应 用 数 学
MATHEMATICA APPLICATA
2004,17(2):329～332

Kautz 图的限制边连通度 x

范英梅[1,2]**,徐俊明**[1]
(1.**中国科学技术大学数学系**,**合肥** 230026;2.**广西大学数学系**,**南宁** 530004)

摘要:**限制边连通度是对传统边连通度的推广,而且是计算机互连网络容错性的一个重要度量.本文考虑两类重要的网络模型——**Kautz **有向图** $K(d,n)$ **和** Kautz **无向图** $UK(d,n)$ **的限制边连通度** λ',**并得到如下结果**:**除了** $\lambda'(K(2,1))$ **不存在外**,**均有** $\lambda'(K(d,n)) = 2d-2$;**当** $d \geq 3, n \geq 3$ **时**,$4d-5 \leq \lambda'(UK(d,n)) \leq 4d-4$.

关键词:**限制边连通度**;Kautz **有向图**;Kautz **无向图**;**互连网络**
中图分类号:O157.5　　**AMS(2000)主题分类**:05C40
文献标识码:A　　**文章编号**:100129847(2004)0320329204

作为传统边连通度的推广,Esfahanian **和** Hakimi[3]**首先提出限制边连通度的概念如下**:

定义 1　**设** $G = (V, E)$ **是连通无向图**, B **是** E **的非空子集.如果** $G - B$ **不连通且不含孤立点**,**则称** B **为** G **的限制边割.** G **的限制边连通度**,**记为** $\lambda'(G)$,**定义为** G **的所有限制边割中的最小边数.**

命题 1[3]　**设** G **是阶至少为** 4 **的连通无向图且不为星图**,**则** $\lambda'(G)$ **存在且** $\lambda(G) \leq \lambda'(G) \leq \xi(G)$,**其中** $\lambda(G)$ **为** G **的边连通度**, $\xi(G) = \min\{d(x) + d(y) - 2 ∶P\ xy \in E(G)\}$.

定义 2　**设** $D = (V, E)$ **是强连通有向图**, F **是** E **的非空子集.如果** $D - F$ **不强连通且** $D - F$ **的任一强连通分支至少有两个点**,**则称** F **为** D **的限制截边集.** D **的限制边连通度**,**记为** $\lambda'(D)$,**定义为** D **的所有限制截边集中的最小边数.**

本文完全确定了 Kautz **有向图的限制边连通度**,**并给出了** Kautz **无向图的限制边连通度的一个仅相差** 1 **的上界和下界.**

定义 3　Kautz **有向图**,**记为** $K(d,n)$,**有顶点集** V **和边集** E,**其中** $V = \{x_1x_2\cdots x_n ∶ x_i \in \{0,1,\cdots,d\}, x_{i+1} \neq x_i, i = 1,2,\cdots,n-1\}$,**而且对** $x, y \in V$,**若** $x = x_1x_2\cdots x_n$,**则** $(x,y) \in E\ Z\ y = x_2x_3\cdots x_n\alpha, \alpha \in \{0,1,\cdots,d\} \setminus \{x_n\}$.

显然, $K(d,1)$ **是阶为** $d+1$ **的完全有向图.已经证明了** $K(d,n)$ **是** d **正则的**,**而且其连通度为** d.

一对有向边称为是对称的,**如果它们有相同的端点而方向不同.如果在顶点** x **和** y **之间有一对对称边**,**则** $x = x_1x_2\cdots x_n$ **的坐标** $x_1, x_2, \cdots, x_n$ **在** $\{0,1,\cdots,d\}$ **中两个不同的元素** a **和** b **之**

---

x **收稿日期**:2003206226
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10271114)
作者简介:范英梅,女,汉,广西人,硕士,广西大学数学系讲师,研究方向:图论和组合网络.

间交错出现.因此,当 n 为偶数时,必有 $y = x_2 x_3 \cdots x_n x_1$;当 n 为奇数时,必有 $y = x_2 x_3 \cdots x_n x_2$.在本文中,对称边的两端点 x 和 y 都采用这种表示.易知,$K(d, n)$ 恰好包含了 $\binom{d+1}{2}$ 对称边,不同对的对称边的端点之间的距离至少为 $n - 1$.若 (x, y) 和 (y, x) 为一对对称边,以下为方便起见,我们也称它们之中的一条边为对称边.若 $u = u_1 u_2 \cdots u_n$ 和 $v = v_1 v_2 \cdots v_n$ 是 $K(d, n)$ 的两个不同的顶点.若 $u_n \neq v_1$,则 $K(d, n)$ 中唯一长为 n 的有向链 P:

$$u = u_1 u_2 \cdots u_n \to u_2 u_3 \cdots u_n v_1 \to u_3 u_4 \cdots u_n v_1 v_2 \to \cdots \to v_1 v_2 \cdots v_n = v$$

可简记为 $P = u_1 u_2 \cdots u_n v_1 v_2 \cdots v_n$.

定义 4 Kautz 无向图,记为 $UK(d, n)$ 是一个简单无向图.它是通过删去 $K(d, n)$ 中所有边的方向并去掉由此产生的多重边而得到.$UK(d, n)$ 中一条边称为是奇异的,如果它相应于 $K(d, n)$ 中一对对称边.

显然,$UK(d,1) = K_{d+1}$ 且 $UK(d, n)(n \geq 2)$ 的最小度为 $2d - 1$.Bermond 和 Peyrat 在[4]中证明了 $UK(d, n)(n \geq 2)$ 的连通度为 $2d - 1$.Xu 和 Fan 已证明 $\lambda'(UK(2,2)) = 3$,且当 $n \geq 3$ 时,$\lambda'(UK(2, n)) = 4$ 和下面的引理.

引理 1 设 xy 是 $UK(d, n)(d \geq 2, n \geq 2)$ 中任一条奇异边,则 $UK(d, n)$ 中存在 $2d - 1$ 条内点不交的 xy2 路,其中一条长为 1,其余 $2d - 2$ 条长为 3.

引理 2 设 (x, y) 和 (u, v) 是 $K(d, n)(d \geq 2, n \geq 2)$ 中任两条不相邻的边且 (x, y) 为对称边,则 $K(d, n)$ 中存在 $(2d - 2)$ 条内点不交的从 $\{x, y\}$ 到 $\{u, v\}$ 的有向路.

证 设 $x = x_1 x_2 \cdots x_n$,则 $y = x_2 x_3 \cdots x_n \alpha$,其中当 n 为偶数时,$\alpha = x_1$;当 n 为奇数时,$\alpha = x_2$,而且 $x_i \in \{a, b\}$.记 $u = u_1 u_2 \cdots u_n$,则 $v = u_2 u_3 \cdots u_n u_{n+1}$,其中 $u_1, \cdots, u_{n+1} \in \{0,1, \cdots, d\}$ 且 $u_i \neq u_{i+1}$, $i = 1,2, \cdots, n$.选取 $(2d - 2)$ 条从 $\{x, y\}$ 到 $\{u, v\}$ 的有向链 $W_1, W_2, \cdots, W_{d-1}, T_1, T_2, \cdots, T_{d-1}$ 如下:

$$W_i = \begin{cases} x_1 x_2 x_3 \cdots x_n w_i u_1 u_2 \cdots u_n, & w_i \neq u_1, \\ x_1 x_2 x_3 \cdots x_n w_i u_2 u_3 \cdots u_n, & w_i = u_1; \end{cases} \quad T_j = \begin{cases} x_2 x_3 \cdots x_n \alpha t_j u_2 u_3 \cdots u_{n+1}, & t_j \neq u_2, \\ x_2 x_3 \cdots x_n \alpha t_j u_3 u_4 \cdots u_{n+1}, & t_j = u_2, \end{cases}$$

其中 $w_i, t_j \in \{0,1, \cdots, d\} \setminus \{a, b\}$, $w_1, w_2, \cdots, w_{d-1}$ 互不相同,$t_1, t_2, \cdots, t_{d-1}$ 互不相同.两条从 $\{x, y\}$ 到 $\{u, v\}$ 的有向链称为内点不交的,如果它们仅在 $\{x, y\}$ 或 $\{u, v\}$ 中相交.我们现在证明上面选取的 $(2d - 2)$ 条从 $\{x, y\}$ 到 $\{u, v\}$ 的有向链 $W_1, W_2, \cdots, W_{d-1}, T_1, T_2, \cdots, T_{d-1}$ 是内点不交的.

假若存在 i 和 $j(1 \leq i \neq j \leq d - 1)$ 使得 W_i 与 W_j 内点相交(可设 $w_i \neq u_1$),且设 z 为 W_i 与 W_j 的第一个内部交点.设 $W_i(x, z)$ 部分的长为 k, $W_j(x, z)$ 部分的长为 t,则 $2 \leq k, t \leq n - 1$.由于 z 可由 x 沿 W_i 通过 k 步,沿 W_j 通过 t 步到达,故 z 可写成

$$z = x_{k+1} \cdots x_n w_i u_1 \cdots u_{k-1} = \begin{cases} x_{t+1} \cdots x_n w_j u_1 \cdots u_{t-1}, & w_j \neq u_1, \\ x_{t+1} \cdots x_n w_j u_2 \cdots u_t, & w_j = u_1. \end{cases}$$

因为 $w_i \neq w_j$,所以 $k \neq t$.当 $k < t$ 时,存在 $h(k + 1 \leq h \leq n)$ 使 $w_j = x_h \in \{a, b\}$,矛盾.当 $k > t$ 时,存在 $l(t + 1 \leq l \leq n)$ 使 $w_i = x_l \in \{a, b\}$,矛盾.所以,$W_1, W_2, \cdots, W_{d-1}$ 是内点不交的.同样地可以证明 $T_1, T_2, \cdots, T_{d-1}$ 也是内点不相交的.

假若存在 i 和 $j(1 \leq i, j \leq d - 1)$ 使得 W_i 与 T_j 有内点相交,则令 z 为 W_i 与 T_j 的第一个内部交点.设 $W_i(x, z)$ 部分的长为 k, $T_j(y, z)$ 部分的长为 t,则 $2 \leq k, t \leq n - 1$.由于 z 可由 x 沿 W_i 通过 k 步可达,z 由 y 沿 T_j 通过 t 步到达,故 z 可表示成

$$z=\begin{cases} x_{k+1}\cdots x_n w_i u_1\cdots u_{k-1}=x_n\alpha t_j u_2\cdots u_t, & w_i\neq u_1, t_j\neq u_2;\\ x_{k+1}\cdots x_n w_i u_2\cdots u_k=x_{t+2}\cdots x_n\alpha t_j u_2\cdots u_t, & w_i=u_1, t_j\neq u_2;\\ x_{k+1}\cdots x_n w_i u_1\cdots u_{k-1}=x_{t+2}\cdots x_n\alpha u_2\cdots u_{t+1}, & w_i\neq u_1, t_j=u_2;\\ x_{k+1}\cdots x_n w_i u_2\cdots u_k=x_{t+2}\cdots x_n\alpha u_2\cdots u_{t+1}, & w_i=u_1, t_j=u_2.\end{cases}$$

同前面情形一样地分析可得到 w_i 或 $t_j\in\{a,b\}$ 的矛盾.所以,对任何 i 和 $j(1\leq i,j\leq d-1)$, W_i 与 T_j 是内点不相交的.

综上知我们选取的 $2d-2$ 条从 $\{x,y\}$ 到 $\{u,v\}$ 的有向链 $W_1,W_2,\cdots,W_{d-1},T_1,T_2,\cdots,T_{d-1}$ 是内点不交的,且每条链必包含一条从 $\{x,y\}$ 到 $\{u,v\}$ 的有向路作为子图.引理得证.

引理 3 设 (x,y) 是 Kautz 有向图 $K(d,n)(d\geq 2,n\geq 2)$ 中任一条对称边,则从 $\{x,y\}$ 发出的边集 $E^+(\{x,y\})$ 是 $K(d,n)$ 的限制截边集.

证 记 $D=K(d,n)(d\geq 2,n\geq 2)$. 设 $x=x_1x_2\cdots x_n$ 和 $y=x_2x_3\cdots x_n\alpha$. 下证 $E^+(\{x,y\})$ 是 D 的限制截边集.记 $D_1=D[\{x,y\}]$,显然 D_1 是强连通的.因为当 $n\geq 2,d\geq 2$ 时, $|D_2|=|D|-|D_1|=d^n+d^{n-1}-2>2$,所以只需证 $D_2=D-D_1$ 是强连通的.任取 $u,v\in V(D_2)$.

情形 1 $d=2$. 因为 $\kappa(D)=d=2$,所以 D 中存在两条内点不交的 (u,v) 2路 P_1 和 P_2. 若 P_1 与 P_2 中有一条既不含 x 也不含 y,则 D_2 中必有一条 (u,v) 2路.下设 $x\in V(P_1)$, $y\in V(P_2)$,并设 $(w,x)\in E(P_1)$, $(y,z)\in E(P_2)$,则 $(w,z)\in E(D)$. 于是 $P_1(u,w)+(w,z)+P_2(z,v)$ 是 D_2 中一条 (u,v) 2路.同理可证 D_2 中也包含一条 (v,u) 2路.

情形 2 $d\geq 3$. 因为 $\kappa(D)=d\geq 3$,所以 D 中存在 d 条内点不交的 (u,v) 2路.因此 D_2 中必包含一条 (u,v) 2路.同理 D_2 中也包含一条 (v,u) 2路.

由情形 1 与情形 2 知, u 和 v 在 D_2 中是强连通的,又由 u,v 的任意性知, D_2 是强连通的.故 $E^+(\{x,y\})$ 是 $D=(K(d,n))$ 的一个限制截边集.引理得证.

定理 1 $\lambda'(K(d,n))=\begin{cases}\text{不存在}, & n=1,d=2;\\ 2d-2, & d\geq 3,n=1 \text{ 或 } d\geq 2,n\geq 2.\end{cases}$

证 记 $D=K(d,n)$ 和 $\lambda'=\lambda'(D)$. 因为 $K(2,1)$ 是 3 阶完全有向图,显然没有限制截边集,故 $\lambda'(K(2,1))$ 不存在.又当 $d\geq 3$ 时, $K(d,1)$ 是 $d+1$ 阶完全有向图,易知 $\lambda'(K(d,1))=2d-2$. 以下设 $n\geq 2,d\geq 2$. 并设 (x,y) 是 D 的一条对称边.由引理 3 知, $F=E^+(\{x,y\})$ 是 D 的一个含有 $(2d-2)$ 条边的限制截边集,故 $\lambda'\leq|F|=2d-2$.

设 $B\subset E(D)$ 是 D 的一个限制截边集使得 $|B|=\lambda'$. 则 D 的顶点集被划分成两个不相交的子集 V_1 和 V_2 使得 $B=E(V_1,V_2)$. 由 B 的定义知, $|V_1|\geq 2$, $|V_2|\geq 2$. 只需证明 $|B|\geq 2d-2$. 事实上,由于 D 中有 $\binom{d+1}{2}$ 对对称边,且 $\binom{d+1}{2}>2d-2$,所以 $D[V_1]$ 或 $D[V_2]$ 中至少有一对对称边.又由 D 为平衡图知, $|B|=|E(V_1,V_2)|=|E(V_2,V_1)|$. 于是,由引理 2 得 $|B|\geq 2d-2$. 故 $\lambda'=|B|=2d-2$. 定理得证.

引理 4 设 xy 和 uv 是 $UK(d,n)(d\geq 2,n\geq 3)$ 中任两条不同的奇异边,则

$$|N(\{x,y\})\cap N(\{u,v\})|=\begin{cases}2\text{ 或 }0, & n=3;\\ 0, & n\geq 4.\end{cases}$$

证明不难,从略.

定理 2 $4d-5\leq\lambda'(UK(d,n))\leq 4d-4$, $d\geq 3,n\geq 3$.

证 设 F 是 $UK(d,n)\ (d\geq 3, n\geq 3)$ 的一个最小限制边割. 则 $UK(d,n)-F$ 中存在两个非平凡的子图 G_1 与 G_2 使得 $F=E(G_1,G_2)\cup E(G_2,G_1)$, 其中 $E(G_1,G_2)$ 和 $E(G_2,G_1)$ 分别表示 $K(d,n)$ 中从 G_1 到 G_2 和从 G_2 到 G_1 的边集.

(i) F 中无奇异边. 由于 $K(d,n)$ 为平衡图, 所以 $|E(G_1,G_2)|=|E(G_2,G_1)|$. 于是由引理 2, 有 $|F|=|E(G_1,G_2)|+|E(G_2,G_1)|\geq 2(2d-2)=4d-4$.

(ii) F 中有奇异边. 当 F 中有至少两条奇异边时, 则由引理 1 和引理 4 知, $|F|\geq 2(2d-1)-2=4d-4$. 当 F 中仅有一条奇异边时, 则 G_1 或 G_2 中必有奇异边. 于是由 $K(d,n)$ 为平衡图及引理 2 知, $|F|\geq 2(2d-2)-1=4d-5$.

由 (i) 和 (ii) 可知, $\lambda'(UK(d,n))=|F|\geq 4d-5$. 又由命题 1 知 $\lambda'(UK(d,n))\leq\xi(UK(d,n))=4d-4$. 故 $4d-5\leq\lambda'(UK(d,n))\leq 4d-4$. 定理得证.

参考文献:

[1] 徐俊明. 图论及其应用[M]. 合肥:中国科学技术大学出版社,1998.

[2] Xu Junming. Toplogical structure and analysis of interconnection networks[M]. Drodrecht/Boston/London: Kluwer A2cademic Publishers,2001.

[3] Esfahanina A H, Hakimi S L. On computing a edge2connectivity of a graph[J]. Information Processing Letters, 1988, 27:195～199.

[4] Bermond J C, Homobono N, Peyrat C. Connectivity of Kautz networks[J]. Discrete Mathematics, 1993, 114:51～61.

[5] 吕长虹, 张克民. 无向 de Bruijn 图的超边连通性和限制性边连通度[J]. 应用数学学报, 2002, 25(1):29～35.

[6] Meng Jixiang, Ji Youhu. On a kind of restricted connectivity of graphs[J]. Discrete Applied Math., 2002, 117:183～193.

[7] 徐俊明. 点可迁图的限制边连通度[J]. 数学年刊, 2000, 21A(5):605～608.

[8] Xu Junming. On conditional edge2connectivity of graphs[J]. Acta. Math. Appl., Sci., 2000, 16B(4):414～419.

[9] Xu Junming, Xu Keli. On restricted edge2connectivity of graphs[J]. Discrete Math., 2002, 243(123):291～298.

Restricted Edge2connectivity of Kautz Graphs

FAN Ying2mei[1,2], *XU Jun2ming*[1]

(1. *Department of Mathematics, University of Science and Technology of China, Hefei* 230026, *China*; 2. *Department of Mathematics, Guangxi University, Nanning Guangxi* 530004, *China*)

Abstract: The restricted edge2connectivity is a generalization of classical edge2connectivity and can provide a more accurate measure of fault2tolerance for interconnection networks. In this paper, we consider restricted edge2connectivity λ' of Kautz digraph $K(d,n)$ and Kautz undirected graph $UK(d,n)$, which are two classes of important network models. We obtain the following results: $\lambda'(K(d,n))=2d-2$ ex2cept $\lambda'(K(2,1))$, which does not exist, and $4d-5\leq\lambda'(UK(d,n))\leq 4d-4$ for $d\geq 3$ and $n\geq 3$.

Key words: Restricted edge2connectivity; Kautz directed graphs; Kautz undirected graphs; Intercon2nection networks