第25卷第4期 数学研究与评论 Vol.25, No.4
2005年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov., 2005

文章编号: 1000-341X(2005)04-0691-04 **文献标识码**: A

关于超立方体网络的 (d,k) 独立数

谢歆[1,2], 徐俊明[2]

(1. 黄山学院数学系, 安徽 黄山 245021; 2. 中国科学技术大学数学系, 安徽 合肥 230026)
(E-mail: xie-xin188@sohu.com)

摘 要: (d,k) 独立数是分析互连网络性能的一个重要参数. 对于任意给定的图 G 和正整数 d 和 k, 确定 G 的 (d,k) 独立数问题是一个 NPC 问题. 因此, 确定一些特殊图的 (d,k) 独立数显得很重要. 本文确定了 k 维超立方体网络的 (d,k) 独立数等于 2, 如果 $d=k\geq 4$ 或者 $d=k-1\geq 6$ 以及 $\alpha_{d,k-t}(Q_k)=\alpha_{d,k}(Q_k)$, 其中 $0\leq t\leq k-2$, $1\leq d\leq k-t-1$.

关键词: (d,k) 独立数; 超立方体网络; 距离; 宽距离; 宽直径.
MSC(2000): 05C69, 05C12, 90B10
中图分类: O157.5

1 引 言

本文采用 [1] 中有关图论术语和记号. 设 $G=(V,E)$ 是 k 连通的简单无向图, 由著名的 Menger 定理知: 对于 G 中任何两个不同的顶点 x 和 y, G 中至少存在 k 条内部点不交的 (x,y) 路. 图的这一性质表明, 当网络的传输带宽有限时, 为加快数据传输, 人们可以首先将需要传输的数据包拆成 k 个小包, 然后沿 k 条内部点不交的路分别同时传输.

然而, 在一个实时处理系统 (比如图象处理系统, 雷达系统, 天气预报系统等) 的互连网络中, 传输延迟是有一定要求的, 超过给定时限的任何数据都被认为是无效的. 在这样的系统中, 一定数目的处理器发生故障, 势必会增大传输延迟, 或者用 k 条内部点不交的路传输数据时, 其中每条路长应限制在一定的范围内. 这些问题的研究导致重要的图论概念 – 宽直径 [2,3].

设 G 是一个 k 连通图, G 中从顶点 x 到顶点 y 宽度为 k 的距离 $d_k(G;x,y)$ 是最小正整数 d 使得 G 中存在 k 条内点不交且长度都不超过 d 的 (x,y) 路. G 的宽度为 k 的直径 $d_k(G)$ 是最小正整数 d 使得 G 中任何两个顶点 x 与 y 之间存在 k 条内点不交且长度都不超过 d 的 (x,y) 路.

然而, 在实时平行系统网络 G 中, 数据传输延迟是有一定限制的. 如果给定的时限 $d<d_k(G)$, 那么 G 中必存在一些顶点, 例如 x 和 y, 它们之间的宽距离 $d_k(G;x,y)>d$. 这些顶点之间在规定的时限 d 内不能有效地进行数据传输.

于是, 一个自然的问题是: 对于给定的正整数 d 和 k 连通图 G, G 中使得 $d_k(G;x,y)>d$ 的顶点 x 和 y 最多有多少? 一个性能好的网络, 这个数目不能太大, 否则会降低通信效率、网络性能和整个网络的利用率. 把问题抽象起来, 得到下面的数学概念 [3]:

设 $d(\geq 1)$ 是整数, G 是 $k(\geq 1)$ 连通图, $\emptyset\neq I\subset V(G)$. 若对任何 $x,y\in I$, 均有 $d_k(G;x,y)>d$, 则称 I 为 G 的 (d,k) 独立集. G 中 (d,k) 独立集的全体记为 $I_{d,k}(G)$. 定义参

收稿日期: 2003-05-08
基金项目: 国家自然科学基金 (10271114), 安徽省高等学校青年教师科研资助计划 (2005jkl1141).

数

$$\alpha_{d,k}(G)=\max\{|I|:I\in I_{d,k}(G)\}$$

为 G 的 (d,k) 独立数. 顶点数目为 $\alpha_{d,k}(G)$ 的 (d,k) 独立集称为最大的 (d,k) 独立集. 由定义易知, $\alpha_{d+1,k-1}(G)\le\alpha_{d,k-1}(G)\le\alpha_{d,k}(G)$.

显然, 若 G 为简单图, 当 $k>1$ 时, 确定 $\alpha_{1,k}(G)$ 是没有意义的. 由定义知: $\alpha_{d,k}(G)=1$ 当且仅当 $d_k(G)\le d$.

确定图的独立数 (即 $(1,1)$ 独立数) 是 NPC 问题, 所以确定图的 (d,k) 独立数也是 NPC 问题. 确定特殊图的 (d,k) 独立数显得很重要. 到目前为止, 还没有见到任何特殊图的 (d,k) 独立数. 本文考虑目前最通用的 k 维超立方体网络 Q_k. 它是一个 k 正则, k 连通, 点可迁的 2 部分图. 本文确定了 Q_k 的 (d,k) 独立数等于 2, 如果 $d=k\ge4$ 或者 $d=k-1\ge6$; 以及 $\alpha_{d,k-t}(Q_k)=\alpha_{d,k}(Q_k)$, 其中 $0\le t\le k-2, 1\le d\le k-t-1$.

2 主要结果

引理 1[4,5] 对于 Q_k 中任何两个距离为 $l\ (>0)$ 的顶点 x 和 y, Q_k 中存在 k 条内点不交的 (x,y) 路, 其中 l 条路长为 l, 其余 $k-l$ 条路长为 $l+2$. 由此, $d_k(Q_k)=k+1$.

引理 2 设 x 和 y 是 Q_k 中距离为 $l\ (>0)$ 的两个顶点, 则对任何整数 $t\,(0\le t\le k-2)$ 有

$$d_{k-t}(Q_k;x,y)=\begin{cases} l, & 若\ k-t\le l;\\ l+2, & 若\ k-t>l.\end{cases}$$

证明 因为 l 是 x 和 y 之间的距离, 所以由引理 1 知, Q_k 中恰存在 l 条内点不交且长为 l 的 (x,y) 路. 因此, 当 $k-t\le l$ 时, Q_k 中显然存在 $k-t$ 条内点不交且长为 l 的 (x,y) 路. 这意味着 $d_{k-t}(Q_k;x,y)\le l$. 另一方面, 显然有 $d_{k-t}(Q_k;x,y)\ge l$. 因此, 当 $k-t\le l$ 时有 $d_{k-t}(Q_k;x,y)=l$.

若 $k-t>l$, 则由引理 1 知, Q_k 中存在 $k-t\,(\ge2)$ 条内点不交且长度至多为 $l+2$ 的 (x,y) 路. 这意味着 $d_{k-t}(Q_k;x,y)\le l+2$. 另一方面, 若 $d_{k-t}(Q_k;x,y)=l$, 则 Q_k 中存在 $k-t\,(>l)$ 条内点不交且长度都为 l 的 (x,y) 路. 而由 x,y 的距离为 l 知, x 和 y 有 l 个坐标值不相同, 由超立方体网络的路长性质易得矛盾. 若 $d_{k-t}(Q_k;x,y)=l+1$, 则 Q_k 中存在 $k-t$ 条内点不交且长度为 l 或 $l+1$(其中至少有一条路长为 $l+1$) 的 (x,y) 路. 由于 Q_k 为二部图, 易知它不含奇圈, 容易得到 Q_k 中不含长度为 $l+1$ 的 (x,y) 路. 以上事实说明 Q_k 中任何 $k-t\ (>l)$ 条内点不交的 (x,y) 路中至少有一条长度为 $l+2$, 即 $d_{k-t}(Q_k;x,y)\ge l+2$. 因此 $d_{k-t}(Q_k;x,y)=l+2$.

定理 1 $\alpha_{2,k}(Q_k)=\begin{cases} 2, & 若\ k=2;\\ 2^k, & 若\ k\ge3.\end{cases}$

证明 因为 Q_2 为单位正方形, 所以显然有 $\alpha_{2,2}(Q_2)=2$. 下面假定 $k>2$. 显然, $\alpha_{2,k}(Q_k)\le|V(Q_k)|=2^k$. 另一方面, 设 x 和 y 是 Q_k 中任意两顶点. 如果 x 和 y 之间的距离为 k, 那么由引理 2 知, $d_k(Q_k;x,y)=k>2$. 如果 x 和 y 之间的距离为 $l\,(1\le l<k)$, 那么由引理 2 知, $d_k(Q_k;x,y)=l+2>2$. 这意味着 $V(Q_k)$ 是一个 $(2,k)$ 独立集. 因此, $\alpha_{2,k}(Q_k)\ge|V(Q_k)|=2^k$.

定理 2 当 $k\ge3$ 时, $\alpha_{3,k}(Q_k)=2^{k-1}$.

证明 $k=3$ 时, Q_3 为单位立方体. 容易验证 $\alpha_{3,3}(Q_3)=4$, 其中 $\{000,110,011,101\}$ 就是一个最大的 $(3,3)$ 独立集 (任意两顶点距离为 2). 下面考虑 $k>3$. 因为 Q_k 是二部图,

并设 $\{V_0,V_1\}$ 是 $V(Q_k)$ 的二部划分，那么 V_0 中任意两顶点不相邻，即距离至少为 2. 由引理 2 知，对于 V_0 中任何两顶点 x 和 y 有 $d_k(Q_k;x,y)>3$. 这说明 V_0 是一个 $(3,k)$ 独立集，即 $\alpha_{3,k}(Q_k)\ge|V_0|=2^{k-1}$.

另一方面，设 I 是 Q_k 中一个最大 $(3,k)$ 独立集. 若 $|I|>2^{k-1}$, 则因为 Q_k 是二部图，所以 I 中存在相邻两顶点 x 和 y. 由引理 2 知， $d_k(Q_k;x,y)=3$, 矛盾于 I 是 Q_k 的 $(3,k)$ 独立集. 这说明 $\alpha_{3,k}(Q_k)=|I|\le 2^{k-1}$.

定理 3 当 $k\ge 3$ 时， $\alpha_{k,k}(Q_k)=\begin{cases}4, & 若\ k=3;\\ 2, & 若\ k>3.\end{cases}$

证明 由定理 2 知： $\alpha_{3,3}(Q_3)=4$. 下设 $k>3$. 由 $d_k(Q_k)=k+1$ 知 $\alpha_{k,k}(Q_k)\ge 2$. 我们只需证明当 $k>3$ 时有 $\alpha_{k,k}(Q_k)\le 2$. 设 I 是 Q_k 中一个 (k,k) 独立集. 则对 I 中任何两顶点 x 和 y 有 $d_k(Q_k;x,y)=k+1$. 由引理 2 知 x 和 y 之间的距离为 $k-1$. 由于 Q_k 点可迁，不妨设 $x=000\cdots00$, $y=011\cdots11\in I$. 若 I 中存在异与 x,y 的顶点 z, 则由于 x 和 z 之间的距离为 $k-1$ 知 z 的坐标中恰有 $k-1$ 个 1. 又由于 z 和 y 之间的距离为 $k-1$, 所以 z 和 y 的坐标中应该有 $k-1$ 个位置的数字不同. 由此得 $k=3$, 矛盾 $k>3$ 的假定. 所以， $k>3$ 时， $\alpha_{k,k}(Q_k)=|I|\le 2$.

定理 4 当 $k\ge 3$ 时， $\alpha_{k-1,k}(Q_k)=\begin{cases}8, & 若\ k=3,4;\\ 4, & 若\ k=5,6;\\ 2, & 若\ k\ge 7.\end{cases}$

证明 由定理 1 和定理 2 知， $\alpha_{2,3}(Q_3)=\alpha_{3,4}(Q_4)=8$. 容易验证， $\alpha_{4,5}(Q_5)=\alpha_{5,6}(Q_6)=4$, 其中 $(00000,01111,11100,10011)$ 是 Q_5 中一个最大 $(4,5)$ 独立集， $(000000,001111,111100,110011)$ 是 Q_6 中一个最大 $(5,6)$ 独立集.

现在假定 $k\ge 7$. 任取 Q_k 中距离为不小于 $k-2$ 的两顶点 u 和 v. 由引理 2 知 $d_k(Q_k;u,v)\ge k$. 所以 $\{u,v\}$ 是一个 $(k-1,k)$ 独立集. 这意味着 $\alpha_{k-1,k}(Q_k)\ge 2$.

下证 $\alpha_{k-1,k}(Q_k)\le 2$. 为此，设 I 是 Q_k 中一个最大 $(k-1,k)$ 独立集. 则对 I 中任何两顶点 x 和 y 有 $d_k(Q_k;x,y)\ge k$. 由引理 2 知 x 和 y 之间的距离至少为 $k-2$. 在 I 中选取这样的两顶点 x 和 y 使得它们之间的距离尽可能的小. 由 Q_k 的点可迁性，不妨设 $x=000\cdots00$. 若 x 和 y 的距离为 k, 则 y 是 Q_k 中唯一的与 x 的距离为 k 的顶点. 即 $|I|=2$. 所以，若 $|I|>2$, 则 I 中任何两顶点之间的距离只能为 $k-1$ 或者 $k-2$. 设 z 是 I 中异于 x 和 y 的顶点. 我们将导出矛盾.

情形 1. 若 x 和 y 的距离为 $k-1$, 则 y 的坐标中仅含一个 0. 由 x 和 y 的选取知， z 与 x 的距离为 $k-1$, 即 z 的坐标恰含 1 个 0. 那么， z 与 y 的距离至多为 2, 即有 $k-1\le 2$, 即 $k\le 3$, 矛盾于 $k\ge 7$ 的假定.

情形 2. 若 x 和 y 的距离为 $k-2$, 则 y 的坐标中仅含 2 个 0. 由 x 和 y 的选取知：

若 z 与 x 的距离为 $k-2$, 即 z 的坐标恰含 2 个 0. 那么， z 与 y 的距离至多为 4, 即有 $k-2\le 4$, 即 $k\le 6$, 矛盾于 $k\ge 7$ 的假定；

若 z 与 x 的距离为 $k-1$, 即 z 的坐标恰含 1 个 0. 那么， z 与 y 的距离至多为 3, 即有 $k-2\le 3$, 即 $k\le 5$, 亦矛盾于 $k\ge 7$ 的假定.

因此 $k\ge 7$ 时， $\alpha_{k-1,k}(Q_k)=|I|\le 2$.

定理 5 $\alpha_{d,k-t}(Q_k)=\alpha_{d,k}(Q_k)$, 其中 $0\le t\le k-2, 1\le d\le k-t-1$.

证明 $\alpha_{d,k-t}(Q_k)\le\alpha_{d,k}(Q_k)$ 显然成立. 下面需要证明 $\alpha_{d,k-t}(Q_k)\ge\alpha_{d,k}(Q_k)$.

令 I 是 Q_k 中最大 (d,k) 独立集. 则对 I 中任意两顶点 x 和 y, 有 $d_k(Q_k;x,y)>d$. 由引理2知, x 和 y 之间的距离 l 不小于 $d-1$.

若 $l\geq k-t$, 由引理2知, $d_{k-t}(Q_k;x,y)=l>k-t-1\geq d$.

若 $d-1\leq l\leq k-t-1$, 由引理2知, $d_{k-t}(Q_k;x,y)=l+2\geq d+1$.

因此 I 中任意两顶点 x 和 y, 有 $d_{k-t}(Q_k;x,y)>d$, 即 I 为 Q_k 的一个 $(d,k-t)$ 独立集. 由独立集定义知 $\alpha_{d,k-t}(Q_k)\geq|I|=\alpha_{d,k}(Q_k)$.

参考文献:

[1] 徐俊明. 图论及其应用 [M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 1998.
XU Jun-ming. *Graph Theory with Applications* [M]. Hefei: University of Science and Technology of China Press, 1998. (in Chinese)

[2] HSU D F, LYNU Y D. *A graph-theoretical study of transmission delay and fault tolerance* [A]. Proc. of 4th ISMM International Conference on Paralled and Distributed Computing and Systems [C]. 1991, 20–24.

[3] FLANDRIN E, LI H. *Mengerian properties, hamiltonicity, and claw-free graphs* [J]. Networks, 1994, **24**: 660–678.

[4] ARMSTRONG J R, GRAY F G. *Fault diagnosis in a Boolean n-cube array of microprocessors* [J]. IEEE Trans. Comput., 1981, **30**(8): 587–590.

[5] SAAD Y, SCHUTLZ M H. *Topological properties of hypecubes* [J]. IEEE Trans. Comput., 1988, **37**(7): 867–872.

On (d,k)-Independence Numbers of Hypercube Network

XIE Xin[1,2], *XU Jun-ming*[2]

(1. Dept. of Math., Huangshan College, Anhui 245021, China;
2. Dept. of Math., University of Science and Technology of China, Anhui 230026, China)

Abstract: The (d,k)-independence number of a connected graph G is an important parameter for analysing performance of interconnection networks. It has been proved to be an NPC problem to determine the exact value of (d,k)-independence number of any graph for given d and k. Thus, it becomes very important to determine (d,k)-independence numbers of some special graphs for given values of d and k. This paper determines that (d,k)-independence number of the k-dimensional hypercube network is equal to two for $d=k\geq 4$ or $d=k-1\geq 6$; and also $\alpha_{d,k-t}(Q_k)=\alpha_{d,k}(Q_k)$, where $0\leq t\leq k-2$ and $1\leq d\leq k-t-1$.

Key words: (d,k)-independence number; hypercube; distance; wide-distance; wide-diameter.