关于3连通图的容错直径和宽直径

谢 歆^{1,2} 徐俊明¹

(1. 中国科学技术大学数学系, 安徽 合肥 230026)

(2. 黄山学院数学系, 安徽 黄山 245021)

摘 要 容错直径和宽直径是度量网络可靠性和有效性的重要参数. 对任意 k 连通图, 它的容错直径 D_k 不超过宽直径 d_k . 本文证明: 当 $D_2 = 2$ 时, $d_3 \leq \max\{D_3 + 1, 2D_3 - 2\}$; 当 $D_2 \geq 3$ 时, $d_3 \leq (D_2 - 1)[2(D_2 - 1)(D_3 - 1) - D_2 - 2] + 1$.

关键词 连通度; 直径; 容错直径; 宽直径; 网络

中图分类号 O 157.5 **文献标识码** A

1 引 言

本文采用[1]中有关图论术语和记号. 设 $G = (V, E)$ 是连通的简单无向图. G 的直径 $d(G)$ 是 G 中任何两顶点之间最短路的最大长度, G 的连通度 $\kappa(G)$ 是分离 G 所需的最小顶点数目. 若 G 是 k 连通的, 则由著名的 Menger 定理知, 对于 G 中任何两个不同的顶点 x 和 y , G 中存在至少 k 条内部不交的 (x, y) 路. 图的这一性质表明, 当网络的传输带宽有限时, 为加快数据传输, 人们可以首先将需要传输的数据包拆成 k 个小包, 然后沿 k 条内部点不交路分别同时传输.

然而, 在一个实时处理系统(比如图象处理系统, 雷达系统, 天气预报系统等)的互连网络中, 传输延迟是有一定要求的, 超过给定时限的任何数据都被认为是无效的. 在这样的系统中, 一定数目的处理器发生故障, 势必会增大传输延迟, 或者用 k 条内部不交的路传输数据时, 其中每条路长应限制在一定的范围内. 这些问题的研究导致两个重要的图论概念 - 容错直径和宽直径.

设 G 是一个 k 连通图. 则对任何子集 $F \subset V(G)$, 如果 $|F| < k$, 那么 $G - F$ 是连通的, 即 $G - F$ 的直径 $d(G - F)$ 是确定的. G 的 $(k - 1)$ 容错直径 $D_k(G)$ 定义为

$$D_k(G) = \max\{d(G - F); \forall F \subset V(G), |F| < k\}.$$

由定义, 易知

$$d(G) = D_1(G) \leq D_2(G) \leq \dots \leq D_{k-1}(G) \leq D_k(G).$$

G 的 k 宽直径 $d_k(G)$ 定义为最小正整数 l 使得对于 G 中任何两顶点 u 和 v , 存在 k 条内部不交

* 收稿日期: 2003-01-15

基金项目: 国家自然科学基金(10271114); 安徽省自然科学基金(01046102)

且长度都不超过 l 的 uv 路. 由定义, 易知

$$d(G) = d_1(G) \leq d_2(G) \leq \dots \leq d_{k-1}(G) \leq d_k(G).$$

容错直径概念是由 Krishnamoorthy 和 Krishnamurthy[2]提出来的, 而宽直径的概念是由 Hsu, Lyuu[4]和 Flandrin, Li[5]独立提出来的. 这两个参数给出了容错网络和平行处理系统网络的传输延迟的准确度量, 已引起许多研究者的兴趣, 并已确定了许多著名网络的容错直径和宽直径的值[4, 6].

在本文中, 如果没有特别指明, 记号 d, d_k, D_k 分别表示图 G 的直径 $d(G)$, 宽直径 $d_k(G)$ 和容错直径 $D_k(G)$. 对于 k 连通图 G , 由容错直径 D_k 的定义, G 中存在两顶点 u, v 和子集 $F \subseteq V(G) \setminus \{u, v\}, |F| < k$, 使得 u 和 v 在 $G - F$ 的距离为 D_k . 由宽直径的定义知, G 中存在 k 条内部点不交的 uv 路使得每条路的长度不超过 d_k . 由于 $|F| < k$, 所以这 k 条 uv 路中至少有一条不含 F 中顶点. 这表明 $D_k \leq d_k$, 其中的等号对许多著名的图是成立的[6].

对于一般的图 G , 求它的宽直径是个 NP-hard 问题[3], 求图的容错直径难度也很大. 因此, 讨论 d_k 和 D_k 之间的进一步关系显然是重要的. Flandrin 和 Li[5] 证明了下述结果.

引理 1 设 G 是 2 连通图. 当 $d = 2$ 时, $d_2 \leq D_2 + 1$; 当 $d \geq 3$ 时, $d_2 \leq (d - 1)(D_2 - 1)$.

最近, 作者[7]改进了这个结果, 证明了: $d_2 \leq \max\{(d - 1)(D_2 - \frac{d}{2} - 1) + 1, D_2 + 1\}$;

当 $d = 2$ 时, $d_3 \leq \max\{(D_2 - 1)(D_3 - \frac{D_2}{2} - 1) + 1, 3D_3 - 5, D_3 + 1\}$, 并给出 $d = 2$ 时 $d_2 = D_2 + 1$ 的一个充分必要条件: $d_2 = 3$ 或 4 且达到 d_2 值的任何两顶点必相邻. 本文讨论 3 连通图的容错直径和宽直径的关系, 证明了: 当 $D_2 = 2$ 时, $d_3 \leq \max\{D_3 + 1, 2D_3 - 2\}$; 当 $D_2 \geq 3$ 时, $d_3 \leq (D_2 - 1)[2(D_2 - 1)(D_3 - 1) - D_2 - 2] + 1$.

2 主要结果的证明

引理 2 设 G 是 3 连通图, $uv \in E(G)$. 则 $G - uv$ 中存在 2 条内部不交且长度不超过 $\max\{D_3 + 1, D_2(D_3 - 2) + 2\}$ 的 uv 路.

证明 设 P 是 $G - uv$ 中一条最短的 uv 路. 由于 $\epsilon(P) - 1 \leq d(G - v) \leq D_2$, 所以, $\epsilon(P) \leq D_2 + 1 \leq D_3 + 1$. 我们分别考虑 $\epsilon(P) = 2$ 和 $\epsilon(P) \geq 3$ 两种情形.

设 $\epsilon(P) = 2$, 并设 $P = uxv$. 因为 G 是 3 连通的, 所以 $\delta(G) \geq 3$. 设 y 是 v 在 $G - uv$ 中的异于 x 的邻点, Q 是 $G - \{x, v\}$ 中一条最短 uy 路. 则 $Q + yv$ 是 $G - uv$ 中一条与 P 内部不交的 uv 路, 而且

$$\epsilon(Q + yv) = \epsilon(Q) + 1 \leq d(G - \{x, v\}) + 1 \leq D_3 + 1.$$

因此, P 和 $Q + yv$ 是 $G - uv$ 中 2 条内部不交且长度都不超过 $D_3 + 1$ 的 uv 路.

设 $\epsilon(P) \geq 3$, 并设 $P = ux_1 \dots x_mv$ ($2 \leq m \leq D_2$), y 是 v 在 $G - uv$ 中异于 x_m 的一个邻点, P_i 是 $G - \{x_i, v\}$ 中一条最短的 uy 路. 则对每个 $i = 1, 2, \dots, m$, 有 $\epsilon(P_i) \leq d(G - \{x_i, v\}) \leq D_3$.

若 P 与 $P_1, \dots, P_m$ 中某条 P_i 内部不交, 则 P 和 P_i 是 $G - uv$ 中 2 条内部点不交且长度都不超过 $D_3 + 1$ 的 uv 路. 下面, 假定 P 与 $P_1, \dots, P_m$ 中任何一条内部相交. 则 P 经过 $P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_m$ 的内部点至少 m 次. 令 $H = P \cup P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_m \cup \{yv\}$. 用 h 表示 H 的顶点

数目. 于是,

$$h \leq 2 + m + m(D_3 - 1) + 1 - m = m(D_3 - 1) + 3.$$

任取 $x \in V(H) \setminus \{u, v\}$. 若 $x = x_i$, 则 $P_i + yv$ 是 $G - x_i$ 中 uv 路; 若 x 不为任何 x_i , 则 P 是 $H - x$ 中 uv 路. 这说明在 H 中分离 u 和 v 至少需要 2 个顶点. 由 Menger 定理知, H 中必存在两条内部点不交的 uv 路. 设 Q_1 和 Q_2 是这样的两条路, 并不妨设 $\varepsilon(Q_1) \leq \varepsilon(Q_2)$. 由于 $m + 1 = \varepsilon(P) \leq \varepsilon(Q_1)$ 和 $m \leq D_2$, 所以,

$$\varepsilon(Q_2) \leq h - [\varepsilon(Q_1) - 1] - 1 \leq m(D_3 - 1) + 3 - m - 1 \leq D_2(D_3 - 2) + 2.$$

因此, Q_1 和 Q_2 是 $G - uv$ 中两条内部点不交且长度都不超过 $D_2(D_3 - 2) + 2$ 的 uv 路. 引理得证. $\square$

定理 3 设 G 是 3 连通图. 若 $D_2 = 2$, 则 $d_3 \leq \max\{D_3 + 1, 2D_3 - 2\}$.

证明 由宽直径的定义, 只需证明对 G 中任意两顶点 u 和 v , 存在 3 条内部点不交且长度都不超过 $\max\{D_3 + 1, 2D_3 - 2\}$ 的 uv 路.

由引理 2, 不妨设是 u 和 v 在 G 中不相邻. 由于 $d(G) \leq D_2(G) = 2$, 所以 u 和 v 之间的距离为 2. 设 $P = uv$ 是 G 中一条最短的 uv 路. 设 Q_1 和 Q_2 是 $G - x$ 中两条内部不交的 uv 路, 并不妨设 $\varepsilon(Q_1) \leq \varepsilon(Q_2) \leq d_2(G - x)$. 由于 $2 \leq d(G - x) \leq D_2 = 2$, 所以 $d(G - x) = 2$. 由引理 1 得,

$$\varepsilon(Q_2) \leq d_2(G - x) \leq D_2(G - x) + 1 \leq D_3 + 1.$$

因此, P, Q_1 和 Q_2 是 G 中 3 条内部点不交且长度都不超过 $D_3 + 1$ 的 uv 路. $\square$

定理 4 设 G 是直径 d 至少为 2 的 3 连通图. 若 $D_2 \geq 3$, 则

$$d_3 \leq (D_2 - 1)[2(D_2 - 1)(D_3 - 1) - D_2 - 2] + 1.$$

证明 由宽直径的定义, 只需证明对 G 中任意两顶点 u 和 v , 存在 3 条内部点不交且长度都不超过 $(D_2 - 1)[2(D_2 - 1)(D_3 - 1) - D_2 - 2] + 1$ 的 uv 路.

不难验证当 $D_3 \geq D_2 \geq 3$ 时有

$$\begin{aligned} D_3 + 1 &\leq (D_2 - 1)(D_3 - 1) < D_2(D_3 - 2) + 2 \\ &< (D_2 - 1)[2(D_2 - 1)(D_3 - 1) - D_2 - 2] + 1. \end{aligned} \quad (1)$$

所以, 由引理 2 和不等式 (1), 不妨设 u 和 v 在 G 中不相邻. 设 $P = ux_1 \cdots x_m v$ 是 G 中一条最短的 uv 路, 则 $1 \leq m \leq d - 1$. 对每个 $i = 1, 2, \dots, m$, 令 Q_{i1} 和 Q_{i2} 是 $G - x_i$ 中 2 条内部不交的最短 uv 路. 显然, $m + 1 \leq \varepsilon(Q_{i1}), \varepsilon(Q_{i2}) \leq d_2(G - x_i)$. 我们进一步证明

$$\varepsilon(Q_{ij}) \leq (D_2 - 1)(D_3 - 1), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2. \quad (2)$$

事实上, 若存在 i 使得 $d(G - x_i) = 2$, 则由引理 1 和不等式 (1), $\varepsilon(Q_{ij}) \leq d_2(G - x_i) \leq D_3 + 1 \leq (D_2 - 1)(D_3 - 1)$; 若存在 i 使得 $d(G - x_i) \geq 3$, 则由引理 1, $\varepsilon(Q_{ij}) \leq d_2(G - x_i) \leq [d(G - x_i) - 1][D_2(G - x_i) - 1] \leq (D_2 - 1)(D_3 - 1)$. 因此, 不等式 (2) 成立.

令 $H = P \cup \{Q_{ij}; i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2\}$, 并令 H 中的顶点数为 h . 我们要证明 H 中存在 3 条内部点不交且长度都不超过的 $(D_2 - 1)[2(D_2 - 1)(D_3 - 1) - D_2 - 2] + 1$ 的 uv 路. 由 $\varepsilon(P) = m + 1 \leq D_3$ 及不等式 (1) 和 (2), 不妨假定 P 和 $\{Q_{ij}; i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2\}$ 中不存在 3 条内部点不交的 uv 路. 那么这 $2m + 1$ 条 uv 路的内部点重复次数至少为 $m + (m - 1)m = m^2$, 其中对每个 i 和 $l (1 \leq i \leq m, l \neq i)$, P 与 Q_{i1} 或者 Q_{i2} 至少有一个内部交点, Q_{i1} 和 Q_{i2} 分别与 Q_{l1} 或者 Q_{l2} 至少有一个内部交点. 于是,

$$\begin{aligned}
h &\leq 2 + m + 2m[(D_2 - 1)(D_3 - 1) - 1] - m^2 \\
&= 2m(D_2 - 1)(D_3 - 1) - m^2 - m + 2.
\end{aligned}$$

现在证明在 H 中分离 u 和 v 至少需要 3 个顶点. 任取两个不同的 $x, y \in V(H) \setminus \{u, v\}$. 若 x, y 都不在 P 中, 则 P 是 $H - \{x, y\}$ 中 uv 路. 若 x 和 y 中至少有一个在 P 中, 不妨设 $x = x_i$, 则 Q_{i1} 和 Q_{i2} 是 $H - x$ 中两条内部不交的 uv 路, 即 $H - \{x, y\}$ 中含一条 uv 路. 这说明在 H 中分离 u 和 v 至少需要 3 个顶点. 由 Menger 定理, H 中存在 3 条内部点不交的 uv 路, 设为 P_1, P_2 和 P_3 , 并不妨设 $\epsilon(P_1) \leq \epsilon(P_2) \leq \epsilon(P_3)$. 由于 $m + 1 = \epsilon(P) \leq \epsilon(P_1)$, 所以,

$$\begin{aligned}
\epsilon(P_3) &\leq h - [\epsilon(P_1) - 1] - [\epsilon(P_2) - 1] - 1 \leq h - 2m - 1 \\
&\leq 2m(D_2 - 1)(D_3 - 1) - m^2 - m + 2 - 2m - 1 \\
&= m[2(D_2 - 1)(D_3 - 1) - m - 3] + 1.
\end{aligned}$$

令 $f(m) = m[2(D_2 - 1)(D_3 - 1) - m - 3] + 1$. 由于 $1 \leq m \leq d - 1 \leq D_2 - 1$ 且 $D_3 \geq D_2 \geq 3$, 所以不难验证 $f(m)$ 在区间 $[1, D_2 - 1]$ 上单调增加. 由于 P_1, P_2 和 P_3 是 G 中 3 条内部点不交的 uv 路, 所以由宽直径的定义,

$$d_3 \leq \epsilon(P_3) \leq f(D_2 - 1) = (D_2 - 1)[2(D_2 - 1)(D_3 - 1) - D_2 - 2] + 1.$$

定理得证. □

参 考 文 献

[1] 徐俊明. 图论及其应用. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 1998.

[2] Krishnamoorthy M S, Krishnamurthy B. Fault diameter of interconnection networks. Computers and Mathematics with Applications, 1987, 13(5/6):577-582.

[3] Hsu D F. On container width and length in graphs, groups and networks. IEICE Trans. Fund. Elect. Comm. Comput. 1994, E77-A:668-680.

[4] Hsu D F, Lyuu Y D. A graph-theoretical study of transmission delay and fault tolerance. International Journal of Mini and Microcomputers, 1994, 16(1):35-42.

[5] Llandrin E, Li H. Mengerian properties, hamiltonicity, and claw-free graphs, Networks. 1994, 24(2): 177-183.

[6] Liaw S C, Chang G J. Generalized diameters and Rabin numbers of networks. J. of Combin. Optimization. 1999, 2(3):371-384

[7] 徐俊明, 谢歆. 关于图的容错直径和宽直径. 中国科学技术大学学报. 2002, 32(2):135-139

On Fault-Tolerant Diameter and Wide Diameter of 3-Connected Graphs

Xie Xin^{1,2} Xu Junming¹

(1. Department of Mathematics, USTC, Hefei 230026)

(2. Department of Mathematics, Huangshang College, Huangshang 245021)

Abstract Fault-tolerant diameter D_k and wide diameter d_k are two important parameters for measuring reliability and efficiency of an interconnection network. It is clear that D_k does not exceed d_k for any k -connected graph. This paper shows that $d_3 \leq \max\{D_3 + 1, 2D_3 - 2\}$ if $D_2 = 2$ and $d_3 \leq (D_2 - 1)[2(D_2 - 1)(D_3 - 1) - D_2 - 2] + 1$ if $D_2 \geq 3$.

Key words Connectivity; Diameter; Fault-tolerant diameter; Wide diameter; Networks