中国科学 : 数学 2024 年 第 54 卷 第 10 期 : 1627 ∼ 1648
SCIENTIA SINICA Mathematica
《中国科学》杂志社 SCIENCE CHINA PRESS
CrossMark click for updates
论 文

不变张量技术在半线性椭圆与次椭圆偏微分方程解的分类中的应用

献给沈一兵教授 85 寿辰

麻希南*, 吴天
中国科学技术大学数学科学学院, 合肥 230026
E-mail: xinan@ustc.edu.cn, wt1997@mail.ustc.edu.cn

收稿日期: 2024-03-18; 接受日期: 2024-05-24; 网络出版日期: 2024-08-08; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 12141105) 和科技部重点研发项目 (批准号: SQ2020YFA070080) 资助项目

摘要 在研究椭圆或次椭圆偏微分方程的解的估计以及分类中, 从 20 世纪 70 年代 Obata 开始发展起来的向量场方法是一个非常有用的方法. 但是在不同的问题中, 如何寻找所需要的向量场是一个十分技巧性的问题. 本文通过引进不变张量技术与量纲守恒思想, 对于典型的几个半线性椭圆或次椭圆偏微分方程, 找到合适的向量场, 即得到所要的微分恒等式, 从而得到相关解的分类定理. 本文详细给出新旧方法的对比.

关键词 不变张量 半线性椭圆方程 Heisenberg 群

MSC (2020) 主题分类 35K20, 32V20

1 引言

1.1 解的分类与微分恒等式

在椭圆偏微分方程的研究中, 移动平面法是解的分类的常用办法 (参见文献 [2]). 本文通过向量场方法以及对应的微分恒等式来得到解的分类与估计.

微分恒等式方法起源于文献 [8], 在该文献中, Obata 借助 Bochner 型公式, 给出了闭流形上 Yamabe 方程的正解满足的一个微分恒等式:

$$(v^{1-n}E_{ij}v^j),\,^i = v^{1-n}\sum_{i,j=1}^{n}|E_{ij}|^2+\mathscr{R},$$

其中 $\mathscr{R}$ 为非负项, 且仅在流形为球面或方程的解为常数时等于 0. 通过直接在闭流形上积分, 并使用散度定理, 可以得到 $E_{ij}\equiv 0$ 且 $\mathscr{R}=0$, 这会给出 Yamabe 方程解的具体表达式, 并得到 Yamabe 方程的刚性.

英文引用格式: Ma X-N, Wu T. The application of the invariant tensor technique in the classification of solutions to semilinear elliptic and sub-elliptic partial differential equations (in Chinese). Sci Sin Math, 2024, 54: 1627–1648, doi: 10.1360/SSM-2024-0071

通过以上可以发现, 微分恒等式成立的关键是寻找一个向量场, 使其在满足方程的条件下散度非负, 进而通过散度定理得到所有非负项均为 0. 如果流形非紧或者带边, 则直接积分一般是无效的, 此时通常需要引入恰当的截断函数和合适的积分估计.

本文通过引进不变张量技术, 研究若干类不同空间上的半线性方程的光滑解. 第 2 节研究 Ricci 曲率带有正下界的闭流形上的半线性方程, 并详细给出新旧方法的对比. 第 3 节通过将第 2 节得到的微分恒等式限制到 Euclid 空间上, 结合积分估计得到 Euclid 空间次临界指标方程的 Liouville 型定理. 第 4 节将不变张量技术应用到 Heisenberg 群上的次临界指标方程, 并得到其 Liouville 型定理.

1.2 记号与说明

本文每个记号的定义默认在该节内通用, 而不会延续到下一节. 在无额外说明的情形下, 默认用 u 表示该节研究方程的解. 本文所有出现的方程的解默认是光滑的.

$\mathbb{R}^n$、$\mathbb{C}^n$、$\mathbb{S}^n$ 和 $\mathbb{H}^n$ 分别表示 Euclid 空间、复 Euclid 空间、$n+1$ 维 Euclid 空间上的单位球面和 Heisenberg 群. 记 $\mathbb{R}_+=(0,+\infty)$. 纯虚数基本单位用 $\sqrt{-1}$ 表示, 而不用 i 或者 i.

定义 Kronecker 符号

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$$

$\delta_{i\bar{j}}$ 的定义和 δ_{ij} 相同.

$f\in C^k(A;B)$ 表示 f 为集合 A 到集合 B 的 k 次连续可微映射, 如果 $B=\mathbb{R}$, 一般会简记 $f\in C^k(A)$.

$C(\cdot)$ 表示一个只依赖于 $\cdot$ 位置元素的正常数, 而且具有相同依赖性的 C 表示的数值可能不一定相同, 使用这套记号能够忽略放缩过程中无关紧要的常数.

如果积分号没有指定积分区域, 则默认表示在全空间上作积分. 分部积分一般指的是应用散度定理: 在 $\mathbb{R}^n$ 或 $\mathbb{H}^n$ 上, $f\in C^1$, $g\in C_0^1$, 或闭 Riemann 流形上, $f,g\in C^1$, 则

$$\int fg_{,i}=-\int f_{,i}g.$$

默认 $R>1$, $B_R(x_0)$ 表示研究的度量空间上以 x_0 为中心、R 为半径的球, 将 $B_R(0)$ 简记为 B_R. 默认 η 为支在 B_{2R} 上的标准截断函数, 即满足

(1) $0\leqslant\eta\leqslant 1$;

(2) $\operatorname{supp}\eta=\overline{B}_{2R}$;

(3) $\eta\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$;

(4) $|\nabla^k\eta|\leqslant C(n)R^{-k}$, $k=0,1,2$.

以 $f_{,i}$ 表示 f 的协变导数, Euclid 空间即为偏导数. 为了方便, 在书写 u 的协变导数时, 会省略逗号. 在英语字母做角标的情形下, 当在一项中同时出现, 如无特殊说明, 则自动表示对其从 1 到 n 求和, 并省略求和符号, 而希腊字母和数字角标不参与这项过程. 值得注意的是, 在本文中, n 都表示空间的维数. 一些常见示例如下:

$$E_{ij}E_{ji},\quad E_{i\bar{j}}u_{\bar{i}}u_j,\quad \sqrt{-1}u_{0i}u_{\bar{i}},$$

出现这些情形均表示对 i 和 j 等英文字母指标从 1 到 n 求和.

1.3 Heisenberg 群

定义 Heisenberg 群 $\mathbb{H}^n = \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$, 其上配备了群乘法 $\circ$, 满足

$$(z,t)\circ(z',t') = (z+z', t+t'+2\operatorname{Im} z\cdot \overline{z}'), \quad \forall\,(z,t),(z',t')\in \mathbb{C}^n\times\mathbb{R}.$$

作为 Lie 群, $\mathbb{H}^n$ 上的左不变向量场 $\{Z_i, Z_{\bar{i}}, T : i=1,\ldots,n\}$ 为

$$Z_i = \frac{\partial}{\partial z^i} + \sqrt{-1}\overline{z}^i\frac{\partial}{\partial t}, \quad Z_{\bar{i}} = \frac{\partial}{\partial \overline{z}^i} - \sqrt{-1}z^i\frac{\partial}{\partial t}, \quad T := \frac{\partial}{\partial t}, \quad i=1,\ldots,n.$$

记 $f_{,i} = Z_i f$, $f_{,\bar{i}} = Z_{\bar{i}} f$, $f_{,0} = Tf$. 导数交换法则如下:

$$f_{,ij} = f_{,ji}, \quad f_{i\bar{j}} - f_{\bar{j}i} = 2\sqrt{-1}\delta_{i\bar{j}}f_0, \quad f_{0i} = f_{i0}.$$

定义次梯度 $|\nabla_b f|^2 := f_{,i}f_{,}{}^{i}$ 和次 Laplace 算子 $\Delta_b f := \frac{1}{2}(f_{,i}{}^{i} + f_{,}{}^{i}{}_{i})$, 则

$$f_{,i}{}^{i} = \Delta_b f + n\sqrt{-1}f_{,0}, \quad \Delta_b f = \operatorname{Re} f_{,i}{}^{i}.$$

由于 $\mathbb{H}^n$ 上有 $[Z_{\bar{i}}, Z_i] = 2\sqrt{-1}T$, 因此其第二层分量 t 在几何上具有二倍于第一层分量的权重, 因此在量纲分析时将 $f_{,0}$ 视作二阶导数. 也正因如此, $(z,t)\in\mathbb{H}^n$ 的齐性范数为 $\|(z,t)\| = (|z|^4+t^2)^{\frac{1}{4}}$, 齐性伸缩为 $\delta_\lambda(z,t) = (\lambda z, \lambda^2 t)$. Heisenberg 群的齐性维数 $Q = 2n+2$. 齐性范数诱导的度量即为 Carnot-Caratheodory 度量, 相应的球为

$$B_R(z_0,t_0) := \{(z,t)\in\mathbb{H}^n : \|(z-z_0, t-t_0)\| < R\},$$

则 $|B_R(z_0,t_0)| = \int_{B_R(z_0,t_0)} dx = C(Q)R^Q$. 在讨论 Heisenberg 群的问题时, η 同样表示支在 B_{2R} 上的标准截断函数, 其满足的性质与上一小节介绍的相同.

2　闭流形上的半线性方程

2.1　研究背景

设 (M^n, g) 为闭 (紧致无边) Riemann 流形, 满足 $R_{ij} - (n-1)g_{ij}$ 半正定, 其中 R_{ij} 为 Ricci 曲率张量. 记 Riemann 曲率张量为 $R_i{}^l{}_{jk}$, 进而有如下协变导数交换公式:

$$f_{,ijk} - f_{,ikj} = R_i{}^l{}_{jk}f_{,l}.$$

记 $\Delta f = f_i{}^i$, $|\nabla f|^2 = f_i f^i$. 在上述导数交换公式中将 i 和 k 缩并, 有 $f_{,ij}{}^{i} - (\Delta f)_{,j} = R_{ij}f^i$.

本节研究 M 上半线性方程的光滑正解:

$$\Delta u + f(u) = 0, \tag{2.1}$$

其中 $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$. 如果 $f\geqslant 0$, 通过直接对方程 (2.1) 积分, 根据散度定理, 有 $\int f(u) = 0$, 因此 $f(u) \equiv 0$. $f\leqslant 0$ 同理. 因此, 后续讨论假定 f 变号.

当 $n\geqslant 3$、$f(u) = -\lambda u + u^p$ 和 $1 < p \leqslant \frac{n+2}{n-2}$ 时, 方程 (2.1) 化为 (次) 临界指标方程

$$\Delta u - \lambda u + u^p = 0, \tag{2.2}$$

其中一般要求 $\lambda \leqslant \frac{n}{p-1}$. 方程 (2.2) 是闭流形上 Sobolev 不等式变分后的 Euler-Lagrange 方程, 在临界指标情形 $p=\frac{n+2}{n-2}$, 如果 $\lambda=\frac{n}{p-1}=\frac{n(n-2)}{4}$, 则方程 (2.2) 来源于共形几何中的 Yamabe 问题. 关于方程 (2.2) 解的分类结果, 临界指标情形由 Obata[8] 得到, 次临界指标情形 $1<p<\frac{n+2}{n-2}$ 由 Bidaut-Veron 和 Veron[1] 得到, 两种情形可以总结为如下定理.

定理 2.1[1,8] 方程 (2.2) 的正解要么只有常数, 要么 $p=\frac{n+2}{n-2}$, $\lambda=\frac{n(n-2)}{4}$, 且 $(M^n,g)=(\mathbb{S}^n,g_c)$, 此时存在 $a\in\mathbb{S}^n$, $c_1\geqslant 0$, $c_2>0$, 使得

$$u(x)=\left(\frac{\sqrt{n(n-2)}}{2\cosh t+2(\sinh t)\langle a,F(x)\rangle}\right)^{\frac{n-2}{2}}.$$

本节分别使用直接分部积分和不变张量两种方法, 给出定理 2.1 的证明, 并加以对比. 在本节的最后, 将会使用不变张量技术, 研究一般半线性方程 (2.1), 并得到如下解的分类定理. 在文献 [3] 中也有类似的结论, 但是条件不同, 下面的定理是完全新的.

定理 2.2 设 $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$, 闭流形 (M^n,g) 满足 $n\geqslant 2$, $R_{ij}-(n-1)g_{ij}$ 半正定, u 是方程 (2.1) 的光滑正解. 如果 $f\geqslant 0$ 或 $f\leqslant 0$, 那么 u 为满足 $f(u)\equiv 0$ 的调和函数. 如果存在 $f_1\in C^1(\mathbb{R}_+)$, $f_2\in C^2(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}_+)$, 使得 $f=f_2-f_1$, $(\frac{f_1}{f_2})'\geqslant-\frac{n}{f_2}$, 且当 $n=2$ 时, $\log f_2$ 是凹函数, 当 $n\geqslant 3$ 时, $f_2^{\frac{n-2}{n+2}}$ 是凹函数, 那么要么 u 只能是常数, 即 f 的某个零点, 要么 $(M^n,g)=(\mathbb{S}^n,g_c)$, 且存在 $a\in\mathbb{S}^n$, $t\geqslant 0$,

(1) 当 $n=2$ 时, 存在 $k_1>0$, $k_2\in\mathbb{R}$, 使得 $f(s)=-\frac{2}{k_1}+\mathrm{e}^{k_1(s+k_2)}$,

$$u(x)=\frac{2}{k_1}\log\frac{2k_1^{-\frac{1}{2}}}{\cosh t+\sinh t\cdot\langle a,x\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}}}-k_2;$$

(2) 当 $n\geqslant 3$ 时, 存在 $k_1>0$, $k_2\geqslant 0$, 使得

$$\begin{aligned}f(s)&=-\frac{n(n-2)}{4}(s+k_2)+[k_1(s+k_2)]^{\frac{n+2}{n-2}},\\u(x)&=k_1^{-\frac{n+2}{4}}\left(\frac{\sqrt{n(n-2)}}{2\cosh t+2\sinh t\cdot\langle a,x\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}}}\right)^{\frac{n-2}{2}}-k_2.\end{aligned}$$

在定理 2.2 中取 $f(s)=-\lambda s+s^p$, 立刻可以得到定理 2.1. 在将定理 2.2 作为判别法应用到具体方程时, 如何找到合适的分解 $f=f_2-f_1$ 比较关键. 当流形非紧时 (如 Euclid 空间), 虽然在定理 2.2 证明中关于微分恒等式的讨论没有问题, 但是后续积分估计还需要知道 f 的更多信息才可以完成.

2.2 旧方法: 直接分部积分

本小节使用旧方法证明定理 2.1. 旧方法的关键是在方程 (2.2) 两侧同时乘以某些函数, 并作分部积分. 注意到流形是闭的, 因此在所有分部积分的过程中无边界项产生. 旧方法源自文献 [1,3].

定理 2.1 的旧证明 考虑在方程 (2.2) 两侧同时乘以 $u^\alpha\Delta u$, 其中 α 是待定常数, 则

$$I_1+I_2+I_3=0,$$

其中 $I_1:=\int u^\alpha(\Delta u)^2$, $I_2:=\int-\lambda u^{\alpha+1}\Delta u$, $I_3:=\int u^{\alpha+p}\Delta u$. 由散度定理, 可得

$$\begin{aligned}I_1&=\int[(u^\alpha\Delta uu_j)_{,}{}^{j}-(u^\alpha\Delta u)_{,j}u^j]\\&=\int[-\alpha u^{\alpha-1}|\nabla u|^2\Delta u-u^\alpha u_{ij}{}^{i}u^j+u^\alpha R_{ij}u^iu^j]\end{aligned}$$

$$
= \int \left[u^\alpha \sum_{i,j=1}^n |u_{ij}|^2 + \alpha u^{\alpha-1} u_{ij} u^i u^j - \alpha u^{\alpha-1} |\nabla u|^2 \Delta u + u^\alpha R_{ij} u^i u^j \right].
$$

为了配方过程计算到最佳, 引进 $E_{ij} = u_{ij} - \frac{\Delta u}{n} g_{ij}$, 则

$$
\sum_{i,j=1}^n |E_{ij}|^2 = \sum_{i,j=1}^n |u_{ij}|^2 - \frac{1}{n} (\Delta u)^2.
$$

将 u_{ij} 换作 E_{ij}, 继续计算 I_1:

$$
I_1 = \int \left[u^\alpha \sum_{i,j=1}^n |E_{ij}|^2 + \alpha u^{\alpha-1} E_{ij} u^i u^j - \frac{n-1}{n} \alpha u^{\alpha-1} |\nabla u|^2 \Delta u + u^\alpha R_{ij} u^i u^j \right] + \frac{1}{n} I_1,
$$

于是可以解出

$$
I_1 = \frac{n}{n-1} \int \left[u^\alpha \sum_{i,j=1}^n |E_{ij}|^2 + \alpha u^{\alpha-1} E_{ij} u^i u^j - \frac{n-1}{n} \alpha u^{\alpha-1} |\nabla u|^2 \Delta u + u^\alpha R_{ij} u^i u^j \right].
$$

类似地, 利用散度定理直接作分部积分, 并代入方程 (2.1), 得

$$
\begin{aligned}
I_2 + I_3 &= \lambda(\alpha+1) \int u^\alpha |\nabla u|^2 - (\alpha+p) \int u^{\alpha+p-1} |\nabla u|^2 \\
&= \lambda(1-p) \int u^\alpha |\nabla u|^2 + (\alpha+p) \int u^{\alpha-1} |\nabla u|^2 \Delta u.
\end{aligned}
$$

考虑 $\frac{n-1}{n}(I_1 + I_2 + I_3) = 0$, 于是

$$
\begin{aligned}
0 = \int \Bigg[& u^\alpha \sum_{i,j=1}^n |E_{ij}|^2 + \alpha u^{\alpha-1} E_{ij} u^i u^j + \frac{n-1}{n} \lambda(1-p) u^a |\nabla u|^2 \\
& + \frac{n-1}{n} p u^{\alpha-1} |\nabla u|^2 \Delta u + u^\alpha R_{ij} u^i u^j \Bigg].
\end{aligned} \tag{2.3}
$$

对 $\int u^{\alpha-1} |\nabla u|^2 \Delta u$ 项作分部积分:

$$
\begin{aligned}
\int u^{\alpha-1} |\nabla u|^2 \Delta u &= - \int [(\alpha-1) u^{\alpha-2} |\nabla u|^4 + 2 u^{\alpha-1} u_{ij} u^i u^j] \\
&= - \int \left[2 u^{\alpha-1} E_{ij} u^i u^j + \frac{2}{n} u^{\alpha-1} |\nabla u|^2 \Delta u + (\alpha-1) u^{\alpha-2} |\nabla u|^4 \right],
\end{aligned}
$$

于是可以解出

$$
\int u^{\alpha-1} |\nabla u|^2 \Delta u = - \frac{n}{n+2} \int [2 u^{\alpha-1} E_{ij} u^i u^j + (\alpha-1) u^{\alpha-2} |\nabla u|^4]. \tag{2.4}
$$

将 (2.4) 代入 (2.3), 得

$$
\begin{aligned}
0 = \int \Bigg[& u^\alpha \sum_{i,j=1}^n |E_{ij}|^2 + \left(\alpha - \frac{2(n-1)}{n+2} p \right) u^{\alpha-1} E_{ij} u^i u^j \\
& - \frac{n-1}{n+2} p(\alpha-1) u^{\alpha-2} |\nabla u|^4 + u^\alpha R_{ij} u^i u^j - \frac{n-1}{n} \lambda(p-1) u^\alpha |\nabla u|^2 \Bigg].
\end{aligned} \tag{2.5}
$$

为了配方达到最佳, 令 $L_{ij}=\frac{u_iu_j}{u}-\frac{1}{n}\frac{|\nabla u|^2}{u}g_{ij}$, 则 $\sum_{i,j=1}^n|L_{ij}|^2=\frac{n-1}{n}\frac{|\nabla u|^4}{u^2}$. 注意到 $E_i{}^i=0$, 因此 $u^{\alpha-1}E_{ij}u^iu^j=u^\alpha E_{ij}L^{ij}$. 将 (2.5) 右端的前三项配方:

$$\begin{aligned}&u^\alpha\sum_{i,j=1}^n|E_{ij}|^2+\bigg(\alpha-\frac{2(n-1)}{n+2}p\bigg)u^{\alpha-1}E_{ij}u^iu^j-\frac{n-1}{n+2}p(\alpha-1)u^{\alpha-2}|\nabla u|^4\\&=u^\alpha\sum_{i,j=1}^n\bigg|E_{ij}+\bigg(\frac{\alpha}{2}-\frac{n-1}{n+2}p\bigg)L_{ij}\bigg|^2-\bigg[\frac{n-1}{n}\bigg(\frac{\alpha}{2}-\frac{n-1}{n+2}p\bigg)^2+\frac{n-1}{n+2}p(\alpha-1)\bigg]u^{\alpha-2}|\nabla u|^4,\end{aligned}$$

其中 $u^{\alpha-2}|\nabla u|^4$ 项的系数为关于 α 开口向下的二次多项式:

$$-\bigg[\frac{n-1}{n}\bigg(\frac{\alpha}{2}-\frac{n-1}{n+2}p\bigg)^2+\frac{n-1}{n+2}p(\alpha-1)\bigg]=-\frac{n-1}{n}\bigg[\frac{\alpha^2}{4}+\frac{p\alpha}{n+2}+\frac{(n-1)^2}{(n+2)^2}p^2-\frac{np}{n+2}\bigg],$$

它在对称轴 $\alpha=-\frac{2p}{n+2}$ 处达到最大值 $\frac{n-1}{n+2}p(1-\frac{n-2}{n+2}p)$.

根据上述讨论, 在 (2.5) 中取定 $\alpha=-\frac{2p}{n+2}$, 则 (2.5) 化为

$$\begin{aligned}0=\int\bigg[&u^{-\frac{2p}{n+2}}\sum_{i,j=1}^n\bigg|E_{ij}-\frac{np}{n+2}L_{ij}\bigg|^2+\frac{n-1}{n+2}p\bigg(1-\frac{n-2}{n+2}p\bigg)u^{-\frac{2p}{n+2}-2}|\nabla u|^4\\&+u^{-\frac{2p}{n+2}}R_{ij}u^iu^j-\frac{n-1}{n}\lambda(p-1)u^{-\frac{2p}{n+2}}|\nabla u|^2\bigg].\end{aligned}\tag{2.6}$$

注意到在 $p\leqslant\frac{n+2}{n-2}$、$\lambda\leqslant\frac{n}{p-1}$ 和 $R_{ij}-(n-1)g_{ij}$ 半正定这 3 个条件同时满足的情形下, (2.6) 右侧四项分别非负.

当 $1<p<\frac{n+2}{n-2}$ 时, 对 (2.6) 在 M 上积分, 得

$$0\geqslant\frac{n-1}{n+2}p\bigg(1-\frac{n-2}{n+2}p\bigg)\int u^{-\frac{2p}{n+2}-2}|\nabla u|^4,$$

其中 $u^{-\frac{2p}{n+2}-2}|\nabla u|^4$ 的系数为正, 从而 u 为常数.

当 $p=\frac{n+2}{n-2}$、$\lambda<\frac{n}{p-1}=\frac{n(n-2)}{4}$ 或 $R_{ij}-(n-1)g_{ij}$ 存在一点严格正定时, 对 (2.6) 在 M 上积分, 得

$$0\geqslant\int\bigg[u^{-\frac{2}{n-2}}R_{ij}u^iu^j-\frac{4(n-1)}{n(n-2)}\lambda u^{-\frac{2}{n-2}}|\nabla u|^2\bigg].$$

若 $|\nabla u|^2\neq0$, 上式矛盾, 这迫使 u 为常数.

当 $p=\frac{n+2}{n-2}$、$\lambda=\frac{n}{p-1}$ 且 $R_{ij}=(n-1)g_{ij}$ 时, (2.6) 化为

$$0=\int u^{-\frac{2}{n-2}}\sum_{i,j=1}^n\bigg|E_{ij}-\frac{n}{n-2}L_{ij}\bigg|^2.$$

因此 $E_{ij}=\frac{n}{n-2}L_{ij}$, 由文献 [8] 中的讨论, 可以得到流形的刚性 $(M^n,g)=(\mathbb{S}^n,g_c)$ 以及正解的分类. □

2.3 新方法: 不变张量

经过上一小节的讨论可以得知, 微分恒等式中向量场的关键在于 $E_{ij}-\frac{np}{n+2}L_{ij}$ 这个张量, 下面从新的观点分析这个张量是如何得到的.

目标是通过寻找向量场, 建立其散度等于一些非负项之和的微分恒等式, 进而帮助得到解的分类, 而这其中要用到分部积分的手段. 通过在方程 (2.1) 两侧同时乘以 $u^\alpha\Delta u$ 并分部积分, 很容易得到张量 u_{ij} 的模长平方, 因此所需张量 E_{ij} 须以 u_{ij} 为主项.

如果在整个分部积分的计算过程中, 遇到 u^p 就使用方程 (2.1) 将它换成另外两项, 并且将 λ 视作带有二阶导数的量, 那么整个计算过程中, 所有项的 u 的次幂、导数阶数和张量阶数一定恒定. 因此在这个问题中, 将含有的 u 的次幂、导数阶数和张量阶数称作一个张量的量纲. 如果一个恒等式的每一项的量纲相同, 那么也将这个量纲称作这个恒等式的量纲. 在不同的问题中, 量纲可能不同, 而量纲一定是在寻找恒等式的过程中守恒的量, 因此这个现象称作量纲守恒, 而借助量纲守恒现象寻找可能的向量场的过程称作量纲分析.

针对方程 (2.1), 作出量纲分析: 由于证明希望目标张量 E_{ij} 为 0, 所以至少需要产生 $\sum_{i,j}|E_{ij}|^2$ 项, 而这个项具有四阶导数, 因此需要恒等式至少具有四阶导数. 然而, 这里只是给出了恒等式导数的最低阶数, 并不意味着一定只能是四阶, 引入更高阶的导数可能在某些问题的处理上会有奇效.

对于张量 E_{ij} 本身, 它的主项 u_{ij} 已经确定, 因此它需要是一个具有一次 u 和二阶导数的一阶张量, 进而余项也需要具有这个量纲. 最简单的选取方式有 $\frac{u_iu_j}{u}$、$\Delta u g_{ij}$、$\frac{|\nabla u|^2}{u}g_{ij}$ 和 $\lambda u g_{ij}$, 因此考察

$$E_{ij}=u_{ij}+c\frac{u_iu_j}{u}+c_1\Delta u g_{ij}+c_2\frac{|\nabla u|^2}{u}g_{ij}+c_3\lambda u g_{ij},$$

其中 c、c_1、c_2 和 c_3 为待定常数. 注意到 Δu、$\frac{|\nabla u|^2}{u}$ 和 λu 项若线性相关, 通过凑全微分和散度定理, u 只能为常数, 因此在讨论过程中假设它们线性无关. 希望证明 E_{ij} 为 0, 则其迹 ${E_i}^i$ 必然为 0, 这需要 $c_1=-\frac{1}{n}$, $c_2=-\frac{c}{n}$, $c_3=0$, 于是

$$E_{ij}=u_{ij}+c\frac{u_iu_j}{u}-\frac{1}{n}\left(\Delta u+c\frac{|\nabla u|^2}{u}\right)g_{ij}.$$

现在需要确定 c. 由方程 (2.2) 可得 $(\Delta u)_j=p\frac{\Delta u}{u}u_j-(p-1)\lambda u_j$, 借此计算散度 ${E_{ij,}}^i$. 值得注意的是, 讨论的主要对象是 E_{ij}, 因此遇到 u_{ij} 就要换成 E_{ij}:

$$\begin{aligned}{E_{ij,}}^i&=\frac{n-1}{n}(\Delta u)_j+R_{ij}u^i+c\frac{\Delta u u_j}{u}+\frac{n-2}{n}c\frac{u_{ij}u^i}{u}-\frac{n-1}{n}c\frac{|\nabla u|^2}{u^2}u_j\\&=\frac{n-2}{n}c\frac{E_{ij}u^i}{u}+\frac{n-1}{n}\left(p+\frac{n+2}{n}c\right)\frac{\Delta u}{u}u_j\\&\quad-\frac{n-1}{n}c\left(1+\frac{n-2}{n}c\right)\frac{|\nabla u|^2}{u^2}u_j+R_{ij}u^i-\frac{n-1}{n}(p-1)\lambda u_j.\end{aligned}$$

如果 E_{ij} 为 0, 则 ${E_{ij,}}^i$ 也为 0, 若要 u 不是常数, 则相应项系数必须为 0:

$$\frac{n-1}{n}\left(p+\frac{n+2}{n}c\right)=0,\quad -\frac{n-1}{n}c\left(1+\frac{n-2}{n}c\right)=0. \tag{2.7}$$

不难解得 $c=p=0$, 或 $c=-\frac{n}{n-2}$, $p=\frac{n+2}{n-2}$. 显然后者对应于临界指标, 但是前者并不对应. 当然, 分析到这里, 已经得到了合乎几何或不等式意义的临界指标, 说明张量 E_{ij} 的形式选取大概率是成功的.

当然, 在次临界指标情形下, 无法做到让 (2.7) 的两个式子同时成立, 这就需要牺牲掉两个式子中的一个条件. 由于需要产生 $\sum_{i,j=1}^n|E_{ij}|^2$, 在构建向量场时需要引入 u^j, 即考察 ${(E_{ij}u^j)_,}^i$, 这会使得 (2.7) 中的两个系数对应的项分别是 $\frac{|\nabla u|^2\Delta u}{u}$ 和 $\frac{|\nabla u|^4}{u^2}$, 其中后者是贡献最终恒等式二次型中正定性的

好项, 前者是作为交叉项存在的, 因此最直接的一个方法是令前者对应的系数为 0, 故选取 $c=-\frac{np}{n+2}$, 那么

$$E_{ij,}{}^{i}=-\frac{n-2}{n+2}p\frac{E_{ij}u^i}{u}+\frac{n-1}{n+2}p\left(1-\frac{n-2}{n+2}p\right)\frac{|\nabla u|^2}{u^2}u_j+R_{ij}u^i-\frac{n-1}{n}(p-1)\lambda u_j.$$

在上述讨论过程中, E_{ij} 作为希望证明为 0 的张量, 临界指标情形下它的微分 (如上面的散度) 依旧有含有 E_{ij} 的项组成. 而次临界指标情形下, 虽然会多出来一些其他项, 但是这些项能够帮助得出 Liouville 定理 (例如, 解是常数这种结论). 从张量代数的角度来讲, 在临界指标情形下, E_{ij} 张成的张量代数是微分算子 ∇ 的不变子代数. 因此, E_{ij} 是一种具有微分不变性的张量, 称其为不变张量, 而寻找这些张量的方法被称作不变张量技术.

到现在为止, 针对 (2.1) 的量纲分析和不变张量技术已经完成, 下面将整理出定理 2.1 的新证明.

定理 2.1 的新证明 取 c 为待定常数, 考察

$$E_{ij}=u_{ij}+c\frac{u_iu_j}{u}-\frac{1}{n}\left(\Delta u+c\frac{|\nabla u|^2}{u}\right)g_{ij},$$

则

$$\begin{aligned}E_{ij,}{}^{i}=&\frac{n-2}{n}c\frac{E_{ij}u^i}{u}+\frac{n-1}{n}\left(p+\frac{n+2}{n}c\right)\frac{\Delta u}{u}u_j\\&-\frac{n-1}{n}c\left(1+\frac{n-2}{n}c\right)\frac{|\nabla u|^2}{u^2}u_j+R_{ij}u^i-\frac{n-1}{n}(p-1)\lambda u_j.\end{aligned}$$

取 $c=-\frac{np}{n+2}$, 则

$$E_{ij,}{}^{i}=-\frac{n-2}{n+2}p\frac{E_{ij}u^i}{u}+\frac{n-1}{n+2}p\left(1-\frac{n-2}{n+2}p\right)\frac{|\nabla u|^2}{u^2}u_j+R_{ij}u^i-\frac{n-1}{n}(p-1)\lambda u_j,$$

于是

$$\begin{aligned}(E_{ij}u^j),{}^{i}=&\sum_{i,j=1}^{n}|E_{ij}|^2+\frac{2p}{n+2}\frac{E_{ij}u^iu^j}{u}+\frac{n-1}{n+2}p\left(1-\frac{n-2}{n+2}p\right)\frac{|\nabla u|^4}{u^2}\\&+R_{ij}u^iu^j-\frac{n-1}{n}(p-1)\lambda|\nabla u|^2.\end{aligned}$$

为了消去交叉项 $\frac{E_{ij}u^iu^j}{u}$, 将 u 的次幂引进向量场, 考虑

$$\begin{aligned}u^{\frac{2p}{n+2}}(u^{-\frac{2p}{n+2}}E_{ij}u^j),{}^{i}=&\sum_{i,j=1}^{n}|E_{ij}|^2+\frac{n-1}{n+2}p\left(1-\frac{n-2}{n+2}p\right)\frac{|\nabla u|^4}{u^2}\\&+R_{ij}u^iu^j-\frac{n-1}{n}(p-1)\lambda|\nabla u|^2.\end{aligned}\tag{2.8}$$

在微分恒等式 (2.8) 两侧同时乘以 $u^{-\frac{2p}{n+2}}$, 并在 M 上积分, 即可得到积分恒等式 (2.6), 进而完成定理 2.1 的证明. □

使用不变张量技术的证明, 比旧方法的证明简化了大量计算. 具体来讲, 通过不变张量的思想, 本该讨论二次函数对称轴才能得到的 $\alpha=-\frac{2p}{n+2}$, 直接在上述证明过程中可以观察出来. 旧方法中需要将二次三项式配完全平方, 这个过程蕴含在了待定常数 c 的选取中, 而 c 也是通过不变张量思想确定的, 在确定 c 的同时还能得到微分恒等式, 极大地简化了计算过程.

在旧证明中, (2.4) 是计算过程中需要的一次分部积分操作, 这在直接寻找微分恒等式的观点下, 相当于寻找一个新的恒等式, 并线性组合到主恒等式上. 而寻找新恒等式的重要工具是量纲分析, 直接计算向量场的散度要比分部积分容易. 此外, 不变张量中的待定常数 c 已经能够完全蕴含微分恒等式的向量场中对应项 $\frac{|\nabla u|^2}{u}u_i$ 的信息, 因此线性组合新的恒等式的操作被完全整合到了这里, 这进一步优化了计算.

在新方法的证明过程中, 为什么不考虑配完全平方, 而是直接引入 u 的幂次去消掉交叉项? 因为如果配完全平方, 会产生 $|E_{ij}+b\frac{u_iu_j}{u}|^2$ 项, 其中 $b\neq 0$, 因此最后会得到 $E_{ij}+b\frac{u_iu_j}{u}=0$, 而不变张量 E_{ij} 也需要为 0, 这导致 u 只能是常数, 这样就与不变张量选取的初衷相矛盾.

通过本小节开始的讨论, 可知 E_{ij} 以 u_{ij} 为主项, 由 Δ- 方程 (2.1) 的主算子决定. 而曲率条件同方程的 λ 项息息相关. 为什么在这个方程中, u 的幂次是一个守恒的量纲? 为什么在向量场中引入 u 的幂次, 可以行之有效地消去交叉项? 事实上, 这些问题与方程的最后一部分—u^p 有关. 下一小节将以一般的半线性方程为例, 讨论除去主算子后的部分对量纲分析和不变张量产生的影响.

2.4 一般的半线性方程: 定理 2.2 的证明

文献 [3] 研究了流形上比较一般的一类半线性方程解的分类. 本小节研究半线性方程 (2.1), 并证明定理 2.2, 从与文献 [3] 不同的角度给出一类新的解的分类定理. 由于只需要讨论 f 变号的情形, 不妨设 $f=-f_1+f_2$, $f_1\in C^1(\mathbb{R}_+)$, $f_2\in C^2(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}_+)$. 最经典的模型是前两小节讨论的情形: $f_1(s)=\lambda s$, $f_2(s)=s^p$.

根据上一小节的讨论, 主算子是 Laplace 算子, 依旧考虑 u_{ij} 作为 E_{ij} 的主项. 由于 f_2 是抽象函数, 无法直接看出量纲, 但是可以尝试用分部积分考察

$$u_{ij}=\frac{(u_if_2(u))_{,j}}{f_2(u)}-\frac{f_2'(u)}{f_2(u)}u_iu_j,$$

因此 $\frac{f_2'(u)}{f_2(u)}u_iu_j$ 可以作为 E_{ij} 的后续项, 即设

$$E_{ij}=u_{ij}+c\frac{f_2'(u)}{f_2(u)}u_iu_j-\frac{1}{n}\left(\Delta u+c\frac{f_2'(u)}{f_2(u)}|\nabla u|^2\right)g_{ij}. \tag{2.9}$$

从量纲的角度看, $\frac{f_2'(u)}{f_2(u)}$ 可以视作具有 -1 次 u、零阶导数的零阶张量, 虽然对于某些 f 可能不一定正确. 例如, 当 $f_2(s)=\mathrm{e}^s$ 时, $\frac{f_2'(u)}{f_2(u)}=1$, 这显然不是 -1 次的 u. 此外, 当 $f_2(s)=s^p$ 时, E_{ij} 的形式回到了上一小节讨论的情形, 当然, 待定常数 c 与上一小节的 c 相比多了一个系数 p, 但这不是本质问题.

回到一般的半线性方程, 对 (2.9) 中的 E_{ij} 使用不变张量技术:

$$\begin{aligned}E_{ij,}{}^{i}=&\frac{n-1}{n}(\Delta u)_j+R_{ij}u^i+c\frac{f_2'(u)}{f_2(u)}\Delta uu_j+\frac{n-2}{n}c\frac{f_2'(u)}{f_2(u)}u_{ij}u^j\\&+\frac{n-1}{n}c\left[\frac{f_2''(u)}{f_2(u)}-\left(\frac{f_2'(u)}{f_2(u)}\right)^2\right]\frac{|\nabla u|^2}{u^2}u_j.\end{aligned}$$

为了将各项量纲统一, 需要保持分子、分母 f_2 的数量相同, 因此按照如下方式, 结合方程 (2.1) 计算 $(\Delta u)_j$:

$$(\Delta u)_j=f_1'(u)u_j-f_2'(u)u_j=\frac{f_2'(u)}{f_2(u)}\Delta uu_j+\left(f_1'(u)-\frac{f_2'(u)}{f_2(u)}f_1(u)\right)u_j.$$

将上式代入 $E_{ij,}{}^{i}$, 并将 u_{ij} 换成 E_{ij}, 得

$$\begin{aligned} E_{ij,}{}^{i} = & \frac{n-2}{n}c\frac{f_2'(u)}{f_2(u)}E_{ij}u^j + \frac{n-1}{n}\bigg(1+\frac{n+2}{n}c\bigg)\frac{f_2'(u)}{f_2(u)}\Delta u u_j \\ & + \frac{n-1}{n}c\bigg[\frac{f_2''(u)}{f_2(u)} - \bigg(\frac{n-2}{n}c+1\bigg)\bigg(\frac{f_2'(u)}{f_2(u)}\bigg)^2\bigg]|\nabla u|^2 u_j \\ & + R_{ij}u^i + \frac{n-1}{n}\bigg(f_1'(u) - \frac{f_2'(u)}{f_2(u)}f_1(u)\bigg)u_j. \end{aligned}$$

令 $\frac{f_2'(u)}{f_2(u)}\Delta u u_j$ 项系数为 0, 于是取 $c=-\frac{n}{n+2}$, 则

$$\begin{aligned} E_{ij,}{}^{i} = & -\frac{n-2}{n+2}\frac{f_2'(u)}{f_2(u)}E_{ij}u^j - \frac{n-1}{n+2}\bigg[\frac{f_2''(u)}{f_2(u)} - \frac{4}{n+2}\bigg(\frac{f_2'(u)}{f_2(u)}\bigg)^2\bigg]|\nabla u|^2 u_j \\ & + R_{ij}u^i + \frac{n-1}{n}\bigg(f_1'(u) - \frac{f_2'(u)}{f_2(u)}f_1(u)\bigg)u_j. \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} (E_{ij}u^j),{}^{i} = & \sum_{i,j=1}^{n}|E_{ij}|^2 + \frac{2}{n+2}\frac{f_2'(u)}{f_2(u)}E_{ij}u^iu^j + \frac{n-1}{n+2}\bigg[\frac{4}{n+2}\bigg(\frac{f_2'(u)}{f_2(u)}\bigg)^2 - \frac{f_2''(u)}{f_2(u)}\bigg]|\nabla u|^4 \\ & + R_{ij}u^iu^j + \frac{n-1}{n}\bigg(f_1'(u) - \frac{f_2'(u)}{f_2(u)}f_1(u)\bigg)|\nabla u|^2. \end{aligned}$$

为了消去交叉项 $\frac{f_2'(u)}{f_2(u)}E_{ij}u^iu^j$, 将 $f_2(u)$ 的次幂引进向量场, 考虑

$$\begin{aligned} f_2(u)^{\frac{2}{n+2}}[f_2(u)^{-\frac{2}{n+2}}E_{ij}u^j],{}^{i} = & \sum_{i,j=1}^{n}|E_{ij}|^2 + \frac{n-1}{n+2}\bigg[\frac{4}{n+2}\bigg(\frac{f_2'(u)}{f_2(u)}\bigg)^2 - \frac{f_2''(u)}{f_2(u)}\bigg]|\nabla u|^4 \\ & + R_{ij}u^iu^j + \frac{n-1}{n}\bigg(f_1'(u) - \frac{f_2'(u)}{f_2(u)}f_1(u)\bigg)|\nabla u|^2. \end{aligned} \tag{2.10}$$

在恒等式 (2.10) 两侧同时乘以 $f_2(u)^{-\frac{2}{n+2}}$, 并在 M 上积分, 结合 $R_{ij}-(n-1)g_{ij}$ 半正定, 得

$$\begin{aligned} 0 \geqslant & \int f_2(u)^{-\frac{2}{n+2}}\sum_{i,j=1}^{n}|E_{ij}|^2 + \frac{n-1}{n+2}\int f_2(u)^{-\frac{2}{n+2}}\bigg[\frac{4}{n+2}\bigg(\frac{f_2'(u)}{f_2(u)}\bigg)^2 - \frac{f_2''(u)}{f_2(u)}\bigg]|\nabla u|^4 \\ & + \frac{n-1}{n}\int f_2(u)^{-\frac{2}{n+2}}\bigg(n + f_1'(u) - \frac{f_2'(u)}{f_2(u)}f_1(u)\bigg)|\nabla u|^2. \end{aligned} \tag{2.11}$$

注意到 $n+f_1'(u)-\frac{f_2'(u)}{f_2(u)}f_1(u) = f_2(u)\frac{d}{du}\frac{f_1(u)}{f_2(u)}+n$,

$$\frac{4}{n+2}\bigg(\frac{f_2'(u)}{f_2(u)}\bigg)^2 - \frac{f_2''(u)}{f_2(u)} = \begin{cases} -\dfrac{n+2}{n-2}f_2(u)^{-\frac{n-2}{n+2}}\dfrac{d^2}{d^2u}[f_2(u)^{\frac{n-2}{n+2}}], & n\geqslant 3, \\ -\dfrac{d^2}{d^2u}[\log f_2(u)], & n=2. \end{cases}$$

若要 (2.11) 中的后两项均为 0, 则必须 $f_2(s)\frac{d}{ds}\frac{f_1(s)}{f_2(s)}=-n$, 且当 $n=2$ 时 $\log f_2$ 为线性函数, 或当 $n\geqslant 3$ 时 $f_2^{\frac{n-2}{n+2}}$ 为线性函数. 此时通过求解常微分方程, 得

$$f_2(s) = \begin{cases} \mathrm{e}^{k_1(s+k_2)}, & n=2, \\ [k_1(s+k_2)]^{\frac{n+2}{n-2}}, & n\geqslant 3, \end{cases} \qquad f_1(s) = \begin{cases} \dfrac{2}{k_1} + k_3f_2(s), & n=2, \\ \dfrac{n(n-2)}{4}(s+k_2) + k_3f_2(s), & n\geqslant 3, \end{cases}$$

其中 $\{k_l\}_{l=1}^3$ 为常数. 由于方程中 f_1 和 f_2 是线性组合的关系, 通过调整 k_1 和 k_2, 可以将 f_1 中的 k_3 项合并到 f_2 上, 因此不妨设 $k_3=0$.

当 $n\geqslant 3$ 时, 由于 $f_2(s)>0$ 在 $s>0$ 时成立, 所以 $k_1>0$, $k_2\geqslant 0$. 方程 (2.1) 化为

$$\Delta u-\frac{n(n-2)}{4}(u+k_2)+[k_1(u+k_2)]^{\frac{n+2}{n-2}}=0,$$

于是 $w:=k_1^{\frac{n+2}{4}}(u+k_2)$ 满足 Yamabe 方程 $\Delta w-\frac{n(n-2)}{4}w+w^{\frac{n+2}{n-2}}=0$.

当 $n=2$ 时, 由于 $f_1\leqslant 0$ 的情形无需讨论, 因此 $k_1>0$. 方程 (2.1) 化为

$$\Delta u-\frac{2}{k_1}+\mathrm{e}^{k_1(u+k_2)}=0,$$

于是 $w:=\frac{k_1}{2}(u+k_2)+\frac{1}{2}\log\frac{k_1}{2}$ 满足 Liouville 方程 $\Delta w-1+\mathrm{e}^{2w}=0$.

综合上述讨论, 定理 2.2 得证.

3 Euclid 空间上的次临界指标方程

3.1 不变张量与微分恒等式

设 $n\geqslant 3$, $1<p<\frac{n+2}{n-2}$, 考察 $\mathbb{R}^n$ 上的次临界指标方程

$$\Delta u+u^p=0. \tag{3.1}$$

Gidas 和 Spruck [4] 证明了如下 Liouville 型定理.

定理 3.1 当 $n\geqslant 3$ 且 $1<p<\frac{n+2}{n-2}$ 时, 方程 (3.1) 无正解.

仿照上一节的讨论, 考虑不变张量的形式为

$$E_{ij}=u_{ij}+c\frac{u_iu_j}{u}-\frac{1}{n}\left(\Delta u+c\frac{|\nabla u|^2}{u}\right)\delta_{ij},$$

其中 c 为待定常数. 直接计算 $E_{ij,i}$:

$$\begin{aligned}E_{ij,i}&=\frac{n-1}{n}(\Delta u)_{,j}+c\frac{\Delta u}{u}u_j+\frac{n-2}{n}c\frac{u_{ij}u_i}{u}-\frac{n-1}{n}c\frac{|\nabla u|^2}{u^2}u_j\\&=\frac{n-2}{n}c\frac{E_{ij}u_i}{u}+\frac{n-1}{n}\left(p+\frac{n+2}{n}c\right)\frac{\Delta u}{u}u_j-\frac{n-1}{n}c\left(1+\frac{n-2}{n}c\right)\frac{|\nabla u|^2}{u^2}u_j.\end{aligned}$$

令 $\frac{\Delta u}{u}u_j$ 项系数为 0, 故取 $c=-\frac{np}{n+2}$, 则

$$E_{ij}=u_{ij}-\frac{np}{n+2}\frac{u_iu_j}{u}-\frac{1}{n}\left(\Delta u-\frac{np}{n+2}\frac{|\nabla u|^2}{u}\right)\delta_{ij},$$

此时, $E_{ij,i}=-\frac{n-2}{n+2}p\frac{E_{ij}u_i}{u}+\frac{n-1}{n+2}p(1-\frac{n-2}{n+2}p)\frac{|\nabla u|^2}{u^2}u_j$,

$$(E_{ij}u_j)_{,i}=\sum_{i,j=1}^n|E_{ij}|^2+\frac{2p}{n+2}\frac{E_{ij}u_iu_j}{u}+A\frac{|\nabla u|^4}{u^2},$$

其中 $A=\frac{n-1}{n+2}p(1-\frac{n-2}{n+2}p)>0$. 再通过引入 u 的幂次, 消去 $\frac{E_{ij}u_iu_j}{u}$ 项:

$$(u^{-\frac{2p}{n+2}}E_{ij}u^j),{}^i=u^{-\frac{2p}{n+2}}\sum_{i,j=1}^n|E_{ij}|^2+Au^{-\frac{2p}{n+2}-2}|\nabla u|^4. \tag{3.2}$$

这正是需要用到的微分恒等式.

事实上, 直接在上一节讨论的不变张量和恒等式中, 令 $\lambda=0$, $R_{ij}=0$, $g_{ij}=\delta_{ij}$, 也可以得到不变张量 E_{ij} 和恒等式 (3.2).

3.2 定理 3.1 的证明

设 $\gamma>1$ 为待定常数且只依赖于 n 和 p. 在恒等式 (3.2) 两侧乘以 η^γ 并分部积分, 得

$$\int u^{-\frac{2p}{n+2}}\sum_{i,j=1}^{n}|E_{ij}|^2\eta^\gamma+A\int u^{-\frac{2p}{n+2}-2}|\nabla u|^4\eta^\gamma=-\gamma\int u^{-\frac{2p}{n+2}}E_{ij}u_j\eta^{\gamma-1}\eta_{,i}. \tag{3.3}$$

由均值不等式, 并注意到 $A>0$ 只依赖于 n 和 p, 可得

$$\begin{aligned}
&-\gamma\int u^{-\frac{2p}{n+2}}E_{ij}u_j\eta^{\gamma-1}\eta_{,i}\\
&\leqslant\frac{1}{2}\int u^{-\frac{2p}{n+2}}\sum_{i,j=1}^{n}|E_{ij}|^2\eta^\gamma+C(n,p)\int u^{-\frac{2p}{n+2}}|\nabla u|^2\eta^{\gamma-2}|\nabla\eta|^2\\
&\leqslant\frac{1}{2}\int u^{-\frac{2p}{n+2}}\sum_{i,j=1}^{n}|E_{ij}|^2\eta^\gamma+\frac{A}{2}\int u^{-\frac{2p}{n+2}-2}|\nabla u|^4\eta^\gamma+C(n,p)\int u^{-\frac{2p}{n+2}+2}\eta^{\gamma-4}|\nabla\eta|^4.
\end{aligned}$$

将上式代入积分恒等式 (3.3), 可得

$$\int u^{-\frac{2p}{n+2}-2}|\nabla u|^4\eta^\gamma\leqslant C(n,p)\int u^{-\frac{2p}{n+2}+2}\eta^{\gamma-4}|\nabla\eta|^4. \tag{3.4}$$

由方程 (3.1)、不等式 (3.4) 和均值不等式, 可得

$$\begin{aligned}
\int u^{\frac{2n+2}{n+2}p}\eta^\gamma&=-\int u^{\frac{np}{n+2}}\Delta u\eta^\gamma=\frac{np}{n+2}\int u^{\frac{np}{n+2}-1}|\nabla u|^2\eta^\gamma+\gamma\int u^{\frac{np}{n+2}}\eta^{\gamma-1}\nabla u\cdot\nabla\eta\\
&\leqslant C(n,p)\int u^{\frac{np}{n+2}-1}|\nabla u|^2\eta^\gamma+C(n,p)\int u^{\frac{np}{n+2}+1}\eta^{\gamma-2}|\nabla\eta|^2\\
&\leqslant\frac{1}{4}\int u^{\frac{2n+2}{n+2}p}\eta^\gamma+C(n,p)\int u^{-\frac{2p}{n+2}-2}|\nabla u|^4\eta^\gamma+C(n,p)\int u^{\frac{np}{n+2}+1}\eta^{\gamma-2}|\nabla\eta|^2\\
&\leqslant\frac{1}{2}\int u^{\frac{2n+2}{n+2}p}\eta^\gamma+C(n,p)\int u^{-\frac{2p}{n+2}+2}\eta^{\gamma-4}|\nabla\eta|^4.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

将 (3.5) 代入 (3.4), 可得

$$\int u^{\frac{2n+2}{n+2}p}\eta^\gamma\leqslant C_0\int u^{-\frac{2p}{n+2}+2}\eta^{\gamma-4}|\nabla\eta|^4, \tag{3.6}$$

其中 $C_0>0$ 只依赖于 n 和 p.

注意到当 $1<p<\frac{n+2}{n-2}$ 时, $-\frac{2p}{n+2}+2>2-\frac{2}{n-2}>0$, $\frac{2n+2}{n+2}p-(-\frac{2p}{n+2}+2)=2p-2>0$, 因此 $\frac{2n+2}{n+2}p/(-\frac{2p}{n+2}+2)>1$, 进而可以使用 Young 不等式

$$C_0\int u^{-\frac{2p}{n+2}+2}\eta^{\gamma-4}|\nabla\eta|^4\leqslant\frac{1}{2}\int u^{\frac{2n+2}{n+2}p}\eta^\gamma+C(n,p)\int\eta^{\gamma-\frac{4(n+1)p}{(n+2)(p-1)}}|\nabla\eta|^{\frac{4(n+1)p}{(n+2)(p-1)}}.$$

将其代入 (3.6), 取定 $\gamma=\frac{4(n+1)p}{(n+2)(p-1)}+1$, 并根据截断函数的性质可得

$$\int_{B_R}u^{\frac{2n+2}{n+2}p}\leqslant C(n,p)R^{n-\frac{4(n+1)p}{(n+2)(p-1)}}=C(n,p)R^{\frac{(n^2-2n-4)p-n(n+2)}{(n+2)(p-1)}}.$$

注意到当 $1 < p < \frac{n+2}{n-2}$ 时,

$$(n^2-2n-4)p - n(n+2) < (n^2-2n-4)\cdot\frac{n+2}{n-2} - n(n+2) = -\frac{4(n+2)}{n-2} < 0,$$

因此 $\lim_{R\to\infty}\int_{B_R} u^{\frac{2n+2}{n+2}p} = 0$, 与 $u > 0$ 矛盾.

4 Heisenberg 群上的次临界指标方程

4.1 研究背景

本小节在 Heisenberg 群 $\mathbb{H}^n$ 上, 研究次临界指标方程

$$\Delta_b u + u^\alpha = 0 \tag{4.1}$$

的光滑正解, 其中 $1 < \alpha < \frac{n+2}{n}$. Ma 和 Ou [6] 得到了如下定理:

定理 4.1 若 $1 < \alpha < \frac{n+2}{n}$, 则方程 (4.1) 没有正解.

本节使用不变张量技术, 给出定理 4.1 的新证明, 这个新证明来自于 CR (Cauchy-Riemann) 流形上的讨论. 此外, 在临界指标情形 $\alpha = \frac{n+2}{n}$, Jerison 和 Lee [5] 借助计算机得到微分恒等式, 并得到能量有限解的分类定理; 他们还提出了是否存在恒等式理论框架的问题, 这个问题也被不变张量技术解决. 对不变张量技术在 CR 流形上的应用以及回答 Jerison-Lee 问题可参见文献 [7].

4.2 不变张量

由于在 Heisenberg 群的情形下, 各种量变得非常复杂, 因此需要对张量种类的刻画给出一种显式表达, 即 "量纲" 的概念, 以便于具体分析. 如果张量 $S(u)$ 是由有限个 (r,s) 阶张量线性组合而成, 且每个张量具有 x 次幂的 u、y 阶导数, 以及每个张量的 $\sqrt{-1}$ 个数加上向量场 T 的个数是偶数/奇数, 则称张量 $S(u)$ 是 $\{(r,s),x,y,+/-\}$ 型的, 而 $\{(r,s),x,y,+/-\}$ 称为张量 $S(u)$ 的量纲.

称张量 $S(u)$ 是 $\{(r,s),x,y,+/-\}$ 型的, 如果它是由有限个 (r,s) 阶张量线性组合而成, 且每个张量具有 x 次幂的 u、y 阶导数, 以及每个张量的 $\sqrt{-1}$ 个数加上向量场 T 的个数是偶数/奇数, 而 $\{(r,s),x,y,+/-\}$ 称作张量 $S(u)$ 的量纲. 举例如下:

$$\{(2,0),1,2,+\}: D_{ij} = u_{ij} + c_1\frac{u_iu_j}{u};$$

$$\{(1,1),1,2,+\}: E_{i\bar{j}} = u_{i\bar{j}} + c_2\frac{u_iu_{\bar{j}}}{u} + c_3\Delta_b u\delta_{i\bar{j}} + c_4 n\sqrt{-1}u_0\delta_{i\bar{j}} + c_5\frac{|\nabla_b u|^2}{u}\delta_{i\bar{j}},$$

其中 $\{c_l\}_{l=1}^5$ 是常数. 此外, u_0 被视作具有二阶导数, 因此它是 $\{(0,0),1,2,-\}$ 型的.

如上定义的张量量纲在针对方程 (4.1) 的解进行分部积分的过程中是守恒的. 类比于实流形的分析过程, 容易得知前面定义的 D_{ij} 和 $E_{i\bar{j}}$ 正是需要的不变张量的形式, 且根据 $E_{i\bar{i}} = 0$, 得 $c_3 = -\frac{1}{n}$, $c_4 = -\frac{1}{n}$, $c_5 = -\frac{1}{n}c_2$, 因此

$$E_{i\bar{j}} = u_{i\bar{j}} + c_2\frac{u_iu_{\bar{j}}}{u} - \frac{1}{n}\left(\Delta_b u + n\sqrt{-1}u_0 + c_2\frac{|\nabla_b u|^2}{u}\right)\delta_{i\bar{j}}.$$

记 $D_i = \frac{D_{ij}u_{\bar{j}}}{u}$, $E_i = \frac{E_{i\bar{j}}u_j}{u}$. 由方程 (4.1), $(\Delta_b u)_j = \alpha\frac{\Delta_b u}{u}u_j$, 因此

$$D_{ij,\bar{i}} = u_{ij\bar{i}} + c_1\frac{u_{j\bar{i}}u_i}{u} + c_1\frac{u_j(\Delta_b u + n\sqrt{-1}u_0)}{u} - c_1\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}u_j$$

$$
\begin{aligned}
&= (\Delta_b u + n\sqrt{-1}u_0)_j + 2\sqrt{-1}u_{0j} + c_1\bigg[E_{j\bar{i}} - c_2\frac{u_j u_{\bar{i}}}{u} + \frac{1}{n}\bigg(\Delta_b u + n\sqrt{-1}u_0 \\
&\quad + c_2\frac{|\nabla_b u|^2}{u}\bigg)\delta_{j\bar{i}}\bigg]\frac{u_i}{u} + c_1\frac{u_j(\Delta_b u + n\sqrt{-1}u_0)}{u} - c_1\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}u_j \\
&= c_1 E_j + (n+2)\sqrt{-1}u_{0j} + (n+1)c_1\frac{\sqrt{-1}u_0 u_j}{u} + \left(\frac{n+1}{n}c_1 + \alpha\right)\frac{\Delta_b u}{u}u_j \\
&\quad - \left(\frac{n-1}{n}c_2 + 1\right)c_1\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}u_j,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E_{i\bar{j},\bar{i}} &= u_{i\bar{j}\bar{i}} + c_2\frac{u_{\bar{j}\bar{i}}u_i}{u} + c_2\frac{u_{\bar{j}}(\Delta_b u + n\sqrt{-1}u_0)}{u} - c_2\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}u_{\bar{j}} \\
&\quad - \frac{(\Delta_b u + n\sqrt{-1}u_0)_{\bar{j}}}{n} - \frac{c_2}{n}\frac{u_{\bar{i}\bar{j}}u_i}{u} - \frac{c_2}{n}\frac{u_{i\bar{j}}u_{\bar{i}}}{u} + \frac{c_2}{n}\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}u_{\bar{j}} \\
&= (\Delta_b u + n\sqrt{-1}u_0)_{\bar{j}} + \frac{n-1}{n}c_2\frac{u_{\bar{i}\bar{j}}u_i}{u} + c_2\frac{u_{\bar{j}}(\Delta_b u + n\sqrt{-1}u_0)}{u} \\
&\quad - \frac{c_2}{n}\frac{u_{i\bar{j}}u_{\bar{i}}}{u} - \frac{(\Delta_b u + n\sqrt{-1}u_0)_{\bar{j}}}{n} - \frac{n-1}{n}c_2\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}u_{\bar{j}} \\
&= -\frac{c_2}{n}\bigg[E_{i\bar{j}} - c_2\frac{u_i u_{\bar{j}}}{u} + \frac{1}{n}\bigg(\Delta_b u + n\sqrt{-1}u_0 + c_2\frac{|\nabla_b u|^2}{u}\bigg)\delta_{i\bar{j}}\bigg]\frac{u_{\bar{i}}}{u} \\
&\quad + \frac{n-1}{n}c_2\left(D_{\bar{i}\bar{j}} - c_1\frac{u_{\bar{i}}u_{\bar{j}}}{u}\right)\frac{u_i}{u} + (n-1)\sqrt{-1}u_{0\bar{j}} + nc_2\frac{\sqrt{-1}u_0 u_{\bar{j}}}{u} \\
&\quad + \left(c_2 + \frac{n-1}{n}\alpha\right)\frac{\Delta_b u}{u}u_{\bar{j}} - \frac{n-1}{n}c_2\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}u_{\bar{j}} \\
&= \frac{n-1}{n}c_2 D_{\bar{j}} - \frac{c_2}{n}E_{\bar{j}} + (n-1)\sqrt{-1}u_{0\bar{j}} + \frac{n^2-1}{n}c_2\frac{\sqrt{-1}u_0 u_{\bar{j}}}{u} \\
&\quad + \frac{n-1}{n}\left(\frac{n+1}{n}c_2 + \alpha\right)\frac{\Delta_b u}{u}u_{\bar{j}} - \frac{n-1}{n}\left(c_1 - \frac{c_2}{n} + 1\right)c_2\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}u_{\bar{j}}.
\end{aligned}
$$

希望 D_{ij} 和 $E_{i\bar{j}}$ 为 0, 则 $D_{ij,\bar{i}}$ 和 $E_{i\bar{j},\bar{i}}$ 也为 0, 于是

$$
\begin{aligned}
0 &= (n+2)\sqrt{-1}u_{0j} + (n+1)c_1\frac{\sqrt{-1}u_0 u_j}{u} + \left(\frac{n+1}{n}c_1 + \alpha\right)\frac{\Delta_b u}{u}u_j \\
&\quad - \left(\frac{n-1}{n}c_2 + 1\right)c_1\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}u_j + R_{j\bar{i}}u_i + (1-\alpha)\lambda u_j, \\
0 &= (n-1)\sqrt{-1}u_{0\bar{j}} + \frac{n^2-1}{n}c_2\frac{\sqrt{-1}u_0 u_{\bar{j}}}{u} + \frac{n-1}{n}\left(\frac{n+1}{n}c_2 + \alpha\right)\frac{\Delta_b u}{u}u_{\bar{j}} \\
&\quad - \frac{n-1}{n}\left(c_1 - \frac{c_2}{n} + 1\right)c_2\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}u_{\bar{j}} + \frac{n-1}{n}(1-\alpha)\lambda u_{\bar{j}}.
\end{aligned}
$$

将第二个式子取共轭, 令 $\sqrt{-1}u_{0j}$、$\frac{\sqrt{-1}u_0 u_j}{u}$、$\frac{\Delta_b u}{u}u_j$ 和 $\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}u_j$ 的系数成比例:

$$
\frac{n+2}{-(n-1)} = \frac{(n+1)c_1}{-\frac{n^2-1}{n}c_2} = \frac{\frac{n+1}{n}c_1 + \alpha}{\frac{n-1}{n}(\frac{n+1}{n}c_2 + \alpha)} = \frac{-(\frac{n-1}{n}c_2 + 1)c_1}{-\frac{n-1}{n}(c_1 - \frac{c_2}{n} + 1)c_2},
$$

于是 $c_1 = c_2 = \alpha = 0$ 或 $c_1 = -\frac{n+2}{n}$, $c_2 = -1$, $\alpha = \frac{n+2}{n}$. 因此, 临界指标 $\alpha = \frac{n+2}{n}$ 通过不变张量技术确定了出来.

如果 α 不是临界指标, 那么无法令上面 4 项的系数同时成比例, 类比于实流形的讨论, 需要保留一个系数不成比例的项 $\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}u_j$. 于是考虑

$$\frac{n+2}{-(n-1)}=\frac{(n+1)c_1}{-\frac{n^2-1}{n}c_2}=\frac{\frac{n+1}{n}c_1+\alpha}{\frac{n-1}{n}(\frac{n+1}{n}c_2+\alpha)},$$

进而 $c_1=-\alpha$, $c_2=-\frac{n\alpha}{n+2}$. 代入 c_1 和 c_2 并重写 D_{ij} 和 $E_{i\bar{j}}$:

$$\begin{aligned}D_{ij}&=u_{ij}-\alpha\frac{u_iu_j}{u},\\E_{i\bar{j}}&=u_{i\bar{j}}-\frac{n\alpha}{n+2}\frac{u_iu_{\bar{j}}}{u}-\frac{1}{n}\left(\Delta_bu+n\sqrt{-1}u_0-\frac{n\alpha}{n+2}\frac{|\nabla_bu|^2}{u}\right)\delta_{i\bar{j}}.\end{aligned}$$

通过使 $E_{i\bar{j},\bar{i}}$ 具有不变性, 确定出具有 $\{(1,0),1,3,+\}$ 量纲的不变张量 G_i 为

$$G_i=n\sqrt{-1}u_{0i}-\frac{n(n+1)}{n+2}\alpha\frac{\sqrt{-1}u_0u_i}{u}-\frac{\alpha}{n+2}\frac{\Delta_bu}{u}u_i+\frac{n\alpha}{n+2}\left(\frac{n+1}{n+2}\alpha-1\right)\frac{|\nabla_bu|^2}{u^2}u_i,$$

此时 $D_{ij,\bar{i}}$ 和 $E_{i\bar{j},\bar{i}}$ 化为

$$D_{ij,\bar{i}}=-\alpha E_j+\frac{n+2}{n}G_j+2\alpha\left(1-\frac{n\alpha}{n+2}\right)\frac{|\nabla_bu|^2}{u^2}u_j,\tag{4.2}$$

$$E_{i\bar{j},\bar{i}}=-\frac{n-1}{n+2}\alpha D_{\bar{j}}+\frac{\alpha}{n+2}E_{\bar{j}}-\frac{n-1}{n}G_{\bar{j}}.\tag{4.3}$$

引入记号: $E_{\bar{i}j}=\overline{E_{i\bar{j}}}$, $L_{i\bar{j}}=\frac{u_iu_{\bar{j}}}{u}-\frac{1}{n}\frac{|\nabla_bu|^2}{u}\delta_{i\bar{j}}$.

引理 4.1　(1) $E_{i\bar{i}}=0$, $E_{i\bar{j}}=E_{\bar{j}i}$, $E_iu_{\bar{i}}\in\mathbb{R}$;

(2) $L_{i\bar{i}}=0$, $E_iu_{\bar{i}}=E_{i\bar{j}}L_{j\bar{i}}$, $\sum_{i,j=1}^n|L_{i\bar{j}}|^2=\frac{n-1}{n}\frac{|\nabla_bu|^4}{u^2}$.

证明　$E_{i\bar{i}}=u_{i\bar{i}}-\frac{n\alpha}{n+2}\frac{|\nabla_bu|^2}{u}-(\Delta_bu+n\sqrt{-1}u_0-\frac{n\alpha}{n+2}\frac{|\nabla_bu|^2}{u})=0$, 于是 $L_{i\bar{i}}=0$ 同理可证. 由 $E_{i\bar{i}}=0$, 得 $E_{i\bar{j}}L^{i\bar{j}}=E_{i\bar{j}}\cdot\frac{u_{\bar{i}}u_j}{u}=E_iu_{\bar{i}}$. 同理由 $L_{i\bar{i}}=0$, 可得

$$\sum_{i,j=1}^n|L_{i\bar{j}}|^2=L_{i\bar{j}}\cdot\frac{u_{\bar{i}}u_j}{u}=\frac{n-1}{n}\frac{|\nabla_bu|^4}{u^2}.$$

由 $u_{i\bar{j}}-u_{\bar{j}i}=2\sqrt{-1}\delta_{i\bar{j}}u_0$, 可得

$$\begin{aligned}E_{i\bar{j}}&=u_{i\bar{j}}-\frac{n\alpha}{n+2}\frac{u_iu_{\bar{j}}}{u}-\frac{1}{n}\left(\Delta_bu+n\sqrt{-1}u_0-\frac{n\alpha}{n+2}\frac{|\nabla_bu|^2}{u}\right)\delta_{i\bar{j}}\\&=u_{\bar{j}i}-\frac{n\alpha}{n+2}\frac{u_{\bar{j}}u_i}{u}-\frac{1}{n}\left(\Delta_bu-n\sqrt{-1}u_0-\frac{n\alpha}{n+2}\frac{|\nabla_bu|^2}{u}\right)\delta_{\bar{j}i}\\&=E_{\bar{j}i},\end{aligned}$$

于是 $E_iu_{\bar{i}}=\frac{E_{i\bar{j}}u_{\bar{i}}u_j}{u}=\frac{E_{\bar{j}i}u_{\bar{i}}u_j}{u}=E_{\bar{j}}u_j$, 即 $E_iu_{\bar{i}}\in\mathbb{R}$. □

引理 4.2　对于方程 (4.1) 的解 u, 下列等式成立:

$$\begin{aligned}(\Delta_bu)_i&=\alpha\frac{\Delta_bu}{u}u_i,\\(|\nabla_bu|^2)_{,\bar{i}}&=uD_{\bar{i}}+uE_{\bar{i}}+\frac{2n+1}{n+2}\alpha\frac{|\nabla_bu|^2}{u}u_{\bar{i}}+\frac{1}{n}\Delta_buu_{\bar{i}}+\sqrt{-1}u_0u_{\bar{i}},\\n\sqrt{-1}u_{0\bar{i}}&=-G_{\bar{i}}+\frac{n(n+1)}{n+2}\alpha\frac{\sqrt{-1}u_0u_{\bar{i}}}{u}-\frac{\alpha}{n+2}\frac{\Delta_bu}{u}u_{\bar{i}}+\frac{n\alpha}{n+2}\left(\frac{n+1}{n+2}\alpha-1\right)\frac{|\nabla_bu|^2}{u^2}u_{\bar{i}}.\end{aligned}$$

证明 由方程 (4.1) 和 D_{ij}、$E_{i\bar{j}}$、G_i 的定义, 可以直接计算验证. □

下面的引理体现了 D_{ij}、$E_{i\bar{j}}$ 和 G_i 的微分不变性.

引理 4.3 (不变张量的微分不变性)

$$D_{i,}{}^{i} = u^{-1}\sum_{i,j=1}^{n}|D_{ij}|^2 + (\alpha-1)\frac{D_i u_{\bar{i}}}{u} - \alpha\frac{E_i u_{\bar{i}}}{u} + \frac{n+2}{n}\frac{G_i u_{\bar{i}}}{u} + 2\alpha\left(1-\frac{n\alpha}{n+2}\right)\frac{|\nabla_b u|^4}{u^3}, \tag{4.4}$$

$$E_{i,}{}^{i} = u^{-1}\sum_{i,j=1}^{n}|E_{i\bar{j}}|^2 - \frac{n-1}{n+2}\alpha\frac{D_{\bar{i}} u_i}{u} + \left(\frac{n+1}{n+2}\alpha-1\right)\frac{E_{\bar{i}} u_i}{u} - \frac{n-1}{n}\frac{G_{\bar{i}} u_i}{u}, \tag{4.5}$$

$$\operatorname{Im} G_{i,}{}^{i} = \operatorname{Im}\left[\frac{n\alpha}{n+2}\left(\frac{n+1}{n+2}\alpha-1\right)\frac{D_{\bar{i}} u_i}{u} + \frac{n+1}{n+2}\alpha\frac{G_{\bar{i}} u_i}{u}\right]. \tag{4.6}$$

证明 (4.4) 和 (4.5) 可以由 (4.2) 和 (4.3) 直接得到验证. 由引理 4.2, 可得

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} G_{i,}{}^{i} &= n\operatorname{Im}\sqrt{-1}(\Delta_b u)_0 - \frac{n(n+1)}{n+2}\alpha\left(\operatorname{Im}\frac{\sqrt{-1}u_{0\bar{i}}u_i}{u} + \frac{u_0\Delta_b u}{u} - \frac{u_0|\nabla_b u|^2}{u^2}\right)\\
&\quad - \frac{n\alpha}{n+2}\frac{u_0\Delta_b u}{u} + \frac{n\alpha}{n+2}\left(\frac{n+1}{n+2}\alpha-1\right)\left(\operatorname{Im}\frac{D_{\bar{i}}u_i}{u} + (n+1)\frac{u_0|\nabla_b u|^2}{u^2}\right)\\
&= \frac{n\alpha}{n+2}\left(\frac{n+1}{n+2}\alpha-1\right)\operatorname{Im}\frac{D_{\bar{i}}u_i}{u} - \frac{n(n+1)}{n+2}\alpha\operatorname{Im}\frac{\sqrt{-1}u_{0\bar{i}}u_i}{u} + \frac{n(n+1)^2}{(n+2)^2}\alpha^2\frac{u_0|\nabla_b u|^2}{u^2}\\
&= \operatorname{Im}\left[\frac{n\alpha}{n+2}\left(\frac{n+1}{n+2}\alpha-1\right)\frac{D_{\bar{i}}u_i}{u} + \frac{n+1}{n+2}\alpha\frac{G_{\bar{i}}u_i}{u}\right].
\end{aligned}$$

证毕. □

4.3 微分恒等式

由于不变张量 G_i 需要被考虑进来, 会产生 $\sum_{i=1}^n |G_i|^2$ 这个六阶导数项, 因此通过量纲分析, 考察如下 $\{(0,0),2,6,+\}$ 型恒等式.

命题 4.1 设 $\{d_l\}_{l=1}^3$、$\{e_l\}_{l=1}^3$、μ 和 β 是待定常数, 则

$$\begin{aligned}
&u^{-\beta}\operatorname{Re}\Bigg\{u^{\beta}\Bigg[\left(d_1\frac{|\nabla_b u|^2}{u} + d_2u^{\alpha} + d_3 n\sqrt{-1}u_0\right)D_i\\
&\quad + \left(e_1\frac{|\nabla_b u|^2}{u} + e_2u^{\alpha} + e_3n\sqrt{-1}u_0\right)E_i - \mu n\sqrt{-1}u_0G_i\Bigg]\Bigg\}_{,\bar{i}}\\
&= \left[d_1\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2} + d_2u^{\alpha-1}\right]\left[\sum_{i,j=1}^n|D_{ij}|^2 + 2\alpha\left(1-\frac{n\alpha}{n+2}\right)\frac{|\nabla_b u|^4}{u^2}\right]\\
&\quad + \left[e_1\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2} + e_2u^{\alpha-1}\right]\sum_{i,j=1}^n|E_{i\bar{j}}|^2 + d_1\sum_{i=1}^n|D_i|^2 + e_1\sum_{i=1}^n|E_i|^2 + \mu\sum_{i=1}^n|G_i|^2\\
&\quad + (d_1+e_1)\operatorname{Re}D_iE^i - d_3\operatorname{Re}D_iG^i - e_3\operatorname{Re}E_iG^i\\
&\quad + \operatorname{Re}\left[\Delta_1\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2} + \Delta_2u^{\alpha-1} + \Delta_3\frac{n\sqrt{-1}u_0}{u}\right]D_iu_{\bar{i}} + \left[\Theta_1\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2} + \Theta_2u^{\alpha-1}\right]E_iu_{\bar{i}}\\
&\quad + \operatorname{Re}\left[\Xi_1\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2} + \Xi_2u^{\alpha-1} + \Xi_3\frac{n\sqrt{-1}u_0}{u}\right]G_iu_{\bar{i}},
\end{aligned} \tag{4.7}$$

其中的系数如下:

$$
\begin{aligned}
\Delta_1 &= \left(\beta + \frac{3(n+1)}{n+2}\alpha - 2\right)d_1 - \frac{n-1}{n+2}\alpha e_1 + \frac{n\alpha}{n+2}\left(\frac{n+1}{n+2}\alpha - 1\right)d_3,\\
\Delta_2 &= -\frac{1}{n}d_1 + (\beta + 2\alpha - 1)d_2 - \frac{n-1}{n+2}\alpha e_2 + \frac{\alpha}{n+2}d_3,\\
\Delta_3 &= \frac{1}{n}d_1 + \left(\beta + \frac{2n+3}{n+2}\alpha - 1\right)d_3 + \frac{n-1}{n+2}\alpha e_3 + \frac{n\alpha}{n+2}\left(\frac{n+1}{n+2}\alpha - 1\right)\mu,\\
\Theta_1 &= -\alpha d_1 + \left(\beta + \frac{3n+2}{n+2}\alpha - 2\right)e_1 + \frac{n\alpha}{n+2}\left(\frac{n+1}{n+2}\alpha - 1\right)e_3,\\
\Theta_2 &= -\frac{1}{n}e_1 - \alpha d_2 + \left(\beta + \frac{2n+3}{n+2}\alpha - 1\right)e_2 + \frac{\alpha}{n+2}e_3,\\
\Xi_1 &= \frac{n+2}{n}d_1 - \frac{n-1}{n}e_1 - \frac{n\alpha}{n+2}\left(\frac{n+1}{n+2}\alpha - 1\right)\mu,\\
\Xi_2 &= \frac{n+2}{n}d_2 - \frac{n-1}{n}e_2 - \frac{\alpha}{n+2}\mu,\\
\Xi_3 &= \frac{n+2}{n}d_3 + \frac{n-1}{n}e_3 - \beta\mu.
\end{aligned}
$$

证明 由引理 4.2 和 4.3, 可以直接计算

$$
\begin{aligned}
u^{-\beta}\operatorname{Re}(u^{\beta-1}|\nabla_b u|^2 D_i)_{,\bar{i}} = {}& \frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}\sum_{i,j=1}^{n}\left[|D_{ij}|^2 + 2\alpha\left(1 - \frac{n\alpha}{n+2}\right)\frac{|\nabla_b u|^4}{u^2}\right] + \sum_{i=1}^{n}|D_i|^2 + \operatorname{Re} D_i E^i\\
&+ \operatorname{Re}\left[\left(\beta + \frac{3(n+1)}{n+2}\alpha - 2\right)\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2} - \frac{1}{n}u^{\alpha-1} + \frac{1}{n}\frac{n\sqrt{-1}u_0}{u}\right]D_i u_{\bar{i}}\\
&- \alpha\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}E_i u_{\bar{i}} + \frac{n+2}{n}\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}\operatorname{Re} G_i u_{\bar{i}},\\
u^{-\beta}\operatorname{Re}(u^{\beta+\alpha} D_i)_{,\bar{i}} = {}& u^{\alpha-1}\sum_{i,j=1}^{n}\left[|D_{ij}|^2 + 2\alpha\left(1 - \frac{n\alpha}{n+2}\right)\frac{|\nabla_b u|^4}{u^2}\right]\\
&+ (\beta + 2\alpha - 1)u^{\alpha-1}\operatorname{Re} D_i u_{\bar{i}} - \alpha u^{\alpha-1}E_i u_{\bar{i}} + \frac{n+2}{n}u^{\alpha-1}\operatorname{Re} G_i u_{\bar{i}},\\
u^{-\beta}\operatorname{Re}(u^{\beta}&\cdot n\sqrt{-1}u_0 D_i)_{,\bar{i}}\\
= {}& -\operatorname{Re} D_i G^i + \left(\beta + \frac{2n+3}{n+2}\alpha - 1\right)\operatorname{Re}\frac{n\sqrt{-1}u_0}{u}D_i u_{\bar{i}} + \frac{n+2}{n}\operatorname{Re}\frac{n\sqrt{-1}u_0}{u}G_i u_{\bar{i}}\\
&+ \left[\frac{n\alpha}{n+2}\left(\frac{n+1}{n+2}\alpha - 1\right)\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2} + \frac{\alpha}{n+2}u^{\alpha-1}\right]\operatorname{Re} D_i u_{\bar{i}},\\
u^{-\beta}\operatorname{Re}(u^{\beta-1}|\nabla_b u|^2 E_i)_{,\bar{i}} = {}& \frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}\sum_{i,j=1}^{n}|E_{i\bar{j}}|^2 + \sum_{i=1}^{n}|E_i|^2 + \operatorname{Re} D_i E^i - \frac{n-1}{n+2}\alpha\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}\operatorname{Re} D_i u_{\bar{i}}\\
&+ \left[\left(\beta + \frac{3n+2}{n+2}\alpha - 2\right)\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2} - \frac{1}{n}u^{\alpha-1}\right]E_i u_{\bar{i}} - \frac{n-1}{n}\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}\operatorname{Re} G_i u_{\bar{i}},\\
u^{-\beta}\operatorname{Re}(u^{\beta+\alpha} E_i)_{,\bar{i}} = {}& u^{\alpha-1}\sum_{i,j=1}^{n}|E_{i\bar{j}}|^2 - \frac{n-1}{n+2}\alpha u^{\alpha-1}\operatorname{Re} D_i u_{\bar{i}}\\
&+ \left(\beta + \frac{2n+3}{n+2}\alpha - 1\right)u^{\alpha-1}E_i u_{\bar{i}} - \frac{n-1}{n}u^{\alpha-1}\operatorname{Re} G_i u_{\bar{i}},
\end{aligned}
$$

$$u^{-\beta}\operatorname{Re}(u^{\beta}\cdot n\sqrt{-1}u_0E_i)_{,\bar{i}}=-\operatorname{Re}E_iG^i+\frac{n-1}{n+2}\alpha\operatorname{Re}\frac{n\sqrt{-1}u_0}{u}D_iu_{\bar{i}}+\frac{n-1}{n}\operatorname{Re}\frac{n\sqrt{-1}u_0}{u}G_iu_{\bar{i}}$$
$$+\left[\frac{n\alpha}{n+2}\left(\frac{n+1}{n+2}\alpha-1\right)\frac{|\nabla_bu|^2}{u^2}+\frac{\alpha}{n+2}u^{\alpha-1}\right]E_iu_{\bar{i}},$$

$$u^{-\beta}\operatorname{Re}(-n\sqrt{-1}u^{\beta}u_0G_i)_{,\bar{i}}$$
$$=\sum_{i=1}^{n}|G_i|^2+\frac{n\alpha}{n+2}\left(\frac{n+1}{n+2}\alpha-1\right)\operatorname{Re}\frac{n\sqrt{-1}u_0}{u}D_iu_{\bar{i}}-\beta\operatorname{Re}\frac{n\sqrt{-1}u_0}{u}G_iu_{\bar{i}}$$
$$-\left[\frac{n\alpha}{n+2}\left(\frac{n+1}{n+2}\alpha-1\right)\frac{|\nabla_bu|^2}{u^2}+\frac{\alpha}{n+2}u^{\alpha-1}\right]\operatorname{Re}G_iu_{\bar{i}}.$$

直接线性组合以上各式, 命题得证. □

在 (4.7) 中, 取

$$d_1=e_1=\frac{n^2\alpha[3n+6-(n-1)\alpha]}{(2n+1)(n+2)^2},\quad d_2=e_2=\frac{n\alpha}{n+2},$$
$$d_3=\frac{n}{2n+1}\left(3-\frac{7n+2}{n+2}\alpha\right),\quad e_3=\frac{n(3+\alpha)}{2n+1},\quad \mu=3,\quad \beta=1-\alpha,$$

于是各项系数化为

$$\Delta_1=\frac{2n^2\alpha[(4n+5)\alpha-3n-6]}{(2n+1)(n+2)^2}\left(1-\frac{n\alpha}{n+2}\right),\quad \Theta_1=-\frac{6n^2\alpha(\alpha+n+2)}{(2n+1)(n+2)^2}\left(1-\frac{n\alpha}{n+2}\right),$$
$$\Xi_1=\frac{6n\alpha}{2n+1}\left(1-\frac{n\alpha}{n+2}\right),\quad \Delta_2=\Theta_2=\Xi_2=\Xi_3=\Delta_3=\Xi_3=0.$$

注意到 $\sum_{i,j,k=1}^{n}|D_{ij}u_{\bar{k}}+E_{i\bar{k}}u_j|^2=|\nabla_bu|^2\sum_{i,j=1}^{n}(|D_{ij}|^2+|E_{i\bar{j}}|^2)+2u^2\operatorname{Re}D_iE^i$, 结合引理 4.1, 将恒等式 (4.7) 重写为

$$u^{-\beta}\operatorname{Re}\left\{u^{\beta}\left[\left(d_1\frac{|\nabla_bu|^2}{u}+d_2u^{\alpha}\right)(D_i+E_i)+n\sqrt{-1}u_0(d_3D_i+e_3E_i-3G_i)\right]\right\}_{,\bar{i}}$$
$$=d_1u^{-2}\sum_{i,j,k=1}^{n}|D_{ij}u_{\bar{k}}+E_{i\bar{k}}u_j|^2+d_2u^{\alpha-1}\left[\sum_{i,j=1}^{n}(|D_{ij}|^2+|E_{i\bar{j}}|^2)+2\alpha\left(1-\frac{n\alpha}{n+2}\right)\frac{|\nabla_bu|^4}{u^2}\right]$$
$$+\boldsymbol{Q},\tag{4.8}$$

其中 $\boldsymbol{Q}$ 为如下二次型:

$$\boldsymbol{Q}=d_1\sum_{i=1}^{n}|D_i|^2+d_1\sum_{i=1}^{n}|E_i|^2+3\sum_{i=1}^{n}|G_i|^2-d_3\operatorname{Re}D_iG^i-e_3\operatorname{Re}E_iG^i$$
$$+\Delta_1\frac{|\nabla_bu|^2}{u^2}\operatorname{Re}D_iu_{\bar{i}}+\Theta_1\frac{|\nabla_bu|^2}{u^2}E_iu_{\bar{i}}+\Xi_1\frac{|\nabla_bu|^2}{u^2}\operatorname{Re}G_iu_{\bar{i}}+2d_1\alpha\left(1-\frac{n\alpha}{n+2}\right)\frac{|\nabla_bu|^6}{u^4},$$

其对应的矩阵为

$$Q=\begin{pmatrix} d_1 & 0 & -\frac{d_3}{2} & \frac{\Delta_1}{2}\\ 0 & d_1 & -\frac{e_3}{2} & \frac{\Theta_1}{2}\\ -\frac{d_3}{2} & -\frac{e_3}{2} & 3 & \frac{\Xi_1}{2}\\ \frac{\Delta_1}{2} & \frac{\Theta_1}{2} & \frac{\Xi_1}{2} & 2d_1\alpha(1-\frac{n\alpha}{n+2})\end{pmatrix}.$$

4.4　定理 4.1 的证明

当 $\alpha\in(1,\frac{n+2}{n})$ 时, $d_1=\frac{n\alpha}{n+2}\cdot\frac{n[3n+6-(n-1)\alpha]}{(2n+1)(n+2)}\geqslant\frac{n\alpha}{n+2}>0$, $d_2=\frac{n\alpha}{n+2}>0$. 检查二次型 $\boldsymbol{Q}$ 的正定性:

$$\begin{vmatrix} d_1 & 0 & -\frac{d_3}{2} \\ 0 & d_1 & -\frac{e_3}{2} \\ -\frac{d_3}{2} & -\frac{e_3}{2} & 3 \end{vmatrix}=\frac{n^4\alpha(3-\frac{n-1}{n+2}\alpha)}{2(n+2)(2n+1)^3}f_2(\alpha),$$

其中 $3-\frac{n-1}{n+2}\alpha>3-\frac{n-1}{n+2}\cdot\frac{n+2}{n}=\frac{2n+1}{n}>0$,

$$\begin{aligned} f_2(\alpha)&=-(37n^2+10n-2)\left(\frac{\alpha}{n+2}\right)^2+18(3n+1)\left(\frac{\alpha}{n+2}\right)-9\\ &\geqslant\min\left\{f_2(1),f_2\left(\frac{n+2}{n}\right)\right\}\\ &=\min\left\{\frac{2(4n^2+40n+1)}{(n+2)^2},\frac{2(2n+1)^2}{n^2}\right\}\\ &>0. \end{aligned}$$

检查 Q 的行列式: $\det Q=\frac{n^6\alpha^3(3-\frac{n-1}{n+2}\alpha)^2}{(n+2)^3(2n+1)^4}(1-\frac{n\alpha}{n+2})f_3(\alpha)$, 其中

$$\begin{aligned} f_3(\alpha)&=-2(2n-1)(11n^2+14n+2)\left(\frac{\alpha}{n+2}\right)^2+(79n^2+58n-2)\left(\frac{\alpha}{n+2}\right)-27n\\ &\geqslant\min\left\{f_3(1),f_3\left(\frac{n+2}{n}\right)\right\}\\ &=\min\left\{\frac{2n(4n^2+37n+13)}{(n+2)^2},\frac{2(n+2)(2n+1)^2}{n^2}\right\}\\ &>0. \end{aligned}$$

因此, 当 $\alpha\in(1,\frac{n+2}{n})$ 时, $\boldsymbol{Q}$ 是正定的二次型.

综上所述, 当 $\alpha\in(1,\frac{n+2}{n})$ 时, 存在 $\delta>0$ 依赖于 n 和 α, 使得

$$\begin{aligned} &u^{\alpha-1}\operatorname{Re}\left\{u^{1-\alpha}\left[\left(d_1\frac{|\nabla_b u|^2}{u}+d_2u^\alpha\right)(D_i+E_i)+n\sqrt{-1}u_0(d_3D_i+e_3E_i-3G_i)\right]\right\}_{,\bar{i}}\\ &\quad\geqslant\delta u^{\alpha-1}\left[\sum_{i,j=1}^n(|D_{ij}|^2+|E_{i\bar{j}}|^2)+\frac{|\nabla_b u|^4}{u^2}\right]+\delta\left[\sum_{i=1}^n(|D_i|^2+|E_i|^2+|G_i|^2)+\frac{|\nabla_b u|^6}{u^4}\right]. \end{aligned}$$

在上式两侧同时乘以 $u^{1-\alpha}\eta^\gamma$, 并在 $\mathbb{H}^n$ 上积分, 得

$$\begin{aligned} &\delta\int\left[\sum_{i,j=1}^n(|D_{ij}|^2+|E_{i\bar{j}}|^2)+\frac{|\nabla_b u|^4}{u^2}\right]\eta^\gamma+\delta\int u^{1-\alpha}\left[\sum_{i=1}^n(|D_i|^2+|E_i|^2+|G_i|^2)+\frac{|\nabla_b u|^6}{u^4}\right]\eta^\gamma\\ &\quad\leqslant-\gamma\int\operatorname{Re}u^{1-\alpha}\left[\left(d_1\frac{|\nabla_b u|^2}{u}+d_2u^\alpha\right)(D_i+E_i)+n\sqrt{-1}u_0(d_3D_i+e_3E_i-3G_i)\right]\eta^{\gamma-1}\eta_{,\bar{i}}, \end{aligned}\tag{4.9}$$

其中 $\gamma > 1$ 为只依赖于 n 和 α 的常数. 由 Young 不等式, 可得

$$
\begin{aligned}
&-\gamma \int \operatorname{Re} u^{1-\alpha}\Big(d_1 \frac{|\nabla_b u|^2}{u} + d_2 u^\alpha\Big)(D_i + E_i)\eta^{\gamma-1}\eta_{,\bar{i}} \\
&\quad \leqslant \frac{\delta}{3}\int u^{1-\alpha}\sum_{i=1}^n(|D_i|^2 + |E_i|^2)\eta^\gamma + \frac{\delta}{3}\int \sum_{i,j=1}^n(|D_{ij}|^2 + |E_{i\bar{j}}|^2)\eta^\gamma \\
&\qquad + C(n,\alpha)\int (u^{-1-\alpha}|\nabla_b u|^4 + |\nabla_b u|^2)\eta^{\gamma-2}|\nabla\eta|^2 \\
&\quad \leqslant \frac{\delta}{3}\int u^{1-\alpha}\bigg[\sum_{i=1}^n(|D_i|^2 + |E_i|^2) + \frac{|\nabla_b u|^6}{u^4}\bigg]\eta^\gamma + C(n,\alpha)\int u^{3-\alpha}\eta^{\gamma-6}|\nabla\eta|^6 \\
&\qquad + \frac{\delta}{3}\int \bigg[\sum_{i,j=1}^n(|D_{ij}|^2 + |E_{i\bar{j}}|^2) + \frac{|\nabla_b u|^4}{u^2}\bigg]\eta^\gamma + C(n,\alpha)\int u^2\eta^{\gamma-4}|\nabla\eta|^4, \\
&-\gamma \int \operatorname{Re} u^{1-\alpha}\cdot n\sqrt{-1}u_0(d_3 D_i + e_3 E_i - 3G_i)\eta^{\gamma-1}\eta_{,\bar{i}} \\
&\quad \leqslant \frac{\delta}{3}\int u^{1-\alpha}\sum_{i=1}^n(|D_i|^2 + |E_i|^2 + |G_i|^2)\eta^\gamma + C(n,\alpha)\int u^{1-\alpha}u_0^2\eta^{\gamma-2}|\nabla\eta|^2.
\end{aligned}
$$

将上述两式代入 (4.9), 结合截断函数的性质, 可得

$$
\begin{aligned}
&\delta\int \bigg[\sum_{i,j=1}^n(|D_{ij}|^2 + |E_{i\bar{j}}|^2) + \frac{|\nabla_b u|^4}{u^2}\bigg]\eta^\gamma + \delta\int u^{1-\alpha}\bigg[\sum_{i=1}^n(|D_i|^2 + |E_i|^2 + |G_i|^2) + \frac{|\nabla_b u|^6}{u^4}\bigg]\eta^\gamma \\
&\quad \leqslant C(n,\alpha)R^{-6}\int u^{3-\alpha}\eta^{\gamma-6} + C(n,\alpha)R^{-4}\int u^2\eta^{\gamma-4} + C_1R^{-2}\int u^{1-\alpha}u_0^2\eta^{\gamma-2}.
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

通过量纲分析, 考虑如下恒等式以处理 (4.10) 中的 C_1 项, 它可以通过引理 4.2 的第 3 个等式 (或者 G_i 的定义) 直接计算得到:

$$
\begin{aligned}
u^{\alpha-1}\operatorname{Re}(u^{1-\alpha}\cdot n\sqrt{-1}u_0u_i)_{,\bar{i}} &= -\operatorname{Re} G_i u_{\bar{i}} + \frac{\alpha}{n+2}u^{\alpha-1}|\nabla_b u|^2 \\
&\quad + \frac{n\alpha}{n+2}\Big(\frac{n+1}{n+2}\alpha - 1\Big)\frac{|\nabla_b u|^4}{u^2} - n^2u_0^2.
\end{aligned}
$$

在上式两侧同时乘以 $u^{1-\alpha}\eta^{\gamma-2}$, 并在 $\mathbb{H}^n$ 上积分, 得

$$
\begin{aligned}
n^2\int u^{1-\alpha}u_0^2\eta^{\gamma-2} &= (\gamma-2)\int \operatorname{Re} u^{1-\alpha}\cdot n\sqrt{-1}u_0u_i\eta^{\gamma-3}\eta_{,\bar{i}} - \int u^{1-\alpha}\operatorname{Re} G_iu_{\bar{i}}\eta^{\gamma-2} \\
&\quad + \frac{\alpha}{n+2}\int |\nabla_b u|^2\eta^{\gamma-2} + \frac{n\alpha}{n+2}\Big(\frac{n+1}{n+2}\alpha - 1\Big)\int u^{-1-\alpha}|\nabla_b u|^4\eta^{\gamma-2}.
\end{aligned}
$$

使用 Young 不等式估计上式右侧, 得

$$
\begin{aligned}
&C_1R^{-2}\int u^{1-\alpha}u_0^2\eta^{\gamma-2} \\
&\quad \leqslant \frac{C_1}{2}R^{-2}\int u^{1-\alpha}u_0^2\eta^{\gamma-2} + \frac{\delta}{2}\int u^{1-\alpha}\sum_{i=1}^n|G_i|^2\eta^\gamma + C(n,\alpha)R^{-4}\int u^{1-\alpha}|\nabla_b u|^2\eta^{\gamma-4} \\
&\qquad + C(n,\alpha)R^{-2}\int |\nabla_b u|^2\eta^{\gamma-2} + C(n,\alpha)R^{-2}\int u^{-1-\alpha}|\nabla_b u|^4\eta^{\gamma-2}
\end{aligned}
$$

$$\leqslant \frac{C_1}{2} R^{-2} \int u^{1-\alpha} u_0^2 \eta^{\gamma-2} + \frac{\delta}{3} \int u^{1-\alpha} \left[\sum_{i=1}^{n} |G_i|^2 + \frac{|\nabla_b u|^6}{u^4} \right] \eta^{\gamma} + \frac{\delta}{3} \int \frac{|\nabla_b u|^4}{u^2} \eta^{\gamma}$$
$$+ C(n,\alpha) R^{-6} \int u^{3-\alpha} \eta^{\gamma-6} + C(n,\alpha) R^{-4} \int u^2 \eta^{\gamma-4}. \tag{4.11}$$

在 (4.11) 中解出 $C_1 R^{-2} \int u^{1-\alpha} u_0^2 \eta^{\gamma-2}$, 并将其代入 (4.10), 得

$$\delta \int \left[\sum_{i,j=1}^{n} (|D_{ij}|^2 + |E_{i\bar{j}}|^2) + \frac{|\nabla_b u|^4}{u^2} \right] \eta^{\gamma} + \delta \int u^{1-\alpha} \left[\sum_{i=1}^{n} (|D_i|^2 + |E_i|^2 + |G_i|^2) + \frac{|\nabla_b u|^6}{u^4} \right] \eta^{\gamma}$$
$$\leqslant C_2 R^{-6} \int u^{3-\alpha} \eta^{\gamma-6} + C_3 R^{-4} \int u^2 \eta^{\gamma-4}. \tag{4.12}$$

取 $\varepsilon > 0$ 充分小待定, 且只依赖于 n 和 α. 直接使用方程 (4.1) 和 Young 不等式, 得到 C_2 和 C_3 两项的关系:

$$\begin{aligned}
R^{-6} \int u^{3-\alpha} \eta^{\gamma-6} &\leqslant \varepsilon R^{-4} \int u^2 \eta^{\gamma-4} + C(n,\alpha) R^{-\frac{4\alpha}{\alpha-1}} \int \eta^{\gamma-\frac{4\alpha}{\alpha-1}}, \\
R^{-4} \int u^2 \eta^{\gamma-4} &= -R^{-4} \int u^{2-\alpha} \Delta_b u \eta^{\gamma-4} \\
&= (2-\alpha) R^{-4} \int u^{1-\alpha} |\nabla_b u|^2 \eta^{\gamma-4} + (\gamma-4) R^{-4} \int u^{2-\alpha} \eta^{\gamma-5} \operatorname{Re} u_i \eta_{,\bar{i}} \\
&\leqslant \varepsilon \int u^{-3-\alpha} |\nabla_b u|^6 \eta^{\gamma} + C_3 R^{-6} \int u^{3-\alpha} \eta^{\gamma-6}.
\end{aligned}$$

取定 $\varepsilon > 0$ 同时满足 $\frac{\varepsilon^2 C_2}{1-\varepsilon C_3} < \frac{\delta}{3}$ 和 $\frac{\varepsilon C_3}{1-\varepsilon C_3} < \frac{\delta}{3}$, 则根据上述两式, 可得

$$C_2 R^{-6} \int u^{3-\alpha} \eta^{\gamma-6} \leqslant \frac{\delta}{3} \int u^{-3-\alpha} |\nabla_b u|^6 \eta^{\gamma} + C(n,\alpha) R^{-\frac{4\alpha}{\alpha-1}} \int \eta^{\gamma-\frac{4\alpha}{\alpha-1}}, \tag{4.13}$$
$$C_3 R^{-4} \int u^2 \eta^{\gamma-4} \leqslant \frac{\delta}{3} \int u^{-3-\alpha} |\nabla_b u|^6 \eta^{\gamma} + C(n,\alpha) R^{-\frac{4\alpha}{\alpha-1}} \int \eta^{\gamma-\frac{4\alpha}{\alpha-1}}. \tag{4.14}$$

将 (4.13) 和 (4.14) 代入 (4.12), 得

$$\int u^{-3-\alpha} |\nabla_b u|^6 \eta^{\gamma} \leqslant C(n,\alpha) R^{-\frac{4\alpha}{\alpha-1}} \int \eta^{\gamma-\frac{4\alpha}{\alpha-1}}.$$

取 $\gamma = \frac{4\alpha}{\alpha-1} + 1$, 根据截断函数的性质以及 $|B_R| = C(n) R^{2n+2}$, 得

$$\int_{B_R} u^{-3-\alpha} |\nabla_b u|^6 \leqslant C(n,\alpha) R^{2n+2-\frac{4\alpha}{\alpha-1}},$$

其中

$$2n+2-\frac{4\alpha}{\alpha-1} = \frac{(2n-2)\alpha-(2n+2)}{\alpha-1} < -\frac{4}{n(\alpha-1)} < 0,$$

这迫使 u 为常数, 进而方程 (4.1) 在 $1 < \alpha < \frac{n+2}{n}$ 时无正解.

5　总结

本文分析了寻找向量场得到微分恒等式的一个新方法. 对于四阶椭圆偏微分方程或二阶椭圆偏微分方程组, 我们认为也有类似的寻找向量场的不变张量办法. 我们相信该方法对于更一般的椭圆方程研究会有启发帮助.

参考文献

1 Bidaut-Veron M-F, Veron L. Nonlinear elliptic equations on compact Riemannian manifolds and asymptotics of Emden equations. Invent Math, 1991, 106: 489–539

2 Caffarelli L A, Gidas B, Spruck J. Asymptotic symmetry and local behavior of semilinear elliptic equations with critical Sobolev growth. Comm Pure Appl Math, 1989, 42: 271–297

3 Dolbeault J, Esteban M J, Loss M. Nonlinear flows and rigidity results on compact manifolds. J Funct Anal, 2014, 267: 1338–1363

4 Gidas B, Spruck J. Global and local behavior of positive solutions of nonlinear elliptic equations. Comm Pure Appl Math, 1981, 34: 525–598

5 Jerison D, Lee J M. Extremals for the Sobolev inequality on the Heisenberg group and the CR Yamabe problem. J Amer Math Soc, 1988, 1: 1–13

6 Ma X N, Ou Q Z. A Liouville theorem for a class semilinear elliptic equations on the Heisenberg group. Adv Math, 2023, 413: 108851

7 Ma X N, Ou Q Z, Wu T. Jerison-Lee identities and semi-linear subelliptic equations on CR manifolds. arXiv:2311.16428, 2023

8 Obata M. The conjectures on conformal transformations of Riemannian manifolds. J Differential Geom, 1971/72, 6: 247–258

The application of the invariant tensor technique in the classification of solutions to semilinear elliptic and sub-elliptic partial differential equations

Xi-Nan Ma & Tian Wu

Abstract The vector field method developed by M. Obata is powerful in the study of the classification of solutions to elliptic or sub-elliptic partial differential equations. However, finding the appropriate vector field is a very technical problem in different problems. In this paper, the invariant tensor technique and dimension conservation are introduced to find suitable vector fields for several typical semilinear elliptic or sub-elliptic partial differential equations and obtain the desired differential identity for classifying solutions. Besides, we give a comparison between the new and old methods.

Keywords **invariant tensor, semilinear elliptic equation, Heisenberg group**

MSC(2020) **35K20, 32V20**

doi: 10.1360/SSM-2024-0071