

关于图的容错直径和宽直径^{*}

徐俊明, 谢 歆

(中国科学技术大学数学系, 安徽合肥 230026)

摘要: 容错直径和宽直径是度量网络可靠性和有效性的重要参数. 对任何 k 连通图, 它的容错直径 D_k 不超过宽直径 d_k . 论文证明 $d_2 \leq \max \left\{ (d_1 - 1) \left(D_2 - \frac{1}{2} d_1 - 1 \right) + 1, D_2 + 1 \right\}$; 给出 $d_1 = 2$ 时 $d_2 = D_2 + 1$ 的一个充分必要条件: $d_2 = 3$ 或 $d_2 = 4$ 且达到 d_2 值的任何两顶点必相邻.

关键词: 连通度; 直径; 容错直径; 宽直径; 网络

中图分类号: O157.5 **文献标识码:** A

AMS Subject Classification (1991): 05C12; 05C40

0 引言

本文采用文献[1]中有关图论术语和记号. 设 $G = (V, E)$ 是连通的简单无向图. G 的直径 $d(G)$ 是 G 中任何两顶点之间最短路的最大长度, G 的连通度 $\kappa(G)$ 是分离 G 所需的最小顶点数目. 当一个互连网络的拓扑结构用一个图来表示时(图的顶点表示网络中的处理器, 图的边表示网络中的连线), 图的直径表明一个数据从它的源到它的目的地通过中间处理器存储转发所需的最小次数, 而连通度表明网络能容忍同时失灵处理器的最大数目. 因此, 直径和连通度分别是互连网络传输延迟和可靠性的两个重要度量参数. 若 G 是 k 连通的, 则由著名的 Menger 定理知, 对于 G 中任何两个不同的顶点 x 和 y , G 中存在 k 条内点不交的 (x, y) 路. 图的这一性质表明, 当网络的传输带宽有限时, 为加快数据传输, 人们可以首先将需要传输的数据包拆成 k 个小包, 然后沿 k 条内点不交路分别同时传输. 然而, 在一个实时处理系统(比如图象处理系统, 雷达系统, 天气预报系统等)的互连网络中, 传输延迟是有一定要求的, 超过给定时限的任何数据都被认为是无效的. 在这样的系统中, 某些给定数目的处理器发生故障, 势必会增大传输延迟, 或者用 k 条内点不交的路传输数据时, 其中每条路长应限制在一定的范围内. 这些问题的研究导致两个重要的图论概念——容错直径和宽直径.

设 G 是 k 连通的, G 的 $(k-1)$ 容错直径 $D_k(G)$ 定义为

$$D_k(G) = \max \left\{ d(G - F) : \forall F \subset V(G), |F| < k \right\}.$$

* 收稿日期: 2001-06-10

基金项目: 国家自然科学基金(19971086), 中国科学院特支费和安徽省自然科学基金(01046102)资助项目

作者简介: 徐俊明, 男, 1949年生, 教授, 博士生导师. E-mail: xujm@ustc.edu.cn

由定义,易知

$$d(G) = D_1(G) \leq D_2(G) \leq \dots \leq D_{k-1}(G) \leq D_k(G).$$

G 的 k 宽直径 $d_k(G)$ 定义为最小正整数 l 使得对于 G 中任何两顶点 x 和 y , 存在 k 条内点不交且长度都不超过 l 的 (x, y) 路. 由定义, 易知

$$d(G) = d_1(G) \leq d_2(G) \leq \dots \leq d_{k-1}(G) \leq d_k(G).$$

容错直径概念是由 Krishnamoorthy 和 Krishnamurthy^[2]提出来的, 而宽直径的概念是由 Hsu, Lyuu^[3]和 Flandrin, Li^[4]独立提出来的. 这两个参数给出了容错网络和平行处理系统网络的传输延迟的准确度量, 已引起许多研究者的兴趣, 并已确定了许多著名网络的容错直径和宽直径的值^[3,5].

对于 k 连通图 G , 由容错直径 $D_k(G)$ 的定义, G 中存在两顶点 u, v 和子集 $F \subseteq V(G) \setminus \{u, v\}$, $|F| < k$ 使得 u 和 v 在 $G - F$ 的距离为 D_k . 由宽直径的定义知, G 中存在 k 条内点不交的 (u, v) 路使得每条路的长度不超过 d_k . 由于 $|F| < k$, 所以这 k 条 (u, v) 路中至少有一条不含 F 中顶点. 这表明 $D_k \leq d_k$, 其中的等号对许多著名的网络是成立的^[5]. 因此, 讨论 d_k 和 D_k 之间的进一步关系显然是重要的, 但知道的结果却很少. 据作者所知, 目前仅有一个关于直径 $d(\geq 2)$ 的 2 连通图的一个结果, 属于 Flandrin 和 Li^[4], 即当 $d = 2$ 时, $d_2 \leq D_2 + 1$; 而当 $d \geq 3$ 时, $d_2 \leq (d - 1)(D_2 - 1)$.

本文改进了这个结果. 证明了 $d_2 \leq \max \left\{ (d + 1)(D_2 - \frac{1}{2}d - 1) + 1 \right\}$; 当 $d = 2$ 时, $d_3 \leq \max \left\{ (D_2 - 1)(D_3 - \frac{1}{2}D_2 - 1) + 1, 3D_3 - 5, D_3 + 1 \right\}$, 并给出 $d = 2$ 时 $d_2 = D_2 + 1$ 的一个充分必要条件: $d_2 = 3$ 或 4 且达到 d_2 值的任何两顶点必相邻.

1 主要结果的证明

引理 设 G 是 2 连通图, u 和 v 是 G 中距离为 $m + 1$ 的两顶点. 若 $m \geq 1$, 则 G 中存在两条内点不交的 (u, v) 路 P_1 和 P_2 使得

$$\varepsilon(P_1) \leq \varepsilon(P_2) \leq \max \left\{ m \left(D_2 - \frac{1}{2}m - \frac{3}{2} \right) + 1, D_2 \right\}.$$

证明 设 $P = ux_1 \dots x_mv$ 是一条最短的 (u, v) 路, 则 $1 \leq m \leq d - 1 \leq D_2 - 1$. 令 Q_i 是 $G - x_i$ 中最短 (u, v) 路, 则对任何 $1 \leq i \leq m$ 有 $\varepsilon(Q_i) \leq D_2$. 令 $H = P - Q_1 - \dots - Q_m$. 任取 $x \in V(H) \setminus \{u, v\}$. 若 $x = x_i$, 则 Q_i 是 $G - x_i$ 中 (u, v) 路; 若 $x \in V(Q_i)$ 且 $x \notin V(P)$, 则 P 是 $H - x$ 中 (u, v) 路. 这说明在 H 中分离 u 和 v 至少需要 2 个顶点. 由 Menger 定理知, H 中必存在两条内点不交的 (u, v) 路.

若 $P, Q_1, \dots, Q_m$ 中存在两条内点不交, 则这两条 (u, v) 路的最大长度至多为 $\max \{ m + 1, D_2 \} = D_2$. 下面, 假定 $P, Q_1, \dots, Q_m$ 中任何两条内部相交, 则 $m \geq 2$.

若 $P, Q_1, \dots, Q_m$ 的交点数 $< \frac{1}{2}m(m + 1)$. 那么容易验证 $m \geq 3$. 在这种情形下, $P, Q_1, \dots, Q_m$ 中必存在 3 条路内部相交于一点. 由于在 H 中分离 u 和 v 至少需要 2 个顶点, 所以必存在第 4 条路, 它不经过前 3 条路的公共交点. 于是, 通过对这 4 条路至多某三段(每段长至多为 $D_2 - 2$; 若是三段, 则至少有一段长 $D_2 - 4$ 的拼接得到 H 中两条不交的 (u, v) 路, 它们

的长至多为 $3D_2 - 8$. 因为函数 $f(m) = m(D_2 - \frac{1}{2}m - \frac{3}{2}) + 1$ 在 $[3, D_2 - 1]$ 上单调增, 所以

$$3D_2 - 8 = f(3) \leq f(m) = m\left(D_2 - \frac{1}{2}m - \frac{3}{2}\right) + 1.$$

若 $P, Q_1, \dots, Q_m$ 的交点数 $\geq \frac{1}{2}m(m+1)$, 则 H 的顶点数目

$$v(H) \leq (m+2) + m(D_2 - 1) - \frac{1}{2}m(m+1) = m\left(D_2 - \frac{1}{2}m - \frac{1}{2}\right) + 2.$$

设 P_1 和 P_2 是 H 中两条内点不交的 (u, v) 路, $m+1 \leq \varepsilon(P_1) \leq \varepsilon(P_2)$. 于是,

$$\varepsilon(P_1) \leq \varepsilon(P_2) \leq v(H) - m - 1 \leq m\left(D_2 - \frac{1}{2}m - \frac{3}{2}\right) + 1.$$

我们举两个例子来说明当 $m=1$ 和 $m=2$ 时, 引理中给出的界可以达到. 由引理知, 当 $m=1$ 时, G 中存在两条内点不交的 (u, v) 路 P_1 和 P_2 使得 $\varepsilon(P_1) \leq \varepsilon(P_2) \leq D_2$. 考虑圈 C_n ($n \geq 4$) 中距离为 2 的两顶点 u 和 v , C_n 中存在两条内点不交的 (u, v) 路 P_1 和 P_2 使得 $\varepsilon(P_1) = 2$, 且 $\varepsilon(P_2) = n - 2 = D_2$. 当 $m=2$ 时, G 中存在两条内点不交的 (u, v) 路 P_1 和 P_2 使得 $\varepsilon(P_1) \leq \varepsilon(P_2) \leq 2D_2 - 4$. 考虑奇圈 $C_{2n+1} = ux_1x_2vy_1 \dots y_{n-1} \dots y_{2n-3}u$ ($n \geq 3$). 令 G 是由 C_{2n+1} 添加 3 条边 x_1y_{n-1} , x_2y_{n-1} 和 y_ny_{n-2} 后而得到的图. 显然, G 是 2 连通的, 而且 u 和 v 的距离为 3, $P = ux_1x_2y$ 是最短 (u, v) 路. 容易验证 $D_2 = D_2(G) = n + 1$. 取 $Q_1 = uy_{2n-3} \dots y_{n-1}v$ 和 $Q_2 = ux_1y_{n-1} \dots y_1v$ 分别是 $G - x_1$ 和 $G - x_2$ 中最短 (u, v) 路. 则 $\varepsilon(Q_1) = \varepsilon(Q_2) = D_2 = n + 1$, Q_1 和 Q_2 有一个内部公共点 y_{n-1} . 令 $P_1 = P$, $P_2 = (Q_1 - x_2)(Q_2 - x_2)$, 则 $\varepsilon(P_1) = \varepsilon(P_1) = 3$, $\varepsilon(P_2) = 2n - 2 = 2D_2 - 4$.

定理 1 直径 $d=2$ 的 2 连通图有 $d_2 \leq \max\left\{(d-1)(D_2 - \frac{1}{2}d - 1) + 1, D_2 + 1\right\}$.

证明 设 G 是直径 d 的 2 连通图. 若 $d=1$, 则 G 是一个完全图. 因此定理成立. 以下假设 $d \geq 2$, 并设 u 和 v 是 G 中两顶点. 只需证明 G 中存在两条内点不交的且长度都不超过 $\max\left\{(d-1)(D_2 - \frac{1}{2}d - 1) + 1, D_2 + 1\right\}$ 的 (u, v) 路. 为此令 $P = ux_1 \dots x_mv$ 是一条最短的 (u, v) 路.

若 $m=0$, 则 u 和 v 在 G 中相邻. 令 Q 是 $G - uv$ 中最短 (u, v) 路, 那么 $Q - u$ 是 $G - u$ 中最短路, 因而 $\varepsilon(Q) \leq D_2 + 1$.

若 $m \geq 1$, 则由引理知 G 中存在两条内点不交的 (u, v) 路 P_1 和 P_2 使得

$$\varepsilon(P_1) \leq \varepsilon(P_2) \leq \max\left\{m\left(D_2 - \frac{1}{2}m - \frac{3}{2}\right) + 1, D_2\right\}. \quad (1)$$

注意到 $1 \leq m \leq d-1$. 由于函数 $f(m) = m(D_2 - \frac{1}{2}m - \frac{3}{2}) + 1$ 在区间 $[1, d-1]$ 上单调增加, 且 $f(d-1) = (d-1)(D_2 - \frac{1}{2}d - 1) + 1$. 所以, 由式(1), 定理得证.

给定在定理 1 中的上界 $D_2 + 1$ 是可以达到的. 例如, 圈 C_n ($n \geq 3$).

当 $d=2$ 时, 由定理 1 有 $d_2 \leq \max\{D_2 - 1, D_2 + 1\} = D_2 + 1$. 当 $d \geq 3$ 时, $d_2 \leq \max\left\{(d-1)(D_2 - \frac{1}{2}d - 1) + 1, D_2 + 1\right\} < (d-1)(D_2 - 1)$. 因此, 定理 1 改进了在引言

中提到的 Flandrin 和 Li^[4]的结果.

定理 2 设 G 是直径为 2 的 2 连通图, 则 $d_2 = D_2 + 1$ 的充分必要条件是 $d_2 = 3$ 或 $d_2 = 4$, 且达到 d_2 值的任何两顶点必相邻.

证明 (必要性) 假定 $d_2 = D_2 + 1$. 因为 $D_2 \geq D_1 = d = 2$, 所以 $d_2 \geq 3$. 由宽直径的定义知, G 中存在两顶点 u 和 v 使得达到 d_2 值. 于是, G 任何两条内点不交的 (u, v) 路中至少有一条长度不小于 d_2 . 设 $P = ux_1 \dots x_mv$ 是一条最短 (u, v) 路. 由于 G 的直径为 2, 所以 $m \leq 1$. 若 $m = 1$, 则由引理知, G 中存在两条内点不交的 (u, v) 路 P_1 和 P_2 使得 $\varepsilon(P_1) \leq \varepsilon(P_2) \leq \max\{D_2 - 1, D_2\}$. 因此, 我们有 $D_2 + 1 = d_2 \leq \varepsilon(P_2) \leq D_2$, 矛盾. 因此, $m = 0$, 即 $uv \in E(G)$. 设 $Q = uy_1 \dots y_nv$ 是 $G - uv$ 中一条最短 (u, v) 路, 则 $d_2 = n + 1$. 假定 $d_2 \geq 5$, 即 $n \geq 4$, 那么 y_2 和 v 在 G 中的距离为 3, 即 G 的直径至少为 3, 矛盾. 所以, $3 \leq d_2 \leq 4$.

(充分性) 设 $u, v, z \in V(G)$ 使得 u 和 v 在 $G - z$ 的距离为 D_2 , 并设 P 是 $G - z$ 中最短 (u, v) 路. 则 $\varepsilon(P) = D_2$. 因为 G 的直径为 2, 所以存在 $y \in V(G)$ 使得 $uy, yv \in E(G)$. 不妨设 $y = z$, 并令 $Q = uzv$. 于是 P 和 Q 是 G 中两条内点不交的 (u, v) 路, 且 $\varepsilon(Q) \leq \varepsilon(P)$. 因为 u 和 v 在 G 中不相邻, 所以, 由相邻性假定应有 $D_2 = \varepsilon(P) \leq d_2 - 1$, 即 $d_2 \geq D_2 + 1$. 另一方面, 当 $d = 2$ 时, 由定理 1 有 $d_2 \leq D_2 + 1$. 所以, $d_2 = D_2 + 1$.

定理 3 直径为 2 的 3 连通图有

$$d_3 \leq \max\left\{(D_2 - 1)(D_3 - \frac{1}{2}D_2 - 1) + 1, 3D_3 - 5, D_3 + 1\right\}.$$

证明 设 G 是直径为 2 的 3 连通图. 任取 G 中两个不同的顶点 u 和 v , 只需证明 G 中存在 3 条内点不交的且长度都不超过 $\max\left\{(D_2 - 1)(D_3 - \frac{1}{2}D_2 - 1) + 1, 3D_3 - 5, D_3 + 1\right\}$ 的 (u, v) 路. 分两种情形.

情形 1 $uv \notin E(G)$. 因为 $d(G) = 2$, 所以存在 $z \in V(G)$ 使得 $uz, zv \in E(G)$. 令 $P = ux_1 \dots x_mv$ 是 $G - z$ 中最短 (u, v) 路, 则 $\varepsilon(P) = m + 1 \leq D_2$, $m \geq 1$. 由引理知 $G - z$ 中存在两条内点不交的 (u, v) 路 P_1 和 P_2 使得

$$\varepsilon(P_1) \leq \varepsilon(P_2) \leq \max\left\{m(D_2 - (G - z) - \frac{1}{2}m - \frac{3}{2}) + 1, D_2(G - z)\right\}. \quad (2)$$

注意到 $D_2(G - z) \leq D_3(G) = D_3$, 由式(2)有

$$\varepsilon(P_1) \leq \varepsilon(P_2) \leq \max\left\{m\left(D_3 - \frac{1}{2}m - \frac{3}{2}\right) + 1, D_3\right\}. \quad (3)$$

令 $g(m) = m(D_3 - \frac{1}{2}m - \frac{3}{2})$, 则 $g(m)$ 在区间 $[1, D_2 - 1]$ 上单调增加, 且 $g(D_2 - 1) = (D_2 - 1)(D_3 - \frac{1}{2}D_2 - 1)$. 由式(3)知, P_1 和 P_2 是 $G - z$ 中 2 条内点不交的长度不超过 $\max\left\{(D_2 - 1)(D_3 - \frac{1}{2}D_2 - 1) + 1, D_3\right\}$ 的 (u, v) 路.

情形 2 $uv \in E(G)$. 我们将证明 $G - uv$ 中存在 2 条内点不交的且长度不超过 $\max\{3D_3 - 5, D_3 + 1\}$ 的 (u, v) 路. 令 $P = ux_1 \dots x_mv$ 是 $G - uv$ 中最短 (u, v) 路. 因为 $d(G) = 2$, 所以 $1 \leq m \leq 3$, 而且 $\varepsilon(P) = m + 1 \leq D_2 + 1$. 于是, 由引理知 $G - uv$ 中存在两条内点不交的 (u, v) 路 P_1 和 P_2 使得

$$\varepsilon(P_1) \leq \varepsilon(P_2) \leq \max \left\{ m \left(D_2(G - uv) - \frac{1}{2}m - \frac{3}{2} \right) + 1, D_2(G - uv) \right\}. \quad (4)$$

注意到 $D_2(G - uv) \leq D_3 + 1$, 由式(4)有

$$\varepsilon(P_1) \leq \varepsilon(P_2) \leq \max \left\{ m \left(D_3 - \frac{1}{2}m - \frac{1}{2} \right) + 1, D_3 + 1 \right\}. \quad (5)$$

所以, 当 $m = 1$ 时, 由式(5)有 $\varepsilon(P_1) \leq \varepsilon(P_2) \leq \max \{ D_3, D_3 + 1 \} = D_3 + 1$.

当 $m = 2$ 时, $D_3 \geq D_2 \geq m + 1 = 3$, 由式(5)有

$$\varepsilon(P_1) \leq \varepsilon(P_2) \leq \max \{ 2D_3 - 2, D_3 + 1 \} = 2D_3 - 2 \leq 3D_3 - 5.$$

当 $m = 3$ 时, $D_3 \geq D_2 \geq m + 1 = 4$, 由式(5)有

$$\varepsilon(P_1) \leq \varepsilon(P_2) \leq \max \{ 3D_3 - 5, D_3 + 1 \} = 3D_3 - 5.$$

因此, P_1 和 P_2 是 $G - uv$ 中 2 条内点不交的长度不超过 $\max \{ 3D_3 - 5, D_3 + 1 \} = 3D_3 - 5$ 的 (u, v) 路. 定理得证.

给定在定理 3 中的上界 $D_3 + 1$ 是可以达到的. 例如, 轮 $W_{n+1} (n \geq 4)$.

参 考 文 献

- | | |
|---|---|
| <p>[1] 徐俊明, 图论及其应用[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 1998.</p> <p>[2] Krishnamoorthy M S, Krishnamurthy B. Fault diameter of interconnection networks[J]. Computers and Mathematics with Applications, 1987, 13 (5/6): 577-582.</p> <p>[3] Hsu D F, Lyuu Y D. A graph-theoretical study of transmission delay and fault tolerance[J]. Interna-</p> | <p>tional Journal of Mini and Microcomputers, 1994, 16 (1): 35-42.</p> <p>[4] Llandrin E, Li H. Mengerian properties, hamiltonicity, and claw-free graphs [J]. Networks, 1994, 24 (2): 177-183.</p> <p>[5] Liaw S C, Chang G J. Generalized diameters and Rabin numbers of networks[J]. J of Combin. Optimization, 1999, 2(3): 371-384.</p> |
|---|---|

On Fault-Tolerant Diameter and Wide Diameter of Graphs

XU Jun-Ming, XIE Xin

(Department of Mathematics, USTC, Hefei, Anhui 230026)

Abstract: Fault-tolerant diameter D_k and wide diameter d_k are two important parameters for measuring reliability and efficiency of interconnection networks. It is well known that fault-tolerant diameter D_k does not exceed wide diameter d_k for any k -connected graph. This paper shows $d_2 \leq \max \left\{ (d_1 - 1) \left(D_2 - \frac{1}{2}d_1 - 1 \right) + 1, D_2 + 1 \right\}$, and for $d_1 = 2$. Also, a sufficient and necessary condition is given for $d_2 = D_2 + 1$: $d_2 = 3$ or $d_2 = 4$ and two vertices whose wide distance between them reaches d_2 must be adjacent to each other.

Key words: Connectivity; diameter; fault-tolerant diameter; wide diameter; networks