第一章 电磁现象的基本规律（12课时）

节次	节　名	小节标题
1.1	场论和张量分析	线性正交坐标变换，张量的定义，由矢量和张量构成的不变量（标量），三维张量的乘法运算，三维张量微分，正交曲线坐标系，高斯定理、斯托克斯公式和格林公式，δ—函数
1.2	电磁场的数学描述	麦克斯韦方程组，关于场源，电磁性能方程，导体中的自由电荷和传导电流
1.3	边值关系	麦克斯韦方程的积分形式，边值关系，边值关系和边界条件
1.4	电磁场的能量、动量和角动量	电磁场对带电体的力和功率，电磁场的能量及能量守恒，电磁场的动量及动量守恒，电磁场的角动量及角动量守恒，电磁场—介质系统的能量、动量和角动量分析，线性各向同性介质界面上的能量动量守恒关系，电磁场热力学方程
1.5	麦克斯韦方程的完备性	完备性的含义，电磁场解的唯一性定理，几点说明

- 加入场论和张量分析一节，为本书做好基本数学准备
- 回顾和综述电磁现象的基本规律
- 边值关系及其与边界条件的区别和联系
- 论述麦克斯韦方程的守恒性和完备性

1.1 场论和张量分析

1. 问题的由来

- 为描述时空中的物质运动，必须

a) 引入参考系(4维)和坐标系(3维) — 实现对时空的定量描述
b) 引入物理量 — 实现对物质运动的定量描述
c) 建立相关物理量的联系 – 基本物理规律

- 物理要求

a) 限于三维位置空间— 物理量和物理规律与位置空间坐标系选择无关
b) 进入四维时空 — 物理量和物理规律与参考系选择无关(相对性原理)

- 实现途径

a) 物理量必须是在参考系或坐标系变换下的不变量 — 张量
b) 物理规律可以写成张量形式（不变形式）
c) 需要用到场论和张量分析的基本概念和数学工具

- 两种学习方式：

a) “渐进式”：系统、严谨学习一门知识，如所有课程学习
b) “查阅式”：默认和跳过大部分内容，查到并学懂相关部分，满足特定需要
c) 场论和张量分析作为一个训练“查阅式”学习能力的平台

2. 笛卡儿坐标正交线性变换下的张量概念

- 一般张量及其运算的定义：在任意坐标变换下不变
- 本教材为何限于笛卡儿坐标的正交线性变换？

a）简单：基矢为常单位矢量，彼此正交；变换矩阵为常数矩阵
b）不妨：张量概念与坐标变换具体形式无关（限于欧几里得空间）
c）实用：狭义相对论的洛伦兹变换属于正交线性变换

- 三维位置空间中曲线坐标系下的张量微分运算

a）在直角坐标系下成立的张量微分恒等式，在所有曲线坐标系下成立（“下标法”）
b）如果要写出张量微分的具体表达式，必须采用直角坐标与曲线坐标之间的变换关系（既非线性又非正交）

张量分析参考读物：

[1] 黄克智等，张量分析，2009，北京：清华大学出版社
[2] 余天庆，毛为民，张量分析及应用，2006，北京：清华大学出版社
[3] 吕盘明，张量算法，2008，合肥：中国科学技术大学出版社
[4] 胡友秋，曲线坐标系，2010，内部材料（qxzbx.pdf）

【备注】本课程勿需实施曲线坐标系下的张量微分运算，可暂时跳过

3. 本节目的：

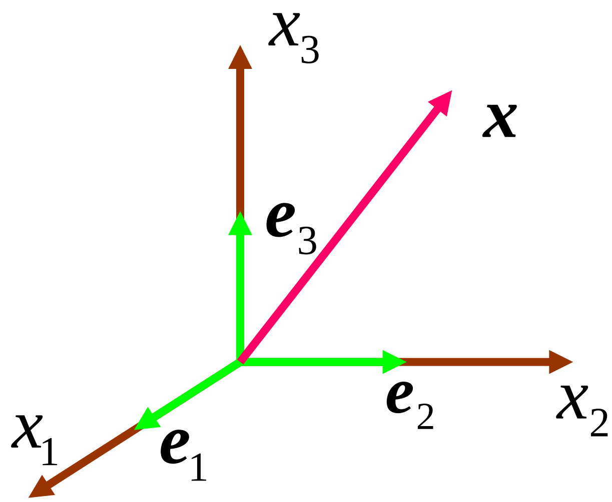
- 在直角坐标的正交线性变换下简介张量及其运算
- 回顾和介绍场论相关知识：
  - 正交曲线坐标系（给出结果，不予证明）
  - 高斯公式、斯托克斯公式和格林公式（推广）
  - δ 函数（基本性质及其应用）
- 张量分析运算技巧
  - 在直角坐标下推导和证明张量微分恒等式：“下标法”和“符号法”
  - 推导矢量和二阶张量的不变量
  - 为狭义相对论铺垫：构建张量和张量微分方程（参见第8章）

一 线性正交坐标变换

1. N 维空间的坐标、基矢和位置矢量

$N=3$：三维位置空间（物理学中的绝大部分场论和张量分析限于该空间）

$N=4$：四维时空（狭义相对论）



提示:按对通常三维空间去理解N 维空间

坐标： $x_i\,(i=1,2,\cdots,N)$　　基矢： $\boldsymbol{e}_i\,(i=1,2,\cdots,N)$

正交归一关系：

$$\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j;\\ 0, & i\neq j;\end{cases} \tag{1.1.1}$$

位置矢量：

$$\boldsymbol{x}=x_i\boldsymbol{e}_i \quad \text{（同指标求和）} \tag{1.1.2}$$

坐标和基矢具有相对性，但要求位置矢量是绝对量

2. 线性正交坐标变换

在 N 维空间引入线性齐次变换

$$x_i' = a_{ij} x_j \tag{1.1.3}$$

- **要求实现位置矢量不变**

➢ 长度不变(空间间隔不变）

$$\sum_{i=1}^{N} x_i'^2 = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \tag{1.1.4}$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i'^2 = a_{ij} x_j a_{il} x_l = a_{ij} a_{il} x_j x_l = \sum_{i=1}^{N} x_i^2$$

$$a_{ij} a_{il} = \delta_{jl}, \quad 或\ A^{\mathrm{T}} \cdot A = I \quad \Rightarrow \quad A^{\mathrm{T}} = A^{-1} \tag{1.1.5}$$

$A^{\mathrm{T}} = \{a_{ji}\} \qquad A = \{a_{ij}\}$， A 为正交矩阵，对应线性正交变换

逆变换公式：将 a_{il} 乘上(1.1.3)对下标求和,得逆变换公式；

采用矩阵乘法的方式推导更为简洁：

$$\boldsymbol{x}' = A\cdot\boldsymbol{x} \quad\Rightarrow\quad A^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{x}' = A^{\mathrm{T}}\cdot A\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} \quad \Rightarrow \quad x_i = a_{ji}x'_j \qquad (1.1.6)$$

对上式再用一次条件(1.1.4)：$a_{ji}a_{li} = \delta_{jl}$，或 $A\cdot A^{\mathrm{T}} = I$

- 方向也不变（整个矢量不变）

$$\boldsymbol{x}' = x'_i\boldsymbol{e}'_i = x_j\boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{x}$$

将逆变换式 $x_j = a_{ij}x'_i$ 代入上式得 $x_j\boldsymbol{e}_j = a_{ij}\underline{x'_i}\boldsymbol{e}_j = \underline{x'_i}\boldsymbol{e}'_i$

由$x_i{}'$的任意性,必有 $\boldsymbol{e}'_i = a_{ij}\boldsymbol{e}_j \quad (x'_i = a_{ij}x_j) \qquad (1.1.8)$

求得基矢的变换公式，与坐标变换式相同。新基矢也满足正交归一关系：

$$\boldsymbol{e}'_i = a_{il}\boldsymbol{e}_l, \quad \boldsymbol{e}'_j = a_{jk}\boldsymbol{e}_k$$

$$\boldsymbol{e}'_i\cdot\boldsymbol{e}'_j = a_{il}\boldsymbol{e}_l\cdot a_{jk}\boldsymbol{e}_k = a_{il}a_{jk}\boldsymbol{e}_l\cdot\boldsymbol{e}_k = a_{il}a_{jl} = \delta_{ij}$$

由基矢等于坐标梯度也可导出基矢变换关系：$\boldsymbol{e}'_i = \nabla x'_i = a_{ij}\nabla x_j = a_{ij}\boldsymbol{e}_j$

● **位移分量变换和位移矢量的不变性**（由变换的线性性质）

1. 定义： $dx_i = x_i^{(2)} - x_i^{(1)},$

2. 变换：

$$x_i' = a_{ij} x_j \Rightarrow dx_i' = a_{ij} dx_j \tag{1.1.9}$$

3. 位移矢量模不变即空间间隔不变： (1.1.10)

$$\sum_{i=1}^{N} x_i'^2 = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \Rightarrow \sum_{i=1}^{N} dx_i'^2 = \sum_{i=1}^{N} dx_i^2$$

4. 位移矢量的整体不变性：

$$\boldsymbol{x} = x_i \boldsymbol{e}_i \Rightarrow d\boldsymbol{x} = dx_i \boldsymbol{e}_i \tag{1.1.11}$$

证明：

$$d\boldsymbol{x}' = dx_i' \boldsymbol{e}_i' = a_{ij} dx_j a_{il} \boldsymbol{e}_l = a_{ij} a_{il} dx_j \boldsymbol{e}_l = \delta_{jl} dx_j \boldsymbol{e}_l = dx_l \boldsymbol{e}_l = d\boldsymbol{x}$$

1.1 场论和张量分析

- **位移分量变换矩阵和基矢变换矩阵转置互逆** — 张量概念的基础

设位移分量变换矩阵为$\boldsymbol{P}$，基矢变换矩阵为$\boldsymbol{Q}$，则在矩阵表示下有：

$$\begin{pmatrix} dx'^1 \\ dx'^2 \\ \vdots \\ dx'^N \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ \vdots \\ dx^N \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}'_1 \\ \boldsymbol{e}'_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}'_N \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_N \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \quad dx'^i \boldsymbol{e}'_i = dx^i \boldsymbol{e}_i$$

$$dx'^i \boldsymbol{e}'_i = (dx'^1, dx'^2, \cdots, dx'^N) \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}'_1 \\ \boldsymbol{e}'_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}'_N \end{pmatrix} = (dx^1, dx^2, \cdots, dx^N) P^{\mathrm{T}} Q \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_N \end{pmatrix} = dx^i \boldsymbol{e}_i$$

充分必要条件：$\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 转置互逆

$$P^{\mathrm{T}} Q = P Q^{\mathrm{T}} = I$$

对正交线性变换，$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{A}$为正交矩阵，满足转置互逆条件：$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$

- **变换矩阵的行列式及其推论**

➢ 行列式的绝对值等于1

$$\det(A^{\mathrm{T}} \cdot A) = \det A^{\mathrm{T}} \cdot \det A = (\det A)^2 = 1$$

两种可能：

$\det A = -1$：　奇数个坐标轴反演：时间坐标反转或空间坐标反射

$\det A = 1$：　坐标轴的刚性旋转(本书限于这种情况)　　(1.1.12)

➢ 推论：体积元不变：

$$dV' \equiv \prod_{i=1}^{N} dx_i' = \prod_{i=1}^{N} dx_i \equiv dV \qquad (1.1.13)$$

证明：

$$dV' = \left| \frac{\partial(x_1', x_2', \cdots, x_N')}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_N)} \right| dV = \left|\det A\right| dV = dV$$

二 张量的定义

- 零阶张量(标量)：含一个分量，在线性正交坐标变换下维持不变
  例如前面已经提到的空间间隔、空间体积元
- 一阶张量(矢量)：含 N 个分量，它们按与坐标变换一样变换

$$f_i' = a_{ij} f_j \qquad (1.1.15) \qquad\qquad \boldsymbol{f} = f_i \boldsymbol{e}_i \qquad (1.1.16)$$

例如前面已经提到的位置矢量和位移矢量；作为一个整体不变

- 二阶张量：含 N^2 个分量,按如下方式变换(按系数第2下标求和)

$$T_{ij}' = a_{im} a_{jn} T_{mn} \qquad (1.1.17) \qquad\qquad \overleftrightarrow{\boldsymbol{T}} = T_{ij} \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j \quad (1.1.18)$$

$$\boxed{\begin{aligned} a_{im} a_{il} &= \delta_{ml} \\ a_{jn} a_{jk} &= \delta_{nk} \end{aligned}}$$

利用变换矩阵的性质，可证明二阶张量整体不变：

$$\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}' = T_{ij}' \boldsymbol{e}_i' \boldsymbol{e}_j' = a_{im} a_{jn} T_{mn} a_{il} \boldsymbol{e}_l a_{jk} \boldsymbol{e}_k = \delta_{ml} \delta_{nk} T_{mn} \boldsymbol{e}_l \boldsymbol{e}_k = T_{mn} \boldsymbol{e}_m \boldsymbol{e}_n = \overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}$$

- 再论变换矩阵转置互逆作为张量概念的基础

$$T'_{ij}=a_{im}a_{jn}T_{mn}=a_{im}T_{mn}a_{jn} \qquad (1.1.17)$$

$$\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}=T_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j \qquad (1.1.18)$$

换成矩阵表示： $T'=PTP^{\mathrm{T}}$

$$(\boldsymbol{e}'_1,\boldsymbol{e}'_2,\cdots,\boldsymbol{e}'_N)=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_N)Q^{\mathrm{T}}$$

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}'_1\\ \boldsymbol{e}'_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{e}'_N\end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{e}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{e}_N\end{pmatrix}$$

$$\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}'=T'_{ij}\boldsymbol{e}'_i\boldsymbol{e}'_j=\boldsymbol{e}'_iT'_{ij}\boldsymbol{e}'_j$$

$$=(\boldsymbol{e}'_1,\boldsymbol{e}'_2,\cdots,\boldsymbol{e}'_N)T'\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}'_1\\ \boldsymbol{e}'_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{e}'_1\end{pmatrix}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_N)Q^{\mathrm{T}}PTP^{\mathrm{T}}Q\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{e}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{e}_N\end{pmatrix}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_N)T\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{e}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{e}_N\end{pmatrix}$$

$$=\boldsymbol{e}_iT_{ij}\boldsymbol{e}_j=T_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j=\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}$$

充分必要条件：***P*** 和 ***Q*** 转置互逆

$$Q^{\mathrm{T}}P=P^{\mathrm{T}}Q=I$$

- 三阶张量：含 N^3 个分量，它们按如下方式变换

$$T'_{ijk}=a_{il}a_{jm}a_{kn}T_{lmn} \tag{1.1.20}$$

注意右边的求和下标为变换系数的第二下标；
其不变性同样来自变换矩阵的转置互逆条件

- 几种常见的特殊二阶张量(以下简称二阶张量为张量)

$$1+2+\cdots+N=N(N+1)/2$$

1. 对称张量： $T_{ij}=T_{ji}$, 共有 **$N(N+1)/2$** 个独立分量

2. 反对称张量： $T_{ij}=-T_{ji}$, 共有 **$N(N-1)/2$** 个独立分量

任何张量都可以按如下方式分解为一个对称张量和反对称张量的叠加：

$$T_{ij}=\boxed{\frac{1}{2}(T_{ij}+T_{ji})}+\boxed{\frac{1}{2}(T_{ij}-T_{ji})}$$

对称部分　反对称部分

$$N(N+1)/2+N(N-1)/2 = N^2$$

● 几种常见的特殊二阶张量(续)

3. 单位张量： $T_{ij}=\delta_{ji}$， 对角分量为1，非对角分量为零

4. 并矢： $T_{ij}=f_i g_j$ 或 $\overleftrightarrow{T}=\boldsymbol{fg}$ (1.1.19)

- ➢ 一般不具备互易性，即一般 $\boldsymbol{fg}\neq\boldsymbol{gf}$，除非 $\boldsymbol{f}$ 与 $\boldsymbol{g}$ 成比例
- ➢ 二阶张量可分解为并矢的叠加，但一般不能化成单个并矢

【提示】利用二阶张量可以分解为并矢这一性质，可将涉及张量的运算公式的证明转化为并矢运算公式的证明，后者一般较为简单（技巧）

【注意】特殊张量的特性在坐标变换下维持不变；对单位张量而言，其所有分量在坐标变换下均维持不变！

三 由矢量和张量构成的不变量（标量）

- 寻找不变量（标量）— 科学的永恒目标
- 由矢量构成的不变量 — 矢量的模

$$\sum_{i=1}^{N} f_i'^2 = f_i' f_i' = a_{ij} f_j a_{il} f_l = \delta_{jl} f_j f_l = f_j f_j = \sum_{i=1}^{N} f_i^2$$

- 由张量构成的不变量 — 对应矩阵的本征值

$$T' = A \cdot T \cdot A^{\mathrm{T}} = A \cdot T \cdot A^{-1} \qquad (1.1.21)$$

相似矩阵：$T \sim T'$，具有相同的本征值，满足如下代数方程

$$\det(T - \lambda I) = 0$$

上述方程共有 N 个本征值

【问题】**1.** 独立不变量的个数为多少？

2\. 如何以一种便捷方式找到所有独立不变量？

解决途径：将本征值方程写为 $\eta = -\lambda$ 的 N 次代数方程

$$\eta^N + C_{N-1}\eta^{N-1} + C_{N-2}\eta^{N-2} + \cdots + C_1\eta + C_0 = 0 \qquad (1.1.22)$$

$$\det\begin{pmatrix} a_{11}+\eta & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22}+\eta & \cdots & a_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN}+\eta \end{pmatrix} = 0$$

$C_{N-1} = \mathrm{Tr}(T)$， **迹**；

$C_0 = \det(T)$， **行列式**；

C_i： 去掉 i 个对角元素的所有余子式之和

上述系数可取代 N 个本征值，直接构成不变量，但

1. 等于零的系数不涉及任何张量元素，不构成不变量
2. 相同、反号的系数只算一个不变量

结论：独立不变量的个数至多为 N

例1.1 求并矢的独立不变量，说明4维反对称张量独立不变量的个数至多为2个.

解 （1）考察并矢**fg**：

$$f_i g_j = \begin{pmatrix} f_1 g_1 & f_1 g_2 & \cdots & f_1 g_N \\ f_2 g_1 & f_2 g_2 & \cdots & f_2 g_N \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_N g_1 & f_N g_2 & \cdots & f_N g_N \end{pmatrix}$$

所有子行列式为零，唯一不为零的系数为 $C_{N-1} = f_i g_i = \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{g}$

（2）4维反对称张量对应如下矩阵

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix}$$

对角元素之和为零： $C_3 = \mathrm{Tr}(T) = 0;$

去掉一个对角元素，得到的余子式为零，故有：$C_1 = 0.$

因此，至多只有两个独立不变量：C_2 和 C_4, 证毕

四 三维张量的乘法运算

- 说明：1. 定义张量运算的前提：运算结果仍为张量
  同维张量的和与差仍为同维张量，但乘法可导致变维
  2. 为何限于三维（位置空间）张量及其运算？
- 三维张量的乘法运算（省略证明过程）

➢ 点乘（标积）

1. 矢量与矢量点乘： $\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g}=f_i g_i$, 结果为标量

   可互易性： $\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g}=\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{f}$,

2. 矢量与张量点乘：$(\boldsymbol{f}\cdot\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}})_j=f_i T_{ij}$, $(\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}\cdot\boldsymbol{f})_j=T_{ji}f_i$; 结果为矢量

   一般不互易： $\boldsymbol{f}\cdot\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}\neq\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}\cdot\boldsymbol{f}$, $\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}$ 为对称张量时互易： $\boldsymbol{f}\cdot\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}=\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}\cdot\boldsymbol{f}$

3. 矢量与并矢点乘： $\boldsymbol{f}\cdot(\boldsymbol{gh})=(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g})\boldsymbol{h}$, $(\boldsymbol{gh})\cdot\boldsymbol{f}=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{f})$,

   结果为矢量

【注意】 掌握就近点乘规则，一般不互易

➢ 点乘（续）

4. 张量（并矢）之间点乘：

$$(\overleftrightarrow{S}\cdot\overleftrightarrow{T})_{ij}=S_{ik}T_{kj},\qquad(\overleftrightarrow{T}\cdot\overleftrightarrow{S})_{ij}=T_{ik}S_{kj}$$

$$(\boldsymbol{fg})\cdot(\boldsymbol{pq})=(\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{p})\boldsymbol{fq},\qquad(\boldsymbol{pq})\cdot(\boldsymbol{fg})=(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{f})\boldsymbol{pg}$$

结果为张量，一般不可互易

5. 张量与张量双点乘（张量标积）：

$$\overleftrightarrow{S}:\overleftrightarrow{T}=S_{ij}T_{ji}=T_{ji}S_{ij}=\overleftrightarrow{T}:\overleftrightarrow{S}$$

结果为标量，具备可互易性

与单位张量标积：$\overleftrightarrow{T}:\overleftrightarrow{I}=\overleftrightarrow{I}:\overleftrightarrow{T}=\mathrm{Tr}(\overleftrightarrow{T}),\qquad\overleftrightarrow{I}:\overleftrightarrow{I}=\mathrm{Tr}(\overleftrightarrow{I})=3.$

并矢之间的标积：$(\boldsymbol{fg}):(\boldsymbol{pq})=(\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{p})(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{q})$ （就近点乘规则）

- 叉乘（矢积）

1. 交错符号(又称“置换符号”，见(1.1.23)式)

$$\varepsilon_{ijk} = \boldsymbol{e}_i \cdot (\boldsymbol{e}_j \times \boldsymbol{e}_k) = \begin{cases} 1, & \text{下标偶排列;} \\ -1, & \text{下标奇排列;} \\ 0, & \text{下标出现重复;} \end{cases}$$

排列123及其偶置换，例如 $\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = 1$

排列123的奇置换，例如 $\varepsilon_{132} = \varepsilon_{213} = -1$

下标出现重复，例如 $\varepsilon_{112} = \varepsilon_{223} = \varepsilon_{333} = 0$

【备注】交错符号ε_{ijk}与克罗内克符号存在如下有用关系：

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}.$$

当使用下标法处理含两次叉乘运算的张量表达式时特别有用。

2. 矢量与矢量叉乘：

$$\boldsymbol{h}=\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g},\qquad h_i=\varepsilon_{ijk}f_j g_k,$$ 结果为矢量

$$\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g}=-\boldsymbol{g}\times\boldsymbol{f},$$ 互易反号

3. 矢量与张量叉乘：

$$\overleftrightarrow{\boldsymbol{S}}=\boldsymbol{f}\times\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}},\quad S_{ij}=\varepsilon_{imn}f_m T_{nj};\quad \overleftrightarrow{\boldsymbol{R}}=\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}\times\boldsymbol{f},\quad R_{ij}=\varepsilon_{jmn}T_{im}f_n,$$ 结果为张量

一般不互易： $\overleftrightarrow{\boldsymbol{R}}\neq\overleftrightarrow{\boldsymbol{S}}$，除非 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}$ 为单位张量，此时成立

$$\boldsymbol{f}\times\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}}=\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}}\times\boldsymbol{f}=\begin{pmatrix}0 & -f_3 & f_2\\ f_3 & 0 & -f_1\\ -f_2 & f_1 & 0\end{pmatrix}$$

三维二阶反对称张量与三维(膺)矢量对应

矢量与并矢叉乘，掌握就近叉乘规则：

$$\boldsymbol{f}\times(\boldsymbol{g}\boldsymbol{h})=(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g})\boldsymbol{h},\qquad (\boldsymbol{g}\boldsymbol{h})\times\boldsymbol{f}=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{h}\times\boldsymbol{f})$$

五 三维张量微分

- 三维矢量微分算符 $$\nabla = \boldsymbol{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{1.1.24}$$

- 梯度、散度和旋度

矢量梯度

$$\nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i, \quad \boxed{\nabla \boldsymbol{f} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{f} = \frac{\partial f_i}{\partial x_i},$$

$$\boxed{\nabla \cdot \overleftrightarrow{\boldsymbol{T}} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_j}, \qquad \nabla \times \boldsymbol{f} = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial f_k}{\partial x_j}\boldsymbol{e}_i. \tag{1.1.25}$$

张量散度　　　条件：直角坐标

- 与位置矢量有关的矢量微分公式

$$\nabla r = \frac{\boldsymbol{r}}{r} = \boldsymbol{e}_r, \quad \nabla f(r) = \frac{df}{dr}\frac{\boldsymbol{r}}{r} = \frac{df}{dr}\boldsymbol{e}_r, \quad \nabla \boldsymbol{r} = \overleftrightarrow{\boldsymbol{I}},$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{r} = 3, \qquad \nabla \times [f(r)\boldsymbol{r}] = 0. \tag{1.1.26}$$

$$\nabla r = \frac{\boldsymbol{r}}{r} = \boldsymbol{e}_r, \nabla f(r) = \frac{df}{dr}\frac{\boldsymbol{r}}{r} = \frac{df}{dr}\boldsymbol{e}_r, \nabla \boldsymbol{r} = \overleftrightarrow{\boldsymbol{I}}, \nabla \cdot \boldsymbol{r} = 3, \nabla \times [f(r)\boldsymbol{r}] = 0. \quad (1.1.26)$$

【说明】利用

$$\boldsymbol{r} = x_i \boldsymbol{e}_i = x\,\boldsymbol{e}_x + y\,\boldsymbol{e}_y + z\,\boldsymbol{e}_z, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\nabla = \boldsymbol{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \boldsymbol{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial}{\partial z},$$

容易证明(1.1.26)中各等式成立，例如：

$$\nabla r = (\boldsymbol{e}_x \partial/\partial x + \boldsymbol{e}_y \partial/\partial y + \boldsymbol{e}_z \partial/\partial z)(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

$$= \frac{1}{2(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}(2x\boldsymbol{e}_x + 2y\boldsymbol{e}_y + 2z\boldsymbol{e}_z) = \frac{\boldsymbol{r}}{r},$$

$$\nabla \boldsymbol{r} = (\boldsymbol{e}_x \partial/\partial x + \boldsymbol{e}_y \partial/\partial y + \boldsymbol{e}_z \partial/\partial z)(x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z)$$

$$= \boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_z = \overleftrightarrow{\boldsymbol{I}}.$$

为何在直角坐标下做出证明？为何可以这样证明？

- 推导和证明张量微分恒等式（数据组的集体运算）

1. 下标法：从张量和矢量微分算符的定义式（带下标）出发

➢ 将矢量微分算符和被作用张量展开为下标形式

➢ 分别对各张量分量实施偏微分运算

➢ 对下标进行适当的置换运算

➢ 将下标表达式还原为作为整体的矢量微分算符和张量

说明：直角坐标下的偏微分运算；最终结果与坐标系无关

2. 符号法：利用矢量微分算符的双重性

➢ 作为矢量，满足通常矢量点乘和叉乘运算法则

➢ 作为算符，需作用于张量表达式中的所有对象

说明：与下标法的等效性；操作便捷，适合于复杂张量微分运算

例1.2 用下标法证明 $\nabla\cdot(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g})=\boldsymbol{g}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{f})-\boldsymbol{f}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{g})$

证

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g})\overset{①}{=}\boldsymbol{e}_m\frac{\partial}{\partial x_m}\cdot(\varepsilon_{ijk}f_j g_k\boldsymbol{e}_i)=\frac{\partial}{\partial x_i}(\varepsilon_{ijk}f_j g_k)\overset{②}{=}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial f_j}{\partial x_i}g_k+\varepsilon_{ijk}\frac{\partial g_k}{\partial x_i}f_j$$

$$\overset{③}{=}g_k\varepsilon_{kij}\frac{\partial f_j}{\partial x_i}-f_j\varepsilon_{jik}\frac{\partial g_k}{\partial x_i}\overset{④}{=}\boldsymbol{g}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{f})-\boldsymbol{f}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{g}).$$ 证毕

① 按矢量微分算符和张量的定义将原微分表达式展开为下标形式

② 对被作用和式中的每一个对象求偏导数

③ 对交替单位张量分量的下标进行偶置换(不变)和奇置换(反号)

④ 按矢量微分算符和张量的定义将下标表达式还原

归纳：共分展开、微分、置换(对交替单位张量下标)和还原四步，第三、四步为难点，需熟背矢量微分算符、张量及其代数运算的定义式

补例:用下标法证明 $\nabla\times(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g})=\boldsymbol{f}(\nabla\cdot\boldsymbol{g})+\boldsymbol{g}\cdot\nabla\boldsymbol{f}-\boldsymbol{g}(\nabla\cdot\boldsymbol{f})-\boldsymbol{f}\cdot\nabla\boldsymbol{g}$

证

$$\nabla\times(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g})=\boldsymbol{e}_i\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g})_k=\boldsymbol{e}_i\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}(\varepsilon_{kmn}f_m g_m)\overset{①}{=}\boldsymbol{e}_i\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kmn}\frac{\partial}{\partial x_j}(f_m g_m)$$

$$=\boldsymbol{e}_i\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kmn}\left(\frac{\partial f_m}{\partial x_j}g_n\overset{②}{+}\frac{\partial g_n}{\partial x_j}f_m\right)\boldsymbol{e}_i=\boldsymbol{e}_i\overset{③}{\varepsilon_{kij}}\varepsilon_{kmn}\left(\frac{\partial f_m}{\partial x_j}g_n+\frac{\partial g_n}{\partial x_j}f_m\right)\boldsymbol{e}_i$$

$$(\delta_{im}\delta_{jn}-\delta_{im}\delta_{jn})\left(\frac{\partial f_m}{\partial x_j}g_n+\frac{\partial g_n}{\partial x_j}f_m\right)\boldsymbol{e}_i=\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}g_j+\frac{\partial g_j}{\partial x_j}f_i\right)\boldsymbol{e}_i$$

$$-\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_j}g_i+\frac{\partial g_i}{\partial x_j}f_j\right)\boldsymbol{e}_i\overset{④}{=}\boldsymbol{g}\cdot\nabla\boldsymbol{f}+\boldsymbol{f}\nabla\cdot\boldsymbol{g}-\boldsymbol{f}\cdot\nabla\boldsymbol{g}-\boldsymbol{g}\nabla\cdot\boldsymbol{f}$$

证毕

归纳:也分展开、微分、置换(对交错符号下标)和还原四步,其间用到交错符号与克罗内克符号的关系式,以及克罗内克符号的性质

补例:用符号法证明 $\nabla\times(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g})=\boldsymbol{f}(\nabla\cdot\boldsymbol{g})+\boldsymbol{g}\cdot\nabla\boldsymbol{f}-\boldsymbol{g}(\nabla\cdot\boldsymbol{f})-\boldsymbol{f}\cdot\nabla\boldsymbol{g}$

证 (1) 视∇为“算符”，分别作用 $\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{g}$（加上下标以示区别），得两项:

$$\nabla\times(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g})=\nabla_f\times(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g})+\nabla_g\times(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g})$$

(2) 视 ∇_f矢和 ∇g 为“矢量”，遵循矢量运算规则，将其置于作用对象前方:

$$\nabla_f\times(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g})=\boldsymbol{f}(\nabla_f\cdot\boldsymbol{g})-\boldsymbol{g}(\nabla_f\cdot\boldsymbol{f})=\boldsymbol{g}\cdot\nabla_f\boldsymbol{f}-\boldsymbol{g}\nabla_f\cdot\boldsymbol{f},$$

$$\nabla_g\times(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g})=\boldsymbol{f}(\nabla_g\cdot\boldsymbol{g})-\boldsymbol{g}(\nabla_g\cdot\boldsymbol{f})=\boldsymbol{f}\nabla_g\cdot\boldsymbol{g}-\boldsymbol{f}\cdot\nabla_g\boldsymbol{g}.$$

(3) 代回原式并舍去矢量算符的下标得

$$\nabla\times(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g})=\boldsymbol{g}\cdot\nabla\boldsymbol{f}+\boldsymbol{f}\nabla\cdot\boldsymbol{g}-\boldsymbol{f}\cdot\nabla\boldsymbol{g}-\boldsymbol{g}\nabla\cdot\boldsymbol{f}$$

证毕

与下标法等效，但推导过程简洁

例1.3　用符号法证明 $\nabla\cdot(fgh)=(\nabla\cdot f)gh+(f\cdot\nabla g)h+g(f\cdot\nabla h)$

证　将矢量微分算符分别作用于各对象 f, g 和 h：

$$\nabla\cdot(fgh)=\nabla_f\cdot(fgh)+\nabla_g\cdot(fgh)+\nabla_h\cdot(fgh)$$

利用矢量代数运算将算符∇移至被作用对像前方，去掉∇的下标：

$$\nabla_f\cdot(fgh)=(\nabla_f\cdot f)gh=(\nabla\cdot f)gh,$$

$$\nabla_g\cdot(fgh)=(\nabla_g\cdot f)gh=(f\cdot\nabla_g)gh=(f\cdot\nabla g)h,$$

$$\nabla_h\cdot(fgh)=(\nabla_h\cdot f)gh=g(f\cdot\nabla_h)h=g(f\cdot\nabla h).$$

代回原式，证毕

熟练符号法之后，可默记 ∇ 的作用对象，略去加下标的手续

例1.4 用符号法证明 $\nabla\cdot(\boldsymbol{f}g\times\boldsymbol{r})=[\nabla\cdot(\boldsymbol{f}g)]\times\boldsymbol{r}+g\times\boldsymbol{f}$，式中 $\boldsymbol{r}$ 为位置矢量。

证

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{f}g\times\boldsymbol{r})=[\nabla\cdot(\boldsymbol{f}g)]\times\boldsymbol{r}+g\times(\boldsymbol{f}\cdot\nabla\boldsymbol{r})$$

默记右边第一项中的 ∇ 作用于 $\boldsymbol{f}g$，第二项中的 ∇ 作用于 $\boldsymbol{r}$；此外，按就近运算的规则，∇ 应与 $\boldsymbol{f}$ 的点乘，而 g 则应与 $\boldsymbol{r}$ 叉乘。

由

$$g\times(\boldsymbol{f}\cdot\nabla\boldsymbol{r})=g\times(\boldsymbol{f}\cdot\overleftrightarrow{I})=g\times\boldsymbol{f},$$

代回原式，证毕

【提示】 1. 对于存在非并矢形式的张量的情况，不便实施“就近运算规则”移动算符位置，可换用下标法

2. 也可用并矢“取代”张量，使用符号法证明

例1.5　用下标法证明 $\nabla(\overset{\leftrightarrow}{\boldsymbol{T}}:\nabla\boldsymbol{E})=\overset{\leftrightarrow}{\boldsymbol{T}}:\nabla\nabla\boldsymbol{E}$，式中 $\overset{\leftrightarrow}{\boldsymbol{T}}$ 为常张量，$\boldsymbol{E}$ 满足$\nabla\times\boldsymbol{E}=0$.

证

$$\nabla(\overset{\leftrightarrow}{\boldsymbol{T}}:\nabla\boldsymbol{E})=\boldsymbol{e}_k\frac{\partial}{\partial x_k}\left(T_{ij}\frac{\partial E_i}{\partial x_j}\right)=T_{ij}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial E_i}{\partial x_j}\right)\boldsymbol{e}_k$$

$$=T_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial E_i}{\partial x_k}\right)\boldsymbol{e}_k=T_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial E_k}{\partial x_i}\right)\boldsymbol{e}_k=\overset{\leftrightarrow}{\boldsymbol{T}}:\nabla\nabla\boldsymbol{E},$$

归纳：也分为展开、微分、置换(偏微分顺序)和还原四步，其中用到 $\nabla\times\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$ 的条件：$\partial E_i/\partial x_k=\partial E_k/\partial x_i$.

例1.5 用并矢法证明 $\nabla(\overleftrightarrow{T}:\nabla E)=\overleftrightarrow{T}:\nabla\nabla E$，式中 $\overleftrightarrow{T}$ 为常张量，E 满足$\nabla\times E=0$.

证 如果坚持用符号法，可形式地将张量换为并矢：$\overleftrightarrow{T}=fg$，得

$$\nabla(\overleftrightarrow{T}:\nabla E)=\nabla(fg:\nabla E)=\nabla(g\cdot\nabla E)\cdot f=(g\cdot\nabla)(\nabla E)\cdot f,$$

$$\boxed{(\nabla E)\cdot f=f\cdot\nabla E-(\nabla\times E)\times f}=f\cdot\nabla E,$$ (此处用到$\nabla\times E=0$)

$$\therefore\quad \text{原式}=(g\cdot\nabla)(\nabla E)\cdot f=(g\cdot\nabla)(f\cdot\nabla E)$$

$$=fg:\nabla\nabla E=\overleftrightarrow{T}:\nabla\nabla E,$$

【说明】

1. 上述证明的有效性在于：任何张量可分解为若干并矢之和
2. 最终要将中间并矢 fg 还原成原状；若出现形如 gf 的项，则须将它代之以相应张量的转置。
3. 在证明过程中用到红框中的恒等式，可用符号法证明。

$$(\nabla\times E)\times f=(f\cdot\nabla)E-(\nabla E)\cdot f$$

● 关于符号法的要点小结

- ➢ 使用范围：含矢量、并矢的表达式的矢量微分运算（如表达式中出现张量，则代之以与之等效的并矢组合）
- ➢ 矢量微分算符必须一一作用于表达式中的所有对象（常量除外）
- ➢ 明确参与点乘或叉乘运算的双方（矢量或矢量微分算符），并在推导中维持该运算关系不变

1. 标量乘法：互易
2. 矢量点乘：互易 $\nabla\cdot(\boldsymbol{f}gh)=(\nabla\cdot\boldsymbol{f})gh+(\boldsymbol{f}\cdot\nabla g)h+g(\boldsymbol{f}\cdot\nabla h)$
3. 矢量叉乘：互易反号 $\nabla\cdot(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g})=\boldsymbol{g}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{f})-\boldsymbol{f}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{g})$
4. 矢量并合：不互易
5. 并矢（张量）双点乘：互易
6. 明确点乘或叉乘双方：就近点乘和就近叉乘原则

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{f}\boldsymbol{g}\times\boldsymbol{r})=[\nabla\cdot(\boldsymbol{f}\boldsymbol{g})]\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{g}\times(\boldsymbol{f}\cdot\nabla\boldsymbol{r})$$

- ➢ 最终使得矢量算符领先并紧靠被作用对象

六 正交曲线坐标系（三维位置空间）

- 引入曲线坐标系的目的：处理弯曲界面和弯曲边界
- 正交曲线坐标系(u_1, u_2, u_3)：相应基矢$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$彼此正交

1. 拉梅系数：

$$h_i=\left[\left(\frac{\partial x}{\partial u_i}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u_i}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u_i}\right)^2\right]^{1/2}\quad (i=1,2,3)$$

2. 弧元：

$$ds_1=h_1du_1,\qquad ds_2=h_2du_2,\qquad ds_3=h_3du_3 \tag{1.1.33}$$

3. 面元：

$$d\sigma_1=h_2h_3du_2du_3,\ d\sigma_2=h_1h_3du_1du_3,\ d\sigma_3=h_1h_2du_1du_2 \tag{1.1.34}$$

4. 体元：

$$dV=h_1h_2h_3du_1du_2du_3 \tag{1.1.35}$$

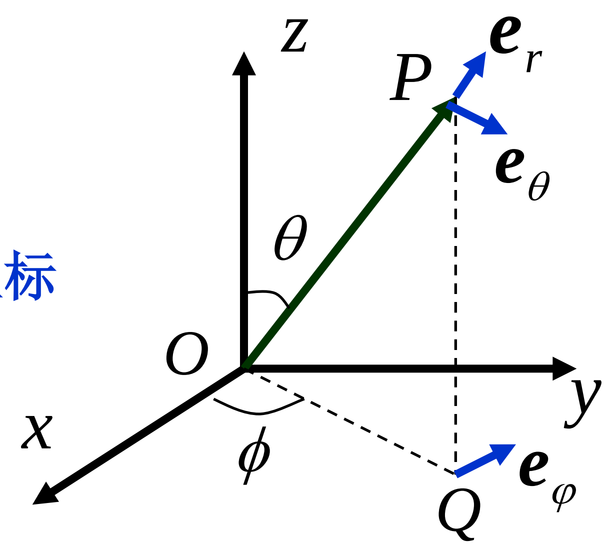
5. 矢量微分算符和基矢：

$$\nabla=\frac{\boldsymbol{e}_1}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}+\frac{\boldsymbol{e}_2}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}+\frac{\boldsymbol{e}_3}{h_3}\frac{\partial}{\partial u_3},\qquad \boldsymbol{e}_i=h_i\nabla u_i\quad (i=1,2,3)$$

- 柱坐标和球坐标系下的拉梅系数、基矢、梯度、散度、旋度和拉普拉斯算符表达式(见教材和附录)；重点：基矢表达式

● 正交曲线坐标系的基矢与直角坐标基矢之间的关系

1. 必要性：直角坐标下基矢为常矢量，便于运算（积分、微分、泰勒展开）；将运算结果与曲线坐标基矢点乘或叉乘时，需将直角坐标基矢转换为曲线坐标基矢。
2. 转换公式参见式(1.1.27)~(1.1.30)
3. 即席推导基矢关系，以球坐标基矢为例：



- 过考察点绘出球坐标基矢
- 将各基矢向各直角坐标轴投影，求得按直角坐标的展开式，即式**(1.1.29)**:

$$\boldsymbol{e}_r = \sin\theta\cos\phi\,\boldsymbol{e}_x + \sin\theta\sin\phi\,\boldsymbol{e}_y + \cos\theta\,\boldsymbol{e}_z$$

$$\boldsymbol{e}_\theta = \cos\theta\cos\phi\,\boldsymbol{e}_x + \cos\theta\sin\phi\,\boldsymbol{e}_y - \sin\theta\,\boldsymbol{e}_z$$

$$\boldsymbol{e}_\varphi = -\sin\phi\,\boldsymbol{e}_x + \cos\phi\,\boldsymbol{e}_y$$

- 将变换系数矩阵转置求得反变换关系 [参见式**(1.1.30)**]

- 正交曲线坐标系对张量定义及其运算的影响
  - 对张量的定义及代数运算没有影响
  - 对涉及矢量微分运算的全部恒等式没有影响
  - 对微分运算结果（梯度、散度、旋度、拉普拉斯算符等）的具体形式及其分量形式有影响（原因：基矢是是空间坐标的函数，受矢量微分算符作用）

说明：非正交坐标系出现两套基矢, 相应张量出现协变分量和逆变分量

【建议】关于正交曲线坐标系和一般非正交曲线坐标系的微分运算知识和技巧，对从事物理学理论研究人员来说不可或缺；大学本科数学课程对曲线坐标系的介绍过于简单，建议有兴趣的同学今后适当扩充这方面的知识。

参考读物：胡友秋,曲线坐标系,2010(内部材料,曲线坐标系.pdf)

七　高斯公式、斯托克斯公式和格林公式

- 高斯公式和斯托克斯公式的推广

$$\oiint_S \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{\sigma} = \iiint_V \nabla\cdot\boldsymbol{A}dV \Rightarrow \oiint_S d\boldsymbol{\sigma}\cdot\underline{\boldsymbol{A}} = \iiint_V dV\nabla\cdot\underline{\boldsymbol{A}} \qquad (1.1.40)$$

$$\oint_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l} = \iint_\Sigma (\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot d\boldsymbol{\sigma} \Rightarrow \oint_C d\boldsymbol{l}\cdot\underline{\boldsymbol{A}} = \iint_\Sigma (d\boldsymbol{\sigma}\times\nabla)\cdot\underline{\boldsymbol{A}} \qquad (1.1.41)$$

删去等式两边出现的 $\underline{\cdot\boldsymbol{A}}$， 得如下算符公式

$$\oiint_S d\boldsymbol{\sigma} = \iiint_V dV\nabla \qquad (1.1.42)$$

$$\oint_C d\boldsymbol{l} = \iint_\Sigma d\boldsymbol{\sigma}\times\nabla \qquad (1.1.43)$$

从上述算符公式出发，可以形式上获得一系列积分恒等式

算符恒等式：
$$\oint\!\!\!\oint_S d\boldsymbol{\sigma} = \iiint_V dV\nabla, \qquad \oint_C d\boldsymbol{l} = \iint_\Sigma d\boldsymbol{\sigma}\times\nabla.$$

将上述算符公式以各种方式(并列、点乘、叉乘)作用于各阶张量，可获得一系列积分恒等式，例如

$$\oint\!\!\!\oint_S \varphi d\boldsymbol{\sigma} = \iiint_V \nabla\varphi dV, \quad \oint_C \varphi d\boldsymbol{l} = -\iint_\Sigma \nabla\varphi\times d\boldsymbol{\sigma} \qquad (1.1.44)$$

$$\oint\!\!\!\oint_S d\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{A} = \iiint_V \nabla\times\boldsymbol{A}dV, \quad \oint_C d\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{A} = \iint_\Sigma (d\boldsymbol{\sigma}\times\nabla)\times\boldsymbol{A} \qquad (1.1.45)$$

$$\oint\!\!\!\oint_S d\boldsymbol{\sigma}\cdot\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}} = \iiint_V \nabla\cdot\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}dV, \quad \oint_C d\boldsymbol{l}\cdot\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}} = \iint_\Sigma d\boldsymbol{\sigma}\cdot(\nabla\times\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}) \qquad (1.1.46)$$

问题：这种推广方法合法吗？—— 事后可用常矢量点乘法证明

例1.6 用常矢量点乘法证明

$$\oiint_S \varphi d\boldsymbol{\sigma} = \iiint_V \nabla \varphi dV, \quad \oint_C \varphi d\boldsymbol{l} = -\iint_\Sigma \nabla \varphi \times d\boldsymbol{\sigma}$$

证 用任意常矢量 $\boldsymbol{c}$ 点乘等式左右两边，分别求得

$$\boldsymbol{c}\cdot\oiint_S \varphi d\boldsymbol{\sigma} = \oiint_S \varphi\boldsymbol{c}\cdot d\boldsymbol{\sigma} = \iiint_V \nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{c})dV = \boldsymbol{c}\cdot\iiint_V \nabla\varphi dV$$

$$\boldsymbol{c}\cdot\oint_C \varphi d\boldsymbol{l} = \oint_C \varphi\boldsymbol{c}\cdot d\boldsymbol{l} = \iint_\Sigma [\nabla\times(\varphi\boldsymbol{c})]\cdot d\boldsymbol{\sigma} = -\boldsymbol{c}\cdot\iint_\Sigma \nabla\varphi\times d\boldsymbol{\sigma}$$

由 $\boldsymbol{c}$ 的任意性，可将它从等式两边消去，证毕

- 格林公式（由高斯公式推得）

➢ 第一格林公式： $\oiint_S \psi\nabla\varphi\cdot d\boldsymbol{\sigma}=\iiint_V(\psi\nabla^2\varphi+\nabla\psi\cdot\nabla\varphi)dV$ (1.1.47)

➢ 第二格林公式：

$$\oiint_S(\psi\nabla\varphi-\varphi\nabla\psi)\cdot d\boldsymbol{\sigma}=\iiint_V(\psi\nabla^2\varphi-\varphi\nabla^2\psi)dV \qquad (1.1.48)$$

➢ 第三格林公式： $\oiint_S \varphi\nabla\varphi\cdot d\boldsymbol{\sigma}=\iiint_V[\varphi\nabla^2\varphi+(\nabla\varphi)^2]dV$ (1.1.49)

证明：给定某(单连通)解域 V 内矢量场 A 的散度和旋度，以及边界 S 上的法向分量，该矢量场被唯一确定

证 用反证法。设有两个解，$\boldsymbol{A}_1$和$\boldsymbol{A}_2$；令 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{A}_1-\boldsymbol{A}_2$，则成立

$$\nabla\cdot\boldsymbol{a}=0,\qquad \nabla\times\boldsymbol{a}=0,\qquad a_n|_S=0,\qquad 令\quad \boldsymbol{a}=\nabla\varphi\Rightarrow\nabla^2\varphi=0$$

$$\iiint_V(\nabla\varphi)^2dV=\oiint_S\varphi\nabla\varphi\cdot d\boldsymbol{\sigma}\qquad 或\qquad \iiint_V\boldsymbol{a}^2dV=\oiint_S\varphi a_n d\sigma=0$$ 证毕

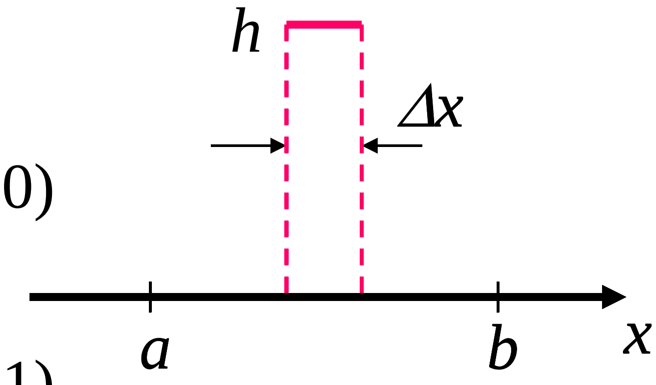
为何必须限于单连通域？确保 $\oint\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}=0$，从而可引入$\varphi$（见第3章）

八 δ函数和阶跃函数

● 一维δ函数

1. 定义 $$\delta(x-x_0)=\begin{cases}\infty, & x=x_0;\\ 0, & x\neq x_0;\end{cases} \qquad (1.1.50)$$

$$\int_a^b \delta(x-x_0)dx=\begin{cases}1, & x_0\in(a,b);\\ 0, & x_0\notin(a,b)\end{cases} \qquad (1.1.51)$$



$$\lim_{\Delta x\to 0}(h\cdot\Delta x)=1$$

2. 其他性质（从δ函数的定义出发证明）

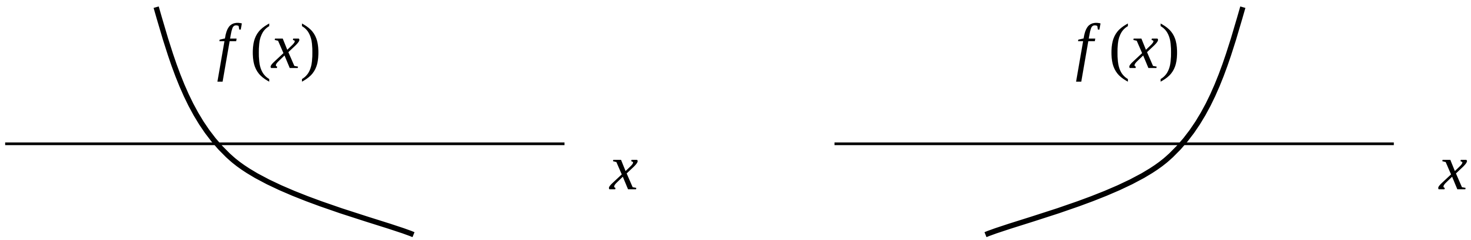
$$\delta(x-x_0)=\delta(x_0-x),\quad \delta[\alpha(x-x_0)]=|\alpha|^{-1}\delta(x-x_0) \qquad (1.1.52)$$

$$\delta(f(x))=\sum_i\left|(df/dx)_{x=x_i}\right|^{-1}\delta(x-x_i) \qquad (1.1.53)$$

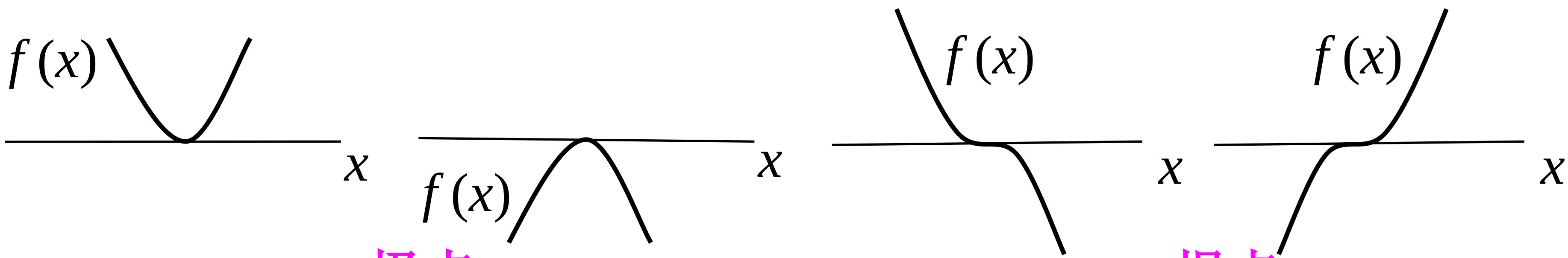
$$\int_a^b f(x)\delta(x-x_0)dx=f(x_0),\qquad x_0\in(a,b) \qquad (1.1.54)$$

(1.1.53)中的 x_i 为 $f(x)$ 的“简单零点”， $(df/dx)_{x=x_i}\neq 0$ 成立

- 简单零点，成立 $(df/dx)_{x=x_i} \neq 0$



- 非简单零点，成立 $(df/dx)_{x=x_i} = 0$



极点　　拐点

- $\delta(f(x))$在非简单零点处失去意义，不能定义

2. 其他性质（从 δ 函数的定义出发证明）（续）

补例：证明 $\delta[\alpha(x-x_0)]=|\alpha|^{-1}\delta(x-x_0)$, 即(1.1.52)式.

证 $u=\alpha(x-x_0)$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta[\alpha(x-x_0)]dx=\begin{cases}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\alpha^{-1}\delta(u)du=|\alpha|^{-1} & (\alpha>0)\\ \displaystyle\int_{\infty}^{-\infty}\alpha^{-1}\delta(u)du=(-\alpha)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(u)du=|\alpha|^{-1} & (\alpha<0)\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\alpha|^{-1}\delta(x-x_0)dx=|\alpha|^{-1},$$

证毕

当 $\alpha=-1$ 时有 $\delta[-(x-x_0)]=\delta(x_0-x)=\delta(x-x_0)$

说明 δ 函数为偶函数

2. 其他性质（从 δ 函数的定义出发证明）（续）

补例：证明 $\delta(f(x))=\sum_i \left|(df/dx)_{x=x_i}\right|^{-1}\delta(x-x_i)$，即(1.1.53)式.

证 取简单零点 x_i 的邻域$(x_i-\varepsilon, x_i+\varepsilon)$，仅含该零点，有

$$\int_{x_i-\varepsilon}^{x_i+\varepsilon}\delta(f(x))dx=\begin{cases}\displaystyle\int_{x_i-\varepsilon}^{x_i+\varepsilon}(df/dx)^{-1}\delta(f)df=|(df/dx)_{x=x_i}|^{-1} & (df/dx)_{x=x_i}>0\\ \displaystyle\int_{x_i-\varepsilon}^{x_i+\varepsilon}(-df/dx)^{-1}\delta(f)df=|(df/dx)_{x=x_i}|^{-1} & (df/dx)_{x=x_i}<0\end{cases}$$

$$\int_{x_i-\varepsilon}^{x_i+\varepsilon}\sum_i|(df/dx)_{x=x_i}|^{-1}\delta(x-x_i)dx=|(df/dx)_{x=x_i}|^{-1}$$

对全部简单零点的贡献求和得(1.1.53)式，证毕

重要结论：全部关于 δ 函数的等式，均是在积分意义上成立

2. 其他性质（从 δ 函数的定义出发证明）（续）

补例：证明 $\int_a^b f(x)\delta(x-x_0)dx = f(x_0), \quad x_0 \in (a,b)$，即(1.1.54)式.

证 由积分中值定理得

$$\int_a^b f(x)\delta(x-x_0)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(f(\bar{x})_{\bar{x}\in(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)} \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \delta(x-x_0)dx \right)$$

$$= f(x_0)$$

证毕

补例：计算积分 $\int_{-2}^{2}\delta(x^2-1)dx$

解 由 $$\delta(f(x))=\sum_i\left|(df/dx)_{x=x_i}\right|^{-1}\delta(x-x_i)$$

得 $$\delta(x^2-1)=\left|[d(x^2-1)/dx]_{x=-1}\right|^{-1}\delta(x+1)$$

$$+\left|[d(x^2-1)/dx]_{x=1}\right|^{-1}\delta(x-1)=\frac{1}{2}[\delta(x+1)+\delta(x-1)]$$

将上式右边积分得 1。有人按如下方式求得

$$\int\delta(x^2-1)dx=\int\frac{1}{2x}\delta(x^2-1)d(x^2-1)=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{1+u}}\delta(u)du=\frac{1}{2}$$

试问错在何处？

回答：积分元变换函数 $x=f(u)$ 必须是积分区间内的单值函数！

此地 $x=\pm(1+u)^{1/2}$ 为积分区间（—2，2）内的多值函数

3. 一维 δ 函数作为普通函数的极限

$$\delta(x)=\lim_{N\to\infty}\frac{\sin Nx}{\pi x},\qquad \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin Nx}{x}dx=1\quad (N>0),$$

$$\delta(x)=\lim_{a\to 0}\frac{a}{\pi(a^2+x^2)},\quad \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a}{a^2+x^2}dx=1\quad (a>0).$$

$$\delta(\omega-\omega_0)=\lim_{\gamma\to 0}\left[\frac{2\omega_0}{\pi}\frac{\omega\gamma}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2}\right]$$

[参见第7章式**(7.3.19)**及其证明]

以上公式均可根据 δ 函数的定义作出证明

- 三维δ函数

1. 定义

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=\begin{cases}\infty, & \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0;\\ 0, & \boldsymbol{r}\neq\boldsymbol{r}_0;\end{cases} \tag{1.1.55}$$

$$\iiint\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)dV=1 \tag{1.1.56}$$

2. 性质

$$\iiint f(\boldsymbol{r})\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)dV=f(\boldsymbol{r}_0) \tag{1.1.57}$$

3. 点电荷的体电荷密度 $\rho(\boldsymbol{r})=q\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$ (1.1.58)

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0) \tag{1.1.59}$$

均匀分布无限平面 (x=x_0) 和无限长直线 (x=x_0, y=y_0) 电荷的体电荷密度

$$\rho(\boldsymbol{r})=\sigma\delta(x-x_0),\qquad \rho(\boldsymbol{r})=\lambda\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)$$

σ：面电荷密度；　　λ：线电荷密度

提示：对给定电量、几何形状特殊的面电荷和线电荷分布，可采取待定系数法：在相应δ函数前面加上一个待定乘子(允许与空间坐标有关；参见1.10题：在球坐标下写出圆盘面电荷的体电荷密度)

4. 三维 δ 函数一个常用表达式

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) = -\frac{1}{4\pi}\nabla^2 \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|} \tag{1.1.60}$$

证明

$\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{r}_0$：

$$\nabla^2 \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|} = -\nabla\cdot\left(\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^3}\right) = \frac{3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)^2}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^5} - \frac{3}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^3} = 0$$

$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0$：在积分意义上理解(1.1.60)，即过以 $\boldsymbol{r}_0$ 为球心、半径为 a 的球的积分相等：

$$-\frac{1}{4\pi}\iiint_{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|\le a} \nabla^2 \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|} dV = \frac{1}{4\pi}\iiint_{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|\le a} \nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^3} dV$$

$$= \frac{1}{4\pi}\oint\!\!\oint_{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|=a} \frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\cdot d\boldsymbol{\sigma}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^3} = \frac{1}{4\pi}\oint\!\!\oint d\Omega = 1,$$

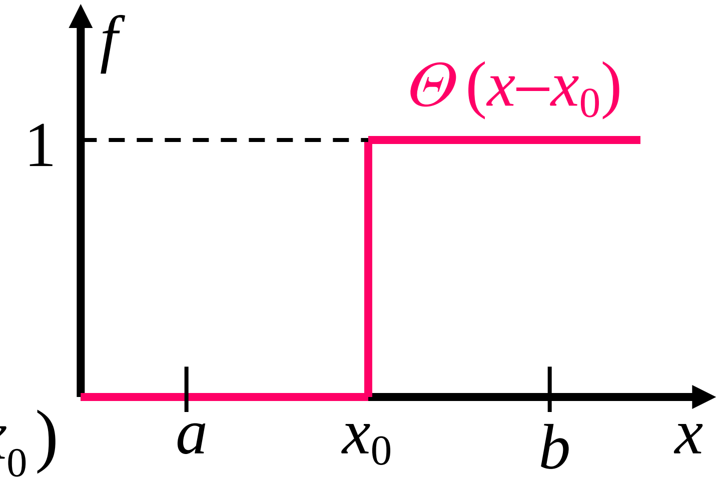
证毕

证明过程中用到高斯公式和立体角的概念

- 阶跃函数（Heaviside函数）

1. 定义

$$\Theta(x-x_0)=\begin{cases}1, & x\geq x_0;\\ 0, & x<x_0.\end{cases}$$



2. 与 δ 函数的关系

$$\delta(x-x_0)=\frac{d\Theta(x-x_0)}{dx}$$

证 a. 当 $x\neq x_0$，阶跃函数的导数为零；在 $x=x_0$ 处导数无意义

b. 在含 x_0 的区间(a, b) $(a<x_0, b>x_0)$ 积分，左边等于1，右边结果为

$$\int_a^b\frac{d\Theta(x-x_0)}{dx}dx=\int_a^b d\Theta(x-x_0)=[\Theta(x-x_0)]_a^b=1-0=1$$

证毕

小　结

- 熟悉张量的定义和代数运算法则以及张量微分的定义
- 熟练使用下标法和符号法推演张量微分公式
- 从对应于高斯公式和斯托克斯公式的算符等式出发，写出它们各种推广形式
- 从 δ 函数的定义和性质出发，推导与之有关的恒等式
- 途径：重复教材中有关推导，独立完成习题

1.2 电磁场的数学描述

描述：物理量（三维空间张量）及其满足的物理规律

一 麦克斯韦方程组

- 描述： $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ 和 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$
- 方程：

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \quad (1.2.1) \qquad \nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho/\varepsilon_0 \quad (1.2.2)$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{j}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} \quad (1.2.3) \qquad \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \quad (1.2.4)$$

$$c=1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \quad (1.2.5)$$

- 物理意义：各方程的物理意义;不对称性(磁荷不存在);普适常数 c
- 来源：实验规律 ＋ 科学假设（推广；位移电流；涡旋电场）
- 下一步：演绎电磁场运动的特殊规律，检验麦克斯韦电磁理论

二 关于场源 ρ 和 $\boldsymbol{j}$

- 电荷守恒方程 $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho/\varepsilon_0 \quad\Longrightarrow\quad \nabla\cdot\dfrac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=\dfrac{1}{\varepsilon_0}\dfrac{\partial\rho}{\partial t}$

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{j}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\quad\Longrightarrow\quad \nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})=\mu_0\nabla\cdot\boldsymbol{j}+\varepsilon_0\mu_0\nabla\cdot\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=0$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{j}=0 \qquad (1.2.6)$$

> 电荷守恒方程是独立于电磁规律的普遍规律
> 场源必须满足电荷守恒方程，才与麦克斯韦方程自洽

- 洛伦兹力公式

$$\boldsymbol{F}=q(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) \qquad (1.2.7)$$

$$\boldsymbol{f}=\rho\boldsymbol{E}+\boxed{\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}}\ \text{安培力} \qquad (1.2.8)$$

> 电磁场和场源的作用的相互性质
> 洛伦兹力（公式）与安培力（公式）

- 本电动力学课程限于以下三种简单情况

(1) 计算给定场源的电磁场，略去场对场源的反作用；

(2) 假定场源载体处于静止状态，通过电磁性能方程对场源和电磁场的相互作用进行宏观描述，在此基础上计算电磁场；

(3) 对介质采用单粒子模型，在时谐电磁场和周期粒子运动的框架下分析电磁波和介质的相互作用.

一般情况 — 连续介质电动力学

联立求解麦克斯韦方程和场源载体（连续介质或多粒子系统）的运动方程，同时确定电磁场和介质或多粒子系统之间的相互作用和运动规律.

三 电磁性能方程

- 场源分解：自由电荷和束缚电荷；传导电流和束缚电流

$$\rho = \rho_0 + \rho', \qquad \boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}_0 + \boldsymbol{j}' \tag{1.2.9}$$

分别满足电荷守恒方程（不考虑电离和复合效应）

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{j}_0 = 0 \quad (1.2.10) \qquad \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{j}' = 0 \quad (1.2.11)$$

- 极化强度和磁化强度

电磁学中的结果(静场)： $\rho' = -\nabla \cdot \boldsymbol{P}, \qquad \boldsymbol{j}' = \nabla \times \boldsymbol{M}$

推广了的结果(时变场)： $\rho' = -\nabla \cdot \boldsymbol{P}, \qquad \boldsymbol{j}' = \underbrace{\boxed{\nabla \times \boldsymbol{M}}}_{\text{磁化电流}} + \underbrace{\boxed{\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t}}}_{\text{极化电流}} \quad (1.2.12)$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{j}' = -\frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot \boldsymbol{P} + \nabla \cdot \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} = 0$$

极化电流的引入与位移电流相似，同是为了与电荷守恒方程自洽

1.2 电磁场的数学描述

- 辅助矢量：电位移矢量和磁场强度

将束缚场源表达式代入麦克斯韦方程得(与电磁学中的处理过程类似)

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_0 \qquad (1.2.13) \qquad \nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}_0 + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \qquad (1.2.14)$$

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} \qquad (1.2.15) \qquad \boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{M} \qquad (1.2.16)$$

- 电磁性能方程（辅助矢量与电磁场的关系的宏观描述）

一般情况：

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}), \qquad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}) \qquad (1.2.17)$$

简单情况（线性各向同性介质）：

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}, \qquad \boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu}\boldsymbol{B} \qquad (1.2.18)$$

通过引入电磁性能方程，从麦克斯韦方程消去束缚场源，只剩下传导电流和自由电荷，后者便于处理

四 导体中的自由电荷和传导电流

- 为何不谈绝缘体？
  在绝缘介质中,传导电流＝0;自由电荷或等于零,或给定不变.
- 导体中的传导电流 — 欧姆定律
  对线性各向同性导体 $$\boldsymbol{j}_0 = \sigma \boldsymbol{E} \qquad (1.2.19)$$
- 均匀线性各向同性导体中的自由电荷

➢ 导体内近似有 $\rho_0 = 0$，证明如下($\varepsilon = \varepsilon_0$）：

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \sigma \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\rho_0 = 0 \qquad (1.2.18)$$

$$\rho_0(\boldsymbol{r},t) = \rho_0(\boldsymbol{r})e^{-t/\tau}, \qquad \tau = \varepsilon_0/\sigma$$

$\sigma = 10^6 — 10^8$ S/m，$\varepsilon_0 = 8.85\times 10^{-12}$ F/m ⟹ $\tau = 10^{-17} — 10^{-19}$ s

与 X 和 γ 射线波段的电磁波周期同量级;对一般电磁波近似有 $\rho_0 = 0$

➢ 导体表面存在面电荷

1.2 电磁场的数学描述

● 理想导体和超导体

- ➢ 理想导体 — 交变电磁场中的良导体，$\sigma \to \infty$

1. 导体内部 $\rho_0 = 0$，自由电荷仅分布于导体表面
2. 导体内部 $\boldsymbol{E} = 0$（由电流有限及欧姆定律：$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{j}/\sigma \to 0$）

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\nabla \times \boldsymbol{E} = 0,$$ 形象地说成是磁场被“冻结”于理想导体之中

3. 推论：对初始磁场为零的理想导体内部 $j_0=0$,电流仅分布于表面

- ➢ 超导体：彻底的抗电性和抗磁性

1. 超导体内部 $\rho_0 = 0$，自由电荷仅分布于导体表面
2. 导体内部 $\boldsymbol{E} = 0$，$\boldsymbol{B} = 0$，因而有 $\boldsymbol{j}_0 = 0$，传导电流仅分布于超导体表面

【说明】 在本课程中，假定理想导体初始磁场为零，因而理想导体和超导体的电磁特性（电磁场和场源分布）相同，对二者不作特别区分

本质：电磁规律在介质界面等一类间断面上的表现
来源：麦克斯韦方程的积分形式(允许带间断面的电磁场解)

一 麦克斯韦方程的积分形式

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\Rightarrow\oint_C\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=-\boxed{\frac{d}{dt}\iint_\Sigma\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{\sigma}}\tag{1.3.6}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{j}_0+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\Rightarrow\oint_C\boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l}=\boxed{\iint_\Sigma\boldsymbol{j}_0\cdot d\boldsymbol{\sigma}}+\boxed{\frac{d}{dt}\iint_\Sigma\boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{\sigma}}\tag{1.3.7}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho_0\Rightarrow\oiint_S\boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{\sigma}=\boxed{\iiint_V\rho_0dV}\tag{1.3.8}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0\Rightarrow\oiint_S\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{\sigma}=0\tag{1.3.9}$$

$$\frac{\partial\rho_0}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{j}_0=0\Rightarrow\boxed{\frac{d}{dt}\iiint_V\rho_0dV}+\oiint_S\boldsymbol{j}_0\cdot d\boldsymbol{\sigma}=0\tag{1.3.16}$$

说明：1. 红框内的项随 Σ→0 (B和D有限)消失，对边值关系无贡献
2. 绿框内的项对边值关系有贡献：体源转换为面元

二 边值关系

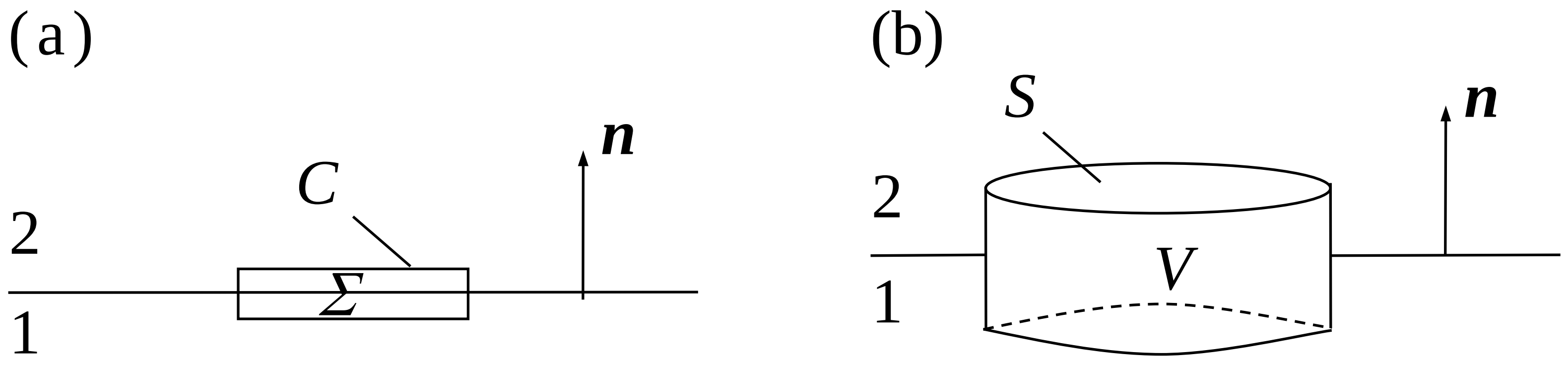


图1—1

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_1)=0 \quad (1.3.10)$$

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{D}_2-\boldsymbol{D}_1)=\sigma_0 \quad (1.3.12)$$

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)=\boldsymbol{i}_0 \quad (1.3.11)$$

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{B}_2-\boldsymbol{B}_1)=0 \quad (1.3.13)$$

$$\frac{d}{dt}\iiint_V \rho_0 dV+\oiint_S \boldsymbol{j}_0\cdot d\boldsymbol{\sigma}=0 \Rightarrow \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{j}_{02}-\boldsymbol{j}_{01})=-\frac{\partial\sigma_0}{\partial t} \quad (1.3.17)$$

【备注】绝缘介质边界：$\sigma_0=0$（人为事先给定的情况例外）
普通导体边界：$\boldsymbol{i}_0=0$

关于边值关系的推导

● 积分形式的方程中所有电场和磁场的积分的时间导数项，随着 C 所围面积 Σ，以及 S 所谓体积 V 趋于零而消失。因此，静场满足的边值关系可以照搬到随时间变化的电磁场

● 边值关系可以形式地从麦克斯韦方程的微分形式写出：删去场量的时间导数项，将 ∇ 代之以 $\boldsymbol{n}$，将场矢量换为2侧值与1侧值之差，将体源代之以面源。

例1.7 求绝缘介质界面的束缚电荷和束缚电流面密度.

解
$$\rho' = -\nabla \cdot \boldsymbol{P}, \qquad \boldsymbol{j}' = \nabla \times \boldsymbol{M} + \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t}$$
$$\sigma' = -\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{P}_2 - \boldsymbol{P}_1), \qquad \boldsymbol{i}' = \boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{M}_2 - \boldsymbol{M}_1)$$

● 齐次边值关系和非齐次边值关系：前者用于求解过程，后者事后计算面源（题目给定面源的情况例外）

三 边值关系和边界条件

- 性质和功能不同

➢ 边值关系来自电磁场基本规律的积分形式，它是该规律在间断面上的体现. 连续场区的微分形式的麦克斯韦方程和间断面上的边值关系一道，共同确定带间断面的电磁场解.

➢ 边界条件属于外加的约束条件，旨在实现电磁场解的唯一性。

- 二者的关系

边界条件应与基本方程和边值关系保持自洽。例如

1. 标定边界上的法向磁感应强度时，应保证通过边界的静磁通为零；
2. 理想导体和超导体边界上的切向电场和法向磁感应强度必须为零。

- 边界条件和定解问题的适定性

➢ 过多的边界条件导致无解，或非物理解

➢ 过少的边界条件导致解不唯一

➢ 恰当处理人为(数值)边界的条件是数值模拟研究成功的关键之一

1.4 电磁场的能量、动量和角动量

问题：1. 解未获得之前，能分析它的性质(如守恒性)吗？
2. 电磁规律是否一定具备守恒性？

- 基本方程的定性分析
- 定性分析：在求解之前，对基本方程及其解的特性的分析
- 分析内容：方程类型, 守恒性, 完备性, 对称(协变)性，……
- 意义：规律体现；直接应用；解题线索；结果检验；……
- 具备定性分析的意识，善于运用数学手段实现这类定性分析
- 本课程涉及的定性分析范围
- 麦克斯韦方程的守恒性（本节）
- 麦克斯韦方程的完备性（本章第5节）
- 麦克斯韦方程的波动性（第四章）
- 麦克斯韦方程在洛伦兹变换下的不变性（协变性，第八章）
- 定性分析的数学工具：场论和张量分析

1.4 电磁场的能量、动量和角动量

- 守恒性分析目的：揭示麦克斯韦方程的守恒特性
  类似的分析针对物理学各个领域，定量分析不同物质运动形式的相互转换

- 依据：物质在时空中运动, 守恒性来自时空对物质运动的约束
  - 能量守恒来自时间的均匀性
  - 动量守恒来自空间的均匀性
  - 角动量守恒来自空间的各向同性

- 结论：能量、动量和角动量守恒是普遍规律, 与动力学系统具体性质无关

1. 任何动力学系统必须具备能量、动量和角动量的守恒性
2. 反映动力学系统的物理规律也必须具备这种守恒性
3. 不同动力学系统的能量、动量和角动量的具体表达式来自相应的物理规律，据此推得相应的能量、动量和角动量守恒定理.

1.4　电磁场的能量、动量和角动量

- 时空性质与物质运动
  - 假定时空是平直的（忽略物质对时空的反作用），则任何动力学系统满足三大守恒定律
  - 物质通过引力场使得时空弯曲(考虑物质对时空的反作用)，在弯曲时空中的物质应当不再有能量、动量和角动量的概念及相关守恒定律；人们正在努力寻找新的守恒量，以取而代之
  - 究竟时空是平直的还是弯曲的？

  　回答：严格说来应该是弯曲的，但只要避开强（引力）场区，仍可近似假定时空的均匀性和空间的各向同性

结论：物理学仍然在不断发展；最终以实践作为物理原理（假设）和物理规律是否正确的检验标准

- 守恒定理的推导：从分析相互作用(做功、冲量和冲量矩)出发

电磁场作为时空的函数，其能量、动量和角动量将分布于电磁场所在空间并发生转移；这与力学中将能量、动量和角动量与特定物体（质点）相联系形成鲜明对照

一 电磁场对带电体的力和功率

将电荷按正、负分开，分别进行宏观描述：

$$\rho = \rho_+ + \rho_-, \qquad \boldsymbol{j} = \rho_+ \boldsymbol{v}_+ + \rho_- \boldsymbol{v}_- \tag{1.4.1}$$

$$\boldsymbol{f}_+ = \rho_+(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}_+ \times \boldsymbol{B}), \qquad \boldsymbol{f}_- = \rho_-(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}_- \times \boldsymbol{B}) \tag{1.4.2}$$

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}_+ + \boldsymbol{f}_- = \rho \boldsymbol{E} + \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B} \tag{1.4.3}$$

$$p = \boldsymbol{f}_+ \cdot \boldsymbol{v}_+ + \boldsymbol{f}_- \cdot \boldsymbol{v}_- = \rho_+ \boldsymbol{v}_+ \cdot \boldsymbol{E} + \rho_- \boldsymbol{v}_- \cdot \boldsymbol{E} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{E} \tag{1.4.4}$$

说明：电磁场的功率不仅仅限于焦耳功率

1. 电流中含束缚电流，电场转化为介质的极化能、磁化能和热能
2. 电场中含对流电场，电场功对应安培力做功，转化为介质的动能：

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}, \quad \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{j} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{v}$$
（$\boldsymbol{v}$ 为介质速度）

3. 只有对满足欧姆定律的导体中的传导电流，电场功才为焦耳功

$$\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{E} = \sigma E^2$$

二 电磁场的能量及能量守恒定理

出发方程：麦克斯韦方程的微分形式：

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t},\quad \nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho/\varepsilon_0,\quad \nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{j}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t},\quad \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0.$$

推导过程：利用场论和张量分析公式将电磁场功率密度变形

$$\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}\overset{①}{=}\frac{1}{\mu_0}(\nabla\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{E}-\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{E}$$

① $\boldsymbol{j}=\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\boldsymbol{B}-\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$

② $\nabla\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{E})=(\nabla\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{E}-(\nabla\times\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{B}$

$$\overset{②}{=}\underline{\frac{1}{\mu_0}\nabla\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{E})+\frac{1}{\mu_0}(\nabla\times\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{B}}-\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{E}$$

$$\overset{③}{=}-\frac{1}{\mu_0}\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})-\underline{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_0E^2}{2}+\frac{B^2}{2\mu_0}\right)}$$

③ $\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t},\quad \frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{E}=\frac{1}{2}\frac{\partial E^2}{\partial t},\quad \frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{B}=\frac{1}{2}\frac{\partial B^2}{\partial t}$

归纳前面的结果：

坡印亭定理：
$$\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}=-\frac{\partial w}{\partial t}-\nabla\cdot\boldsymbol{S}, \tag{1.4.9}$$

电磁能量密度：
$$w=\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}+\frac{B^2}{2\mu_0}, \tag{1.4.10}$$

电磁能流密度(坡印亭矢量)：
$$\boldsymbol{S}=\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}. \tag{1.4.11}$$

$$-\frac{\partial w}{\partial t}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}+\nabla\cdot\boldsymbol{S} \tag{1.4.12}$$

电磁能密度减小率 ＝ 电磁场功率密度 ＋ 单位时间从单位体积流出的电磁能

坡印亭定理的积分形式

$$-\frac{d}{dt}\iiint_V w\,dV=\iiint_V \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}\,dV+\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{S}\cdot d\boldsymbol{\sigma} \tag{1.4.13}$$

1.4 电磁场的能量、动量和角动量

电磁力做功转化为带电体的机械能（力学中的功能定理）

$$\frac{dW_m}{dt} = \iiint_V \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{E} dV \qquad (1.4.14)$$

$$\frac{dW_m}{dt} + \frac{d}{dt}\iiint_V w dV = -\oiint_S \boldsymbol{S} \cdot d\boldsymbol{\sigma} \qquad (1.4.15)$$

总能量（机械能＋电磁能）的减小率 ＝ 向外流出的电磁能

小结：要证明能量守恒定理，必须将功率密度化为两项之和：纯时间偏导数项和纯散度项，据此定义能量密度和能流密度

【问题】 坡印亭矢量真的代表电磁能流密度吗？

【回答】 1. 一般不代表，只有过闭合曲面积分才有物理意义

2. 对时变场情况，视它为能流密度要通过实验检验

3. 从保证坡印亭定理满足相对性原理出发，电磁能流密度被唯一地确定为坡印亭矢量（参见第八章）

三 电磁场的动量及动量守恒定理

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t},\quad \nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho/\varepsilon_0,\quad \nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{j}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t},\quad \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0.$$

推导过程：利用场论和张量分析公式将电磁力密度变形

$$\boldsymbol{f}=\rho\boldsymbol{E}+\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}=[\nabla\cdot(\varepsilon_0\boldsymbol{E})]\boldsymbol{E}+\left[\nabla\times\left(\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}\right)-\frac{\partial(\varepsilon_0\boldsymbol{E})}{\partial t}\right]\times\boldsymbol{B}$$

$$(\nabla\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\nabla\boldsymbol{B}-(\nabla\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{B}=\nabla\cdot(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B})-(\nabla\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}-\tfrac{1}{2}\nabla\cdot(B^2\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}})$$

$$=\nabla\cdot[\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}-\tfrac{1}{2}B^2\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}}]-(\nabla\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}=\nabla\cdot[\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}-\tfrac{1}{2}B^2\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}}],$$

$$(\nabla\times\boldsymbol{E})\times\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}\cdot\nabla\boldsymbol{E}-(\nabla\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{E}=\nabla\cdot[\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}-\tfrac{1}{2}E^2\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}}]-(\nabla\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{E},$$

$$(\nabla\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{E}=\nabla\cdot[\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}-\tfrac{1}{2}E^2\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}}]+\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\times\boldsymbol{E}$$

归纳前面的结果：

动量定理：
$$\boldsymbol{f} = -\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial t} - \nabla \cdot \overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}, \tag{1.4.17}$$

电磁动量密度：
$$\boldsymbol{g} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} = \frac{1}{c^2}\boldsymbol{S}, \tag{1.4.19}$$

电磁动量流密度：
$$\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}} = w\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}} - \varepsilon_0 \boldsymbol{E}\boldsymbol{E} - \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B} \tag{1.4.18}$$

$$-\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial t} = \boldsymbol{f} + \nabla \cdot \overleftrightarrow{\boldsymbol{T}} \tag{1.4.20}$$

电磁动量密度减小率 ＝ 单位时间电磁力冲量密度
＋ 单位时间从单位体积流出的电磁动量

动量守恒定理的积分形式

$$-\frac{d}{dt}\iiint_V \boldsymbol{g}\,dV = \iiint_V \boldsymbol{f}\,dV + \oiint_S d\boldsymbol{\sigma} \cdot \overleftrightarrow{\boldsymbol{T}} \tag{1.4.21}$$

1.4 电磁场的能量、动量和角动量

电磁力的冲量转化为带电体的机械动量(力学中的动量定理)

$$\frac{d\boldsymbol{G}_m}{dt} = \iiint_V \boldsymbol{f} dV \qquad (1.4.22)$$

$$\frac{d\boldsymbol{G}_m}{dt} + \frac{d}{dt}\iiint_V \boldsymbol{g} dV = -\oiint_S d\boldsymbol{\sigma} \cdot \overleftrightarrow{\boldsymbol{T}} \qquad (1.4.23)$$

总动量（机械动量＋电磁动量）的减小率 ＝ 向外流出的电磁动量

小结：要证明动量守恒定理，必须将作用力化为两项之和：纯时间偏导数项和纯散度项，据此定义动量密度和动量流密度

【问题】 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}$ 真的代表电磁动量流密度吗？

【回答】 1. 一般不代表，只有过闭合曲面积分才有物理意义

2. 对时变场情况，视它为动量流密度要通过实验检验

3. 从保证动量定理满足相对性原理出发，电磁动量流密度被唯一地确定为 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}$（参见第八章）

四 电磁场的角动量及角动量守恒定理

推导过程：用位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 叉乘动量守恒定理

$$-\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial t}=\boldsymbol{f}+\nabla\cdot\overleftrightarrow{T} \quad\Rightarrow\quad -\frac{\partial(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{g})}{\partial t}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{f}+\boldsymbol{r}\times\nabla\cdot\overleftrightarrow{T}$$

按守恒定理的要求，电磁冲量矩必须写成纯时间偏导数项和纯散度项之和；下面设法将上式右边第二项化为散度项.

由1. 1节例4的结果： $\nabla\cdot(\boldsymbol{f}\boldsymbol{g}\times\boldsymbol{r})=[\nabla\cdot(\boldsymbol{f}\boldsymbol{g})]\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{g}\times\boldsymbol{f}$

令 $\boldsymbol{f}=\varphi\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{g}=\boldsymbol{G}$ 得 $\boldsymbol{r}\times\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{F}\boldsymbol{G})=-\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{F}\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{r})+\varphi\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{F}$

由前面结果： $\overleftrightarrow{T}=w\overleftrightarrow{I}-\varepsilon_0\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}-\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B} \quad (\overleftrightarrow{I}=\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3)$

恰好是 $\varphi\boldsymbol{F}\boldsymbol{G}$ 之类的项的叠加，且满足 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{G}$，于是有

$\boldsymbol{r}\times\nabla\cdot\overleftrightarrow{T}=-\nabla\cdot(\overleftrightarrow{T}\times\boldsymbol{r})$，化为纯散度。代回原式得角动量守恒定理

归纳前面的结果：

角动量定理：
$$-\frac{\partial \boldsymbol{l}}{\partial t}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{f}+\nabla\cdot\overset{\leftrightarrow}{\boldsymbol{R}},\qquad(1.4.26)$$

电磁角动量密度：
$$\boldsymbol{l}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{g},\qquad(1.4.27)$$

电磁角动量流密度：
$$\overset{\leftrightarrow}{\boldsymbol{R}}=-\overset{\leftrightarrow}{\boldsymbol{T}}\times\boldsymbol{r}\qquad(1.4.28)$$

$$-\frac{\partial \boldsymbol{l}}{\partial t}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{f}+\nabla\cdot\overset{\leftrightarrow}{\boldsymbol{R}}\qquad(1.4.26)$$

电磁角动量密度减小率 ＝ 单位时间电磁力冲量矩密度

＋ 单位时间从单位体积流出的电磁角动量

角动量守恒定理的积分形式

$$-\frac{d}{dt}\iiint_V \boldsymbol{l}dV=\iiint_V \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{f}dV+\oiint_S d\boldsymbol{\sigma}\cdot\overset{\leftrightarrow}{\boldsymbol{R}}\qquad(1.4.29)$$

电磁力的冲量矩转化为带电体的机械角动量(力学中的角动量定理)

$$\frac{d\boldsymbol{L}_m}{dt} = \iiint_V \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{f} dV \qquad (1.4.30)$$

$$\frac{d\boldsymbol{L}_m}{dt} + \frac{d}{dt}\iiint_V \boldsymbol{l} dV = -\oiint_S d\boldsymbol{\sigma} \cdot \overleftrightarrow{\boldsymbol{R}} \qquad (1.4.31)$$

总角动量（机械角动量＋电磁角动量）的减小率 ＝ 向外流出的电磁角动量

小结：要证明角动量守恒定理，必须将作用力矩化为两项之和：纯时间偏导数项和纯散度项，据此定义角动量密度和角动量流密度

五 电磁场一介质系统的能量、动量和角动量分析

- 从实际应用角度，需要分析外界克服电磁力对自由电荷的功、冲量和冲量矩，并建立相应的能量、动量和角动量守恒定理

以做功为例： $\boldsymbol{j}_0 = \boldsymbol{j} - \boldsymbol{j}' \Rightarrow -\boldsymbol{j}_0 \cdot \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{E} + \boldsymbol{j}' \cdot \boldsymbol{E}$

$-\boldsymbol{j}_0 \cdot \boldsymbol{E}$ — 外界对传导电流（搬运自由电荷）的功率密度

$-\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{E}$ — 外界对总电流(搬运全部电荷)的功率密度；转化为电磁能

$\boldsymbol{j}' \cdot \boldsymbol{E}$ — 电磁场对束缚电流(搬运束缚电荷)的功率密度：一部分电磁能转化为介质的机械能(极化能,磁化能,热能, ……)

➢ 对外界对自由电荷的冲量和冲量矩存在类似结果：一部分转化为电磁动量和角动量，另一部分以某种方式转移给介质

➢ 是否存在相应的能量、动量和角动量守恒定理，取决于转移给介质的部分能否写成介质电磁参量（与其他参量例如温度无关）的态函数，后者与介质的电磁特性有关

- 电磁场对自由电荷、传导电流的力和功率

出发方程：$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\partial\boldsymbol{B}/\partial t,\quad \nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho_0,$

$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{j}_0+\partial\boldsymbol{D}/\partial t,\quad \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0.$

推导过程：利用场论和张量分析公式将电磁场对传导电流的力和功率密度变形

➢ 力密度：$\boldsymbol{f}=\rho_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{j}_0\times\boldsymbol{B}=(\nabla\cdot\boldsymbol{D})\boldsymbol{E}+(\nabla\times\boldsymbol{H})\times\boldsymbol{B}-(\partial\boldsymbol{D}/\partial t)\times\boldsymbol{B},$

$$(\nabla\cdot\boldsymbol{D})\boldsymbol{E}=\nabla\cdot(\boldsymbol{DE})-\boldsymbol{D}\cdot\nabla\boldsymbol{E}=\nabla\cdot(\boldsymbol{DE})-(\nabla\times\boldsymbol{E})\times\boldsymbol{D}-(\nabla\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{D}$$
$$=\nabla\cdot(\boldsymbol{DE})-\boldsymbol{D}\times(\partial\boldsymbol{B}/\partial t)-(\nabla\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{D},$$

$$(\nabla\times\boldsymbol{H})\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\nabla\boldsymbol{H}-(\nabla\boldsymbol{H})\cdot\boldsymbol{B}=\nabla\cdot(\boldsymbol{BH})-(\nabla\boldsymbol{H})\cdot\boldsymbol{B},$$

$$\boldsymbol{f}_0=-\frac{\partial(\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B})}{\partial t}+\nabla\cdot(\boldsymbol{DE}+\boldsymbol{BH})\boxed{-(\nabla\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{D}-(\nabla\boldsymbol{H})\cdot\boldsymbol{B}}\qquad(1.4.36)$$

非纯散度项

➢ 功率密度：

$$\boldsymbol{j}_0\cdot\boldsymbol{E} \overset{①}{=} (\nabla\times\boldsymbol{H})\cdot\boldsymbol{E}-\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{E}$$

$$\overset{②}{=} \underline{\nabla\cdot(\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{E})+(\nabla\times\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{H}}-\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{E}$$

$$\overset{③}{=} -\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})-\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}-\underline{\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}}$$

① $\boldsymbol{j}_0=\nabla\times\boldsymbol{H}-\dfrac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$

② $\nabla\cdot(\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{E})=(\nabla\times\boldsymbol{H})\cdot\boldsymbol{E}-(\nabla\times\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{H}$

③ $\nabla\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$

$$\boldsymbol{j}_0\cdot\boldsymbol{E}=\boxed{-\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}-\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}}-\nabla\cdot\boldsymbol{S} \qquad (1.4.37)$$

非纯时间偏导数项

$$\boldsymbol{f}_0=-\frac{\partial(\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B})}{\partial t}+\nabla\cdot(\boldsymbol{DE}+\boldsymbol{BH})\boxed{-(\nabla\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{D}-(\nabla\boldsymbol{H})\cdot\boldsymbol{B}} \qquad (1.4.36)$$

非纯散度项

结论：对自由电荷、传导电流的功、冲量和冲量矩一般不能化成标准守恒形式

- 电磁场—线性无色散、无损耗介质系统的能量守恒定理

$$\boldsymbol{j}_0\cdot\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}-\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}-\nabla\cdot\boldsymbol{S}$$

对介质的附加条件：线性、无色散、无损耗

$$D_i=\varepsilon_{ij}E_j,\qquad B_i=\mu_{ij}H_j,\qquad \varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ij},\quad \mu_{ij}=\mu_{ij} \tag{1.4.38}$$

线　性：介电常量和磁导率与电磁场无关；
无色散：介电常量和磁导率与电磁场的时间变化速率（频率）无关；
无损耗：介电常量和磁导率为实数量

$$\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}=E_i\frac{\partial D_i}{\partial t}=\varepsilon_{ij}E_i\frac{\partial E_j}{\partial t}=\varepsilon_{ji}E_i\frac{\partial E_j}{\partial t}=D_j\frac{\partial E_j}{\partial t}=\boldsymbol{D}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$$

$$\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=\mu_{ij}H_i\frac{\partial H_j}{\partial t}=\mu_{ji}H_i\frac{\partial H_j}{\partial t}=B_j\frac{\partial H_j}{\partial t}=\boldsymbol{B}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}+\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}).$$ 化成纯时间偏导数

归纳前面的结果：

坡印亭定理：

$$\boldsymbol{j}_0 \cdot \boldsymbol{E} = -\frac{\partial w_0}{\partial t} - \nabla \cdot \boldsymbol{S}_0, \qquad (1.4.39)$$

电磁能量密度：

$$w_0 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{E} + \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{H}), \qquad (1.4.40)$$

电磁能流密度(坡印亭矢量)：

$$\boldsymbol{S}_0 = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} \qquad (1.4.41)$$

积分形式：

$$\iiint_V \boldsymbol{j}_0 \cdot \boldsymbol{E} dV = -\frac{d}{dt}\iiint_V w_0 dV - \oiint_S \boldsymbol{S}_0 \cdot d\boldsymbol{\sigma} \qquad (1.4.43)$$

$$\frac{dW_m}{dt} = \iiint_V \boldsymbol{j}_0 \cdot \boldsymbol{E} dV \qquad (1.4.44)$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{dW_m}{dt} + \frac{d}{dt}\iiint_V w_0 dV = -\oiint_S \boldsymbol{S}_0 \cdot d\boldsymbol{\sigma} \qquad (1.4.45)$$

- 电磁场－线性均匀介质系统的动量守恒定理

$$f_0 = -\frac{\partial(\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B})}{\partial t} + \nabla\cdot(\boldsymbol{DE}+\boldsymbol{BH}) - (\nabla\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{D} - (\nabla\boldsymbol{H})\cdot\boldsymbol{B}$$

对介质的附加条件：线性均匀

$$(\nabla\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{D} = \boldsymbol{e}_i\frac{\partial E_j}{\partial x_i}D_j = \boldsymbol{e}_i\frac{\partial(\varepsilon_{kj}E_j)}{\partial x_i}E_k = \boldsymbol{e}_i\frac{\partial D_k}{\partial x_i}E_k = (\nabla\boldsymbol{D})\cdot\boldsymbol{E}$$

$$(\nabla\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{D} = \frac{1}{2}\nabla(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}) = \frac{1}{2}\nabla\cdot[(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E})\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}}]$$

$$(\nabla\boldsymbol{H})\cdot\boldsymbol{B} = \frac{1}{2}\nabla(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}) = \frac{1}{2}\nabla\cdot[(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H})\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}}]$$

$$\therefore\quad (\nabla\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{D} + (\nabla\boldsymbol{H})\cdot\boldsymbol{B} = \frac{1}{2}\nabla\cdot[(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H})\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}}].$$

化成纯散度

归纳前面的结果：

动量定理：
$$\boldsymbol{f}_0 = -\frac{\partial \boldsymbol{g}_0}{\partial t} - \nabla \cdot \overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}_0, \tag{1.4.46}$$

电磁动量密度：
$$\boldsymbol{g}_0 = \boldsymbol{D} \times \boldsymbol{B}, \tag{1.4.47}$$

电磁动量流密度：
$$\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}_0 = w_0 \overleftrightarrow{\boldsymbol{I}} - \boldsymbol{DE} - \boldsymbol{BH} \tag{1.4.48}$$

积分形式：
$$\iiint_V \boldsymbol{f}_0 dV = -\frac{d}{dt}\iiint_V \boldsymbol{g}_0 dV - \oiint_S d\boldsymbol{\sigma} \cdot \overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}_0$$

$$\frac{d\boldsymbol{G}_m}{dt} = \iiint_V \boldsymbol{f}_0 dV \Longrightarrow \frac{d\boldsymbol{G}_m}{dt} + \frac{d}{dt}\iiint_V \boldsymbol{g}_0 dV = -\oiint_S d\boldsymbol{\sigma} \cdot \overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}_0 \tag{1.4.51}$$

- 电磁场—线性均匀各向同性介质系统的角动量守恒定理

  用位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 叉乘动量守恒定理

$$\boldsymbol{f}_0 = -\frac{\partial \boldsymbol{g}_0}{\partial t} - \nabla \cdot \overleftrightarrow{T}_0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{f}_0 = -\frac{\partial (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{g}_0)}{\partial t} - \boldsymbol{r} \times \nabla \cdot \overleftrightarrow{T}_0$$

关键在于将上式第二项化为纯散度；为此我们限于线性均匀各向同性介质．由1.1节例4的结果和 $\overleftrightarrow{T}_0$ 的表达式

$$\boldsymbol{r} \times \nabla \cdot (\varphi \boldsymbol{F} \boldsymbol{G}) = -\nabla \cdot (\varphi \boldsymbol{F} \boldsymbol{G} \times \boldsymbol{r}) + \varphi \boldsymbol{G} \times \boldsymbol{F} \qquad (1.4.25)$$

$$\overleftrightarrow{T}_0 = w_0 \overleftrightarrow{I} - \boldsymbol{D}\boldsymbol{E} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{H} \qquad (1.4.48)$$

对于线性均匀各向同性介质有 $\boldsymbol{D} /\!/ \boldsymbol{E}$， $\boldsymbol{B} /\!/ \boldsymbol{H}$，

化为纯散度的目标得以实现：

$$\boldsymbol{r} \times \nabla \cdot \overleftrightarrow{T}_0 = -\nabla \cdot (\overleftrightarrow{T}_0 \times \boldsymbol{r}).$$

归纳前面的结果：

角动量定理：
$$-\frac{\partial \boldsymbol{l}_0}{\partial t}=\boldsymbol{r}\times \boldsymbol{f}_0+\nabla\cdot\overleftrightarrow{\boldsymbol{R}}_0, \tag{1.4.56}$$

电磁角动量密度：
$$\boldsymbol{l}_0=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{g}_0, \tag{1.4.54}$$

电磁角动量流密度：
$$\overleftrightarrow{\boldsymbol{R}}_0=-\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}_0\times\boldsymbol{r} \tag{1.4.55}$$

积分形式：
$$\iiint_V \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{f}_0 dV=-\frac{d}{dt}\iiint_V \boldsymbol{l}_0 dV-\oiint_S d\boldsymbol{\sigma}\cdot\overleftrightarrow{\boldsymbol{R}}_0$$

$$\frac{d\boldsymbol{L}_m}{dt}=\iiint_V \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{f}_0 dV \Rightarrow \frac{d\boldsymbol{L}_m}{dt}+\frac{d}{dt}\iiint_V \boldsymbol{l}_0 dV=-\oiint_S d\boldsymbol{\sigma}\cdot\overleftrightarrow{\boldsymbol{R}}_0 \tag{1.4.58}$$

小　　结

- 在时空均匀和空间各向同性的假定下，能量、动量和角动量守恒是普遍规律，与动力学系统的具体性质无关
- 麦克斯韦方程具备守恒性
- 对电磁场一介质系统，与电磁力对传导电流的功、冲量和冲量矩相关的守恒定理成立的条件是：
  - 能量守恒定理：线性无色散、无损耗介质
  - 动量守恒定理：线性均匀介质
  - 角动量守恒定理：线性均匀各向同性介质
- 熟练掌握场论和张量分析手段，导出守恒定理

六 线性各向同性介质界面上的能量、动量守恒关系

- 性质：属于非独立的边值关系，可由电磁场的边值关系导出
- 作用：电磁场求解完成之后，用于界面两侧的能量和动量分析
- 能量守恒关系：从线性无色散、无损耗介质的能量定理出发导出

$$\boldsymbol{j}_0\cdot\boldsymbol{E}=-\frac{\partial w_0}{\partial t}-\nabla\cdot\boldsymbol{S}_0 \Longrightarrow \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{S}_{02}-\boldsymbol{S}_{01})=0$$

注意：介质和普通导体界面面电流密度为零

- 动量守恒关系

$$\boldsymbol{f}_0=-\frac{\partial \boldsymbol{g}_0}{\partial t}-\nabla\cdot\overleftrightarrow{T}_0 \not\Longrightarrow \boldsymbol{n}\cdot(\overleftrightarrow{T}_{01}-\overleftrightarrow{T}_{02})=0 \quad ?$$

理由：

1. 该动量守恒定理只适用于线性均匀介质,不能用来导出边值关系
2. 不能漏掉 $\boldsymbol{f}_0$ 对边值关系的贡献（其中涉及自由电荷密度趋于无限）

正确方法：从非均匀介质中的动量守恒关系出发

● 动量守恒关系（续）

$$\boldsymbol{f}_0 = -\frac{\partial(\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B})}{\partial t} + \nabla\cdot(\boldsymbol{DE}+\boldsymbol{BH}) - (\nabla\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{D} - (\nabla\boldsymbol{H})\cdot\boldsymbol{B} \qquad (1.4.37)$$

$$(\nabla\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{D} = \frac{1}{2}\nabla\cdot[(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E})\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}}] - \frac{1}{2}E^2\nabla\varepsilon, \quad (\nabla\boldsymbol{H})\cdot\boldsymbol{B} = \frac{1}{2}\nabla\cdot[(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H})\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}}] + \frac{1}{2}B^2\nabla\frac{1}{\mu}$$

代入（1.4.37）式得

$$\boldsymbol{f} \equiv \boldsymbol{f}_0 - \frac{1}{2}E^2\nabla\varepsilon + \frac{1}{2}B^2\nabla\frac{1}{\mu} = -\frac{\partial\boldsymbol{g}_0}{\partial t} - \nabla\cdot\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}_0 \qquad (1.4.60)$$

左边附加的两项力密度与介质的非均匀极化和磁化有关. 令 $\boldsymbol{f} = d\boldsymbol{F}/dV$

则按微分方程导出边值关系的规则出发，得如下动量守恒关系

$$-\boldsymbol{n}\cdot(\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}_{02} - \overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}_{01}) = \frac{d\boldsymbol{F}}{d\sigma} \qquad (1.4.61)$$

界面压强 $p = dF_n/d\sigma$ 为

$$p = \boldsymbol{nn}:(\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}_{01} - \overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}_{02}) \qquad (1.4.62)$$

注意：$\boldsymbol{f}$ 对边值关系有贡献！

七 电磁场热力学

- 对任意介质中的能量过程，采用热力学方法处理，将外界克服电磁力搬运自由电荷做功与系统内能（热能）联系起来
- 热力学第一定律

$$dU = \delta Q + \delta A \qquad (1.4.63)$$

dU —— 单位体积内能增量**（全微分）**

δQ —— 输入单位体积的热量**（非全微分，一般与过程有关）**

δA —— 外界对单位体积做功**（非全微分，一般与过程有关）**

- 外界克服电磁力搬运自由电荷功率密度表达式

由

$$p_0 = \boldsymbol{j}_0 \cdot \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} - \boldsymbol{H} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} - \nabla \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) \qquad (1.4.36)$$

略去辐射损失（第三项，准静态过程）得

$$\delta A = -p_0 dt = \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{D} + \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{B} \qquad (1.4.64)$$

- 电磁场热力学方程 $dU = \delta Q + \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{D} + \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{B}$

- 电磁场热力学方程的变形 — 消去辅助矢量

$$dU = \delta Q + \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{D} + \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{B}$$

$$\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E}\cdot d(\varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}) = d(\varepsilon_0 E^2/2) + \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{P}$$

$$\boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{B} = \underbrace{d(B^2/2\mu_0) - \boldsymbol{M}\cdot d\boldsymbol{B}}_{1} = \underbrace{d(\mu_0 H^2/2) + \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{M}}_{2}$$

方案1： $$dU = \delta Q + d\left(\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}\right) + \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{P} - \boldsymbol{M}\cdot d\boldsymbol{B}$$ (电流观点)

方案2： $$dU = \delta Q + d\left(\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu_0 H^2}{2}\right) + \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{P} + \mu_0 \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{M}$$ (磁荷观点)

单位体积元功 ＝ 电磁能密度增加＋单位体积极化元功＋单位体积磁化元功

不妨舍弃电磁能密度全微分,得电磁场热力学方程的如下简化形式：

$$dU = \delta Q + \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{P} - \boldsymbol{M}\cdot d\boldsymbol{B}$$ 或 $$\boxed{dU = \delta Q + \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{P} + \mu_0 \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{M}}$$

常用

$$dU = \delta Q + \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{P} - \boldsymbol{M}\cdot d\boldsymbol{B} \quad \text{或} \quad \boxed{dU = \delta Q + \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{P} + \mu_0 \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{M}}$$

常用

【注意】两种形式仅磁化元功不同，二者之差为全微分：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}\cdot d\boldsymbol{B} + \mu_0 \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{M} &= \mu_0 \boldsymbol{M}\cdot d\boldsymbol{M} + \mu_0 \boldsymbol{M}\cdot d\boldsymbol{H} + \mu_0 \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{M} \\ &= d\left(\frac{\mu_0 M^2}{2}\right) + d(\mu_0 \boldsymbol{H}\cdot \boldsymbol{M})\end{aligned}$$

对分析电磁场中介质的热力学性质和推导热力学关系不会造成任何影响

1.5 麦克斯韦方程组的完备性

- 完备性的含义

➢ 从数学角度：给定场源，麦克斯韦方程组初边值问题的解的唯一性

➢ 从物理角度：麦克斯韦方程组完全确定了电磁场的运动规律

- 电磁场解的唯一性定理

➢ 表述：对给定的$\rho(\boldsymbol{r},t)$ 和 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)$, 满足麦克斯韦方程组

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t},\quad \nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho/\varepsilon_0,\quad \nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{j}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t},\quad \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$$

初始条件 $\boldsymbol{E}|_{t=0}=\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}),\quad \boldsymbol{B}|_{t=0}=\boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{r})$

和边界条件 $\boldsymbol{E}_\tau|_S=\boldsymbol{E}_S$ 或 $\boldsymbol{B}_\tau|_S=\boldsymbol{B}_S$ (下标 τ 表示切向分量)

的电磁场解 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ 和 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$, 如果存在的话, 一定是唯一的.

能否提如下边界条件：在边界 S 上给定 $\boldsymbol{E}$，或给定 $\boldsymbol{B}$，或同时给定 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$？

- 电磁场解的唯一性定理（续）

➢ 证明：用反证法。设有两个解: ($\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{B}_1$) 和 ($\boldsymbol{E}_2$, $\boldsymbol{B}_2$)；令

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_1-\boldsymbol{E}_2 \qquad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{B}_2$$

则 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 满足齐次麦克斯韦方程和齐次初边条件

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t},\qquad \nabla\cdot\boldsymbol{E}=0,\qquad \nabla\times\boldsymbol{B}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t},\qquad \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$$

$$\boldsymbol{E}\big|_{t=0}=0,\qquad \boldsymbol{B}\big|_{t=0}=0;\qquad \boldsymbol{E}_\tau\big|_S=0\quad \text{或}\quad \boldsymbol{B}_\tau\big|_S=0$$

且 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 满足坡印亭定理：$\iiint_V \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}dV+\frac{d}{dt}\iiint_V wdV=-\oiint_S\boldsymbol{S}\cdot d\boldsymbol{\sigma}$

$$w=\frac{\varepsilon_0E^2}{2}+\frac{B^2}{2\mu_0},\qquad \boldsymbol{S}=\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$$

$$\boldsymbol{j}=0\Longrightarrow\iiint_V\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}dV=0;\qquad \boldsymbol{E}_\tau\big|_S=0\ \text{或}\ \boldsymbol{B}_\tau\big|_S=0\Longrightarrow\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{S}=0$$

$$\frac{d}{dt}\iiint_V\left(\frac{\varepsilon_0E^2}{2}+\frac{B^2}{2\mu_0}\right)dV=0\Longrightarrow\boldsymbol{E}=\boldsymbol{B}=0$$

证毕

1.5 麦克斯韦方程组的完备性

- 几点说明

1. 对于线性无色散无损耗介质中的电磁场，成立类似的唯一性定理（参见习题**1.19**）.
2. 对静场问题，定解问题由初边值问题蜕化为纯边值问题，有关唯一性定理需另作讨论（参见第二章2.1节和第三章3.1节）.
3. 在上述唯一性定理的表述和证明过程中，我们默认电磁场解存在. 其实，如果定解条件定得过于苛刻，可能无解. 例如，如果在边界上标定的切向分量的同时，再对它的法向分量任意加以标定，将导致无解. 解的存在性问题，常常需要通过具体问题的求解去事后解决.
4. 以下两种情况的电磁场解显然存在：

(a) 无限解域电磁场的初值问题，在无限远处满足正则条件($\boldsymbol{E}_\infty\to 0$, $\boldsymbol{B}_\infty\to 0$)，我们将在第五章给出它的电磁场解；

(b) 由理想导体板构成的有限边界，其上满足($\boldsymbol{E}_\tau|_S = 0$)，我们将在第四章就波导管和谐振腔问题给出电磁场解.

第一章小结

一．基本概念和基本理论

1. 场论和张量分析

- 张量：任意坐标变换下的不变量；物理量和物理规律的张量表述
- 张量及其运算的定义和张量不变量（限于欧几里得空间的笛卡儿坐标的正交线性变换；有关结论具普遍意义）
- 高斯公式和斯特克斯公式的推广形式和格林公式
- δ函数的定义、性质和运算规则

2. 麦克斯韦方程

- 积分形式和微分形式；各方程的物理意义
- 边值关系：齐次边值关系和非齐次边值关系
- 定性分析：守恒性和完备性
- 电磁场—介质系统的守恒定理：对介质的约束条件
- 电磁场热力学方程

第一章小结(续)

二 习题类型和解法提示

1. 三维张量微分和积分恒等式的证明

- 微分恒等式的证明：下标法和符号法
- 积分恒等式的应用：推广了的高斯公式和斯托克斯公式，格林公式

2. δ 函数的表达式和积分运算

- 从δ 函数的定义式出发写出和证明它的表达式和恒等式
- 使用变数替换计算$\delta(f(x))$的积分：简单零点；单值函数
- 奇异电荷分布的 δ 函数表述

3. 电磁场能量、动量和角动量守恒定理的推导及应用