

## Kautz 网络中的最小反馈点集

王彦辉, 吴叶舟, 徐俊明

(中国科学技术大学 数学系, 安徽 合肥 230026)

**摘要:**对简单有向图  $D=(V,E)$ , 顶点子集  $F\subset V$ , 如果由  $V\setminus F$  导出的子图不含有向圈, 则称  $F$  是  $D$  的反馈点集。点数最小的子集  $F$  称为最小反馈点集, 最小的点数称为反馈数。本文利用 Kautz 最小轨道的方法确定出了 Kautz 有向图  $K(d,k)$  反馈数的一个下界和上界。并且具体给出了当  $k\leq 3$  时的反馈数。

**关键词:**应用数学; 反馈点集; 最小轨道; Kautz 网络

**中图分类号:**O157.5      **文章标识码:**A      **文章编号:**1007-3221(2005)03-0010-05

## Minimum Feedback Vertex Sets in Kautz Networks

WANG Yan-hui, WU Ye-zhou, XU Jun-ming

(Department of Mathematics, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China)

**Abstract:**For a simple digraph  $D=(V,E)$ , a subset  $F\subset V$  is called a feedback vertex set for  $D$  if the induced subgraph by  $V\setminus F$  contains no directcycles. The number of vertices in a minimum feedback vertex set is called the feedback number of  $D$ . This paper establishes the lower bound and the upper one of the feedback number of Kautz networks  $K(d,k)$  by using the minimum orbit, and determines the feedback number for  $k\leq 3$ .

**Key words:**operational mathematics; feedback vertex sets; minimum orbit; Kautz network

## 0 引言

在一个没有环或重边的简单有向图中, 如果删去某些顶点, 可以使剩下顶点的导出子图是没有圈的, 则称这个被删去的顶点集为该图的反馈点集。点数最小的反馈点集称图的最小反馈点集, 最小反馈点集中的点数称为反馈数。

确定图的最小反馈点集问题, 因其在诸多领域内的广泛应用而受到重视。譬如: 在互联网中, 为了使网络不会因其中某些节点发生故障而陷入瘫痪, 网络设计中往往存在回路。当一台终端登录时, 就需要向整个网络发送广播消息, 用以确定网络的状态。在一个桥接网中, 每个终端从属于某一网段, 网段间以网桥相连。网桥收到网段上发来的消息后就传至下一网段, 下一网段又经网桥继续传递。如果网络中有回路, 则广播消息会一直在网桥环网中传递, 形成“广播风暴”, 阻塞网络。解决这个问题的做法就是想办法尽可能少地关闭一些网桥, 使剩下的网络不再含回路。用图论术语来说, 就是要确定该网络对应图的一个最小反馈点集。

对一般图确定最小反馈点集是一个 NP-hard 问题<sup>[1]</sup>。然而在文献中, 人们对有些图, 如 reducible

收稿日期: 2004-11-13

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10271114)

作者简介: 王彦辉(1973-), 男, 河南内乡人, 中国科技大学数学系在读硕士研究生, 研究方向为组合数学; 吴叶舟(1980-), 男, 浙江乐清人, 中国科技大学数学系在读硕士研究生, 研究方向为组合网络; 徐俊明(1949-), 男, 安徽潜山人, 中国科技大学数学系博士生导师, 研究方向为图论和组合网络。

flow 图<sup>[2]</sup>, cocomparability 图和凸二部分图<sup>[3]</sup>, cyclically reducible 图<sup>[4]</sup>和其它图<sup>[5-7]</sup>中都给出了确定最小反馈点集的多项式时间的算法。最近,一些特殊拓扑结构图的反馈数的上界和下界都已经陆续得到。如 Mesh 网络, tori 网络 butterflies 网络,立方连通网络,超立方体网络,和星图<sup>[8-10]</sup>。研究大多局限在无向图中,很少有涉及有向图的反馈集问题。

对于给定的整数  $d \geq 2, k \geq 1$ , Kautz 有向图记为  $K(d, k)$ , 其顶点集  $V(K(d, k)) = \{x_1 x_2 \cdots x_k : x_i \in \{0, 1, \dots, d\}, x_i \neq x_{i+1}, i = 1, 2, \dots, k-1\}$ ;  $K(d, k)$  中以顶点  $x_1 x_2 \cdots x_k$  为起点的  $d$  条有向边的终点为  $x_2 x_3 \cdots x_k a$ , 其中  $a \in \{0, 1, \dots, d\}, a \neq x_k$ 。  $K(d, k)$  有  $d^k + d^{k-1}$  个顶点,  $d^{k+1} + d^k$  条有向边, 且是  $d$  正则的简单图<sup>[12]</sup>。

Kautz 网络是 Kautz 于 1969 年提出来的, 后来又有人独立发现了它。 Kautz 网络具有许多与 de Bruijn 网络一样的好性质, 也有一些优于超立方体网络的性质, 被认为是对超立方体网络的挑战而替代下一代并行计算机互连网络<sup>[11]</sup>。

在本文中, 我们得到有向 Kautz 图  $K(d, k)$  反馈数  $f(d, k)$  的下界  $(\frac{(\psi \otimes G)(k)}{k} + \frac{(\psi \otimes G)(k-1)}{k-1})(k > 1)$  和上界  $(\sum_{i=1}^d i^{k-1})$ 。其中  $\psi$  为欧拉函数,  $G(i) = d^i + (1)^i d, i \geq 1, \otimes$  表示 Dirichlet 卷积。并且证明了当  $2 \leq k \leq 3$  时, 文中所给的反馈数的上下界相等。

## 1 下界

**定义 1.1** 记  $\rho = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$  为有向图  $D$  中两两互不相交的有向圈的集合。如果  $D \setminus \rho$  不含有向圈, 则称  $\rho$  为图  $D$  的一个圈划分。阶最大的圈划分称最大圈划分。

确定反馈点集的目的旨在去掉图中所有的圈。图的任何一个圈划分的阶数, 都是该图反馈数一个下界。于是得到:

**命题 1.1** 图的反馈数不小于图的最大圈划分的阶数。

**定义 1.2** 记  $v$  为 Kautz 图  $K(d, k), k > 1$  的一个顶点。  $v$  编码的每个组成单位称为一个码。称如下定义在 Kautz 图两个顶点  $v, u$  之间的变换为最小变换

$$\begin{aligned} \phi: V(K(d, k)) &\rightarrow V(K(d, k)) \\ v &\leftrightarrow \phi(v) = u \end{aligned}$$

**case 1** 若顶点  $v$  的首位码和末位码不同, 则  $v \leftrightarrow f(v) = u$ : 以  $v$  的首位码移动到其末位码之后形成一新的编码, 作为  $u$  的编码;

**case 2** 若顶点的首位码和末位码相同, 则  $v \leftrightarrow g(v) = u: u = f(v)$ , 再把  $u$  的末位码改写为其首位码。称  $u$  是  $v$  的最小变换点。

由 Kautz 图的定义可知,  $\phi$  是一个建立在 Kautz 图顶点集合上的双射。从而

$$\phi(v) = u \Leftrightarrow v = \phi^{-1}(u)。$$

**定义 1.3** 若顶点  $v$  经过  $n (\neq 1)$  次连续的最小变换后又回到自身, 则记最小的自然数  $n$  为  $v$  的回归次数。顶点  $v$  称为  $n$  次最小变换回归顶点, 或简称  $n$  次顶点。

最小变换是 Kautz 图顶点之间的一种映射方式, 其定义保证了这种变换能使顶点沿 Kautz 图中的有向边方向, 以最少的变换次数回归到自身。最少的变换次数是顶点本身的一种属性, 由顶点编码的具体形式决定, 其最大值不会超过顶点编码的长度。

**命题 1.2** 对于 Kautz 图  $K(d, k)$  中任一顶点  $v$ , 必存在一个自然数  $n (2 \leq n \leq k)$ , 使得  $v$  的回归次数为  $n$ 。

既然  $K(d, k)$  中每一顶点都可以在有限步内沿图中有向边方向回归自身, 那么在图中就存在许多由最小变换所产生的有向圈。

**定义 1.4** 如顶点  $v$  是  $n$  次顶点, 则  $v$  与其  $n-1$  个连续的最小变换点顺序连接, 构成一个长为  $n$  的有向圈。称这样的有向圈为 Kautz 图的最小轨道。其轨道长度记为  $n$ 。如图 1 所示:

在图 1 显示了在  $K(2, 3)$  中各个顶点与其最小变换点的关系。其中的粗线表示图中经过各顶点的最小轨

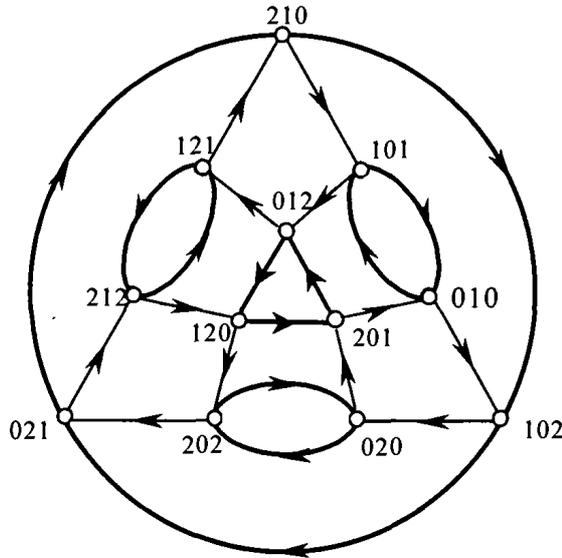


图 1

道,它们都是闭合的圈,且长度均不超过 3。最小轨道是顶点沿有向边方向回归自身的最短回路。

如果称处于同一个最小轨道的两个顶点的关系为等价关系。结合最小轨道,可以对 Kautz 图中的顶点进行划分。

**命题 1.3** Kautz 图中的诸最小轨道构成了 Kautz 图顶点集的一个等价划分。称这种划分为 Kautz 图的轨道划分。

既然 Kautz 图中的每一个顶点必处在某一最小轨道中,且不同的最小轨道不相交。这样的一种轨道划分,其实也就是一种特殊的圈划分。可以计算 Kautz 图的最小反馈数的下界。

**引理 1.1** Kautz 图的反馈数不小于图中最小轨道的总数。

下面具体计算最小轨道的总数。

**命题 1.4** 记  $W_k(i)$  为  $K(d, k)$  中  $i$  次顶点的总数。若  $i+k$  且  $i+k-1$ , 则  $W_k(i)=0$ ; 若  $i|k$  或  $i|k-1$ , 则  $W_k(i)=W_i(i)$ 。

**证明** 记  $V_k(i)$  是  $K(d, k)$  中所有  $i$  次回归顶点的集合。

(1) 当  $i+k$  且  $i+k-1$ , 若  $W_k(i) \neq 0$ , 则存在某  $v \in V_k(i)$ ,  $v = \phi^i(v)$ , 记  $v = x_1 x_2 \cdots x_k$ 。

**case 1** 若  $v$  的首、末码不同, 则  $f^k(v) = v = f^i(v)$ , 且  $i$  是最小的正整数使得  $v = f^i(v)$  成立; 记  $t = \text{gcd}(i, k)$ , 即  $\exists a, b \in Z, s. t. ai + bk = t$ 。所以  $f^t(v) = f^{ai+bk}(v) = v, t < i$ , 矛盾。

**case 2** 若  $v$  的首、末码相同, 则  $g^{k-1}(v) = v = g^i(v)$ , 同理记  $t = \text{gcd}(i, k-1)$ , 即  $\exists a, b \in Z, s. t. ai + b(k-1) = t$ 。所以  $g^t(v) = g^{ai+b(k-1)}(v) = v, t < i$ , 矛盾。

(2)  $i|k$  或  $i|k-1, \forall v \in V_k(i), v = \phi^i(v)$ ;

**case 1**  $x_1 \neq x_k$ , 则  $f^i(v) = v$ , 此时  $i|k$ 。记  $t = \frac{k}{i}, u = x_1 x_2 \cdots x_t$ , 则  $v = \underset{i \uparrow}{u \cdots u}$ 。令  $\Psi: V_k(i) \rightarrow V_i(i)$

(i)  $\Psi(v) = u$ 。易知  $\Psi$  为双射。故  $|V_k(i)| = |V_i(i)|$ , 即  $W_k(i) = W_i(i)$ 。

**case 2**  $x_1 = x_k$ , 则  $g^i(v) = v$ , 此时  $i|k-1$ 。记  $t = \frac{k-1}{i}, u = x_1 x_2 \cdots x_t$ , 则  $x_t \neq x_1, v = \underset{i \uparrow}{u \cdots u} x_1$ 。

令  $\Psi: V_k(i) \rightarrow V_i(i) \Psi(v) = u$ 。同理知  $\Psi$  为双射。亦有  $W_k(i) = W_i(i)$ 。□

由命题 1.4 我们可记  $W(i) = W_i(i)$ 。追加定义  $W(1) = 0$ , 则有  $W_k(i) = W(i), i|k$  或  $i|k-1; k > 1, i \geq 1$ 。

**命题 1.5** 在  $K(d, k)$  中, 记  $G(k) = \sum_{i|k} W(i)$ , 则  $G(k) = d^k + (-1)^k d$ 。

**证明**  $d^k + d^{k-1} = \sum_{i=1}^k W_k(i) = \sum_{i|k} W(i) + \sum_{i|k-1} W(i) = G(k) + G(k-1)$ 。又因为  $G(1) = 0, G(2) = d^2 + d$ 。故由递归容易得到  $G(k) = d^k + (-1)^k d$ 。□

为表示问题的方便,引入以下记号:  $G = \{G(n)\}$ ,  $W = \{W(n)\}$ ,  $N = \{N(n) = n\}$ ,  $I = \{I(n) = [\frac{1}{n}]\}$ ,  $e = \{e(n) = 1\}$ ,  $\mu = \{\mu(n)\}$  为 Möbius 函数,  $\phi = \{\phi(n)\}$  为欧拉函数。则有  $G = e \otimes W$ 。从而  $W = \mu \otimes G$ 。记  $H = N \otimes W$ , 则  $H = N \otimes W = N \otimes \mu \otimes G = \phi \otimes G$ 。由此得到:

**引理 1.2** Kautz 图  $K(d, k)$  的最小轨道总数

$$S(d, k) = \frac{H(k)}{k} + \frac{H(k-1)}{k-1} = \frac{(\phi \otimes G)(k)}{k} + \frac{(\phi \otimes G)(k-1)}{k-1}, k > 1$$

结合引理 1.1 和引理 1.2, 可以直接得出 Kautz 图反馈数的下界。

**定理 1.1** Kautz 图  $K(d, k)$  的反馈数的下界

$$f(d, k) \geq \frac{(\phi \otimes G)(k)}{k} + \frac{(\phi \otimes G)(k-1)}{k-1}, k > 1$$

## 2 上界

这里提供一种确定 Kautz 图反馈点集的算法, 可以确定反馈数的上界。以  $K(2, 1), K(2, 2), K(2, 3)$  为例, 由算法所得不含有向圈的子图如图 2 所示。

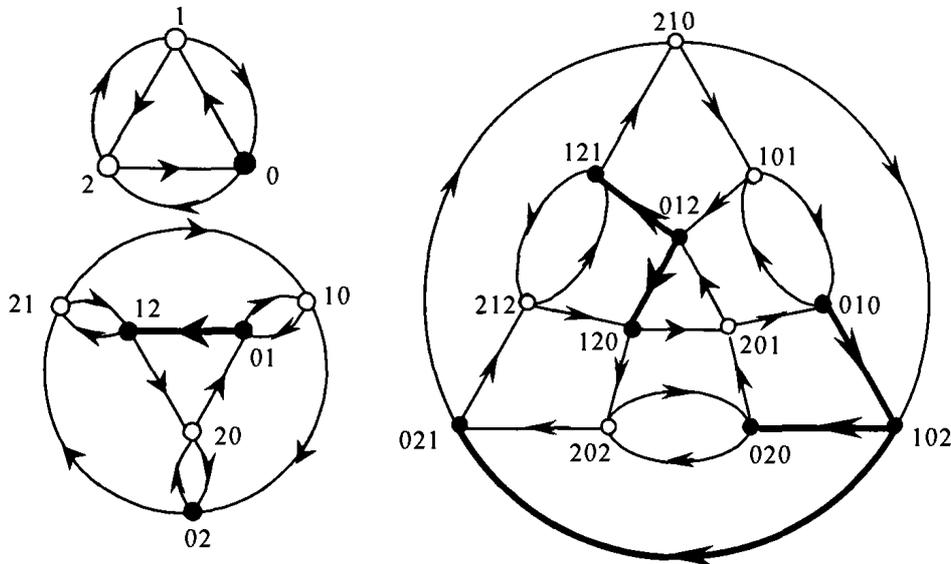


图 2 图中的空心点表示去掉的反馈点集, 实心点和粗边表示剩下的不含有向圈的子图  
Kautz 图是可以递归定义的, 其结构的特殊性决定了下面简单的事实:

**引理 2.1** 在 Kautz 图  $K(d, k)$  中去掉所有编码中出现码  $d$  的顶点, 剩下的图就是  $K(d-1, k)$ 。

记  $F_d$  为  $K(d, k)$  中编码以码  $d$  开头的顶点集合;  $R_d$  为  $K(d, k)$  中编码出现码  $d$  的顶点集合。按照如下做法, 可以确定 Kautz 图的一个反馈点集:

**Step 1** 从  $K(d, k)$  中去掉集合  $F_d$ 。此时有  $K(d, k) \setminus R_d = K(d-1, k)$ ;

**Step 2** 从  $K(d-1, k)$  中去掉集合  $F_{d-1}$ 。此时有  $K(d-1, k) \setminus R_{d-1} = K(d-2, k)$ ;

⋮

**Step d** 从  $K(1, k)$  中去掉集合  $F_1 = \{1X\}$  ( $\{1X\}$  表示首位编码为 1 的长度为  $k$  的单个顶点集合)。

$F = \bigcup_{i=1}^d F_i$  就是所求的 Kautz 图的一个反馈点集。参见图 2 所示。

本做法具有很强的递推特性, 故只需要就做法的第一步和最后一步给出证明。

在第一步后, 从图上去掉了  $|F_d| = \frac{d^k + d^{k-1}}{d+1}$  个以码  $d$  为首的顶点后, 剩下的图如果还包含有有向圈, 那么这些有向圈所经过的所有顶点中, 就不会有任何一个顶点的编码中出现码  $d$ 。下面用反证法来证明这一结论。如果  $K(d, k) \setminus F_d$  含有一个包含顶点  $v$  的有向圈, 而  $v$  的编码中出现码  $d$ 。设  $v$  的编码中从左到右数在第  $n (> 1)$  位出现第一个码  $d$ , 则  $v$  的编码可以记为  $v = \bar{d}X d Y$ 。  $\bar{d}$  表示不是  $d$  的码,  $X$  表示

空集或长为  $n-2$  的一段码,其中没有任何一个码为  $d$ ,  $Y$  表示一段码或空集。 $v$  在一个有向圈中,沿着有向边的方向, $v$  的邻点记为  $u$ ,根据 Kautz 图的定义,顶点  $u$  的编码可以表示为  $u = XdY^*$ ,即沿着有向圈方向每前进一步,其编码中码  $d$  的位置就向前移动一位。既然  $v$  处于某有向圈中, $v$  总能沿着有向边的方向回到自身。那么考察其中编码  $d$  的位置就会发现,在移动过程中, $d$  由原来位置开始逐位前移。因为码  $d$  在顶点  $v$  的编码中首次出现是第  $n$  位,那么在刚开始的连续  $n-1$  次移动中,码  $d$  只可能在顶点编码的第一位到第  $n-1$  范围内出现,所以不可能回归  $v$  本身。因此必然要经过某一个以码  $d$  为首的顶点,才能在下一顶点或更下几次变换时回归  $v$ 。这就说明,在  $K(d, k) \setminus F_d$  中,编码中出现码  $d$  的顶点不会出现在任何一个有向圈中。如果要继续确定原图的反馈点集合,在考虑其它的有向圈时,只需考虑那些顶点中不出现码  $d$  的顶点,也就是  $K(d-1, k)$  中的顶点。递归特性可以简化这一过程。随着  $d$  的不断减小,问题归结为求  $K(1, k)$  中反馈点集合。而对任何  $k \geq 2$ ,  $K(1, k)$  均为有向  $K_2$ ,其反馈点集合容易求出。□

**定理 2.1**  $K(d, k)$  的反馈数的上界  $f(d, k) \leq \sum_{i=1}^d i^{k-1} (d \geq 2, k \geq 1)$ 。

**证明** 记  $F(d, k)$  为由上述算法所得的  $K(d, k)$  的反馈点集的阶数。根据上述算法,得

$$\begin{aligned} F(d, k) &= \frac{d^k + d^{k-1}}{d+1} + F(d-1, k) \\ &= \frac{d^k + d^{k-1}}{d+1} + \frac{(d-1)^k + (d-1)^{k-1}}{d} + F(d-2, k) \\ &= \frac{d^k + d^{k-1}}{d+1} + \frac{(d-1)^k + (d-1)^{k-1}}{d} + \dots + \frac{2^k + 2^{k-1}}{3} + 1 \\ &= \sum_{i=1}^d \frac{i^k + i^{k-1}}{i+1} \\ &= \sum_{i=1}^d i^{k-1} \end{aligned}$$

### 3 附注

在  $K(d, k)$  中,2 次顶点的数目仅与  $d$  有关,为  $(d+1) \cdot d$ 。当  $k=3$  时,  $K(d, 3)$  中仅有 2 次回归顶点和 3 次回归顶点,个数分别为  $(d+1) \cdot d$  和  $d^3 + d^2 - (d+1) \cdot d = d^3 - d$ 。经计算证明:当  $2 \leq k \leq 3$  时,  $S(d, k) = F(d, k)$ ; 当  $k \leq 3$  时,本文算法所给出的反馈点集就是最小反馈点集。

### 参考文献

- [1] Garey M R, Johnson D S. Computers and Intractability[M]. San Francisco, CA: Freeman, 1979.
- [2] Shamir A. A linear time algorithm for finding minimum cutsets in reducible graphs[J]. SIAM J. Comput. 8(4) (1979): 645 - 655.
- [3] Liang Y D, Chang M S. Minimum feedback vertex set in cocomparability graphs and convex bipartite graphs[J]. Acta Inform. 34(1997): 337 - 346.
- [4] Wang C, Lloyd E L, Soffa M L. Feedback vertex sets and cyclically reducible graphs[J], J. ACM 32(2) (1985): 296 - 313.
- [5] Liang Y D. On the feedback vertex set in permutation graphs[J]. Inform. Process. Lett. 52(3) (1994): 123 - 129.
- [6] Smith G W, Walford R B. The identification of a minimal feedback vertex set of a directed graph, IEEE Trans. Circuits Systems CAS-22(1) (1975): 9 - 14.
- [7] Luccio F L. Exact minimum feedback vertex set in meshes and butterflies[J]. Inform. Process. Lett. 66(2) (1998): 59 - 64.
- [8] Caragiannis I, Kaklamanis C, Kanellopoulos P. New bounds on the size of the minimum feedback vertex set in butterflies[J]. Inform. Process. Lett. 83(5) (2002): 275 - 280.
- [9] Focardi R, Luccio F L, Peleg D. Feedback vertex set in hypercubes[J], Inform. Process. Lett. 76(1-2) (2000): 1 - 5.
- [10] Wang F H, Wang Y L, Chang J M. Feedback vertex set in star graphs[J], Inform Process. Lett. 89(2004): 203 - 208.
- [11] Bermond J C, Peyrat C. De Bruijn and Kautz networks: a competitor for the hypercube? In Hypercube and Distributed Computers (F. Andre and J.P. Verjus ed.). North - Holland; Elsevier Science Publishers, 1989: 278 - 293.
- [12] XU Jun - ming. Topological Structure and Analysis of of Interconnection Networks[M]. Dordrecht/ Boston/London: Kluwer Academic Publishers, 2001.