第31卷第6期 中 国 科 学 技 术 大 学 学 报 Vol. 31, No. 6
2001年12月 JOURNAL OF CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY Dec. 2001
文章编号:0253-2778(2001)06-0635-06

Cayley 图的笛卡尔乘积*

徐俊明,徐克力

(中国科学技术大学数学系,合肥 230026)

摘要:Cayley 图是由有限群导出的一类重要的高对称正则图,被认为是非常合适的互连网络拓扑结构.而笛卡尔乘积则是从小规模的指定网络构造大规模网络的重要构造方法.本文证明了 Cayley 图的笛卡尔乘积仍是 Cayley 图.作为实例,指明循环网络、超立方体、广义超立方体、超环面和立方连通圈等都是 Cayley 图.这样可以借助于代数方法来分析和研究这些网络的性质.

关键词:Cayley 图;Cartesian 乘积;互连网络;超立方体;广义超立方体

中图分类号:O157;TP302 **文献标识码**:A

0 引言

计算机互连网络的拓扑结构是决定网络性能的重要因素,而网络结构的高对称性和正则性是网络设计者所追求的目标之一[1].众所周知,网络拓扑结构通常是用图或有向图来模拟.Cayley 图是由英国数学家 Cayley[2]于 1895 年构造出来的高对称正则图(更精确地讲是一类点可迁图),被认为是非常合适的计算机互连网络拓扑结构[3].Cayley 图是由有限群导出,而且构造方便,因而,备受网络设计者的欢迎和重视.笛卡尔乘积是从小规模指定网络构造大规模网络的重要而又简单的方法[4],它能保留小规模网络的许多性质[5].

本文证明 Cayley 图的笛卡尔乘积仍是 Cayley 图.作为实例,指明人们所熟知的网络,比如:循环网络[6]、超立方体[7,8]、广义(亦称一般化)超立方体[9]、超环面[10]、有向超环面[11]、立方连通圈[12]等等,虽然它们的原始定义相差很大,且都不是用 Cayley 方法构造出来的,但它们都是 Cayley 图.

最近,超猛等人[13]称"超立方体和一般化超立方体都属于笛卡尔乘积图,而星形图则属于 Cayley 图".显然,这种说法没有把超立方体和一般化超立方体纳入 Cayley 图的范畴.

在这篇文章中,我们用 $K_n(n \geq 2)$ 表示 n 阶完全图,C_n 和 $\vec{C}_n$ 分别表示 n 阶无向圈和有向圈;Z_n 表示整数集$\{0,1,2,\cdots,n-1\}$或者整数模 n 剩余类加法群.其他未说明的术语和记号参见文献[14].

* **收稿日期**:2001-02-27
基金项目:国家自然科学基金资助项目(19971086)和中国科学院特支费
作者简介:徐俊明,男,1949 年生,教授,博士生导师.

1 笛卡尔乘积

首先回顾一下 n 个有限群 $\Gamma_i = (X_i, \circ_i)$ 的笛卡尔乘积 $\Gamma = \Gamma_2 \times \Gamma_2 \times \cdots \times \Gamma_n = (X, \circ)$，其中 $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$. 对于运算 $\circ$ 定义为:

$$(x_1 x_2 \cdots x_n) \circ (y_1 y_2 \cdots y_n) = (x_1 \circ_1 y_1)(x_2 \circ_2 y_2) \cdots (x_n \circ_n y_n),$$

其中 $x_i, y_i \in X_i (i = 1, 2, \cdots, n)$. Γ 中元素 $x_1 x_2 \cdots x_n$ 的逆元 $(x_1 x_2 \cdots x_n)^{-1} = x_1^{-1} x_2^{-1} \cdots x_n^{-1}$，单位元 $e = e_1 e_2 \cdots e_n$，其中对每个 $i (i = 1, 2, \cdots, n)$，x_i^{-1} 是 $x_i \in X_i$ 在 Γ_i 中逆元，$e_i \in X_i$ 是 Γ_i 中的单位元.

例如，考虑 $Z_4 \times Z_2 = \{00, 10, 20, 30, 01, 11, 21, 31\}$. 对于任意 $x_1 x_2, y_1 y_2 \in Z_4 \times Z_2$，$x_1, y_1 \in Z_4$，$x_2, y_2 \in Z_2$，定义运算

$$(x_1 x_2) \circ (y_1 y_2) = (x_1 + y_1)(\mathrm{mod}\ 4)(x_2 + y_2)(\mathrm{mod}\ 2).$$

容易验证 $Z_4 \times Z_2$ 在上述定义的运算下构成群，单位元为 00.

其次回顾一下 n 个图 $G_1, G_2, \cdots, G_n$ 的笛卡尔乘积图 $G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$，顶点集 $V(G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n) = V(G_1) \times V(G_2) \times \cdots \times V(G_n)$，存在从顶点 $x_1 x_2 \cdots x_n$ 到另一个顶点 $y_1 y_2 \cdots y_n$ 的有向边 $\Leftrightarrow$ 两向量 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 和 $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 中的坐标有且仅有一个不同，比如 $x_i \neq y_i$，而且 $(x_i, y_i) \in E(G_i)$.

容易证明：笛卡尔乘积"×"作为图的一个运算在同构意义下满足结合律和交换律. 注意到这个性质对证明笛卡尔乘积图的许多性质是方便的. 例如，当我们要证明某个命题对 $G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$ 成立时，利用归纳法、结合律和交换律只需证明此命题对 $G_1 \times G_2$ 成立即可.

下面列举几个非常熟知的网络拓扑结构，它们的原始定义都不是从笛卡尔乘积导出，然而，它们都可以表示成完全图或者圈的笛卡尔乘积.

例 1 著名的 2 元 n 维超立方体(hypercube)[7,8] Q_n 可以表示为 n 个 K_2 的笛卡尔乘积 $K_2 \times K_2 \times \cdots \times K_2$.

例 2 广义超立方体 (generalized hypercube)[9] $Q(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ 可以表示成 $K_{m_1} \times K_{m_2} \times \cdots \times K_{m_n}$. $Q(m, m, \cdots, m)$ 就是 m 元 n 维超立方体 $Q_n(m)$，$Q_n(2)$ 就是例 1 中 Q_n. 因此，$Q(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ 是超立方体 Q_n 的一个自然推广.

例 3 无向超环面(undirected toroids)[10] $C(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ 也是超立方体的一个自然推广，它可以表示为 $C_{m_1} \times C_{m_2} \times \cdots \times C_{m_n}$. 也有人(如：Wu 和 Gao[15]，杜毅和李三立[16])称 $C(m, m, \cdots, m)$ 为 m 元 n 立方体(m-ary n-cube).

例 4 有向超环面(directed toroids)[11] $\vec{C}(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ 是无向超环面的一个自然推广，它可以表示为 $\vec{C}_{m_1} \times \vec{C}_{m_2} \times \cdots \times \vec{C}_{m_n}$.

2 Cayley 图

首先回顾一下 Cayley 图的定义. 设 是一个非平凡有限群，非空子集 $S \subset \Gamma$，并且 S 不含 Γ 的单位元 e. 定义一个有向图 G 如下：

$$V(G) = \Gamma; \quad (x, y) \in E(G) \Leftrightarrow x^{-1} y \in S, \ \forall x, y \in \Gamma.$$

如此定义的有向图 G 称为群 Γ 关于子集 S 的 Cayley 图，记为 $C_\Gamma(S)$.

容易证明 $C_\Gamma(S)$ 是强连通 $\Leftrightarrow S$ 是 Γ 的生成集. 若 $S^{-1}=\{s^{-1}: s\in S\}=S$, 则群 Γ 关于子集 S 的 Cayley 图 $C_\Gamma(S)$ 是无向图. 显然, Cayley 无向图是 Cayley 有向图的特殊情形.

例 1　$G=C_\Gamma(S)$ 是完全图 $\Leftrightarrow S=\Gamma-\{e\}$, 其中 e 是 Γ 的单位元.

例 2　循环图(circulants) $G(n;S)$ 是一类最常见且应用最广泛的网络拓扑结构[6], 其中 $S\subseteq\{1,2,\cdots,n-1\}$, 顶点集 $V=Z_n$, 边集 $E=\{(i,j): \exists s\in S$ 使得 $j-i\equiv s \pmod n\}$.

考虑群 Z_n, 0 是单位元, i 的逆元是 $n-i$. 容易证明 $G(n;S)$ 就是 Cayley 图 $C_{Z_n}(S)$. 事实上, 任取 $i,j\in Z_n=V(G(n;S))$. 由 Cayley 图和循环图的定义知,

$$(i,j)\in E(C_{Z_n}(S))\Leftrightarrow i^{-1}+j\in S\Leftrightarrow (n-i)+j=j-i\in S \pmod n$$

$$\Leftrightarrow \exists s\in S \text{ 使得 } j-i\equiv s \pmod n$$

$$\Leftrightarrow (i,j)\in E(G(n;S)).$$

显然, $G(n;\{1\})=\vec{C}_n$, $G(n;\{1,n-1\})=C_n$; 当 $S=\{1,2,\cdots,n-1\}$ 时, $G(n;S)=K_n$. 因此, $\vec{C}_n$, $\vec{C}_n$ 和 K_n 都是整数模 n 剩余类加法群 Z_n 的 Cayley 图.

3　Cayley 图的笛卡尔乘积

定理 1　Cayley 图的笛卡尔乘积仍是 Cayley 图. 换句话说, 设 $G_i(C_{\Gamma_i}(S_i))$ 是有限群 $\Gamma_i=(X_i,\circ_i)$ 的 Cayley 图, 则笛卡尔乘积 $G=G_1\times G_2\times\cdots\times G_n$ 是群 $\Gamma=\Gamma_1\times\Gamma_2\times\cdots\times\Gamma_n$ 的 Cayley 图 $C_\Gamma(S)$, 其中

$$S=\bigcup_{i=1}^{n}\{e_1\cdots e_{i-1}\}\times S_i\times\{e_{i+1}\cdots e_n\},$$

e_i 是 $\Gamma_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的单位元.

证明: 由第 2 节的说明, 我们只对 $n=2$ 来证明结论, 此时 $\Gamma=\Gamma_1\times\Gamma_2=(X_1\times X_2,\circ)$, $S=(\{e_1\}\times S_2)\cup(S_1\times\{e_2\})$. 任取 $x_1x_2, y_1y_2\in X_1\times X_2$, 其中 $x_1,y_1\in X_1$, $x_2,y_2\in X_2$. 我们只需证明

$$(x_1x_2,y_1y_2)\in E(G)\Leftrightarrow (x_1x_2)^{-1}\circ(y_1y_2)\in S.$$

由图的笛卡尔乘积的定义知,

$$(x_1x_2,y_1y_2)\in E(G)\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=y_1,(x_2,y_2)\in E(G_2), \text{ or}\\ x_2=y_2,(x_1,y_1)\in E(G_1).\end{cases}$$

因为 $G_i=C_{\Gamma_i}(S_i)$, 所以 $(x_i,y_i)\in E(G_i)\Leftrightarrow x_i^{-1}\circ_i y_i\in S_i$, $i=1,2$. 于是,

$$x_1=y_1,(x_2,y_2)\in E(G_2)$$

$$\Leftrightarrow (x_1x_2)^{-1}\circ(y_1y_2)=(x_1^{-1}x_2^{-1})\circ(y_1y_2)$$

$$=(x_1^{-1}\circ_1 y_1)(x_2^{-1}\circ_2 y_2)=(x_1^{-1}\circ_1 x_1)(x_2^{-1}\circ_2 y_2)$$

$$=e_1(x_2^{-1}\circ_2 y_2)\in\{e_1\}\times S_2\subseteq S.$$

同样地,

$$x_2=y_2,(x_1,y_1)\in E(G_1)$$

$$\Leftrightarrow (x_1x_2)^{-1}\circ(y_1y_2)=(x_1^{-1}x_2^{-1})\circ(y_1y_2)$$

$$=(x_1^{-1}\circ_1 y_1)(x_2^{-1}\circ_2 y_2)=(x_1^{-1}\circ_1 y_1)(x_2^{-1}\circ_2 x_2)$$

$$= (x_1^{-1} \circ_1 y_1) e_2 \in S_1 \times \{e_2\} \subseteq S.$$

这说明 $G = G_1 \times G_2$ 是 $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2$ 关于 $S = S_1 \times \{e_2\} \cup \{e_1\} \times S_2$ 的 Cayley 图 $C_\Gamma(S)$.

作为定理 1 的应用,并注意到 K_n, C_n 和 $\vec{C}_n$ 都是群 Z_n 的 Cayley 图,立即知 Q_n, $Q(m_1, m_2, \cdots, m_n)$, $C(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ 和 $\vec{C}(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ 都是 Cayley 图.

4 立方连通圈是 Cayley 图

n 维立方连通圈(cube-connected cycle)[12],记为 $CCC(n)$,是一个基于 Q_n 构造出来的无向图:用 C_n 替代 Q_n 的每一个顶点,并将 Q_n 的第 k 维边连到 C_n 的第 k 个顶点. 具体地说,$CCC(n)$ 的顶点集为 $V = \{(x; k) : x \in V(Q_n), 1 \le k \le n\}$,两顶点 (x, k) 和 (x', k') 有边相连 $\Leftrightarrow$ 满足下列两条件之一:

(i) $x = x'$ 且 $k - k' \equiv \pm 1 \pmod n$;

(ii) $k = k'$ 且 x 和 x' 在 Q_n 中有 k 维边相连.

$CCC(n)$ 是由美国伊利诺伊大学的 Preparata 和法国巴黎南大学的 Vuillemin 针对改进 Q_n 的缺点而于 1981 年首先提出来的,它被广泛用于平行处理系统的拓扑结构和 VLSI 的布图. 与此同时,$CCC(n)$ 还为解决大量问题(如快速 Fourier 变换、分类、矩阵乘法和置换等)的有效并行算法提供可行的通信模式. $CCC(n)$ 具有许多与 Q_n 一样的优良性质. 本节给出 $CCC(n)$ 的下列性质.

定理 2 $CCC(n)$ 是 Cayley 图.

证明:用 $(Z_2)^n$ 表示 $n(\ge 3)$ 个集 Z_2 的笛卡尔乘积 $Z_2 \times Z_2 \times \cdots \times Z_2$. 设

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

是 n 阶置换方阵. 将 $(Z_2)^n$ 中的元素 v 看成列向量 $\vec{v}$,则 $M\vec{v} \in (Z_2)^n$. 对于集 $(Z_2)^n \times Z_n$ 定义运算 $\circ$ 为:

$$(\vec{u}, i) \circ (\vec{v}, j) = (M^j\vec{u} + \vec{v}, i + j), \quad \forall (\vec{u}, i), (\vec{v}, j) \in (Z_2)^n \times Z_n,$$

其中第 1 个加法是(mod 2);而第 2 个加法是(mod n). 容易验证 $(Z_2)^n \times Z_n$ 对于运算 $\circ$ 构成群,记为 Γ,它的单位元是 $(\vec{0}, 0)$,元素 $(\vec{u}, j)$ 的逆元 $(\vec{u}, j)^{-1} = (-M^{n-1}\vec{u}, n - i)$. 令

$$S = \{(10\cdots 0, 0), (00\cdots 0, 1), (00\cdots 0, n - 1)\},$$

其中前两个元素是互逆的,后一个元素的逆元是自身,因而 $S = S^{-1}$. 于是群 Γ 关于 S 的 Cayley 图 $C_\Gamma(S)$ 存在. 下面,我们只需证明 $CCC(n)$ 同构于 $C_\Gamma(S)$. 为此,将 $CCC(n)$ 的顶点 (u, i) 中的 u 理解为列向量 $\vec{u}$. 由 $CCC(n)$ 和 $C_\Gamma(S)$ 的定义知,它们的顶点集都为 $(Z_2)^n \times Z_n$. 建立映射

$$\Phi: \quad (Z_2)^n \times Z_n \to (Z_2)^n \times Z_n$$
$$(\vec{u}, i) \to (M^{n-i+1}\vec{u}, n - i + 1).$$

容易验证 ϕ 是双射. 下证 ϕ 保顶点相邻性.

设 $(\vec{u}, i)$, $(\vec{v}, j)$ 是 $CCC(n)$ 的两顶点. 由 $CCC(n)$ 的定义知, $(\vec{u}, i)$ 和 $(\vec{v}, j)$ 在 $CCC(n)$ 中相邻 $\Leftrightarrow$ ① $\vec{u} = \vec{v}$ 且 $i - j \equiv \pm 1 \pmod{n}$; ② $i = j$ 且 $\vec{u}$ 和 $\vec{v}$ 的第 i 个坐标不同, 其余坐标相同. 由于

$$\phi(\vec{u}, i) = (M^{n-i+1}\vec{u}, n - i + 1),$$

$$\phi(\vec{v}, j) = (M^{n-j+1}\vec{v}, n - j + 1),$$

$$\phi(\vec{u}, i)^{-1} = (M^{n-i+1}\vec{u}, n - i + 1)^{-1} = (-\vec{u}, i - 1),$$

所以,

$$\begin{aligned}\phi(\vec{u}, i)^{-1} \circ \phi(\vec{v}, j) &= (-\vec{u}, i - 1) \circ (M^{n-j+1}\vec{v}, n - j + 1) \\ &= (-M^{n-j+1}\vec{u} + M^{n-j+1}\vec{v}, n - j + i) \\ &= (M^{n-j+1}(-\vec{u} + \vec{v}), n - j + i).\end{aligned}$$

若 ①成立, 即 $\vec{u} = \vec{v}$ 且 $i - j = n \pm 1 \pmod{n}$, 则

$$\phi(\vec{u}, i) \circ \phi(\vec{v}, j) = (\vec{0}, \pm 1) \in S \Leftrightarrow (\vec{u}, i) \text{ 和 } (\vec{v}, j) \text{ 在 } C_\Gamma(S) \text{ 中相邻}.$$

若 ②成立, 即 $i = j$ 且 $\vec{u}$ 和 $\vec{v}$ 的第 i 个坐标不同, 其余坐标相同, 则

$$\phi(\vec{u}, i) \circ \phi(\vec{v}, j) = (M^{n-i+1}(-\vec{u} + \vec{v}), 0) = ((1, 0, \cdots, 0), 0) \in S$$

$$\Leftrightarrow (\vec{u}, i) \text{ 和 } (\vec{v}, j) \text{ 在 } C_\Gamma(S) \text{ 中相邻}.$$

这说明 $(\vec{u}, i)$ 和 $(\vec{v}, j)$ 在 $CCC(n)$ 中相邻 $\Leftrightarrow \phi(\vec{u}, i)$ 和 $\phi(\vec{v}, j)$ 在 $C_\Gamma(S)$ 中相邻, 即 ϕ 是 $CCC(n)$ 到 $C_\Gamma(S)$ 的同构映射. 因此, $CCC(n)$ 同构于 $C_\Gamma(S)$.

5　结论

Cayley 图具有高对称正则性, 是一类非常合适的互连网络拓扑结构, 它构造简单, 备受网络设计者重视. 最简单的 Cayley 图是完全图和圈. 另一个重要而又简单的网络构造方法是笛卡尔乘积. 本文证明 Cayley 图的笛卡尔乘积仍是 Cayley 图. 作为实例, 指明超立方体、广义超立方体、超环面、有向超环面是由完全图或圈通过笛卡尔乘积而得到, 因而它们都是 Cayley 图. 另外, 循环网络和立方连通圈也都是 Cayley 图. 这样可以借助于代数方法来分析和研究这些网络的性质. 事实上, 代数方法已成为网络分析的重要方法之一.

参　考　文　献

[1] Hallis W D. The connection machine (ACM distinguish dissertation) [M]. MA: the MIT Press Cambridge, 1987.

[2] Cayley A. The theory of graphs, graphical representation [J]. Mathematical Paper, Cambridge, 1895, 10: 26～28.

[3] Annexstein F, Baumslag M, Rosenberg A. Group action graphs and parallel architectures [J]. SIAM J Comput, 1990, 19: 544～569.

[4] Bermond J C, Delorme C, Quisquater J J. Strategies for interconnection networks: some methods from graph theory[J]. J Parallel Distributed Comput, 1986, 3: 433～449.

[5] 徐俊明. Connectivity of Cartesian product digraphs and fault-tolerant routings of generalized hypercube [J]. 高校应用数学学报, B 辑, 1998, 13 (2): 179～187.

[6] Wong G K, Coppersmith D. A combinatorial problem related to multimodule memory organization [J]. J Assoc. Comput Mach. 1974, 21 (3): 392

～401.

[7] Hayes J P, Mudge T N. Hypercube supercomputers [J]. Proc. IEEE., 1989, 77(12): 1829～1841.

[8] Saad Y, Schultz M H. Topological properties of hypercubes[J]. IEEE Trans. Comput., 1988, 37 (7): 867～872.

[9] Bhuyan L, Agrawal D P. Generalized hypercube structures for a computer network [J]. IEEE Trans. Comput., 1984, 33(4): 323～333.

[10] Ishigami Y. The wide-diameter of the n-dimensional toroidal mesh [J]. Networks, 1996, 27: 257～266.

[11] Hsu D F, Lyuu Y D. A graph-theoretical study of transmission delay and fault tolerance [J]. Inter. J. Mini and Microcomputers., 1994, 16 (1): 35～42.

[12] Preparata P, Vuillemin J. The cube-connected cycles: a versatile network for parallel computation [J]. Commun. Ass. Comput. Mach., 1981, 24 (5): 300～309.

[13] 超猛, 方滨兴, 王义和, 等. 笛卡尔乘积图到Cayley图中的嵌入[J]. 计算机学报, 2000, 23 (6): 646～648.

[14] 徐俊明. 图论及其应用 [M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 1998.

[15] Wu J, Guo G H. Fault tolerance measures for m-ary n-dimensional hypercubes based on forbidden faulty sets [J]. IEEE Trans. Comput., 1998, 47 (8): 888～893.

[16] 杜毅, 李三立. k-ary n-cube 网络中高速开关的设计与路由算法[J]. 计算机学报, 1999, 21 (1): 16～23.

Cartesian Product of Cayley Graphs

XU Jun-ming, XU Ke-li

(*Department of Mathematics, USTC, Hefei* 230026)

Abstract: Cayley graphs, which represent a category of symmetric and regular graphs derivable from finite groups, have been shown to be very suitable to serve as interconnection network topologies. As an operation of graphs, the Cartesian product is an important method in constructing larger networks from some small and specified ones. In this paper, it is shown that the Cartesian product of Cayley graphs is still a Cayley graph. In illustration of this result, circulants, hypercubes, generalized hypercubes, toroidal meshes, cube-connected cycles and so on, are all Cayley graphs.

Key words: Cayley graphs; Cartesian products; interconnection networks; hypercubes; generalized hypercubes