数 学 年 刊
21A: 5(2000),605-608.

点可迁图的限制边连通度**

徐俊明*

提 要

设 S 是连通图 G 的边子集. 如果 $G-S$ 不连通而且不含孤立点, 那么称 S 是 G 的一个限制边割. G 中所有限制边割中最小边数称为 G 的限制边连通度, 记为 $\lambda'(G)$. 限制边连通度是对传统边连通度的推广, 而且是计算机互连网络容错性的一个重要度量. 点可迁图是一类重要的网络模型. 本文证明了如下结论:

设 G 是连通的点可迁图. 如果 G 的点数 $n\geq 4$, 而且点度 $k\geq 2$, 那么或者 $\lambda'(G)=2k-2$, 或者 n 是偶数, G 含三角形且存在整数 $m\geq 2$, 使得 $k\leq\lambda'(G)=n/m\leq 2k-3$.

关键词 连通度, 限制边连通度, 点可迁图, 互连网络, 容错性
MR (1991) 主题分类 05C40
中图法分类 O157.5 **文献标识码** A
文章编号 1000-8314(2000)05-0605-04

§1. 引 言

在本文中, 图 $G=(V,E)$ 是指一个顶点集为 $V=V(G)$, 边集为 $E=E(G)$ 的无环无平行边的简单连通图. 此文用到而未定义的术语和记号可参见文 [1].

设 $S\in E$, 若 $G-S$ 不连通且不含孤立点, 则称 S 为 G 的限制边割. G 的限制边连通度, 记为 $\lambda'(G)$, 定义为 G 的所有限制边割中的最小边数. 限制边连通度是经典边连通度概念的推广, 而且为网络容错性提供一个更精确的度量. 它是由 Esfahanian 和 Hakimi[3] 首先提出来的, 并且引起人们极大的研究兴趣 (见 [2-8,11]). 用 $\lambda(G)$ 表示 G 的边连通度, $\zeta(G)$ 表示 G 中相邻两顶点度和的最小值. 可知, 如果 G 的阶数至少是 4 且不为完全二部分图 $K_{1,n}$, 则

$$\lambda(G)\leq\lambda'(G)\leq\zeta(G). \tag{1.1}$$

设 $\Gamma(G)$ 是 G 的自同构群, x 和 y 是 G 中任意两顶点. 若存在 $\pi\in\Gamma(G)$, 使得 $\pi(x)=y$, 则称 G 是点可迁的. 可知, 点可迁图 G 是 k 正则的, 而且 $\lambda(G)=k$ (见 [10]). 因此, 若点可迁图 G 的阶 $n\geq 4$, $k\geq 2$, 则由 (1.1), 有

$$k\leq\lambda'(G)\leq 2k-2. \tag{1.2}$$

最近, 李乔良和李乔 [5,6,7] 已确定了两类特殊的点可迁图, 即循环图和 Abelian Cayley 图的限制边连通度是 $2k-2$ 或 $n/2$. 本文考虑一般的点可迁图, 并证明下列定理:

定理 设 G 是 $n(\geq 4)$ 阶, 顶点度 $k(\geq 2)$ 的点可迁图, 则或者 $\lambda'(G)=2k-2$, 或者 n 是偶数, G 含三角形, 且存在整数 $m(\geq 2)$, 使得 $k\leq\lambda'(G)=n/m\leq 2k-3$.

本文 1999 年 1 月 11 日收到, 2000 年 4 月 6 日收到修改稿.

*中国科学技术大学数学系, 合肥 230026.

**国家自然科学基金 (No.19971086) 和中国科学院基金 (No.SLT9741) 资助的项目.

为了证明该定理，需要一些记号．设 X 和 Y 是 $V(G)$ 的两个不交的非空子集．令 $(X,Y)=\{e\in E(G)$: 存在 $x\in X$, $y\in Y$, 使得 $e=xy\in E(G)\}$. 如果 $Y=\overline{X}=V\backslash X$, 那么将 $(X,\overline{X})$ 简记为 $E(X)$, 将 $|E(X)|$ 简记为 $d(X)$, $\{x\}$ 简记为 x. 容易证明下面的不等式 (见 [9, 问题 6.48]):

$$d(X\cap Y)+d(X\cup Y)\le d(X)+d(Y). \tag{1.3}$$

设 S 是 G 的限制边割．若 $|S|=\lambda'(G)>0$, 则称 S 是 G 的 λ' 割．如果 $E(X)$ 是 G 的 λ' 割，则 X 是 G 的 λ' 分片．显然，若 X 是 G 的 λ' 分片，则 $\overline{X}$ 也是 G 的 λ' 分片，而且 $G[X]$ 和 $G[\overline{X}]$ 都是连通的．具有最小顶点数的 λ' 分片称为 G 的 λ' 原子．

§2. 定理的证明

令 G 是点可迁连通图，阶数 $n\ge 4$, 顶点度 $k\ge 2$. 为证明定理，由 (1.2), 仅需要考虑 $\lambda'(G)<2k-2$ 的情形．因为当 $k=2$ 时， G 是圈，所以 $k\ge 3$. 令 X 是 G 一个 λ' 原子．则 $E(X)$ 是 G 的 λ' 割， $G[X]$ 是连通的，且 $0<d(X)=\lambda'(G)$, $|X|\ge 2$. 若 $|X|=2$, 则 $2k-2=d(X)=\lambda'(G)<2k-2$. 这个矛盾意味着 $|X|\ge 3$. 令 x 和 y 是 X 中任意两个顶点．因为 G 是点可迁的，所以存在 $\pi\in\Gamma(G)$, 使得 $\pi(x)=y$. 令 $\pi(X)=\{y\in V(G):y=\pi(x),x\in X\}$. 则因为 π 是 $G[X]$ 和 $G[\pi(X)]$ 之间的同构，所以 $G[X]\cong G[\pi(X)]$. 于是 $\pi(X)$ 也是 G 的一个 λ' 原子．令 $X'=\pi(X)$. 则 $E(X)$ 和 $E(X')$ 都是 G 的 λ' 割．因为 $y\in X\cap X'$, 所以 $X\cap X'\ne\emptyset$. 因此

$$3\le |X|=|X'|\le \frac{n}{2},\quad 0<d(X)=d(X')=\lambda'(G)<2k-2. \tag{2.1}$$

引理 2.1 $X'=X$.

证 假定 $X'\ne X$, 我们要导出矛盾．为此令 $A=X\cap X'$, $B=X\cap\overline{X'}$, $C=\overline{X}\cap X'$, $D=\overline{X}\cap\overline{X'}$. 因为 X 和 X' 是 G 中两个不同的 λ' 原子，所以 $|D|\ge|A|\ge 1$ 且 $|B|=|C|\ge 1$. 为导出矛盾，分别考虑两种情形．

情形 1 $G-E(A)$ 包含孤立点．

设 u 是 $G-E(A)$ 的孤立点．显然有 $E(u)\subseteq E(A)=(A,\overline{X})\cup(A,\overline{X'})$. 如果 $u\in\overline{X}$, 则 $E(u)\subseteq(A,\overline{X})\subseteq E(X)$. 于是 u 是 $G-E(X)$ 中一个孤立点，矛盾．如果 $u\in\overline{X'}$, 则 $E(u)\subseteq(A,\overline{X'})\subseteq E(X')$. 于是， u 是 $G-E(X')$ 中的孤立点，矛盾．因此 $u\in A$. 首先假定

$$|(u,B)|\le|(u,C)|. \tag{2.2}$$

令 $Y=X\backslash u$, 并设 $G-E(Y)$ 不含孤立点．因为 $Y\subset X$ 且 X 是 G 的 λ' 原子，所以从 (2.2) 得出 $d(X)<d(Y)=d(X)-|(u,\overline{X})|+|(u,B)|\le d(X)-|(u,C)|+|(u,B)|\le d(X)$ 矛盾．因此， $G-E(Y)$ 含有孤立点．令 Z 是 $G-E(Y)$ 中孤立点集，则 $E(Z)\subseteq E(Y)$. 因为 $G-E(X)$ 中不含孤立点，所以对任何 $z\in Z$, $E(z)$ 不在 $E(X)$ 中．因此 Z 必含在 $N_G(u)\cup\{u\}$ 中．显然， $Z\cap\overline{X}=\emptyset$ 且 $Z\cap(A\backslash\{u\})=\emptyset$. 如果 $u\in Z$, 则 $E(u)\subseteq(A,B)\subseteq E(X')$. 于是， u 是 $G-E(X')$ 中孤立点，矛盾．因此 $Z\subseteq N_G(u)\cap B$, 并且 $E(Z)\subseteq E(B)$.

如果 $(N_G(u)\cap B)\backslash Z\ne\emptyset$, 则令 $W=Y\backslash Z$. 于是 $\emptyset\ne W\subset X$, $G-E(W)$ 不含孤立点．因为 X 是 G 的 λ' 原子，所以由 (2.2) 得如下矛盾

$$\begin{aligned} d(X)<d(W)&=d(X)-|(u,\overline{X})|-|(Z,\overline{X})|+(|(u,B)|-|Z|)\\ &\le d(X)-|(u,C)|-|(Z,\overline{X})|+|(u,B)|-|Z|\le d(X). \end{aligned}$$

如果 $(N_G(u)\cap B)\backslash Z=\emptyset$, 则 $|(u,B)|=|Z|$, $(Z,\overline{X})\subseteq E(X)\backslash(u,\overline{X})$. 导出如下矛盾

$$\begin{aligned}2k-2>\lambda'(G)=d(X)&=|E(X)|\geq|(u,\overline{X})|+|(Z,\overline{X})|\\&=d_G(u)-|Z|+|(Z,\overline{X})=k-|Z|+|Z|(k-1)\\&=k+|Z|(k-2)\geq k+(k-2)=2k-2.\end{aligned}$$

综上所述, 在 (2.2) 的假定下, 无论那种情形出现, 我们都能导出矛盾. 同样地, 在 $|(u,B)|\geq|(u,C)|$ 的假定下, 只需在上述的讨论中将 X 换成 X', 将 B 换成 C 就能导出矛盾.

情形 2 $G-E(A)$ 不含孤立点.

此时, $E(A)$ 是 G 的 λ' 割. 这意味着

$$|A|\geq 2,\quad d(A)>\lambda'(G). \tag{2.3}$$

由 $|D|\geq|A|$, (1.3), (2.1) 和 (2.3), 有

$$d(D)=d(X\cup X')\leq d(X)+d(X')-d(A)<\lambda'(G). \tag{2.4}$$

这意味着 $G-E(D)$ 必含孤立点. 令 U 是 $G-E(D)$ 孤立点集, 则易知 $U\subseteq D$. 令 $D'=D\backslash U$. 如果 $D'\neq\emptyset$, 则因为 $G-E(D')$ 中无孤立点, 所以 $E(D')$ 是 G 的限制边割. 由 (2.4), 导出如下矛盾

$$\lambda'(G)\leq d(D')=d(D)-\sum_{u\in U}d_G(u)=d(D)-k|U|<d(D)<\lambda'(G).$$

因此 $D=U$. 注意到 $|D|\geq 2$ 和 (2.4), 导出 $2k-2>\lambda'(G)>d(D)=|D|k\geq 2k$ 矛盾. 引理 2.1 得证.

引理 2.2 $|X|\geq k$.

证 考虑 $G[X]$ 中顶点度之和. 由 (2.1), 得到下列不等式

$$\begin{aligned}|X|(|X|-1)\geq\sum_{x\in X}d_{G[X]}(x)&=k|X|-d(X)>k|X|-(2k-2)\\&=|X|(|X|-1)-(|X|-k+1)(|X|-2).\end{aligned}$$

这意味着 $|X|\geq k$ (因为由 (2.1) 有 $|X|\geq 3$).

引理 2.3 $G[X]$ 是点可迁的且含三角形, 顶点度为 $k-1$ 且 $d(X)=|X|$.

证 令 $\Pi=\{\pi\in\Gamma(G):\pi(X)=X\}$, $\Psi=\{\pi\in\Pi:x\in X\Rightarrow\pi(x)=x\}$. 由引理 2.1 易知, Π 是 $\Gamma(G)$ 的子群, Π 的元素作用在 X 上是可迁的, 而且 Ψ 是 Π 的正规子群. 因此从商群 Π/Ψ 到 $\Gamma(G[X])$ 存在一个单同态. 这证明了 $G[X]$ 是点可迁的.

令 $G[X]$ 的顶点度为 t, 则 $t\leq k-1$. 另一方面, 由引理 2.2,

$$2(k-1)>d(X)=(k-t)|X|\geq(k-t)k>(k-t)k-(k-t)=(k-1)(k-t).$$

上式意味着 $t\geq k-1$. 因此 $t=k-1$, $d(X)=k|X|-(k-1)|X|=|X|$. 因为 $k\geq 3$ 且 $G[X]$ 是 $k-1$ 正则的, 所以 $G[X]$ 含有圈. 若 $G[X]$ 中的圈长都大于 3, 则由文 [1] 中习题 1.7.4(a) 知, $|X|\geq 2k-2$. 于是, 得到 $2k-2\leq|X|=\lambda'(G)\leq 2k-3$ 矛盾. 因此, $G[X]$ 必含三角形.

引理 2.4 $V(G)$ 存在一个划分 $\{X_1,X_2,\cdots,X_m\}$, 使得对每个 $i=1,2,\cdots,m$ 均有 $G[X_i]\cong G[X]$.

证 任取 $y\in\overline{X}$. 因为 G 是点可迁的, 所以对 X 中一个固定的 x, 存在 $\sigma\in\Gamma$ 使得 $\sigma(x)=y$, 并且 $\sigma(X)$ 是 G 的一个 λ' 原子. 令 $X_y=\sigma(X)$. 则因为 $y\notin X$, 所以由引理 2.1

知 $X\cap X_y=\emptyset$. 又因为 σ 是 $G[X]$ 与 $G[X_y]$ 之间的同构，所以 $G[X]\cong G[X_y]$. 这说明 G 中至少有两个 λ' 原子. 因此，对 G 中每个顶点 y, 存在一个包含 y 的 λ' 原子，使得 $G[X_y]\cong G[X]$, 而且对 G 中任何两个不同的顶点 y 和 z, 或者 $X_y=X_z$ 或者 $X_y\cap X_z=\emptyset$. 这些 $X_1,X_2,\cdots,X_m, m\geq 2$ 形成 $V(G)$ 的一个划分，而且对每个 $i=1,2,\cdots,m$, 均有 $G[X_i]\cong G[X]$.

引理 2.5 n 是偶数.

证 用 $\epsilon(G)$ 和 $\epsilon(G[X])$ 分别表示 G 和 $G[X]$ 的边数. 由引理 2.3 和引理 2.4, 立刻有

$$n=nk-n(k-1)=nk-m|X|(k-1)=2\epsilon(G)-2m\epsilon(G[X]).$$

这意味着 n 是偶数.

继续定理的证明 由上面的引理知，如果 $\lambda'(G)<2k-2$, 那么 n 是偶数，$G[X]$ 含三角形，而且存在一个整数 $m(\geq 2)$, 使得 $k\leq\lambda'(G)=d(X)=|X|=n/m\leq 2k-3$. 定理证毕.

致谢 感谢李乔教授对本文提出的修改建议.

参 考 文 献

[1] Bondy, J. A. & Murty, U. S. R., Graph theory with applications [M], Macmillan Press, London, 1976.

[2] Esfahanian, A. H., Generalized measures of fault tolerance with application to N-cube networks [J], *IEEE Trans. Comput.*, **38**(1989), 1586–1591.

[3] Esfahanian, A. H. & Hakimi, S. L., On computing a conditional edge-connectivity of a graph [J], *Information Processing Letters*, **27**(1988), 195–199.

[4] Latifi, S., Combinatorial analysis of the fault-diameter of the n-cube [J], *IEEE Trans. Comput.*, **42**(1993), 27–33.

[5] 李乔良, 网络容错性和可靠性的图论研究博士论文 [D], 中国科学技术大学, 1997.

[6] Li, Q. L. & Li, Q., Reliability analysis of circulants [J], *Networks*, **31**(1998), 61–65.

[7] Li, Q. L. & Li, Q., Refine edge connectivity properties of Abelian Cayley graphs [J], *Chin. Ann. of Math.*, **19B**:4(1998), 409–414.

[8] Li, Q. & Zhang, Y., Restricted connectivity and restricted fault diameter of some interconnection networks [J], *DIMACS*, **21**(1995), 267–273.

[9] Lovasz, L., Combinatorial problems and exercises [M], Northholland Publishing Company, Amsterdam · New York · Oxford, 1979.

[10] Watkins, A. E., Connectivity of transitive graphs [J], *J. Combin. Theory*, **8**(1970), 23–29.

[11] Wu, J. & Guo, G., Fault tolerance measures for m-ary n-dismensional hypercubes based on forbidden faulty sets [J], *IEEE Trans. Comput.*, **47**(1998), 888–893.