中国科学（A 辑）
第 33 卷　第 1 期　SCIENCE IN CHINA (Series A)　2003 年 1 月

一类 4 紧优双环网无限族*

徐俊明**　刘　琦

（中国科学技术大学数学系，合肥 230026）

摘要　双环网络作为实用和可靠的网络已得到广泛的研究．获得一类 4 紧优双环网无限族．

关键词　互连网络　双环网　循环图　最优　紧优

双环网因其对称性、简单性和可扩展性等优良性质而广泛应用于计算机互连网络拓扑结构的设计中，是计算机互连网络或通讯系统的一类重要拓扑结构 [1]．双环网的图论模型是指这样一个有向图 $G(n;s)$：它的顶点集为 $\{0,1,\cdots,n-1\}$，并从每个顶点 i 发出两条有向边 $i\to i+1(\mathrm{mod}\ n)$ 和 $i\to i+s(\mathrm{mod}\ n)$，$1<s<n$．易知 $G(n;s)$ 是强连通的．记 $G(n;s)$ 的直径为 $d(n;s)$，并记 $d(n)=\min\{d(n;s):1<s<n\}$．文献 [2] 中证明了：$d(n)\geqslant lb(n)=\lceil\sqrt{3n}\,\rceil-2$．

一个广泛关注的问题是：对于给定的 n，确定 $d(n)$ 的值，并找出 s，使得 $d(n;s)=d(n)$．研究表明：要想得到 $d(n)$ 对参数 n 的显式表达估计不大可能．于是，寻找 $G(n;s)$ 的无限族使其直径达到 $d(n)$，引起许多作者的研究兴趣 [2~10]．

设 $\mathbb{Z}$ 是非负整数集合．对于 $k\in\mathbb{Z}$，若 $d(n;s)=d(n)=lb(n)+k$，则称 $G(n;s)$ 为 k 紧优的．0 紧优和 1 紧优通常称为紧优和几乎紧优 [7,8]．若对任意 $t\in\mathbb{Z}$，$t\geqslant t_0$，$G(n(t);s(t))$ 都是 k 紧优的，则称 $\{G(n(t);s(t))$：$t\in\mathbb{Z}$，$t\geqslant t_0\}$ 为 k 紧优双环网无限族，$G(n(t_0);s(t_0))$ 为初始元素．若对任意 $t\geqslant t_0$ 和 $s(t)$ 都有 $d(n(t);s(t))>lb(n(t))+k$，则称 $\{n(t)$：$t\in\mathbb{Z},t\geqslant t_0\}$ 为不含 k 紧优双环网的无限族．本文提到的 $n(t)$ 和 $s(t)$ 都是关于 $t\in\mathbb{Z}$ 的整系数多项式．

在文献 [7] 中，李乔等人提出一个系统的构造方法，并列出 69 类紧优和 33 类几乎紧优双环网无限族．这些结果表明当 $n\leqslant 300$ 时，$d(n)\leqslant lb(n)+1$．文献 [9] 找到 3 类 2 紧优双环网无限族．文献 [4] 中报道 Cheng 用计算机计算出当 $n\leqslant 75000$ 时，$d(n)\leqslant lb(n)+4$，而且使得等号成立的 n 只有 3 个，$G(53749;985)$，$G(64729;394)$ 和 $G(69283;1764)$ 是 3 个 4 紧优双环网，它们的直径分别是 404, 443 和 458．利用计算机搜索，我们也证实了这一点，并发现第 4 个 4 紧优双环网是 $G(94921;515)$，它的直径是 536，但至今还没有发现 4 紧优双环网无限族．本文将利用数论和几何相结合的方法，找出一类 4 紧优双环网无限族，其初始元素为 $G(69283;1764)$．

在以下的讨论中，考虑 $n(t)=3t^2+6t-26$．容易计算当 $t\geqslant 14$ 时 $lb(n(t))=3t+1$，所采用的术语和记号见文献 [7]．

2002-04-28 收稿，2002-07-30 收修改稿

* 国家自然科学基金 (批准号：19971086) 和安徽省自然科学基金资助项目

** E-mail: xujm@ustc.edu.cn

1 若干引理

引理 1[7] 设 $L=L(n;l,h,x,y)$ 是一个 L 形瓦. 若 $|x-y|\geqslant z_0\geqslant 1$, 则 $d(n)\geqslant\sqrt{3n-\frac{3}{4}\ z_0^2}+\frac{1}{2}\ z_0-2$.

引理 2[8] 设 $n(t)=3t^2+6t-26$, 则 $\{n(t):t\in\mathbb{Z},t\geqslant 29\}$ 不含紧优双环网，而且若 $L(n;l,h,x,y)$ 是几乎紧瓦，则 $|x-y|\leqslant 1$.

引理 3[7] 设 $n(t)=3t^2+6t-26$, $L=L(n;l,h,x,y)$ 是 L 形瓦, 其中 $l=2t+a$, $h=2t+b$, $x=t+a+b-j$, $z=|y-x|$, a, b, x, y 均为 t 的整系数多项式, 则 L 是 k 紧的当且仅当

$$(a+b-j)(a+b-j+z)-ab+(6+z-2j)t-26=0 \tag{1}$$

对任意 $j=3+k$ $(k\in\mathbb{Z})$ 成立, 而且若存在 α 和 β, 使得 $\alpha y+\beta\ (h-y)=1$, 则存在惟一的 k 紧优双环网 $G(n(t);s(t))$, 其中 $s\equiv\alpha\ l-\beta\ (l-x)\ (\mathrm{mod}\ n)$.

2 主要结果

定理 1 设 $n\in\mathbb{Z}$, 存在 $s,m\in\mathbb{Z}$, 使得 $n=s^2+3m^2$ 的必要条件是 1)：若 n 有素因子 $p=2$ 或者 $p\equiv 5(\mathrm{mod}\ 6)$, 则 p 在 n 的素因子分解中有偶次幂.

证 对 $n\geqslant 3$ 用归纳法. 当 $n=3$ 时，结论显然成立. 假定结论对任意 $n<k$ 成立. 设 $n=k$ 且存在 $s,m\in\mathbb{Z}$, 使得 $k=s^2+3m^2$, 并设 k 有素因子 $p=2$ 或者 $p\equiv 5(\mathrm{mod}\ 6)$.

如果 $p=2$, 则由 $2|k=s^2+3m^2$ 知 s 和 m 有相同的奇偶性. 假定 $s=2i$ 和 $m=2j$, 则 $k=2^2(i^2+3j^2)$, 由归纳假设结论成立. 设 $s=2i+1$, $m=2j+1$, 于是 $k=s^2+3m^2=4i^2+4i+1+3(4j^2+4j+1)=2^2[i(i+1)+3j(j+1)+1]$. 注意到括号中的数是奇数，所以，由归纳假设知结论成立.

下设 $p\equiv 5(\mathrm{mod}\ 6)$. 若 p 不能整除 sm, 则由 $k=s^2+3m^2\equiv 0(\mathrm{mod}\ p)$ 容易导出 $p\equiv 1(\mathrm{mod}\ 6)$, 矛盾，所以 $p|s$ 或者 $p|m$. 由于 $p|k=s^2+3m^2$, 所以 p 是 s 和 m 的公因子. 设 $s=pi$ 且 $m=pj$, 于是 $k=p^2(i^2+3j^2)$. 由归纳假设结论成立.

推论 设 $n=s^2+3m^2\,(s,m\in\mathbb{Z})$ 且 $3\nmid n$. 若 $2|n$, 则 $n\equiv 4(\mathrm{mod}\ 6)$; 若 $2\nmid n$, 则 $n\equiv 1(\mathrm{mod}\ 6)$.

定理 2 关于 a 和 b 的不定方程 (1) 有整数解的必要条件是 2)：如果

$$H_{z,j}=(2j-z)^2-3[j(j-z)+(6+z-2j)t-26] \tag{2}$$

有素因子 $p=2$ 或者 $p\equiv 5(\mathrm{mod}\ 6)$, 则 p 在其素因子分解中有偶次幂.

证 设 (a,b) 的不定方程 (1) 有整数解. 将方程 (1) 整理得

$$a^2+[b-(2j-z)]a+b^2-(2j-z)b+C=0, \tag{3}$$

其中 $C=j(j-z)+(6+z-2j)t-26$. 因为关于 a 的方程 (3) 有整数解，所以存在 $m\in\mathbb{Z}$, 使得判别式 $\Delta=m^2$, 即 $[b-(2j-z)]^2-4[b^2-(2j-z)b+C]=m^2$. 再将它整理为关于 b 的方程:

$$3b^2-2(2j-z)b+[4C+m^2-(2j-z)^2]=0. \tag{4}$$

因为方程 (4) 有整数解，所以存在 $n\in\mathbb{Z}$, 使得判别式 $\Delta=n^2$, 即 $4(2j-z)^2-12[4C+m^2-(2j-z)^2]=n^2$, 由此得 n 为偶数. 令 $n=2s$, 代入上式得 $4(2j-z)^2-12C=s^2+3m^2$, 即

1) 事实上，这个必要条件也是充分的

2) 容易证明，这个必要条件也是充分的

$4H_{z,j}=s^2+3m^2$. 由定理 1, 该定理得证.

定理 3　设 $n(t)=3t^2+6t-26$, $t(f)=28f^2+132f+151$, $f=22\cdot 85^2e$, 则 $\{n(t(f(e)))\colon e\in\mathbb{Z}\}$ 是不含 $k\,(0\leqslant k\leqslant 3)$ 紧优双环网的无限族.

证　(a) 由引理 2 知 $\{n(t)\colon t\in Z, t\geqslant 29\}$ 是一个不含紧优双环网的无限族.

(b) 若 $\{n(t)\colon t\in\mathbb{Z}, t\geqslant 29\}$ 含几乎紧优双环网, 则必存在几乎紧瓦 $L=L(n;l,h,x,y)$. 令 $z=|x-y|$, 则由引理 2 知 $z\leqslant 1$. 由 (2) 式计算 $H_{0,4}$ 和 $H_{1,4}$, 得

$$\begin{aligned}H_{0,4}&=6t+94=6\cdot 28\cdot 22^2\cdot 85^4e^2+6\cdot 132\cdot 22\cdot 85^2e+1000\\&=2^3(3\cdot 7\cdot 22^2\cdot 85^4e^2+3\cdot 33\cdot 22\cdot 85^2e+125);\\H_{1,4}&=3t+91=3\cdot 28\cdot 22^2\cdot 85^4e^2+3\cdot 132\cdot 22\cdot 85^2e+544\\&=17(3\cdot 28\cdot 22^2\cdot 85^3\cdot 5e^2+3\cdot 132\cdot 22\cdot 85\cdot 5e+32).\end{aligned}$$

因为 $H_{0,4}$ 的括号内的数为奇数，$H_{1,4}$ 括号内的数不是 17 的倍数，且 $17\equiv 5(\mathrm{mod}\ 6)$, 所以 $H_{0,4}$ 和 $H_{1,4}$ 都不满足定理 5, 关于 a 和 b 的不定方程 (1) 无解，于是 $\{n(t(f(e)))\colon e\in\mathbb{Z}\}$ 不含几乎紧优双环网.

(c) 若 $\{n(t(f(e)))\colon e\in\mathbb{Z}\}$ 含 2 紧优双环网，则必存在 2 紧瓦 $L=L(n;l,h,x,y)$. 令 $z=|x-y|$, 则当 $z\geqslant 5$ 且 $t\geqslant 151$ 时,

$$3n(t)-\frac{3}{4}5^2=\left(3t+\frac{5}{2}\right)^2+3t-97>\left(3t+\frac{5}{2}\right)^2.$$

所以，由引理 1，能够导出如下矛盾：$3t+3=d(n(t))>3t+\frac{5}{2}+\frac{5}{2}-2=3t+3$, 所以 $z\leqslant 4$. 当 $0\leqslant z\leqslant 4$, $j=5$ 时，分别计算 $H_{z,5}$ 如下：

$H_{4,5}=99=3^2\cdot 11$;　$H_{3,5}=3t+97=2(3\cdot 14f^2+3\cdot 66f+275)$;

$H_{2,5}=6t+97=17(6\cdot 28\cdot 22^2\cdot 85^2\cdot 5e^2+6\cdot 132\cdot 22\cdot 85\cdot 5e+59)$;

$H_{1,5}=9t+99=2(9\cdot 14f^2+9\cdot 66f+729)$;

$H_{0,5}=12t+103=5(12\cdot 28\cdot 22^2\cdot 17\cdot 85^3e^2+12\cdot 132\cdot 22\cdot 17\cdot 85e+383)$.

易知 $H_{z,5}$ 的上述值都不满足定理 2 的条件, 所以关于 a 和 b 的不定方程 (1) 无解. 于是, $\{n(t(f(e))):e\in\mathbb{Z}\}$ 是一个不含 2 紧优双环网.

(d) 若 $\{n(t(f(e))):\ e\in\mathbb{Z}\}$ 含 3 紧优双环网，则必存在 3 紧瓦 $L=L(n;l,h,x,y)$. 令 $z=|x-y|$, 则当 $z\geqslant 7$ 且 $t\geqslant 151$ 时,

$$3n(t)-\frac{3}{4}7^2=\left(3t+\frac{5}{2}\right)^2+3t-115>\left(3t+\frac{5}{2}\right)^2.$$

由引理 1, 能够导出如下矛盾：$3t+4=d(n(t))>3t+\frac{5}{2}+\frac{7}{2}-2=3t+4$, 所以 $z\leqslant 6$. 当 $0\leqslant z\leqslant 6$, $j=6$ 时，分别计算 $H_{z,6}$ 如下：

$H_{6,6}=114=2\cdot 57$;　$H_{5,6}=3t+109=2(3\cdot 14f^2+3\cdot 66f+281)$;

$H_{4,6}=6t+106=11(6\cdot 28\cdot 22\cdot 2\cdot 85^4e^2+6\cdot 12\cdot 22\cdot 85^2e+92)$;

$H_{3,6}=9t+105=3\cdot 2^3(3\cdot 7\cdot 11\cdot 22\cdot 85^4e^2+3\cdot 33\cdot 22\cdot 85e+61)$;

$H_{2,6}=12t+106=2(6t+53)$;

$H_{1,6}=15t+109=2(15\cdot 14f^2+15\cdot 66f+1187)$;

$H_{0,6}=18t+114=3(6t+38)$.

容易验证，$H_{6,6}$, $H_{5,6}$, $H_{4,6}$, $H_{3,6}$, $H_{2,6}$, $H_{1,6}$ 都不满足定理 2 的条件，所以不定方程 (1) 无解. 至于 $H_{0,6}$, 如果方程 (1) 有整数解, 则由定理 2 知，$6t+38$ 能够表示成 s^2+3m^2 的形式. 因

为 $3 \nmid (6t+38)$, 而 $2 | (6t+38)$, 所以由定理 1 的推论知 $6t+38 \equiv 4 (\mathrm{mod}\ 6)$. 但 $6t+38 \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 6)$, 矛盾. 所以在这种情形下不定方程 (1) 仍无解.

综上所述, $\{n(t(f(e))): e \in \mathbb{Z}\}$ 是不含 $k\,(0 \leqslant k \leqslant 3)$ 紧优双环网的无限族.

定理 4 设 $n(t) = 3t^2 + 6t - 26$, $t = t(g) = 14812g^2 + 3036g + 151$, $s(g) = 14308392g^4 + 6176604g^3 + 984630g^2 + 68625g + 1764$, 则 $\{G(n(t(g)); s(g)): g = g(e) = 22 \cdot 85^2 e, e \in \mathbb{Z}\}$ 是 4 紧优双环网无限族, 直径为 $3t+5$, 初始元素为 $G(69283; 1764)$.

证 设 $n(t) = 3t^2 + 6t - 26$, $t(f) = 28f^2 + 132f + 151$, $f = 23g$, $g = 22 \cdot 85^2 e$, 则 $t = 14812g^2 + 3036g + 151$. 由定理 3 知 $\{n(t(g(e))): e \in \mathbb{Z}\}$ 是不含 $k\,(0 \leqslant k \leqslant 3)$ 紧优双环网的无限族. 下面证明它含 4 紧优双环网. 为此令 $z = x - y = 1$, $j = 7$, 并代入 (1) 式得

$$(a+b-6)(a+b-7) - ab - 7t - 26 = 0. \tag{5}$$

易知 $a = 1, b = -322g - 27$ 是方程 (5) 的一个解, 从而得

$l(g) = 2t + a = 29624g^2 + 6072g + 303;$

$h(g) = 2t + b = 29624g^2 + 5750g + 275;$

$x(g) = t + a + b - 7 = 14812g^2 + 2714g + 119;$

$y(g) = x - 1 = 14812g^2 + 2714g + 118;$

$h'(g) = h - y = 14182g^2 + 3036g + 157;$

$l'(g) = l - x = 14182g^2 + 3358g + 184.$

取 $\alpha(g) = 322g^2 + 73g + 4$, $\beta(g) = -322g^2 - 66g - 3$, 则容易验证当 $g = g(e) = 22 \cdot 85^2 e (e \in \mathbb{Z})$ 时, $\alpha(g)y(g) + \beta(g)h'(g) = 1$ 且 $\mathrm{g.c.d.}(y(g), h'(g)) = 1$. 由引理 3 知 L 形瓦 $L(n; l, h, x, y)$ 是可以 $(1, s)$ 实现的, 其中 $s(g) = \alpha(g)l(g) - \beta(g)l'(g) = 14308392g^4 + 6176604g^3 + 984630g^2 + 68625g + 1764$, 且 $g = g(e) = 22 \cdot 85^2 e$, $e \in \mathbb{Z}$.

推论 $G(69283; 1764)$ 是 4 紧优双环网, 它的直径为 458.

参 考 文 献

1 Xu J M. Topological Structure and Analysis of Interconnection Networks. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers, 2001

2 Wong C K, Coppersmith D. A Combinatorial problem related to multimodule memory organization. J Assoc Comput Mach, 1974, 21(3): 392~401

3 Aguilo F, Fiol M A. An efficient algorithm to find optimal double loop networks. Discrete Math, 1995, 138: 15~29

4 Erdös P, Hsu D F. Distributed loop networks with minimum transmission delay. Theoretical Computer Science, 1992, 100: 223~241

5 Esque P, Aguilo F, Fiol M A. Double commutative-step digraphs with minimum diameters. Discrete Math, 1993, 114: 147~157

6 Foil M A, Yebra J L, Alegre I, et al. A discrete optimization problem in local networks and data alignment. IEEE Trans Computers, 1987, 36: 702~713

7 李乔, 徐俊明, 张忠良. 最优双环网络的无限族. 中国科学, A 辑, 1993, 23(9): 979~992

8 徐俊明. 不含紧优和几乎紧优双环网络无限族. 科学通报, 1999, 44(5): 486~492

9 徐俊明. 12 紧优双环网络无限族. 高校应用数学学报, A 辑, 2000, 15(2): 147~151

10 徐俊明. 计算机互连双环网络的最优设计. 中国科学, E 辑, 1999, 29(3): 272~278