

折叠立方体网络的最小反馈点集

王彦辉, 徐俊明

(中国科学技术大学 数学系, 安徽 合肥 230026)

摘要 对简单图 $G=(V, E)$, 顶点子集 $F \subset V$ 如果由 $V \setminus F$ 导出的子图不含圈, 则称 F 是 G 的反馈点集。点数最小的反馈点集称图的最小反馈点集, 最小的点数称为反馈数。一个 k 维折叠立方体是由一个 k 维超立方体加上所有的互补边构成的图。本文证明了 k 维折叠立方体网络的反馈数 $f(k) = c \cdot 2^{k-1} (k \geq 2)$, 其中 $c \in (\frac{k-1}{k}, 1]$ 。

关键词 应用数学; 反馈点集; 折叠立方体网络

中图分类号 O157.5 **文章标识码** A **文章编号** :1007-3221(2005)06-0008-04

Minimum Feedback Vertex Set in Folded Hypercubes

WANG Yan-hui, XU Jun-ming

(Department of Mathematics, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China)

Abstract : In a graph $G=(V, E)$, a subset $F \subset V$ is a feedback vertex set of G if the subgraph $V \setminus F$ is acyclic. The number of vertices in a minimum feedback vertex set is called the feedback number of G . The k -dimensional folded hypercube is an undirected graph obtained from k -dimensional hypercube by adding all complementary edges. In this paper, we show the size of the minimum feedback vertex set for the k -dimensional folded hypercubes, $f(k) = c \cdot 2^{k-1} (k \geq 2)$, where c is some value with $\frac{k-1}{k} < c < 1$.

Key words applied mathematics; feedback vertex set; folded hypercube network

0 引言

在一个简单图中, 如果删去某些顶点, 可以使剩下顶点的导出子图是没有圈的, 则称这个被删去的顶点集为该图的反馈点集。点数最小的反馈点集称图的最小反馈点集, 最小反馈点集的点数称为反馈数。

确定图的最小反馈点集问题, 因其在诸多领域内的广泛应用而受到重视。譬如: 在互联网中, 为了使网络不会因其中某些节点发生故障而陷入瘫痪, 网络设计中往往存在回路。当一台终端登录时, 就需要向整个网络发送广播消息, 用以确定网络的状态。在一个桥接网中, 每个终端从属于某一网段, 网段间以网桥相连。网桥收到网段上发来的消息后就传至下一网段, 下一网段又经网桥继续传递。如果网络中有回路, 则广播消息会一直在网桥环网中传递, 形成“广播风暴”, 阻塞网络。解决这个问题的做法就是想办法尽可能少地关闭一些网桥, 使剩下的网络不再含回路。用图论术语来说, 就是要确定该网络对应图的一个最小反馈点集。

对一般图确定最小反馈点集是一个 NP-hard 问题^[1]。然而在文献中, 人们对有些图, 如 reducible flow graph^[2], cocomparability graph 和 convex bipartite graphs^[3], cyclically reducible graph^[4]和其它图^[5, 6]中都给出了确定最小反馈点集的多项式时间的算法。最近, 一些特殊拓扑结构图的反馈数的上界和下界都已

收稿日期: 2005-04-15

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10271114)

作者简介: 王彦辉(1973-)男, 河南内乡人, 在读硕士研究生, 研究方向为组合数学; 徐俊明(1949-)男, 安徽潜山人, 博士生导师, 研究方向为图论和组合网络。

经陆续得到。如 Mesh 网络, tori 网络, butterflies 网络, 立方连通网络, 超立方体网络, 和星图^[7-9]。

记 k 维超立方体为 Q_k , 顶点集为 $\{0, 1\}$ 的完全图记为 K_2 , 则根据超立方体的定义知: $Q_1 = K_2$; Q_k 可递归地定义为:

$$Q_k = Q_{k-1} \times K_2 \quad (k \geq 1)$$

根据这个定义, Q_k 的顶点集可以看成两部分组成, 其一部分的顶点是由 Q_{k-1} 中所有顶点的二进制编码后加数字 0 得到, 记为 Q_{k-1}^0 ; 另一部分的顶点是由 Q_{k-1} 中所有顶点的二进制编码后加数字 1 得到, 记为 Q_{k-1}^1 。我们定义一个虚! 拟的分界面 S_k 来分开这两个组成部分, 此 S_k 切断所有连接于这两部分之间的边。

Focardi, Luccio 和 Peleg 获得 Q_k 的反馈数为

$$2^{k-1} \cdot \left(1 - \frac{c}{k-1}\right) \text{ 其中 } c \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]^{[8]}$$

记 k 维折叠立方体网络为 FQ_k 。定义二进制编码逐位不同的两顶点互称互补点, 连接这两个顶点边称互补边; 定义二进制编码仅最后一位不相同的两顶点互称对偶点, 连接这两个顶点的边称对偶边。故 FQ_k 是由 Q_k 再加上 2^{k-1} 条互补边构成。由于 FQ_k 具有下述优良性质, 所以被认为是替代超立方体 Q_k 的挑战性网络结构^[10]:

(1) FQ_k 是 $k+1$ 正则, 有 $2k$ 个顶点 ($k+1$) 2^{k-1} 条边;

(2) FQ_k 直径为 $\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil$;

(3) FQ_k 为 $k+1$ 连通;

(4) FQ_k 是 Cayley 图, 而且是点和边可迁的;

(5) FQ_k 中每一个顶点的所有 $k+1$ 条邻边中, 有一个互补边和一个对偶边可以穿越分界面 S_k , 且只有这两个边能连接于 Q_{k-1}^0 和 Q_{k-1}^1 两部分之间。

我们用 $f(k)$ 表示 FQ_k 的反馈数。本文证明了

$$f(k) = c \cdot 2^{k-1} \quad (k \geq 2) \text{ 其中 } c \in \left(\frac{k-1}{k}, 1\right]$$

下面通过分别计算 $f(k)$ 的下界和上界来证明这个结论。

1 $f(k)$ 的下界

引理 1 记 $F(k)$ 为 FQ_k 中的最小反馈点集, 则 $|F(k)| = f(k)$; 记 $c(k)$ 为 $FQ_k \setminus F(k)$ 中连通分支个数。则有:

$$f(k) \geq \left\lceil \frac{(k-1) \cdot 2^{k-1} + c(k)}{k} \right\rceil \quad (k \geq 2)$$

证 令 E' 是 $FQ_k \setminus F(k)$ 的边集。因为 $FQ_k \setminus F(k)$ 不含圈, 所以 $|E'| = 2^k - f(k) - c(k)$ 。换句话说, FQ_k 因去掉 $f(k)$ 个顶点而失去的边数

$$|E''| = (k+1) \cdot 2^{k-1} - |E'| = (k+1) \cdot 2^{k-1} - (2^k - f(k) - c(k))$$

又因为当 $F(k)$ 中诸顶点互不相邻时, $|E''|$ 达最大值 $(k+1) \cdot f(k)$ 。

因此,

$$(k+1) \cdot f(k) \geq (k+1) \cdot 2^{k-1} - (2^k - f(k) - c(k))$$

由此得:

$$f(k) \geq \frac{(k-1) \cdot 2^{k-1} + c(k)}{k}$$

证毕。

在引理 1 中取 $c(k) = 1$, 即得 FQ_k 反馈数的下界:

定理 1 对任何 k 维折叠立方体 FQ_k , 有 $f(k) \geq \left\lceil \frac{(k-1) \cdot 2^{k-1} + 1}{k} \right\rceil \quad (k \geq 2)$ 。

2 $f(k)$ 的上界

首先需要回顾几个定义。如果一个顶点的二进制编码中码 1 的总数为奇数(或偶数), 则称该顶点为奇

(或偶)点,两个二进制编码长度相等的顶点 x 和 y , 其对应位置上数码不相同的位数的总和称为它们间的 Hamming 距离, 记为 $HD(x, y)$ 。不难证明, 在 k 维超立方体中两点间的 Hamming 距离就等于它们之间的距离, 设 S 为顶点集, 如果 $\forall x, y \in S$ 均有 $HD(x, y) \geq k$ (k 为自然数), 则称 S 为 k 分离集, 任意两顶点距离均不超过 2 的不含圈的图称为星, 其顶点总数称为星的阶数。如果有度大于 1 的顶点, 则称其为星的中心。

为构造无圈子图, 我们需借用一个已有的结论:

引理 2^[9] 对任何 $k \geq 2$, Q_k 中含有一个至少有 $\lfloor \frac{2^{k-2}}{k-1} \rfloor$ 个偶点组成的 4 分离集, 若记这个 4 分离集与 Q_k 所有的奇点的并集为 R , 则 R 在 Q_k 中导出子图是不含圈的。记这个不含圈的导出子图为 R_k 。

考虑到 Q_k 是个二部分图, 即每个偶点的所有邻点都是奇点, 每个奇点的所有邻点都是偶点。不难得出:
推论 1 由引理 2 得到的 R_k 的诸连通分支, 或者是孤立的奇点, 或者是中心为偶点的 $k+1$ 阶星。

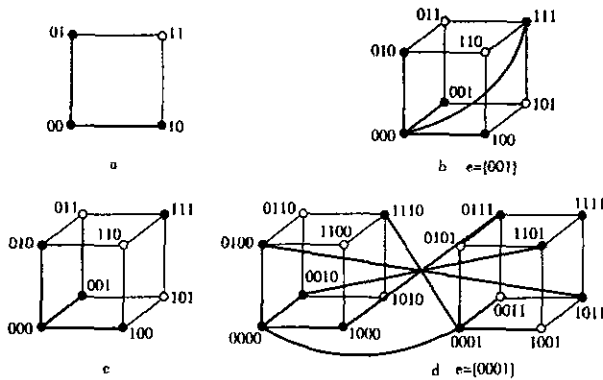
为表述问题的方便, 我们以 $k+1$ 维折叠立方体 FQ_{k+1} 为研究对象。在此基础上, 我们来构造 FQ_{k+1} ($k \geq 2$) 中的无圈导出子图。记 R^0 为引理 2 中定义的 R 中所有顶点的二进制编码后加数 0 得到的顶点集; D^1 为 $Q_k \setminus R$ 中所有顶点的二进制编码后加数 1 得到的顶点集; e 为与 R^0 中任一偶点对偶的顶点。易知:

$$|R^0| \leq 2^k, R^0 \subset V(Q_k^0) \subset V(FQ_{k+1});$$

$$|D^1| \leq 2^k, (D^1 \cup \{e\}) \subset V(Q_k^1) \subset V(FQ_{k+1});$$

引理 3 在 FQ_{k+1} ($k \geq 2$) 中, 由 $R^0 \cup D^1 \cup \{e\}$ 导出的子图不含圈。

在证明该引理之前, 我们先看一个例子。当 $k=2, 3$ 时, 由引理 2 定义的 Q_k 中的无圈导出子图和 $R^0 \cup D^1 \cup \{e\}$ 在 FQ_{k+1} 中的导出子图如图 1 所示。



中 a, b, c, d 中实心点和粗线表示 Q_2, FQ_3, Q_3, FQ_4 中得到不含圈的导出子图

图 1

证 记 R^0 在 Q_k^0 中的导出子图为 R_0 , $D^1 \cup \{e\}$ 在 Q_k^1 中的导出子图为 R_1 。若暂不考虑 FQ_{k+1} 中的互补边和对偶边, 则 R_0 同构于 R_k , R_1 只是 Q_k^1 的部分奇点且 Q_k^1 为二部分图。所以我们所构造的导出子图可以分为各不含圈的两部分。定义一个与 FQ_{k+1} 相关的分界平面 S_{k+1} , S_{k+1} 把 FQ_{k+1} 的顶点集分为 Q_k^0 和 Q_k^1 两部分。从 FQ_{k+1} 的结构性质可知: 分界平面 S_{k+1} 切断了 FQ_{k+1} 中所有的互补边和对偶边, 且只切断这 2^k 条边。 R_0 和 R_1 中的点如能连成圈, 唯一的可能是利用 FQ_{k+1} 中的互补边或对偶边来穿越分界平面 S_{k+1} 。接下来证明, 这也是不可能的。

由构造方法知, R_0 不会含 D^1 的对偶点。故 D^1 中的点如果进入 R_0 , 不可能经对偶边到达, 那就只能通过另外一条边, 即互补边。又因为 D^1 在 Q_k^1 中是孤立点集, 所以即使可以通过互补边, D^1 到 R_0 中的连边也不会形成圈。

现在考虑点 e 。记 e 的二进制表示为 $e = (X1)$ (X 表示长为 k 的一段二进制编码)。则 e 在 Q_k^0 中的对偶点 $e' = (X0)$, 且是个偶点; e 在 Q_k^0 中的互补点 $e'' = (\bar{X}1) = (\bar{X}0)$ (\bar{X} 表示 X 中各码 0, 1 互变)。于是, 我们得到:

$$HD(e', e'') = |X0 - \bar{X}0| = k \geq 2$$

即 e', e'' 在 Q_k^0 中的距离至少为 2。又因为 e' 为偶点, 所以由推论 1 知 e', e'' 必不在同一颗星上, 即 e 的连

边也不会构成圈(参见图 1 中的 d)。证毕

定理 2 对任何 $k \geq 3$, k 维折叠立方体 FQ_k 的反馈数 $f(k) \leq 2^{k-1} - 1$ 。

证 由引理 3 知 $R^0 \cup D^1 \cup \{e\}$ 在 FQ_{k+1} 中的导出子图不含圈,且

$$|R^0 \cup D^1 \cup \{e\}| = |V(Q_k)| + 1 = 2^k + 1$$

所以 $k+1$ 维折叠立方体 FQ_{k+1} 的反馈数

$$f(k+1) \leq 2^{k+1} - (2^k + 1) = 2^k - 1$$

证毕

容易验证当 $k=3$ 时,由定理 1 和定理 2 给出的 $f(k)$ 的下界和上界相等,即 $f(3)=3$ 和 $f(4)=7$ 。此时我们的界是很好的。由我们构造所得的导出子图仅有一个连通分支,如图 1 所示。

考虑到 $f(k)$ 为自然数,可以把下界进一步压缩为 $\frac{k-1}{k} \cdot 2^{k-1}$,把上界进一步放大到 2^{k-1} 。结合定理 1 和定理 2 我们能够把 k 维折叠立方体 FQ_k 的反馈数表示为下述比较简洁的形式。

定理 3 k 维折叠立方体 FQ_k 的反馈数

$$f(k) = c \cdot 2^{k-1} (k \geq 2), \text{ 其中 } c \in \left(\frac{k-1}{k}, 1 \right]$$

注 上述表达式中对于 $k=2$ 时也成立,此时 c 的取值是 1。对任何 $k > 2$, c 的取值范围均为 $\left(\frac{k-1}{k}, 1 \right]$ 。

3 无圈导出子图的连通性分析

下面分析我们所得的 FQ_{k+1} 无圈导出子图的连通性。

定理 4 如果 k 为奇数,则我们构造的 FQ_{k+1} 的无圈导出子图的连通分支个数比 R_k 中连通分支个数少 1。

证 因为 FQ_{k+1} 中互补点间奇偶不变。 e 的对偶点是一偶点, e 的互补点是一奇点。如定理 2 的证

明知, e 的对偶点和互补点必不在同一连通分支上。 R_1 中尚有 $2^{k-1} - \left\lfloor \frac{2^{k-2}}{k-1} \right\rfloor$ 个奇点要求与 R_0 中的 $2^{k-1} - 1$ 个奇点互补对应。又因为 $k \geq 2$,所以 $2^{k-1} - 1 \geq 2^{k-1} - \left\lfloor \frac{2^{k-2}}{k-1} \right\rfloor$ 。即 R_1 中的每一个孤立的奇点,都可以通过互补边与 R_0 中原来保留的点相连。所以这 $2^{k-1} - \left\lfloor \frac{2^{k-2}}{k-1} \right\rfloor$ 个点的加入,并不会使 R_k 中连通分支个数增加。且 e 把原不连通的两个分支连成了一个分支(当 $k=3$ 时如图 1 中 d 所示),于是总的连通分支减少了 1 个。证毕。

这个结论说明,我们构造的 FQ_{k+1} 的无圈导出子图的整体连通性能比引理 2 中构造的 Q_k 中不含圈导出子图 R_k 更好。

参考文献:

- [1] Garey M R, Johnson D S. Computers and intractability[M]. San Francisco, CA: Freeman, 1979.
- [2] Shamir A. A linear time algorithm for finding minimum cutsets in reducible graphs[J]. SIAM J. Comput, 1979, 8(4): 645-655.
- [3] Liang Y D, Chang M S. Minimum feedback vertex set in cocomparability graphs and convex bipartite graphs[J]. Acta Inform, 1997, (34): 337-346.
- [4] Wang C, Lloyd E L, Soffa M L. Feedback vertex sets and cyclically reducible graphs[J]. J. ACM, 1985, 32(2): 296-313.
- [5] Liang Y D. On the feedback vertex set in permutation graphs[J]. Inform Process, 1994, (3): 123-129.
- [6] Smith G W, Walford R B. The identification of a minimal feedback vertex set of a directed graph[J]. IEEE Trans. Circuits Systems, 1975, 22(1): 9-14.
- [7] Caragiannis I, Kaklamani C, Kanellopoulos P. New bounds on the size of the minimum feedback vertex set in butterflies[J]. Inform. Process, 2002, 83(5): 275-280.
- [8] Focardi R, Luccio F L, Peleg D. Feedback vertex set in hypercubes[J]. Inform Process, 2000, 76(1-2): 1-5.
- [9] Wang F H, Wang Y L, Chang J M. Feedback vertex set in star graphs[J]. Inform Process, 2004, (89): 203-208.
- [10] Bermond, J C, Peyrat C. De Bruijn and Kautz networks: a competitor for the hypercube[A]. Hypercube and Distributed Computers(F. Andre and J. P. Verjus ed. [C]. Horth-Lolland: Elsevier Science Publishers, 1989. 278-293.