第31卷第1期 中国科学技术大学学报 Vol. 31, No. 1
2001年2月 JOURNAL OF CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY Feb. 2001

文章编号:0253-2778(2001)01-0016-05

关于广义超立方体网络的容错性和通信延迟*

徐俊明

(中国科学技术大学数学系,合肥 230026)

摘要:直径是度量并行计算系统网络的容错性和信息延迟的重要参数. 广义超立方体网络 $Q(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ 是并行计算系统网络中的一个重要拓扑结构. 令 $k = m_1 + m_2 + \cdots + m_n - n$. 论文证明: $Q(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ 的 k 直径等于 $n+1$.

关键词:广义超立方体;容错;通信延迟;连通度;宽直径

中图分类号:O157.9; TP302.7 **文献标识码**:A

AMS(1991):05C12, 05C40, 68M10

1 引言

目前,在高性能计算研究领域中,一个非常重要的研究方向是网络并行计算. 决定并行计算性能(比如容错和通信延迟)的重要因素是网络拓扑结构,而广义超立方体网络 $Q(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ 是并行计算网络的重要拓扑结构[1,2].

网络拓扑结构通常用图 G 来表示,其中 G 的顶点表示处理机,而边表示处理机之间的通信连接. 网络的容错性和通信延迟通常分别用图的连通度和直径(或容错直径)来度量. 一般来说,高性能网络系统应具有大连通度和小直径(或容错直径). 图的这些参数在分析计算系统网络的容错性和通信延迟中起了重要作用[3]. 但在并行计算系统的网络中,信息是通过若干条内点不交的路径平行地进行传输. 对于这样的网络,仅孤立地考虑连通度和直径是不够的,因为网络虽然有大连通度和小直径,但通过该网络中若干条内点不交的路进行并行计算时,其中某些路径可能很长. 因此在并行计算系统的网络中,将连通度和直径结合起来考虑是必要的. 基于这种考虑,一个度量并行计算系统网络的容错性和通信延迟的新参数——宽直径——被提出来[4]. 近几年来,它已引起计算机理论工作者和数学工作者的极大兴趣,并确定了许多著名网络,比如 n 维超立方体、de Bruijn 和 Kautz 网络以及环形格网的宽直径[4~9].

本文证明 $Q(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ 的连通度等于 $k = m_1 + m_2 + \cdots + m_n - n$,宽度为 k 的直

* **收稿日期**:1999-09-03
基金项目:国家自然科学基金(19971086)和中国科学院基金资助项目
作者简介:徐俊明,男,1949年10月生,教授,博士生导师.

径等于 $n+1$. 换句话说, 该网络中任何两点之间存在 k 条内点不交的路而且其长度都不超过 $n+1$. 这个结果表明:广义超立方体网络不但具有高容错性质,而且在该网络中进行并行计算时,仍然具有短通信延迟的特点. 因此用它作为并行计算系统网络拓扑是合宜的.

2　定义、记号和引理

设 $G=G(V,E)$ 是一个简单图(无环和重边). G 称为 k 正则的,如果 G 中每个顶点度都为 k. 连接两顶点 x 和 y 的路 P 称为 (x,y) 路. P 中边的数目称为 P 的长度,记为 $\|P\|$. 具有最小长度的路称为最短路. 最短 (x,y) 路的长度称为 x 和 y 之间的距离,记为 $d(G;x,y)$. $d(G)=\max\{d(G;x,y):\forall x,y\in V(G)\}$ 称为 G 的直径. G 中 n 条 (x,y) 路 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 称为内点不交的,如果对 $\forall i,j(0\le i\ne j<n)$,均有 $V(P_i\cap P_j)=\{x,y\}$. G 的连通度,记为 $\kappa(G)$,定义为 G 中任何两顶点之间内点不交路的最大条数. G 称为 k 连通的,如果 $\kappa(G)\ge k$. 本文用到而未定义的有关图论术语和记号,可参见文献[10].

设 G 是 k 连通图,则由上述定义知, G 中任何两顶点 x 和 y 之间存在 k 条内点不交的路. 用 $d_k(G;x,y)$ 表示最小正整数 d 使得 G 中存在 k 条内点不交的 (x,y) 路,且它们的长度都不超过 d. G 的宽度为 k 的直径(简称 k 直径,或者宽直径),记为 $d_k(G)$, 定义为

$$d_k(G)=\max\{d_k(G;x,y):\forall x,y\in V(G)\}$$

由宽直径的定义知,若 G 是 k 连通图,则 $d_k(G)$ 一定存在. 反之,若 $d_k(G)$ 存在,则使得 $d_k(G)$ 存在的最大 k 值即为 G 的连通度 $\kappa(G)$. 因此,宽直径的概念是连通度和直径概念的结合和推广.

引理 1[6,7]　设 G 是 k 正则 k 连通图, $k\ge2$,则 $d_k(G)\ge d(G)+1$.

用 $(x_1x_2\cdots x_n)$ 表示 n 维非负整数数组空间中的向量,其中 $x_l(l=1,2,\cdots,n)$ 称为它的第 l 个坐标. 设 $m_1,m_2,\cdots,m_n$ 是 n 个不小于 2 的正整数. 所谓广义 n 维超立方体(Generalized Hypercube) 网络[2],记为 $Q(m_1,m_2,\cdots,m_n)$, 是指这样一个图, 它有顶点集 $V=\{x:=(x_1x_2\cdots x_n),0\le x_l\le m_l-1,1\le l\le n\}$,两顶点之间有边相连当且仅当它们有而且仅只有一个坐标不同. 当 $m_1=\cdots=m_n=m$ 时即为著名的 m-ary n-cube 网络[2],记为 $Q_n(m)$;当 $n=1$ 时,它就是 m 阶完全图 K_m;当 $m=2$ 时,它就是著名的 n 维超立方体网络,记为 Q_n,它被广泛用于并行计算系统的网络设计中[9,11]. 由上述定义,容易证明下列两个引理.

引理 2　$Q(m_1,m_2,\cdots,m_n)$ 是 $m_1+m_2+\cdots+m_n-n$ 正则的,且有 $m_1m_2\cdots m_n$ 个顶点,直径 n. 特别, $Q_n(m)$ 是 $n(m-1)$ 正则的,且有 m^n 个顶点,直径 n.

引理 3　$Q(m_1,m_2,\cdots,m_n)$ 能沿着第 $l(1\le l\le n)$ 个坐标划分成 m_l 个广义 $n-1$ 维超立方体 $Q^i(m_1,\cdots,m_{i-1},i,m_{l+2},m_n)$, $0\le i\le m_l-1$,且对 $Q^i(m_1,\cdots,m_{i-1},i,m_{l+2},m_n)$ 中每个顶点 u,它在 $Q(m_1,m_2,\cdots,m_n)$ 中的邻点有且仅有 m_l-1 个不在 $Q^i(m_1,\cdots,m_{i-1},i,m_{l+2},m_n)$ 中,并分别落在 m_l-1 个 $Q^j(m_1,\cdots,m_{i-1},i,m_{l+2},m_n)$ 中, $0\le j\ne i\le m_l-1$.

特别, $Q_n(m)$ 能沿着任何一个坐标划分成 m 个 m-ary n-cube $Q^i_{n-1}(m)$, $0\le i\le m-1$, 而且对每个顶点 $u\in V(Q^i_{n-1}(m))$, $0\le i\le m-1$, u 在 $Q_n(m)$ 中的邻点有且仅有 $m-1$ 个不在 $Q^i_{n-1}(m)$ 中,并分别落在 $m-1$ 个 $Q^j_{n-1}(m)$ 中, $0\le j\ne i\le m-1$.

3 主要结果

定理1 $d_{n(m-1)}(Q_n(m)) = n+1$,其中当 $m=2$ 时,$n \geq 2$.

证明 我们首先证明

$$d_{n(m-1)}(Q_n(m)) \leq n+1. \tag{1}$$

对 $n \geq 1$ 用归纳法.当 $n=1$ 时,$Q_1(m)$ 为 m 阶完全图 K_m.而 $d_{m-1}(K_m) \leq 2$,其中严格不等号成立当且仅当 $m=2$.因此,当 $m \geq 3$ 时,有 $d_{n(m-1)}(Q_l(m)) = d_{m-1}(K_m) = 2 = n+1$,归纳基础成立. 以下假定对任何 m-ary n-cube 网络 $Q_{n-1}(m)$ 均有 $d_{(n-1)(m-1)}(Q_{n-1}(m)) \leq n$.

设 $Q_n(m)$ 是一个 m-ary n-cube 网络,$n \geq 2$,并设 x 和 y 是 $Q_n(m)$ 中任意两顶点.要证明在 $Q_n(m)$ 中存在 $n(m-1)$ 条内点不交且长度都不超过 $n+1$ 的 (x,y) 路.

为使叙述和记号简单一些,不妨设 $x=(0x_2x_3\cdots x_n)$, $y=(ly_2y_3\cdots y_n)$. 记

$$x^i = (ix_2x_3\cdots x_n),\ y^i = (iy_2y_3\cdots y_n),\ i=0,1,\cdots,m-1.$$

则 $x^0 = x, y^l = y$.由引理3,设 $Q^0_{n-1}(m), Q^1_{n-1}(m), \cdots, Q^{m-1}_{n-1}(m)$ 是 $Q_n(m)$ 按第1个坐标的划分,$x^i \in Q^i_{n-1}(m)$, $i=0,1,\cdots,m-1$. 由归纳假设,有

$$d_{(n-1)(m-1)}(Q^i_{n-1}(m)) \leq n,\ 0 \leq i \leq m-1.$$

记 $P^i_0, P^i_1, \cdots, P^i_{(n-1)(m-1)-1}$ 是 $Q^i_{n-1}(m)$ 中 $(n-1)(m-1)$ 条内点不交且长度不超过 n 的 (x^i, y^i) 路,并记 P^i 是 $Q^i_{n-1}(m)$ 中一条最短 (x^i, y^i) 路. 则由引理2知,对每个

$$\| P^i \| \leq dQ^i_{n-1}(m) = n-1,\ 0 \leq i \leq m-1.$$

由于 $Q^i_{n-1}(m)$ 是 $(n-1)(m-1)$ 正则的,所以不妨设 P^i_0 与顶点 x^i 相邻的边和 P^i 共有.所以,对任何 $j=1,\cdots,(n-1)(m-1)-1$, P^i_j 的长度至少是2.对每个 $i, j=0,1,\cdots,(n-1)(m-1)-1$,设 w^i_j 是 P^i_j 中与 x^i 相邻的顶点,并记 $P^i_j(w^i_j, y^i)$ 是 P^i_j 中的 (w^i_j, y^i) 段.于是,对每个 $i(i=0,1,\cdots,m-1)$ 和 $j(j=1,2,\cdots,(n-1)(m-1))-1$, P^i_j 可以表示成

$$P^i_j = x^i \to w^i_j \to P^i_j(w^i_j, y^i) \to y^i.$$

我们分别用三种情形来构造 $Q_n(m)$ 中 $n(m-1)$ 条内点不交且长度都不超过 $(n+1)$ 的 (x^0, y^l) 路.

情形1 $(x_2x_3\cdots x_n) \neq (y_2y_3\cdots y_n)$ 且 $l=0$.在此情形下,$y=y^0$. 取

$$R_{i-1} = x^0 \to x^i \to P^i \to y^i \to y^0,\ i=1,\cdots,m-1;$$

$$R_{m-1+j} = x^0 \to P^0_j \to y^0,\ j=0,1,2,\cdots,(n-1)(m-1)-1.$$

不难验证,$\{R_j : 0 \leq j \leq n(m-1)-1\}$ 是 $Q_n(m)$ 中 $n(m-1)$ 条内点不交的 (x^0, y^0) 路,而且它们的长度

$$\| R_{i-1} \| = 1 + \| P^i \| + 1 \leq (n-1)+2 = n+1,\ i=1,\cdots,m-1;$$

$$\| R_{m-1+j} \| = \| P^0_j \| \leq n,\ j=0,1,2,\cdots,(n-1)(m-1)-1.$$

情形2 $(x_2x_3\cdots x_n) \neq (y_2y_3\cdots y_n)$ 且 $l \neq 0$. 取

$$R_0 = x^0 \to P^0 \to y^0 \to y^l;\quad R_l = x^0 \to x^l \to P^l \to y^l;$$

$$R_i = x^0 \to x^i \to P^i \to y^i \to y^l,\ i=1,\cdots,m-1;\ i \neq l;$$

$$R_{m+j} = x^0 \to w^0_j \to w^l_j \to P^l_j(w^l_j, y^l) \to y^l,\ j=1,2,\cdots,(n-1)(m-1)-1.$$

不难验证，$\{R_j : 0 \le j \le n(m-1)-1\}$ 是 $Q_n(m)$ 中 $n(m-1)$ 条内点不交的(x^0, y^l)路，而且它们的长度

$$\|R_0\| = \|P^0\| + 1 \le (n-1) + 1 = n;$$
$$\|R_l\| = \|P^l\| + 1 \le (n-1) + 1 = n;$$
$$\|R_i\| = 1 + \|P^i\| + 1 \le (n-1) + 2 = n+1,\ i = 1, \cdots, m-1,\ i \ne l;$$
$$\|R_{m+j}\| = 1 + \|P_j^l\| \le 1 + n,\ j = 1, 2, \cdots, (n-1)(m-1) - 1.$$

情形 3　$(x_2 x_3 \cdots x_n) \ne (y_2 y_3 \cdots y_n)$. 在此情形下，$l \ne 0$，且 $y = x^l$. 取

$$R_0 = x^0 \to x^l;$$
$$R_i = x^0 \to x^i \to x^l,\ i = 1, 2, \cdots, m-1,\ i \ne l;$$
$$R_{m-1+j} = x^0 \to w_j^i \to w_j^l \to x^l,\ j = 0, 1, 2, \cdots, (n-1)(m-1) - 1.$$

不难验证，$\{R_j : 0 \le j \le n(m-1)-1\}$ 是 $Q_n(m)$ 中 $n(m-1)$ 条内点不交的(x^0, x^l)路，而且对任何 $j, (0 \le j \le n(m-1)-1)$，$\|R_i\| \le 3 \le n+1$.

由归纳原理，我们证明了式(1)成立.

由引理 2 知，$Q_n(m)$ 是 $n(m-1)$ 正则的，$d(Q_n(m)) = n$，而且由式(1)知，$Q_n(m)$ 是 $n(m-1)$ 连通的. 所以由引理 1，

$$d_{n(m-1)}(Q_n(m)) \ge n+1. \tag{2}$$

结合式(1)和式(2)，定理 1 得证.

推论 2[9]　$d_n(Q_n) = n+1,\ n \ge 2$.

定理 3　令 $k = m_1 + m_2 + \cdots + m_n - n$，则 $d_k(Q(m_1, m_2, \cdots, m_n)) = n+1$，其中当 $m_1 = 2$ 时，$n \ge 2$.

定理 3 的证明，除了叙述和记号繁琐一些外，与定理 1 的证明完全一样，不再赘述.

推论 4　$\kappa(Q(m_1, m_2, \cdots, m_n)) = m_1 + m_2 + \cdots + m_n - n$. $\kappa(Q_n(m)) = n(m-1)$.

证明　由定理 3 知 $Q(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ 中任何两顶点之间存在 $m_1 + m_2 + \cdots + m_n - n$ 条内点不交的路，因此 $\kappa(Q(m_1, m_2, \cdots, m_n)) \ge m_1 + m_2 + \cdots + m_n - n$. 另一方面，$Q(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ 是 $m_1 + m_2 + \cdots + m_n - n$ 正则的，所以应有 $\kappa(Q(m_1, m_2, \cdots, m_n)) \le m_1 + m_2 + \cdots + m_n - n$. 于是，$\kappa(Q(m_1, m_2, \cdots, m_n)) = m_1 + m_2 + \cdots + m_n - n$.

参　考　文　献

[1] Bhuyan L N, Agrawal D P. Generalized hypercube and hyperbus structures for a computer network [J]. IEEE Trans. Comput. 1984, 32(4): 323～333.

[2] Wu J, Guo G H. Fault tolerance measures for m-ary n-dimensional hypercubes based on forbidden faulty sets [J]. IEEE Trans. Comput. 1988, 47(8): 888～893.

[3] Bermond J C, Homobono N, Peyrat C. Large fault-tolerant interconnection networks [J]. Graphs and Combinatorics, 1989, 5: 107～123.

[4] Hsu D F, Lyuu Y D. A graph-theoretical study of transmission delay and fault tolerance [M]. Proc. of 4th ISMM International Conference on Parallel and Distributed Computing and Systems, 1991.

[5] Du D Z, Lyuu Y D, Hsu D F. Line digraph iterations and connectivity analysis of de Bruijn and Kautz graphs [J]. IEEE Trans. Comput. 1993, 42(5): 612～616.

[6] Hsu D F, Luczak T. Note on the k-diameter of k-

regular k-connected graphs [J]. Discrete Math. 1994, 132: 291～296.

[7] Ishigami Y. The wide-diameter of the n-dimensional toroidal mesh [J]. Networks. 1996, 27: 257～266.

[8] Li Q Sotteau D, Xu J M. 2-diameter of de Bruijn graphs [J]. Networks. 1996, 28: 7～14.

[9] Saad Y, Schultz M H. Topological properties of hypercubes [J]. IEEE Trans. Comput. 1988, 37 (7): 867～872.

[10] 徐俊明. 图论及其应用[M]. 合肥:中国科学技术大学出版社, 1998.

[11] Leighton F T. Introduction to Parallel Algorithms and Architectures: Array. Trees. Hypercubes [M]. San Mateo: Morgan Kaufwann Publishers, 1992.

Fault Tolerance and Transmission Delay of Generalized Hypercube Networks

XU Jun-ming

(*Department of Mathematics, USTC, Hefei* 230026, *China*)

Abstract: The wide diameter is an important measure for fault tolerance and transmission delay of a parallel processing computer network. The generalized hypercube $Q(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ is an important network topology for parallel processing computer systems. In this paper, it is shown that the diameter with width $k = m_1 + m_2 + \cdots + m_n - n$ of $Q(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ is equal to $n + 1$.

Key words: generalized hypercube; fault tolerance; transmission delay; connectivity; wide-diameter

(上接第 49 页)

The Synchro-curvature Spectra of Electrons with a Power-law Energy Distribution

XIA Tong-sheng, ZHANG Jia-lu, CHEN Ci-xing

(*Center for Astrophysics, USTC, Hefei* 230026, *China*)

Abstract: Based on the new synchro-curvature radiation mechanism by J.L. Zhang *et al.*, if the magnetic field of a radiation region is not flat and straight, the synchro-curvature radiation, not the synchrotron radiation, should be the basis on which a real description is to be achieved. In this paper, the synchro-curvature radiation spectrum of electrons is calculated with a power-law energy distribution and it is found that in a curved magnetic field, the resulting spectrum of electrons could be clearly distinguished from power-law. This means that the previous conclusion is open to question.

Key words: curved magnetic field; synchro-curvature mechanism; radiation spectrum