the level lines of harmonic functions (in Italian). Boll Unione Mat Ital Sez A Mat Soc Cult (8), 1983, 6: 71–75

19 Ma X N, Ou Q Z, Zhang W. Gaussian curvature estimates for the convex level sets of p-harmonic functions. Comm Pure Appl Math, 2010, 63: 935–971

20 Talenti G. On functions whose lines of steepest descent bend proportionally to level lines. Ann Sc Norm Super Pisa Cl Sci (5), 1983, 10: 587–605

21 Kawohl B. Rearrangements and Convexity of Level Sets in PDE. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1150. New York: Springer, 1985

22 Korevaar N J. Conexity of level sets for solutions to elliptic ring problems. Comm Partial Differential Equations, 1990, 15: 541–556

23 Bian B J, Guan P F, Ma X N, et al. A constant rank theorem for quasiconcave solutions of fully nonlinear partial differential equations. Indiana Univ Math J, 2011, 60: 101–120

24 Korevaar N J, Lewis J L. Convex solutions of certain elliptic equations have constant rank hessians. Arch Ration Mech Anal, 1987, 97: 19–32

25 Chen C Q, Ma X N, Salani P. On the parabolic spacetime quasiconcave solutions of the heat equation. Mem Amer Math Soc, in press, 2016

26 Chen C Q, Shi S J. Curvature estimates for the level sets of spatial quasiconcave solutions to a class of parabolic equations. Sci China Math, 2011, 54: 2063–2080

27 Borell C. Brownian motion in a convex ring and quasi-concavity. Comm Math Phys, 1982, 86: 143–147

28 Hu B W, Ma X N. A constant rank theorem for spacetime convex solutions of heat equation. Manuscripta Math, 2012, 138: 89–118

29 Chen C Q, Hu B W. A microscopic convexity principle for spacetime convex solutions of fully nonlinear parabolic equations. Acta Math Sin Engl Ser, 2013, 29: 651–674

30 Chen C Q. On the microscopic spacetime convexity principle for fully nonlinear parabolic equations II: Spacetime quasiconcave solutions. Discrete Contin Dyn Syst, 2016, 36: 4761–4811

The microscopic convexity of level sets of solutions for elliptic and parabolic equations

Chuanqiang Chen & Xi-nan Ma

Abstract The level set of solutions for elliptic and parabolic equations is an important research subject, and it has a close relation with the existence, uniqueness and regularity of solutions. In this paper, we introduce the microscopic convexity principles of level sets of solutions for elliptic and parabolic equations.

Keywords **level set, constant rank theorem, microscopic convexity**

MSC(2010) **35K20, 35B30**

doi: 10.1360/N012017-00251