高校应用数学学报A 辑　　　　Appl. Math. J. Chinese Univ. Ser. A
2000, 15(2): 147～151

2 紧优双环网络无限族

徐俊明

(中国科学技术大学数学系, 合肥 230026)

摘　要　找到两个 2 紧优双环网络的无限族 这肯定地回答了李乔等人于 1993 年提出的一个问题

关键词　双环网络; 循环有向图; 直径; 最优; 紧优

分类号　(中图) O157.9, TP302;　(1991MR) 05C40, 68M10

文献标识码 A　　**文章编号** 1000-4424(2000)02-0147-05

双环网络是计算机互连网络或通讯系统的一类重要拓扑结构, 其图论模型是指这样一个有向图 $G(N; s)$: 它的每个顶点记为 $0, 1, 2, \cdots, N-1$, 并从每个顶点 i 发出两条有向边 $i \to i+1 \pmod N$ 和 $i \to i+s \pmod N$, 其中 s 是自然数, 而且 $1 < s < N$. 从定义立即可知, 对于给定的 N, s 惟一决定了 $G(N; s)$ 的结构, 因而也决定了它的直径 记 $G(N; s)$ 的直径为 $d(N; s)$, 并记 $d(N) = \min\{d(N; s): 1 < s < N\}$. [1]证明了: $d(N) \geq lb(N) = \lceil \sqrt{3N} \rceil - 2$ 一个被广泛关注的问题是[1～9]: 对于给定的 N, 确定 $d(N)$, 并找出 s 使得 $d(N; s) = d(N)$.

设 Z 是非负整数集合. 对于 $k \in Z$, $G(N; s)$ 称为 k 紧优的, 若 $d(N; s) = d(N) = lb(N) + k$. 0 紧优和 1 紧优通常称为紧优和几乎紧优 设 $N(t)$ 是一个定义在 Z 上的正整数值函数 $\{N(t): t \in Z, t \geq t_0\}$ 称为含 k 紧优双环网络的无限族, 如果对任何 $t \geq t_0$, 都存在 $s(t)$ 使得 $G(N(t); s(t))$ 为 k 紧优的 $\{N(t): t \in Z, t \geq t_0\}$ 称为不含 k 紧优双环网络的无限族, 如果对任何 $t \geq t_0$ 和 $s(t)$ 都有 $d(N(t); s(t)) > lb(N(t)) + k$.

在文献[7]中, 李乔等人提出一个系统的构造方法, 找出一系列含紧优和几乎紧优双环网络的无限族 同时提出研究下列问题: 对于给定的 $k > 1$, 找出 k 紧优双环网络无限族 最近作者找到两个不含紧优和几乎紧优双环网络的无限族[9]. 在此结果的基础上, 本文找到两个 2 紧优双环网络的无限族

§1　记号和引理

因为 $G(N; s)$ 是点可迁的强连通有向图[10], 所以要研究其直径只需考察从顶点 0 到其

收稿: 1999-02-25.

国家自然科学基金(19971086), 博士点基金和中国科学院基金资助

它顶点的距离 为此, 在笛卡尔平面直角坐标系中, 令 X 轴的单位为 1(或 s), Y 轴的单位为 s (或 1). 把第一象限中的所有格点 (x, y) 按下列顺序排成序列: $(0, 0), (1, 0), (0, 1), (2, 0), (1, 1), (0, 2), \cdots, (j, 0), (j-1, 1), \cdots, (j-i, i), \cdots, (1, j-1), (0, j), \cdots$. 并且依次在每一格点 (x, y) 的右上角的单位方格内安置一个数 $n \in \{0, 1, 2, \cdots, N-1\}$, 其中 $n \equiv x + ys \pmod{N}$. 如果在此之前数 n 已出现过, 则空出此方格, 考察下一个格点, 直到所有的数 $0, 1, 2, \cdots, N-1$ 都出现时为止 已经证明[1, 6]: 由 $G(N; s)$ 所确定的 N 个方格组成的构图呈图 1 所示的面积为 N 个单位的 L 形域, 记为 $L(N; s)$.

如图 1 所示, 由 l, h, x, y 确定的面积为 N 的 L 形区域称为 L 形瓦, 记为 $L(N; l, h, x, y)$, 其中 l, h, x, y 都是整数, 并且规定 $l, h \geq 2, 0 \leq x < l, 1 \leq y < h, y < l, x \leq h$. 令

$$D(L(N; l, h, x, y)) = \max\{h + l' - 2, l + h' - 2\},$$

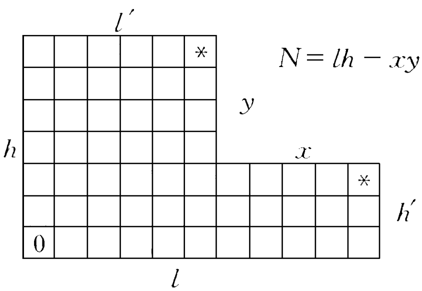

图 1

并且称为 $L(N; l, h, x, y)$ 的直径 记在面积为 N 的所有 L 形瓦中直径的最小值为 $D(N)$. 记由 $G(N; s)$ 确定的 L 形瓦的直径为 $D(N; s)$. $L = L(N; l, h, x, y)$ 称为 k 紧瓦, 如果 $D(L) = lb(N) + k$.

根据上述记号和定义可知, 对任何 $G(N; s)$, 均有 $d(N; s) = D(N; s)$, 并且 $d(N) \geq D(N)$. 若 $G(N; s)$ 为 k 紧优的, 则它所对应的 L 形瓦一定是 k 紧瓦 反之不真

L 形瓦 $L(N; l, h, x, y)$ 称为可实现的, 如果存在一个 $G(N; s)$ 使得 $L(N; s) = L(N; l, h, x, y)$.

引理 1[7]　L 形瓦 $L(N; l, h, x, y)$ 可实现的充分必要条件是 $g.c.d.(y, h') = 1$, 且此条件成立时, $L(N; l, h, x, y)$ 可被惟一的 $G(N; s)$ 实现, 其中 $s \equiv \alpha l - \beta l' \pmod{N}$, α 和 β 是满足 $\alpha y + \beta h' = 1$ 的某两个整数

引理 2[7]　对任何正整数 N, 必存在 $t \in Z$ 使得 $N = N(t) \in I_1(t) \cup I_2(t) \cup I_3(t)$, 其中: $I_1(t) = [3t^2 + 1, 3t^2 + 2t]$, $I_2(t) = [3t^2 + 2t + 1, 3t^2 + 4t + 1]$, $I_3(t) = [3t^2 + 4t + 2, 3(t+1)^2]$ 是三个正整数区间, 并且对每个 $i = 1, 2, 3$, $N(t) \in I_i(t)$ 当且仅当 $lb(N(t)) = 3t - 2 + i$.

引理 3　设 $L = L(N; l, h, x, y)$ 是一个如图 1 中所示的 L 形瓦, 其中 $N = 3t^2 + At + B \in I_i(t)$, $l = 2t + a(t)$, $h = 2t + b(t)$, $z = |y - x|$. 则 L 是 k 紧瓦当且仅当对任何 t, 等式

$$(a + b - j)(a + b - j + z) - ab + (A + z - 2j)t + B = 0 \tag{1}$$

对任何 $j = i + k, 1 \leq i \leq 3, k = 0, 1, 2, \cdots$ 成立

证　不妨设 $y \geq x$. 那么 L 是 k 紧瓦(见图 1) $\Leftrightarrow D(L) = h + l' - 2 = 3t + i + k - 2, 1 \leq i \leq 3 \Leftrightarrow l' = t + j - a, x = t + a + b - j, y = t + a + b - j + z \Leftrightarrow$ (注意到 $N = hl - xy$) (1) 式对任何 $j = i + k, 1 \leq i \leq 3, k = 0, 1, 2, \cdots$ 成立

引理 4[9]　设 $N(t) = 3t^2 + 6t - 26$, 则 $\forall f \in Z$, 当 $t = t(f) = 16f + 31$ 时, 或者当 $t = t(f) = 64f + 87$ 时, $\{N(t(f)): f \in Z\}$ 是一个既不含紧优又不含几乎紧优双环网络的无限族

§2 方法和实例

寻找 k 紧优双环网络无限族的方法, 分两步进行.

1. 对于给定的 $k\geq 1$ 和任何 $h\,(0\leq h\leq k-1)$, 寻找不含 h 紧优双环网络的无限族.

2. 利用引理 3 中的充分必要条件, 在已知的不含 $h\,(0\leq h\leq k-1)$ 紧优双环网络的无限族中寻找 k 紧优双环网络无限子族. 若此步不能进行, 则转入第 1 步, 重新寻找不含 $h\,(0\leq h\leq k-1)$ 紧优双环网络的无限族.

注意, 若这两步都不能进行, 则说明对于这个给定的 k, 不存在 k 紧优双环网络无限族. 这里涉及到一个有待于研究的理论问题: 对于给定的 k, 是否一定存在 k 紧优双环网络无限族?

下面, 我们以具体实例来说明这个方法当 $k=2$ 时的实施过程. 第 1 步的具体实施已在文献[9]中作了介绍, 本文介绍第 2 步的具体实施. 考察

$$N(t)=3t^2+6t-26,\ t=t(f)=16f+31,\ \forall f\in Z,$$

那么由引理 2 知, $N(t(f))\in I_3(t(f))$. 由引理 4 知, $\{N(t(f)): f\in Z\}$ 是一个既不含紧优又不含几乎紧优双环网络的无限族. 由于 $lb(N(t))=3t+1$, 所以引理 3 中的 $i=3$. 如果这个无限族包含一个 2 紧优双环网络, 那么 (1) 式中的 $j=5$. 将 $A=6, B=-26, j=5, t=16f+31$ 代入 (1) 式, 得

$$(a+b-5)(a+b-5+z)-ab+(z-4)(16f+31)-26=0. \tag{2}$$

由引理 3 知, 无限族 $\{N(t(f)): f\in Z\}$ 包含一个 2 紧优双环网络无限子族当且仅当存在 $f=f(e), e\in Z$ 使得关于未知量 a 和 b 的不定方程

$$(a+b-5)(a+b-5+z)-ab+(z-4)(16f(e)+31)-26=0 \tag{3}$$

对任何 $e\in Z$ 有整数解. 为此, 试取 $a=8, z=2$, 并代入 (3) 式化简得

$$b^2-32f-73=0. \tag{4}$$

于是, 在 (4) 式中, 可令

$$f=f(e)=8e^2+19e+9,\ \forall e\in Z,$$

则对任何 $e\in Z$, 可得 (4) 式中一个解

$$b=b(e)=16e+19,\ \forall e\in Z.$$

因此, 对任何 $e\in Z$, 可得一个 2 紧优 L 形瓦 $L=L(N(t(f(e))); l(e), h(e), x(e), y(e))$, 其中:

$$\begin{aligned}
t&=t(f(e))=128e^2+304e+175,\\
N(t(f(e)))&=49152e^4+233472e^3+412416e^2+321024e+92899,\\
h(e)&=2t+a=256e^2+608e+358,\ l(e)=2t+b=256e^2+624e+369,\\
x(e)&=t+a+b-j=128e^2+320e+197,\\
y(e)&=x+2=128e^2+320e+199,\ h'(e)=h(e)-y(e)=128e^2+288e+159,\\
l'(e)&=t+j-a=128e^2+304e+172.
\end{aligned}$$

下面, 验证 $g.c.d.(y(e), h'(e))=1$ 对任何 $e\in Z$ 成立. 事实上, 若取

$$\alpha=\alpha(e)=4e+4,\ \beta=\beta(e)=-4e-5,\ \forall e\in Z.$$

则对任何 $e\in Z$, 均有 $\alpha y+\beta h\stackrel{\cdot}{=}1$. 所以, 由引理 1, 上面构造出来的 2 紧优 L 形瓦 L 是可实现的, 并且对任何 $e\in Z$, 有

$$s=s(e)=\alpha l-\beta l'(\bmod N(t(e)))=1536e^3+5376e^2+6180e+2336.$$

综合上面的论述, 我们证明了下列定理:

定理 1 设 Z 是非负整数集合. 若对 $\forall e\in Z$, 令 $N(e)=49152e^4+233472e^3+412416e^2+321024e+92899$, $s(e)=1536e^3+5376e^2+6180e+2336$. 则 $\{G(N(e);s(e)):e\in Z\}$ 是一个直径为 $384e^2+912e+528$ 的 2 紧优双环网络无限族, 它的初始元素为 $G(92899;2366)$.

如果我们考察

$$N(t)=3t^2+6t-26,\quad t=t(f)=64f+87,\quad \forall f\in Z,$$

那么由引理 4 知, $\{N(t(f)):f\in Z\}$ 是一个既不含紧优又不含几乎紧优双环网络的无限族. 在(1)式中, 令 $A=6, B=-26, j=5, z=2, t=64f+87$, 取 $a=8$, 化简得

$$b^2-128f-185=0. \tag{5}$$

不难验证, $\forall e\in Z$, 当 $f=f(e)=32e^2+21e+2$ 时, 方程(5)有一个解 $b=b(e)=64e+21$. 因此, 对任何 $e\in Z$, 得到一个 2 紧优 L 形瓦 $L=L(N(t(f(e)));l(e),h(e),x(e),y(e))$, 其中:

$$t=t(f(e))=2048e^2+1344e+215,$$

$$N(t(f(e)))=12582912e^4+16515072e^3+8073216e^2+1741824e+139939,$$

$$h(e)=2t+a=4096e^2+2688e+438,\ l(e)=2t+b=4096e^2+2752e+451,$$

$$x(e)=t+a+b-j=2048e^2+1408e+239,$$

$$y(e)=x+2=2048e^2+1408e+241,\ h'(e)=h-y=2048e^2+1280e+197,$$

$$l'(e)=t+j-a=2048e^2+1344e+212.$$

若 $\forall e\in Z$, 取

$$\alpha=\alpha(e)=1024e^2+656e+103,\quad \beta=\beta(e)=-1024e^2-720e-126,$$

则有 $\alpha y+\beta h\stackrel{\cdot}{=}1$, 即 $g.c.d.(y(e),h'(e))=1$ 对任何 $e\in Z$ 成立. 所以, 由引理 1, 上面构造出来的 2 紧优 L 形瓦 L 是可实现的, 并且对任何 $e\in Z$, 有

$$\begin{aligned}s=s(e)&=\alpha l-\beta l'(\bmod N(t(e)))=(1024e^2+656e+103)(4096e^2+2752e+451)+\\&(1024e^2+720e+126)(2048e^2+1344e+212)=\\&6291456e^4+8355840e^3+4131840e^2+901296e+73165.\end{aligned}$$

于是获得下列定理:

定理 2 设 Z 是非负整数集合. 若对任何 $e\in Z$, 令 $N(e)=12582912e^4+16515072e^3+8073216e^2+1741824e+139939$, $s(e)=6291456e^4+8355840e^3+4131840e^2+901296e+73165$. 则 $\{G(N(t(e));s(e)):e\in Z\}$ 是一个直径为 $6144e^2+4032e+648$ 的 2 紧优双环网络无限族, 它的初始元素为 $G(139939;73165)$.

§3 结束语

本文找到两个 2 紧优双环网络无限族. 我们已注意到, 对于给定的 $k\geq 3$, 本文所给的方法不一定能求出 k 紧优双环网络无限族来. 因为它涉及 k 紧优双环网络无限族的存在性问题. 因此, 我们提出一个值得研究的问题: 对于给定的 $k\geq 3$, 是否一定存在 k 紧优双环网络

无限族?

在文献[2, 4]中都报道了 Y. Cheng 用计算机搜索出 3 个 4 紧优双环网络 G(53749; 985), G(64749; 394) 和 G(69283; 1764). 一个比较现实而且可望解决的问题是: 是否存在包含它们的 4 紧优双环网络无限族?

参 考 文 献

1 Wong, G. K., Coppersmith, D., A combinatorial problem related to multimodule memory organization, J. Assoc. Comput. Mach., 1974, 21: 392～401.

2 Erdos, P., Hsu, D. F., Distributed loop networks with minimum transmission delay, Theoretical Computer Science, 1992, 100: 223～241.

3 Esque, P., Aguilo, F. and Fiol, M. A., Double commutative-step digraphs with minimum diameters, Discrete Math., 1993, 114: 147～157.

4 Hwang, F. K., A survey of double loop networks, In: Roberts, F., Hwang, F. and Monma, C., eds., Reliability of Computer and Communication Networks, DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science 5 (American Mathematical Society, Providence, RI, 1991), 143～152.

5 Hwang, F. K. and Xu, Y. H., Double loop networks with minimum delay, Discrete Math., 1987, 66: 109～118.

6 Foil, M. A., Yebra, J. L., Alegre, I., et al., A discrete optimization problem in local networks and data alignment. IEEE Trans Comput., 1987, 36: 702～713.

7 李乔, 徐俊明, 张忠良, 最优双环网络的无限族, 中国科学, A 辑, 1993, 23(9): 979～992.

8 徐俊明, 计算机互连双环网络的最优设计, 中国科学, B 辑, 1999, 29(3): 272～278.

9 徐俊明, 不含紧优和几乎紧优双环网络无限族, 科学通报, 1999, 44(5): 486～490.

10 徐俊明, 图论及其应用, 中国科学技术大学出版社, 合肥, 1998, 340～342.

INFINITE FAMILIES OF 2-TIGHT OPTIMAL DOUBLE LOOP NETWORK

Xu Junming

(*Dept. of Math., Univ. of Science and Technology of China, Hefei* 230026)

Abstract In this paper, two infinite families of 2-tight optimal double loop networks are found. This is an answer to a question proposed by Li et al's in 1993.

Key words Double Loop Networks; Circulant Digraphs; Diameter; Optimal Design; Tight Optimal

Subject Classification (CL) O157.9, TP302; (1991MR) 05C40, 68M10.