不含紧优和几乎紧优双环网络无限族

徐俊明
(中国科学技术大学数学系,合肥 230026)

摘要 双环网络是计算机互连网络或通讯系统中重要的拓扑结构,它们的紧优性是网络设计中一个重要的研究课题.目前已找到大量含紧优和几乎紧优双环网络的无限族.我们找到不含紧优和几乎紧优双环网络的无限族,回答了李乔等人于1993年提出的一个问题.

关键词 双环网络 直经 最优 紧优

众所周知,计算机互连网络或通讯系统的拓扑结构可以用有向图 G 来模拟,其中 G 的结点表示处理机或开关元件,G 的有向边表示单向通讯连线.网络的有效性的一个重要参数是信息的传输延迟,它可以用图的直经来度量.双环网络具有对称性,简单性和可扩性,因而被广泛用于计算机互连网络或通讯系统拓扑结构的设计中.双环网络的图论模型是指这样一个有向图 $G(N;s)$,它的每个结点记为 $0,1,2,\cdots,N-1$,并从每个结点 i 发出两条有向边 $i\to i+1(\mathrm{mod}N)$ 和 $i\to i+s(\mathrm{mod}N)$,其中 s 是自然数,而且 $1<s<N$.从定义立即可知,对于给定的 N 和 s 唯一决定了一个双环网络 $G(N;s)$ 的结构,因而也决定了它的直径.记 $G(N;s)$ 的直径为 $d(N;s)$,并记 $d(N)=\min\{d(N;s):1<s<N\}$. Wong 和 Coppersmith[1]证明了:$d(N)\geqslant lb(N)=\lceil\sqrt{3N}\rceil-2$.一个被极度关注的问题是[1~8]:对于给定的 N,确定 $d(N)$.设 $\mathbb{Z}$ 是非负整数无限集.对于 $h\in\mathbb{Z}$,$G(N;s)$ 称为 h 紧优的,如果 $d(N;s)=d(N)=lb(N)+h$.0紧优和1紧优通常称为紧优和几乎紧优.设 $N(t)$ 是一个定义在 $\mathbb{Z}$ 上的正整数值函数.$\{N(t):t\in\mathbb{Z},t\geqslant t_0\}$ 称为含 h 紧优双环网络的无限族,如果对任何 $t\geqslant t_0$,都存在 $s(t)$ 使得 $G(N(t);s(t))$ 为 h 紧优的.$\{N(t):t\in\mathbb{Z},t\geqslant t_0\}$ 称为不含 h 紧优双环网络的无限族,如果对任何 $t\geqslant t_0$ 和 $s(t)$ 都有 $d(N(t);s(t))>lb(N(t))+h$. 1993年,李乔等人[7]提出一个系统的构造方法,并且根据这个方法列表展示出了69个含紧优双环网络的无限族和33个含几乎紧优双环网络的无限族.同时,他们提出研究下述问题:找出不含紧优和几乎紧优双环网络的无限族.但至今还未找到这样的无限族.本文将利用李乔等人提出的方法,找出这样的无限族.

1 定义和引理

因为 $G(N;s)$ 是点对称的强连通有向图,所以要研究 $G(N;s)$ 的直径只需考察从结点0到其他结点的距离.为此,在笛卡尔平面直角坐标系中,令 X 轴的单位为1(或 s),Y 轴的单位为 s(或1).把第一象限中的所有格点 (x,y) 按下列顺序排成序列:

$$(0,0),(1,0),(0,1),(2,0),(1,1),(0,2),\cdots,(j,0),(j-1,1),\cdots,(j-i,i),\cdots,(1,j-1),(0,j),\cdots.$$

并且依次在每一格点 (x,y) 的右上角的单位方格内安置一个数 $k\in\{0,1,2,\cdots,N-1\}$,其中 $k\equiv x+ys(\mathrm{mod}N)$.如果在此之前数 k 已出现过,则空出此方格,考察下一个格点,直到数 $0,1,2,\cdots,N-1$ 都出现时为止.已经证明[1]:由 $G(N;s)$ 所确定的 N 个方格组成的构图呈图1所示的面积为 N 个单位的L形域,记为 $L(N;s)$.

定义 如图1所示,由 l,h,x,y 确定的面积为 N 的L形区域称为L形瓦,记为 $L(N;l,$

$h, x, y)$,其中 l, h, x, y 都是整数,并且规定 $l, h \geqslant 2$, $0 \leqslant x < l$, $1 \leqslant y < h$, $y < l$, $x \leqslant h$. 令 $D(L(N; l, h, x, y)) = \max\{h + l' - 2, l + h' - 2\}$,称为 $L(N; l, h, x, y)$的直径. 记在面积为 N 的所有 L 形瓦中直径的最小值为 $D(N)$. 记由 $G(N; s)$确定的 L 形瓦的直径为 $D(N; s)$. $L = L(N; l, h, x, y)$称为 h 紧瓦,如果 $D(L) = lb(N) + h$. 同样地,0 紧瓦和 1 紧瓦分别称为紧瓦和几乎紧瓦.

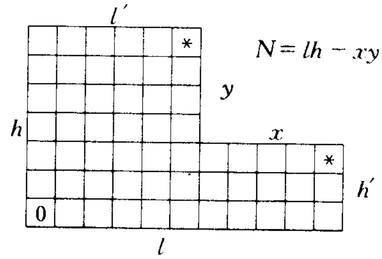

图 1

根据上述记号和定义可知,对任何 $G(N; s)$,均有 $d(N; s) = D(N; s)$,并且 $d(N) \geqslant D(N)$. 若 $G(N; s)$为 h 紧优的,则它所对应的 L 形瓦一定是 h 紧瓦. 反之不真.

引理 1[7] 设 $L = L(N; l, h, x, y)$. 若 $|y - x| \geqslant z_0 \geqslant 1$,则

$$D(L) \geqslant \sqrt{3N - \frac{3}{4}z_0^2} + \frac{1}{2}z_0 - 2.$$

引理 2[7] 对任何正整数 N,必存在 $t \in \mathbb{Z}$ 使得 $N = N(t) \in I_1(t) \cup I_2(t) \cup I_3(t)$,其中: $I_1(t) = [3t^2 + 1, 3t^2 + 2t]$, $I_2(t) = [3t^2 + 2t + 1, 3t^2 + 4t + 1]$, $I_3(t) = [3t^2 + 4t + 2, 3(t + 1)^2]$,并且对每个 $i = 1, 2, 3$, $N(t) \in I_i(t)$当且仅当 $lb(N(t)) = 3t - 2 + i$.

引理 3[7] 设 $L(N; l, h, x, y)$中 $N = 3t^2 + At + B \in I_i(t)$, $l = 2t + a$, $h = 2t + b$, $z = |y - x|$. 则 L 是紧瓦(或者几乎紧瓦)当且仅当等式

$$(a + b - j)(a + b - j + z) - ab + (A + z - 2j)t + B = 0, \tag{1}$$

对 $j = i$(或者 $i + 1$)成立.

2 主要结果

本节将利用和发展李乔等人在文献[7]中提供的方法,找出既不含紧优又不含几乎紧优双环网络的无限族. 具体实施这个方法并没有多大困难,只是要费些功夫去寻找和耐心地进行乏味的验算. 下面给出具体结果.

定理 1 设 $N(t) = 3t^2 + 6t - 26$, $t \in \mathbb{Z}$. 则 $\{N(t): t \in \mathbb{Z}, t \geqslant 29\}$是一个不含紧优双环网络的无限族.

证 因为当 $t \geqslant 14$ 时,有 $3t^2 + 6t - 26 \geqslant 3t^2 + 4t + 2 \in I_3(t)$,因而 $N(t) = 3t^2 + 6t - 26 \in I_3(t)$,所以由引理 2 知当 $t \geqslant 14$ 时 $lb(N(t)) = 3t + 1$. 假定存在某个 t, $t \geqslant 29$ 和一个紧优双环网络 $G(N(t); s(t))$,那么必存在一个面积为 $N(t)$的紧瓦 $L(t) = L(N(t); l(t), h(t), x(t), y(t))$使得 $3t + 1 = lb(N(t)) = d(N(t)) = D(L(t))$. 令

$$z = z(t) = |y(t) - x(t)|.$$

若 $z \geqslant 1$,则因为当 $t \geqslant 29$ 时,

$$3N(t) - 3/4 = 9t^2 + 18t - 78 - 3/4 = (3t + 5/2)^2 + 3t - 85 > (3t + 5/2)^2,$$

所以由引理 1 能导出下列矛盾:

$$3t+1=d(N(t))=D(N(t))>(3t+5/2)+1/2-2=3t+1.$$

若 $z=0$,则由引理3知,当 $A=6, B=-26, z=0, j=3$ 时,式(1)成立,即存在整数 a 和 b 使得

$$(a+b-3)^2-ab-26=0. \tag{2}$$

但可以直接验证关于 a 和 b 的不定方程(2)没有整数解.

因此,对任何 $t\geqslant 29$ 和 $s(t)$, $G(N(t);s(t))$ 都不是紧优的. 这证明了 $\{N(t): t\in\mathbb{Z}, t\geqslant 29\}$ 是一个不含紧优双环网络的无限族.

注 定理1中 t 的下界是不能修改的. 因为当 $t=28$ 时, $3t^2+6t-26=3t^2+5t+2$. 而后者已被证明是含紧优双环网络的无限族(参见文献[7]).

定理2 设 $N(t)=3t^2+6t-26, t\in\mathbb{Z}, t\geqslant 31, L(t)=L(N(t);l(t),h(t),x(t),y(t))$ 是一个面积为 $N(t)$ 的几乎紧瓦,则 $|y(t)-x(t)|\leqslant 1$.

证 设 $L(t)=L(N(t);l(t),h(t),x(t),y(t))$ 是一个面积为 $N(t)$ 的几乎紧瓦,则由引理2知, $3t+2=lb(N(t))+1=D(L(t))$. 令 $z=z(t)=|x(t)-y(t)|$. 我们要证明 $z\leqslant 1$. 若不然,设 $z\geqslant 2$,将导出矛盾.

若 $z\geqslant 3$,则因为当 $t\geqslant 31$ 时,

$$3N(t)-\frac{27}{4}=9t^2+18t-78-\frac{27}{4}=\left(3t+\frac{5}{2}\right)^2+3t-91>\left(3t+\frac{5}{2}\right)^2,$$

所以由引理1能导出下列矛盾:

$$3t+2=D(N(t))>\left(3t+\frac{5}{2}\right)+\frac{3}{2}-2=3t+2.$$

若 $z=2$,则由引理3知,当 $A=6, B=-26, z=2, j=4$ 时式(1)成立,即存在整数 a 和 b 使得

$$(a+b-4)(a+b-2)-ab-26=0. \tag{3}$$

设 (a_0,b_0) 是其中任何一对整数解,则 a_0 和 b_0 均为偶数. 设 $a_0=2m, b_0=2n$ 并代入式(3)得

$$2[(m+n-2)(m+n-1)-mn]=13,$$

这是不可能的,因为13是素数. 所以关于 a 和 b 的不定方程(3)没有整数解. 矛盾.

定理3 设 $N(t)=3t^2+6t-26, t=t(f)=8f+31, f\in\mathbb{Z}$,且 $L(t)=L(N(t);l(t),h(t),x(t),y(t))$ 是一个面积为 $N(t)$ 的几乎紧瓦,则 $|y(t)-x(t)|=1$.

证 因为当 $f\in\mathbb{Z}$ 时, $t=8f+31\geqslant 31$,所以由定理2知,对任何 $f\in\mathbb{Z}$ 和面积为 $N(t)$ 的几乎紧瓦 $L(t)=L(N(t);l(t),h(t),x(t),y(t))$ 均有 $|y(t)-x(t)|\leqslant 1$. 要证明 $|y(t)-x(t)|=1$. 若不然,设 $z=z(t)=y(t)-x(t)=0$, 并将 $A=6, B=-26, z=0, j=4, t=8f+31$ 代入式(1)得

$$(a+b-4)^2-ab-16f-88=0. \tag{4}$$

由引理3知，关于 a 和 b 的不定方程(4)应有整数解．设(a_0, b_0)是其中任何一对整数解，则 a_0 和 b_0 均为偶数．设 $a_0 = 2m, b_0 = 2n$ 并代入式(4)得

$$(m+n-2)^2 - mn - 4f = 22. \tag{5}$$

不难看出满足式(5)的 m 和 n 均为偶数．设 $m = 2u, n = 2v$ 并代入式(5)得

$$2[(u+v-1)^2 - uv - f] = 11,$$

这是不可能的，因为11是素数．所以关于 a 和 b 的不定方程(4)没有整数解．矛盾．

定理4 设 $N(t) = 3t^2 + 6t - 26, t = t(e) = 16e + 31, e \in \mathbb{Z}$．则$\{N(t(e)): e \in \mathbb{Z}\}$是一个既不含紧优又不含几乎紧优双环网络的无限族．

证 因为当 $e \in \mathbb{Z}$ 时，$t = 16e + 31 \geqslant 31$，所以由定理1知$\{N(t): t \in \mathbb{Z}, t \geqslant 31\}$是一个不含紧优双环网络的无限族．只需证明$\{N(t(e)): e \in \mathbb{Z}\}$不含几乎紧优双环网络．假定存在某个 $e \in \mathbb{Z}$和一个几乎紧优双环网络 $G(N(t(e)); s(t(e)))$，那么必存在一个面积为 $N(t(e))$的几乎紧瓦 $L(t(e)) = L(N(t(e)); l(t(e)), h(t(e)), x(t(e)), y(t(e)))$．由于 $t = 16e + 31 = 8(2e) + 31, e \in \mathbb{Z}$，所以在定理3中令 $f = 2e$ 便知 $z = |y(t(e)) - x(t(e))| = 1$.

将 $A = 6, B = -26, z = 1, j = 4, t = 16e + 31$ 代入式(1)得

$$(a+b-4)(a+b-3) - ab - 16e - 57 = 0. \tag{6}$$

由引理3知，关于 a 和 b 的不定方程(6)应有整数解．设(a_0, b_0)是其中任何一对整数解．则 a_0 和 b_0 均为奇数．设 $a_0 = 2m + 1, b_0 = 2n + 1$ 并代入式(6)得

$$(m+n)(m+n-2) - mn - 4e = 14. \tag{7}$$

不难看出满足式(7)的 m 和 n 均为偶数．设 $m = 2u, n = 2v$ 并代入式(7)得

$$2[(u+v)(u+v-1) - uv - e] = 7.$$

这是不可能的，因为7是素数．所以关于 a 和 b 的不定方程(6)没有整数解，矛盾．

因此，对任何 $e \in \mathbb{Z}$，无论怎样选取 $s(t(e))$，双环网络 $G(N(t(e)); s(t(e)))$都不是几乎紧优的．因而$\{N(t(e)): e \in \mathbb{Z}\}$是一个既不含紧优又不含几乎紧优双环网络的无限族．定理4得证．

定理5 设 $N(t) = 3t^2 + 6t - 26, t = t(e) = 64e + 87, e \in \mathbb{Z}$．则$\{N(t(e)): e \in \mathbb{Z}\}$是一个既不含紧优又不含几乎紧优双环网络的无限族．

证 因为当 $e \in \mathbb{Z}$ 时，$t = 64e + 87 \geqslant 87$，所以由定理1知$\{N(t): t \in \mathbb{Z}, t \geqslant 87\}$是一个不含紧优双环网络的无限族．只需证明$\{N(t(e)): e \in \mathbb{Z}\}$不含几乎紧优双环网络．假定存在某个 $e \in \mathbb{Z}$和一个几乎紧优双环网络 $G(N(t(e)); s(t(e)))$，那么必存在一个面积为 $N(t(e))$的几乎紧瓦 $L(t(e)) = L(N(t(e)); l(t(e)), h(t(e)), x(t(e)), y(t(e)))$．由于 $t = 64e + 87 = 8(8e + 7) + 31, e \in \mathbb{Z}$，所以在定理3中令 $f = 8e + 7$ 便知 $z = |y(t(e)) - x(t(e))| = 1$.

将 $A = 6, B = -26, z = 1, j = 4, t = 64e + 87$ 代入式(1)得

$$(a+b-4)(a+b-3) - ab - 64e - 113 = 0. \tag{8}$$

由引理3知，关于 a 和 b 的不定方程(8)应有整数解．设(a_0, b_0)是其中任何一对整数解．则 a_0 和 b_0 均为奇数．设 $a_0 = 2m + 1, b_0 = 2n + 1$ 并代入式(8)得

$$(m+n)(m+n-2)-mn-16e=28. \tag{9}$$

不难看出满足式(9)的 m 和 n 均为偶数. 设 $m=2u, n=2v$ 并代入式(9)得

$$(u+v)(u+v-1)-uv-4e=7. \tag{10}$$

易知满足式(10)的 u 和 v 均为奇数. 设 $u=2p+1, v=2q+1$ 并代入式(10)得

$$2[(p+q)(p+q+1)-pq-e]=3,$$

这是不可能的. 所以关于 a 和 b 的不定方程(8)没有整数解,矛盾.

因此,对任何 $e\in\mathbb{Z}$,无论怎样选取 $s(t(e))$,双环网络 $G(N(t(e));s(t(e)))$都不是几乎紧优的,因而$\{N(t(e));e\in\mathbb{Z}\}$是一个既不含紧优又不含几乎紧优双环网络的无限族. 定理5得证.

3 结束语

本文找到两个既不含紧优又不含几乎紧优双环网络的无限族$\{768e^2+3\,072e+3\,043:e\in\mathbb{Z}\}$(即定理4)和$\{12288e^2+33792e+23203:e\in\mathbb{Z}\}$(即定理5). 这2个关于 N 的无限族是不相交的. 若不然,设 n 是它们之交中的元素,则存在 $f\in\mathbb{Z}$ 和 $e\in\mathbb{Z}$ 使得 $16f+31=n=64e+87$. 由此可得 $2(f-4e)=7$,这是不可能的,因为7是素数. 但目前还不知道这2个无限族是否是2紧优的.

在文献[2,4]中都报道了 Cheng 用计算机搜索出当 $N\leqslant 75000$ 时,有3个 N 是4紧优的,其中之一是 $N=69283$,一个4紧优双环网络是 $G(69283;1764)$. 一个自然的问题是:是否存在一个包含 $G(69283;1764)$的4紧优双环网络无限族? 令 $N(t)=3t^2+6t-26$,即本文已考察过的无限族,则 $N(151)=69283$. 而在本文的第二个无限族中,当 $e=1$ 时,有 $t=151$. 因此,如果存在一个包含 $G(69283;1764)$的4紧优双环网络无限族,它很有可能被包含在无限族$\{3t^2+6t-26:t\in\mathbb{Z}, t\geqslant 151\}$中,或者更精确地讲,它被包含在本文的第二个无限族中. 这是一个非常值得研究、并且具有挑战性的问题.

致谢 本工作为国家自然科学基金(批准号:19671057)国家教委博士点基金和中国科学院基金资助项目.

参 考 文 献

1 Wong G K, Coppersmith D. A combinatorial problem related to multimodule memory organization. J Assoc for Comput Mach, 1974, 21: 392~401

2 Erdos P, Hsu D F. Distributed loop networks with minimum transmission delay. Theoretical Computer Sci, 1992, 100: 223~241

3 Esque P, Aguilo F, Fiol M A. Double commutative-step digraphs with minimum diameters. Discrete Math, 1993, 114: 147~157

4 Hwang F K. A survey of double loop networks. In: Roberts F, Hwang F, Monma C, eds. Reliability of Computer and Communication Networks. DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science 5. Providence, RI: American Mathematical Society, 1991, 143~152

5 Hwang F K, Xu Y H. Double loop networks with minimum delay. Discrete Math, 1987, 66: 109~118

6 Foil M A, Yebra J L, Alegre I, et al. A discrete optimization problem in local networks and data alignment. TEEE Trans Comput, 1987, 36: 702~713

7 李 乔,徐俊明,张忠良. 最优双环网络的无限族. 中国科学,A辑,1993, 23(9): 979~992

8 沈 建,李 乔. 关于双环网络的两个定理(英文). 中国科学技术大学学报,1993, 25(2): 127~132

(1998-08-28 收稿)