

纽立方体网络的容错泛圈性

常青彦¹, 马美杰², 徐俊明¹

(1. 中国科学技术大学 数学系, 安徽 合肥 230026; 2. 山东大学 数学与系统科学院, 山东 济南 250100)

摘 要:互连网络包含所有可能长度的圈是一个重要的拓扑性质。纽立方体网络 TO_n 是超立方体网络 Q_n 的一种变型, 其中 $n \geq 3$ 是奇数。Chang 等人 [Information Science, 113 (1999), 147-167] 证明了 TO_n 中包含任意长度为 l 的圈, 其中 $4 \leq l \leq 2^n$ 。如果 TO_n 中的故障点数和故障边数之和不超过 $(n-2)$, Huang 等人 [J. Parallel and Distributed Computing, 62 (2002), 591-640] 证明了: TO_n 中包含长度为 $2^n - f_v$ 的圈, 其中 f_v 是故障点数。这篇文章改进这些结果为: TO_n 中包含任意长度为 l 的圈, 其中 $4 \leq l \leq 2^n - f_v$ 。

关键词:应用数学; 图论; 网络; 容错泛圈; 纽立方体网络

中图分类号: O157.5 **文章标识码:** A **文章编号:** 1007-3221 (2007) 01-0052-06

Fault-tolerant Pancyclicity of Twisted Cubes

CHANG Qing-yan, MA Mei-jie, XU Jun-ming

(1. Department of Mathematics, University of Science and Technology of China Hefei 230026, China; 2. School of Mathematics and System Science, Shandong University, Jinan 250100, China)

Abstract: Containing cycles of all possible lengths in an interconnection network is an important topological property. The twisted cube TO_n is a variant of the hypercube Q_n , where n is an odd larger than one. Chang et al [Information Science, 113 (1999), 147-167] proved that TO_n contains all cycles of length from 4 to 2^n . Huang et al. [J. Parallel and Distributed Computing, 62 (2002), 591-640] proved that TO_n contains a cycle of length $2^n - f_v$ if the sum of faulty vertices and faulty edges is not more than $(n-2)$, where f_v is the number of faulty vertices. This note improves these results as that TO_n contains all cycles of length from 4 to $2^n - f_v$. This result is optimal.

Key words: applied mathematics; graph theory; networks; fault-tolerant pancyclicity; twisted cubes.

0 引言

超立方体网络 Q_n 是较早提出的一种总体性质较好的互连网络, 但它并不是各方面拓扑性质都是最好的网络。纽立方体网络 TO_n 是 Hiberns et al.^[1] 提出的 Q_n 的一种变型, 它的直径是 Q_n 的一半。关于纽立方体网络 TO_n 的其它性质, 可参见文献 [2~4]。

互连网络的拓扑结构通常用连通的简单图 $G = (V, E)$ 来表示, 其中 V 和 E 分别表示图 G 的点集和边集。有关图论的术语和记号, 可参见 [5]。圈的嵌入问题是在图中找出给定长度的圈, 它对于互连网络的实际应用很重要的作用^[6]。连接两点 x 和 y 的边记为 (x, y) 。以 x_0 和 x_k 为端点的路记为 $\langle x_0, x_1, x_2, \dots, x_k \rangle$ 。包含图中所有点的路称为 Hamilton 路。一个图是 Hamilton 连通的, 如果图中任何两点之间有一条 Hamilton 路。包含图中所有点的圈称为 Hamilton 圈。一个图是 Hamilton 的, 如果它包含一个

收稿日期: 2006-06-12

基金项目: 国家自然科学基金资助项目

作者简介: 常青彦 (1975-), 河南驻马店人, 在职研究生, 研究方向为组合网络; 马美杰 (1971-), 女, 山东烟台人, 博士后, 研究方向为图论和组合网络; 徐俊明 (1949-), 安徽潜山人, 教授, 博士生导师, 研究方向为组合网络。

Hamilton 圈。如果图 G 中能嵌入任何长度从围长到 $|V|$ 的圈, 则称图 G 是泛圈的。但是, 在文献[7~9] 中, 一个图是泛圈的是指它能够嵌入所有长度从 3 到 $|V|$ 的圈。但容易看出 TQ_n 围长为 4。为方便讨论, 这里采用前一个定义。

大型互连网络在使用过程中, 它的结点和连线难免发生故障, 所以考虑发生故障的网络具有现实意义。如果对图 G 的任意故障集 $F \subset V(G) \cup E(G)$ 且 $|F| \leq k$, 图 $G - F$ 仍是 Hamilton 的 (Hamilton 连通的, 泛圈的), 称图 G 为 k 容错 Hamilton 的 (Hamilton 连通的, 泛圈的)。Chang 等^[4] 证明了 TQ_n 是泛圈的; Huang 等人^[10] 证明 TQ_n 是 $(n - 2)$ 容错 Hamilton 的。这篇文章中, 我们改进了这些结果, 得到:

定理 纽立方体网络 TQ_n 是 $(n - 2)$ 容错泛圈的, 其中 n 为奇数且 $n \geq 3$ 。

注 因为 TQ_n 是 n 正则的, 如果与同一个点相连的 $(n - 1)$ 条边全部发生故障, 那么该网络中不可能嵌入 Hamilton 圈。因此界 $(n - 2)$ 是紧的。

我们将在第 2 部分给出定理的证明, 第 1 部分介绍 TQ_n 的定义和基本性质。

1 纽立方体

n 维纽立方体 TQ_n 的顶点由所有长为 n 的二元字符串组成, 其中 n 是不小于 3 的奇数。对 TQ_n 中的点 $u = u_{n-1} u_{n-2} \dots u_1 u_0$, 给出一个第 i 个奇偶函数的概念 $P_i(u) = u_i \oplus u_{i-1} \oplus \dots \oplus u_0$, 其中 \oplus 表示异或运算 ($0 \leq i \leq n - 1$)。纽立方体网络 TQ_n 是由 Hiberns et al.^[11] 首先提出来的。它可以递归定义如下: TQ_1 是只两个点 0 和 1 的完全图 K_2 。 TQ_n 的顶点可分为四个子集, $TQ_{n-2}^{00}, TQ_{n-2}^{01}, TQ_{n-2}^{10}, TQ_{n-2}^{11}$, 其中 TQ_{n-2}^{ij} 由 $u_{n-1} = i$ 和 $u_{n-2} = j$ 的点 u 组成。对每个 $ij \in \{00, 01, 10, 11\}$, TQ_n 的导出子图 TQ_{n-2}^{ij} 同构于 TQ_{n-2} 。连接这四个纽立方体的边为: 对于点 $u = u_{n-1} u_{n-2} \dots u_1 u_0$, 如果 $P_{n-3}(u) = 0$, 它和点 $v = \bar{u}_{n-1} \bar{u}_{n-2} u_{n-3} \dots u_1 u_0$ 或 $v = \bar{u}_{n-1} \bar{u}_{n-2} u_{n-3} \dots u_1 u_0$ 连边; 如果 $P_{n-3}(u) = 1$ 则它和点 $v = u_{n-1} \bar{u}_{n-2} u_{n-3} \dots u_1 u_0$ 或 $v = \bar{u}_{n-1} u_{n-2} u_{n-3} \dots u_1 u_0$ 相连。图 1 给出了 TQ_3 的两种画法。

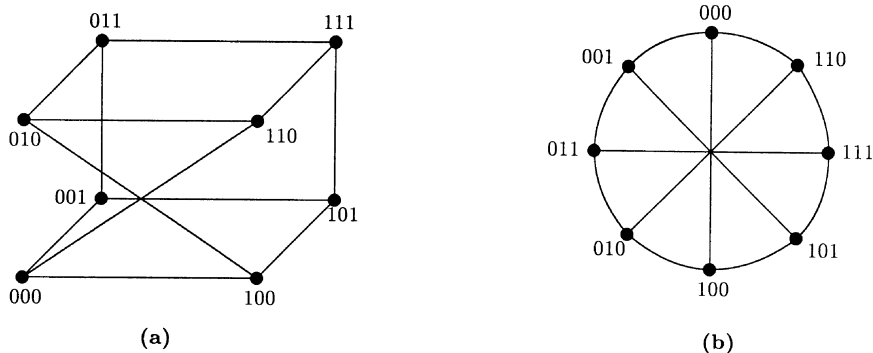


图 1 (a) TQ_3 的一般画法 (b) TQ_3 的对称式画法

K_2 表示两个点的完全图, $G \times K_2$ 表示通过对两个图 G 的同一个点连边得到的图形。文献[10]证明: $TQ_{n-2}^{00}, TQ_{n-2}^{01}$ 和 $TQ_{n-2}^{10}, TQ_{n-2}^{11}$ 的导出子图都同构于 $TQ_{n-2} \times K_2$ 。记为 $TQ_{n-2}^{00}, TQ_{n-2}^{01} \cong TQ_{n-2} \times K_2$, $TQ_{n-2}^{10}, TQ_{n-2}^{11} \cong TQ_{n-2} \times K_2$ 。 TQ_{n-2}^{00} 和 TQ_{n-2}^{10} 之间, 以及 TQ_{n-2}^{01} 和 TQ_{n-2}^{11} 之间的边称为临界边。 $TQ_{n-2}^{00}, TQ_{n-2}^{10}$ 和 $TQ_{n-2}^{01}, TQ_{n-2}^{11}$ 之间的边称为交叉边, 这些交叉边构成了一个完备匹配 M , 因此 TQ_n 可记为 $TQ_n = (TQ_{n-2} \times K_2) \oplus_M (TQ_{n-2} \times K_2)$ 。我们对定理证明需要下面两个引理。

引理 1^[10] TQ_n 是 $(n - 2)$ 容错 Hamilton 和 $(n - 3)$ 容错 Hamilton 连通的。

引理 2^[10] $TQ_n \times K_2$ 是 $(n - 1)$ 容错 Hamilton 和 $(n - 2)$ 容错 Hamilton 连通的。

2 定理证明

定理证明的方法是对奇数 $n \geq 3$ 用数学归纳法。证明步骤如下: 首先说明 TQ_3 是 1 容错泛圈的; 其次假设结果对于 TQ_k ($3 \leq k < n$) 成立, 证明 $TQ_n \times K_2$ 是 $(n - 1)$ 容错泛圈的; 最后证明 TQ_{n+2} 是 n 容错泛圈的。我们把这 3 个步骤分成在 3 个引理来完成。

引理3 TQ_3 是1容错泛圈的。

证明 由 TQ_3 的点可迁性(如图1(b)),只需要考虑以下两种情形:

情形1 TQ_3 有一个故障点。不妨设故障点为 $x = 000$ 。 $TQ_3 - x$ 中从4到7的圈分别为: 110, 010, 011, 111, 110, 110, 111, 101, 100, 010, 110, 110, 111, 101, 001, 011, 010, 110, 和 110, 111, 011, 001, 101, 100, 010, 110

情形2 TQ_3 有一条故障边。不妨设与点 $x = 000$ 相连的边 e 发生故障。由情形1, $TQ_3 - e$ 中有从4到7的圈。我们只需找到一条长为8的圈即可。令 $e = (000, 100)$ 。则 $000, 110, 111, 101, 100, 010, 011, 001, 000$ 是一条长为8的圈;若 $e = (000, 001)$ 。则 $\langle 000, 100, 010, 011, 001, 101, 111, 110, 000 \rangle$ 是一条长为8的圈;假设 $e = (000, 110)$ 。这种情形和 $e = (000, 001)$ 类似,故略去。

因此,结论成立。

为证明引理4,需考虑 $TQ_n \times K_2$ 的结构。 $TQ_n \times K_2$ 是由两个 TQ_n 增加 2^n 条连边构成的,这两个 TQ_n 分别记为 TQ_n^0 和 TQ_n^1 , TQ_n^0 和 TQ_n^1 的同一个点相连,所有的连边构成了一个完备匹配。任取 $TQ_n^{0,2} \subseteq TQ_n^0$ 中的一个点 $u^0 = 0x_{n-1}x_{n-2} \dots x_1x_0$, 设 $TQ_n^{0,2} \subseteq TQ_n^0$ 中与点 u^0 相连的点为 v^0 , TQ_n^1 中与点 u^0, v^0 相连的点分别为 u^1, v^1 。则当 $P_{n-3}(u_0) = 0$ 时, $v^0 = 0\bar{x}_{n-1}\bar{x}_{n-2} \dots x_1x_0, u^1 = 1x_{n-1}x_{n-2} \dots x_1x_0, v^1 = 1\bar{x}_{n-1}\bar{x}_{n-2} \dots x_1x_0$ 。点 u_0, v_0, v_1, u_1, u_0 形成了一个长为4的圈,即圈 $\langle 0x_{n-1}x_{n-2} \dots x_1x_0, 0\bar{x}_{n-1}\bar{x}_{n-2} \dots x_1x_0, 1\bar{x}_{n-1}\bar{x}_{n-2} \dots x_1x_0, 1x_{n-1}x_{n-2} \dots x_1x_0 \rangle$ 。因为它的边是在临界边和交叉边交错出现,为了方便起见,我们称这样的圈为交错4圈。当 $P_{n-3}(u_0) = 1$ 时,交错4圈为 $\langle 0x_{n-1}x_{n-2} \dots x_1x_0, 0x_{n-1}\bar{x}_{n-2} \dots x_1x_0, 1x_{n-1}\bar{x}_{n-2} \dots x_1x_0, 1x_{n-1}x_{n-2} \dots x_1x_0 \rangle$ 。容易看出, TQ_n 的每一个点都仅与一条交叉边相连,每一条交叉边都在唯一的交错4圈上。而且所有的交错4圈都是点不交的。因为 $TQ_n^{0,2} \subseteq TQ_n^0$ (或 $TQ_n^{0,2} \subseteq TQ_n^1$) 中共有 2^{n-1} 个点,所以当 TQ_n^0 (或 TQ_n^1) 中的圈长超过 2^{n-1} 时,该圈上一定至少含有两条交叉边。交叉边和交错4圈对于引理4的证明起着重要的作用。

除此以外,还需要介绍一个安全交叉点的概念。对于 TQ_n 中的任意点 u , 设 u 是 TQ_n 的子立方体 TQ_n^0 (或 TQ_n^1) 中的非故障点, u 是 u 在 TQ_n 的另一个子立方体 TQ_n^1 (或 TQ_n^0) 中的邻点。如果 u 和 u 有边相连,即 u 是非故障的,且连边 (u, u) 也是非故障的,就称点 u 是安全交叉点。此概念在引理5的证明中同样适用,只需把 TQ_n^0 和 TQ_n^1 分别改成 G^0 和 G^1 即可。

引理4 如果 TQ_n 是 $(n-2)$ 容错泛圈的,则 $TQ_n \times K_2$ 是 $(n-1)$ 容错泛圈的。

证明 令 TQ_n^0 和 TQ_n^1 分别表示构成 $TQ_n \times K_2$ 的两个 TQ_n , E_c 表示临界边集,即 $E_c = \{(u^0, u^1) \mid u^i \in TQ_n^i, i=0,1\}$, F 是故障集, $F^0 = F \cap TQ_n^0, F^1 = F \cap TQ_n^1, F^c = F \cap E_c$; F_v 是故障点集, $F_v^0 = F_v \cap V(TQ_n^0), F_v^1 = F_v \cap V(TQ_n^1)$; F_e 是故障边集, $F_e^0 = F_e \cap E(TQ_n^0), F_e^1 = F_e \cap E(TQ_n^1), F_e^c = F_e \cap E_c$ 。 $f^0 = |F^0|, f^1 = |F^1|, f^c = |F^c|, f_v^0 = |F_v^0|, f_v^1 = |F_v^1|, f_e^0 = |F_e^0|, f_e^1 = |F_e^1|$ 。分两种情形来讨论 $TQ_n \times K_2 - F$ 中存在从4到 $2^{n+1} - f_v$ 的圈。

情形3 所有 $(n-1)$ 个故障 F 均在 TQ_n^0 或 TQ_n^1 中。不妨设 $F \subset TQ_n^0$ 。即 $f^0 = n-1, f^1 = f^c = 0$ 。

情形4 $4 \leq l \leq 2^n$ 。由引理1知, TQ_n^1 是 $(n-2)$ 容错泛圈的。 $f^1 = 0$, 因此 $TQ_n^1 \subseteq TQ_n \times K_2 - F$ 中存在长度从4到 2^n 的圈。

情形5 $l = 2^n + 1$ 。 $TQ_n \times K_2 - F$ 中构造一个圈,包含 TQ_n^1 中 $2^n - 1$ 个非故障点和 TQ_n^0 中两个非故障点。由引理1, TQ_n^0 是 $(n-2)$ 容错 Hamilton 的。若 $f^0 = n-2$, 则 $TQ_n^0 - F^0$ 中存在一条 Hamilton 圈。但 $f^0 = n-1$, 因此 $TQ_n^0 - F^0$ 中包含一条长为 $(2^n - f_v^0 - 1)$ 的没有任何点边故障的 Hamilton 路。记这条路为 $P_0 = u_1, u_2, \dots, u_{2^n - f_v^0}$, 其中 $f_v^0 = f_v$ 。任取 P_0 上一条边 (u_a, u_b) , 并设 u_a, u_b 在 TQ_n^1 中的邻点分别为 v_a 和 v_b 。由引理1, TQ_n^1 是 $(n-3)$ 容错 Hamilton 连通的 $(n-3)$ 。由于 $f^1 = 0$, 可在 TQ_n^1 中找到连接 v_a 和 v_b 且包含 $2^n - 1$ 个点的圈 P_1 。那么, $(u_a, u_b) + (u_b, v_b) + P_1 + (v_a, u_a)$ 即为 $TQ_n \times K_2 - F$ 中从 $2^n + 1$ 的圈(如图2(a))。

情形6 $2^n + 2 \leq l \leq 2^{n+1} - f_v$ 。令 $l = l - 2^n$ 。则 $2 \leq l \leq 2^n - f_v$ 。由情形5, $TQ_n^0 - F^0$ 中包含一条 Hamilton 路 $P_0 = u_1, u_2, \dots, u_{2^n - f_v^0}$, 其中 $f_v^0 = f_v$ 。对每一个 l , 选择 P_0 上的点 u_i , 则 P_0 上定点 u_i 和动点 u 之间的路长为 $l - 1$ 。设 u_i 和 u 在 TQ_n^1 中的邻点分别为 v_1 和 v_l 。由引理1, TQ_n^1 是 $(n-3)$ 容错 Hamilton 连通的 $(n-3)$ 。 $f^1 = 0$ 。 TQ_n^1 中存在一条连接 v_1 和 v_l 的长为 $2^n - 1$ 的路 P_1 。那么, $u_i, u_2, \dots, u_l, v_l, P_1, v_1, u_i$ 是 $TQ_n \times K_2 - F$ 中从 l 的圈(如图2(b))。



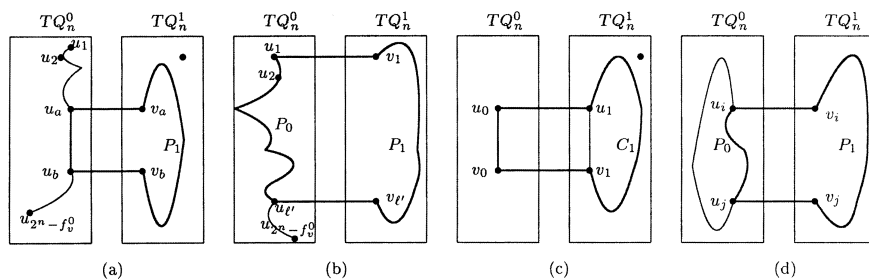


图 2 引理 3 证明中的图示

情形 7 $f^0 = n - 2$ 且 $f^1 = n - 2$ 。由定理的条件, $TQ_n^0 - F^0$ 和 $TQ_n^1 - F^1$ 都是泛圈的。

情形 8 $4 \leq l \leq 2^n - f_v^1$ 。 $TQ_n^1 - F^1$ 是泛圈的, 因此 $TQ_n^1 - F^1 \subseteq TQ_n \times K_2 - F$ 中包含长度从 4 到 $2^n - f_v^1$ 的圈。

情形 9 $l = 2^n - f_v^1 + 1$ 。要在 $TQ_n \times K_2 - F$ 中构造一个圈, 它包含 TQ_n^1 中 $2^n - f_v^1 - 1$ 个非故障点和 TQ_n^0 中两个非故障点。为避开 TQ_n^0 中的故障, 引入一个隐故障的概念。令 $\langle u_0, v_0, v_1, u_1, u_0 \rangle$ 是一个交叉 4 圈, (u_0, v_0) 是 TQ_n^0 中的一条交叉边, (u_1, v_1) 是 (u_0, v_0) 在 TQ_n^1 中的对应交叉边。如果该圈上有一个故障但故障又不在 TQ_n^1 中, 就称边 (u_1, v_1) 是 TQ_n^1 中 F 的一个隐故障(类似可定义 TQ_n^0 中 F 的隐故障)。令 $F^* = \{e \mid e \text{ 是故障 } F \text{ 在 } TQ_n^1 \text{ 中的隐故障}\}$ 。由于所有的交叉 4 圈都是点不交的, 所以 $|F^* - F^1| = n - 1$ 。如果 $|F^* - F^1| = n - 1$, 任意选择 F^* 中的一条边 e_1 , 令 $F = F^* - F^1 - e_1$ 否则 $F = F^* - F^1$ 。则 $|F| = n - 2$, $TQ_n^1 - F$ 仍然是泛圈的。由于 $F \cap V(TQ_n^1) = F_v^1$, $TQ_n^1 - F$ 中存在一个长 $2^n - f_v^1 - 1$ 的圈 C_1 , 且 $2^n - f_v^1 - 1 \leq 2^{n-1}(n - 3)$, C_1 上一定存在两条交叉边, 取一条交叉边 $(u_1, v_1) \in e_1$, 则 (u_1, v_1) 在 TQ_n^0 中的对应交叉边为 (u_0, v_0) , 且圈 $\langle u_1, v_1, v_0, u_0, u_1 \rangle$ 上不存在任何故障。 $C_1 - (u_1, v_1) + (u_1, u_0) + (u_0, v_0) + (v_0, v_1)$ 即为 $TQ_n \times K_2 - F$ 中长为 $2^n - f_v^1 + 1$ 的圈(如图 2(c))。

情形 10 $2^n - f_v^1 + 2 \leq l \leq 2^{n+1} - f_v$ 。不妨设 $f^1 = f^0 = n - 2$ 。假设 $f^1 = n - 2$, 则 $f^0 = n - 2$ 。 $f^1 + f^0 = 2n - 4 \leq n - 1, n \geq 3$, 只需考虑 $n = 3, f^0 = f^1 = 1$ 的情形, 这种情形的证明只是验证, 故略去其验证过程。令 $1 \leq l \leq 2^n - f_v^0 - 1$ 。下面对每一个 l , 在 TQ_n^0 中构造一条长 l 的路 P_0 。由引理 1, TQ_n^0 是 $(n - 2)$ 容错 Hamilton 的, 则 $TQ_n^0 - F^0$ 中存在一个长为 $2^n - f_v^0$ 的圈 $C_0 = \langle u_0, u_1, u_2, \dots, u_{2^n - f_v^0 - 1}, u_0 \rangle$ 。则 C_0 上存在两个安全交叉点 u_i 和 u_j 使得 $(j - i) \bmod (2^n - f_v^0) = l$ 。假设不存在这样的 u_i 和 u_j , 则在 TQ_n^0 外至少存在 $\lfloor (2^n - f_v^0)/2 \rfloor$ 个故障。但 $\lfloor (2^n - f_v^0)/2 \rfloor + f_v^0 \leq 2^{n-1} > n - 1 (n \geq 3)$, 得出矛盾。因此 $TQ_n^0 - F_0$ 中 u_i 和 u_j 之间存在一条长为 l 的路 P_0 。令 v_i 和 v_j 分别是 u_i 和 u_j 的邻点。由于 u_i 和 u_j 是安全交叉点, 所以 v_i 和 v_j 是非故障点, (u_i, v_i) 和 (u_j, v_j) 是非故障边。由引理 1, TQ_n^1 是 $(n - 3)$ 容错 Hamilton 连通的。 $TQ_n^1 - F^1$ 的任何两点之间都有一条长为 $2^n - f_v^1 - 1$ 的 Hamilton 路。设 v_i 和 v_j 之间长这 $2^n - f_v^1 - 1$ 的路为 P_1 , $P_0 + (u_j, v_j) + P_1 + (v_i, u_i)$ 即为长 l 的圈(如图 2(d))。

考虑 $TQ_{n+2} = (TQ_n \times K_2) \oplus_M (TQ_n \times K_2)$, M 是一个完备匹配。简记作: $TQ_{n+2} = G^0 \oplus_M G^1, G_0 \cong TQ_n^{00}$, $TQ_n^{10} \cong TQ_n \times K_2, G^1 \cong TQ_n^{11}, TQ_n^{11} \cong TQ_n \times K_2$ 。匹配 M 是这样构成的: 设 u_0 是 G^0 中的点, 则不妨设 $u_0 = 00B$, 其中 B 是长为 $(n - 2)$ 的二元字符串。如果 $P_{n-3}(u_0) = 0$, 则 G^1 中和 u_0 相连的点为 $u_1 = 11B$; 如果 $P_{n-3}(u_0) = 1$, 则 G^1 中和 u_0 相连的点为 $u_1 = 01B$ 。其中 B 是长为 n 的字符串。

对于 G^0 中的任意两个邻点, 它们在 G^1 中的邻点不总是相邻的, 反之亦然。对于 G^0 中的临界边 $(u_0, v_0) = (00B, 10B)$, 其中 B 是长为 n 的字符串。当 $P_{n-1}(u_0) = 0$ 时, 对应于 G^1 中的边 $(u_1, v_1) = (11B, 01B)$; 当 $P_{n-1}(u_0) = 1$ 时, 对应于 G^1 中的邻点 $(u_1, v_1) = (01B, 11B)$ 。因此, 如果 (u_0, v_0) 是 G^0 中的临界边, 则 u_0, v_0 在 G^1 中的邻点 u_1, v_1 一定是相邻的, 它们也构成一条临界边。这样, 点 u_0, v_0, v_1, u_1, u_0 形成了一个交错 4 圈。当 $P_{n-1}(u_0) = 0$ 时, 交错 4 圈为 $00B, 10B, 01B, 11B, 00B$; 当 $P_{n-1}(u_0) = 1$ 时, 交错 4 圈为 $00B, 10B, 11B, 01B, 00B$ 。其中 B 是长为 n 的字符串。临界边对于引理 5 的证明有重要的作用。 TQ_{n+2} 中至少包含两条临界边的圈称为 2 临界圈。容易看出 TQ_{n+2} 的每一个点都和一条临界边相连, 每一条临界边都在一个长为 4 的 2 临界圈上。由于 $TQ_n^{i,j} (i, j \in \{0, 1\})$ 中仅有 2^n 个点, 如果 G^0 或 G^1 中的任何一个圈长超过 2^n , 则它一定是一个 2 临界圈。

引理 5 设 n 是奇数且 $n \geq 3$ 。如果 TQ_n 是 $(n - 2)$ 容错泛圈的, 则 TQ_{n+2} 是 n 容错泛圈的。

证明 设 $TQ_{n+2} = G^0 \oplus_M G^1$, 其中 $G^0 = G^1 = G = TQ_n \times K_2$. 由引理 4, G^0 和 G^1 都是 $(n-1)$ 容错泛圈的. 由引理 2, G^0 和 G^1 都是 $(n-1)$ 容错 Hamilton 和 $(n-2)$ 容错 Hamilton 连通的. 令 E_c 表示交叉边集, 即 $E_c = \{(u^0, u^1) \mid u^i \in G^i, i=0,1\}$. F 是故障集, $F^0 = F \cap G^0, F^1 = F \cap G^1, F^c = F \cap E_c$; F_v 是故障点集, $F_v^0 = F_v \cap V(G^0), F_v^1 = F_v \cap V(G^1)$; F_e 是故障边集, $F_e^0 = F_e \cap E(G^0), F_e^1 = F_e \cap E(G^1), F_e^c = F_e \cap E_c$. $f^0 = |F^0|, f^1 = |F^1|, f^c = |F^c|, f_v^0 = |F_v^0|, f_v^1 = |F_v^1|, f_e^0 = |F_e^0|, f_e^1 = |F_e^1|$. 引理 5 证明中的图示参照引理 4 中的图形, 只需把 TQ_n^0 和 TQ_n^1 分别换成 G^0 和 G^1 , 图中圈和路的点数改变一下即可. 我们分以下两种情形来证明 TQ_{n+2} 中存在长从 4 到 $2^{n+2} - f_v$ 的圈.

引理 5 设 n 是奇数且 $n \geq 3$. 如果 TQ_n 是 $(n-2)$ 容错泛圈的, 则 TQ_{n+2} 是 n 容错泛圈的.

证明 设 $TQ_{n+2} = G^0 \oplus_M G^1$, 其中 $G^0 = G^1 = G = TQ_n \times K_2$. 由引理 4, G^0 和 G^1 都是 $(n-1)$ 容错泛圈的. 由引理 2, G^0 和 G^1 都是 $(n-1)$ 容错 Hamilton 和 $(n-2)$ 容错 Hamilton 连通的. 令 E_c 表示交叉边集, 即 $E_c = \{(u^0, u^1) \mid u^i \in G^i, i=0,1\}$. F 是故障集, $F^0 = F \cap G^0, F^1 = F \cap G^1, F^c = F \cap E_c$; F_v 是故障点集, $F_v^0 = F_v \cap V(G^0), F_v^1 = F_v \cap V(G^1)$; F_e 是故障边集, $F_e^0 = F_e \cap E(G^0), F_e^1 = F_e \cap E(G^1), F_e^c = F_e \cap E_c$. $f^0 = |F^0|, f^1 = |F^1|, f^c = |F^c|, f_v^0 = |F_v^0|, f_v^1 = |F_v^1|, f_e^0 = |F_e^0|, f_e^1 = |F_e^1|$. 引理 5 证明中的图示参照引理 4 中的图形, 只需把 TQ_n^0 和 TQ_n^1 分别换成 G^0 和 G^1 , 图中圈和路的点数改变一下即可. 我们分以下两种情形来证明 TQ_{n+2} 中存在长从 4 到 $2^{n+2} - f_v$ 的圈.

情形 11 所有 n 个故障 F 均在 G^0 和 G^1 中. 不妨设 $F \subseteq G^0$. 即 $f^0 = n, f^1 = f^c = 0$.

情形 12 $4 \leq l \leq 2^{n+1}$. G^1 是 $(n-1)$ 容错泛圈的. $f^1 = 0$, 因此 $G^1 \subseteq TQ_{n+2} - F$ 中存在长度从 4 到 2^{n+1} 的圈.

情形 13 $l = 2^{n+1} + 1$. 在 $TQ_{n+2} - F$ 中构造一个圈, 包含 G^1 中 $2^{n+1} - 1$ 个故障点和 G^0 中两个非故障点. G^0 是 $(n-1)$ 容错泛圈的. 若 $f^0 = n-1$, 则 $G^0 - F^0$ 中存在一条长为 $2^{n+1} - f_v^0$ 的 Hamilton 圈. 但 $f^0 = n$, 因此 $G^0 - F^0$ 中包含一条长为 $2^{n+1} - f_v^0 - 1$ 的 Hamilton 路. 记为 $P_0 = \langle u_1, u_2, \dots, u_{2^{n+1} - f_v^0} \rangle$, 其中 $f_v^0 = f_v$. 当 $n \geq 3$ 时, $2^{n+1} - f_v^0 + 1 > 2^n$. P_0 至少包含一条临界边, 取一条临界边 (u_a, u_b) . u_a, u_b 在 G^1 中的邻点设为 v_a, v_b , 则 $(v_a, v_b) \in E(G^1)$. 由引理 2, G^1 是 $(n-2)$ 容错 Hamilton 连通的 ($n \geq 3$). 由于 $f^1 = 0$, 可在 G^1 中找到连接 v^a 和 v^b 的包含 $2^{n+1} - 1$ 个点的路 P_1 . $(u_a, u_b) + (u_b, v_b) + P_1 + (v_a, u_a)$ 即为长 $2^{n+1} + 1$ 的圈 (如图 2(a)).

情形 14 $2^{n+1} + 2 \leq l \leq 2^{n+2} - f_v$. 令 $l = l' - 2^{n+1}$. 则 $2 \leq l' \leq 2^{n+1} - f_v$ 和引理 4 中情形 5 类似, $G^0 - F^0$ 中包含一条长为 $2^{n+1} - f_v^0 - 1$ 的 Hamilton 路 $P_0 = \langle u_1, u_2, \dots, u_{2^{n+1} - f_v^0} \rangle$, 其中 $f_v^0 = f_v$. 对每一个 l' , 选择 P_0 上动点 u_i . 则 P_0 上定点 u_i 和动点 u_j 之间的路长为 $l' - 1$. 设 u_i 和 u_j 在 G^1 中的邻点分别为 v_i 和 v_j , 由引理 2, G^1 是 $(n-2)$ 容错 Hamilton 连通的 ($n \geq 3$). $f^1 = 0$. G^1 中存在一条连接 v^i 和 v^j 的长为 $2^{n+1} - 1$ 的路 P_1 . $u_i, u_j, \dots, u_i, v_i, P_1, v_j, u_j$ 是 $TQ_{n+2} - F$ 中一个长为 l' 的圈 (如图 2(b)).

情形 15 $f^0 = n-1$ 且 $f^1 = n-1$. 则 $G^0 - F^0$ 和 $G^1 - F^1$ 都是泛圈的.

情形 16 $4 \leq l \leq 2^{n+2} - f_v^1$. $G^1 - F^1$ 是泛圈的. 因此 $G^1 - F^1 \subseteq TQ_{n+2} - F$ 中包含长度从 4 到 $2^{n+1} - f_v^1$ 的圈.

情形 17 $l = 2^{n+1} - f_v^1 + 1$. 在 $TQ_{n+2} - F$ 中构造一个圈, 包含 G^1 中 $2^{n+1} - f_v^1 - 1$ 个非故障点和 G^0 中两个非故障点. 与引理 4 情形 17 类似, 为避开 G^0 中的故障, 引入一个隐故障的概念. 令 $\langle u_0, v_0, v_1, u_1, u_0 \rangle$ 是一个交叉 4 圈, u_0, v_0 在 G^0 中, u_1, v_1 在 G^1 中. 如果该圈上有一个故障但故障又不在 G^1 中, 就称边 (u_1, v_1) 是 G^1 中 F 的一个隐故障 (类似可定义 G^0 中 F 的隐故障). 令 $F^* = \{e \mid e \text{ 是故障 } F \text{ 在 } G^1 \text{ 中的隐故障}\}$. 由于所有的交叉 4 圈都是点不交的, $|F^* \cap F^1| \leq n$. 如果 $|F^* \cap F^1| = n$, 任意选择 F^* 中的一条边 e_1 , 令 $F = F^* \cup F^1 - e_1$ 否则 $F = F^* \cup F^1$. 则 $|F^* \cap F^1| = n-1$ 且 $G^1 - F$ 仍然是泛圈的. 由于 $F \cap V(G^1) = F_v^1, G^1 - F$ 中存在一个长为 $2^{n+1} - f_v^1 - 1$ 的圈 c_1 . $2^{n+1} - f_v^1 - 1 > 2^n (n \geq 3)$, c_1 至少包含两条临界边. 设 $(u_1, v_1) \in e_1$ 是 c_1 上一条临界边, 则 (u_1, v_1) 不在 F^* 中. 令 u_0, v_0 分别是 u_1 和 v_1 在 G^0 中的邻点. 则 $c_1 - (u_1, v_1) + (u_1, u_0) + (u_0, v_0) + (v_0, v_1)$ 是 $TQ_{n+2} - F$ 中长为 $2^{n+1} - f_v^1 + 1$ 的圈 (如图 2(c)).

情形 18 $2^{n+1} - f_v^1 + 2 \leq l \leq 2^{n+2} - f_v$. 不妨设 $f^1 = f^0 = n-1$. 若 $f^1 = n-1$, 则 $f^0 = n-1$. $f^1 + f^0 = 2n-2 \leq n$, 则 $n \geq 2$, 这与 $n \geq 3$ 矛盾. 所以一定有 $f^1 = n-2$. 令 $1 \leq l' \leq 2^{n+1} - f_v^0 - 1$. 下面对每一个 l' , 在 G^0 中构造一条长 l' 的路 P_0 . G^0 是 $(n-1)$ 容错泛圈的, $G^0 - F^0$ 中存在一个长为 $2^{n+1} - f_v^0$ 的圈 $c_0 = \langle u_0, u_1, u_2, \dots, u_{2^{n+1} - f_v^0} \rangle$. 则必有结论: c_0 上存在两个安全交叉点 u_i 和 u_j 使得 $(j-i) \bmod (2^{n+1} - f_v^0)$



$= l$ 。假设不存在这样的 u_i 和 u_j , 则在 G^0 外至少存在 $l(2^{n+1} - f_v^0)/2$ 个故障。但 $l(2^{n+1} - f_v^0)/2 + f_v^0 > n(n-2)$ 。得出矛盾。因此 $G^0 - F^0$ 中 u^i 和 u^j 之间存在一条长为 l 的路 P_0 。令 v_i 和 v_j 分别是 u_i 和 u_j 在 G^1 中的邻点。 u_i 和 u_j 是安全交叉点, 所以 v_i 和 v_j 是非故障点, (u_i, v_i) 和 (u_j, v_j) 是非故障边。由引理 2, G^1 是 $(n-2)$ 容错 Hamilton 连通的。 $G^1 - F^1$ 的任何两点之间都有一条长为 $2^{n+1} - f_v^1 - 1$ 的 Hamilton 路。设 v^i 和 v^j 之间长为 $2^{n+1} - f_v^1 - 1$ 的路为 P_1 。那么, $P_0 + (u_j, v_j) + P_1 + (v_i, u_i)$ 即为长 l 的圈(如图 2(d))。

根据引理 3, 4, 5 和由归纳假设原理, 定理得证。

参考文献:

[1] Hiberns P A J, Koopman M R J, J L A. Van de snepscheut, The twisted cube[A]. in "parallel architectures and languages europe, 'lecture notes in computer science[C]. Berlin/New York, springer-verlag. 1987. 152-159.
 [2] Abraham S, Padmanabhan K, The twisted cube topology for multiprocessors:a study in network asymmetry[J]. Parallel J Distrib. Comput, 1991, 13. 104-110.
 [3] Abuelrub E, Bettayeb S. Embedding of complete binary trees in twisted hypercubes[A]. In Pro-ceedings of International Conference on Computer Applications in Design, Simulation, and Analysis[C], 1993. 1-4.
 [4] Chang C P, Wang J N, Hsu L H. Topological properties of twisted cube[J]. Information Science, 1999, 113: 147-167.
 [5] 徐俊明. 图论及其应用(第二版)[M]. 合肥:中国科学技术大学出版社, 2004, 8.
 [6] Xu J M. Topological structure and analysis of interconnection networks[M]. Dordrecht/ Boston/London, Kluwer Academic Publishers: 2001.
 [7] Van Blanken E, Van den Heuvel J, Veldman H J. Pancyclicity of hamiltonian line graphs[J]. Discrete Math, 1995, 138: 379-385.
 [8] Bondy J A, Pancyclic graphs[J]. Combin. Theory, Ser. B, 1971, 11: 80-84
 [9] Randerath B, Schiermeyer I, Tewes M, Volkmann L, Vertex pancyclic graphs[J]. Discrete Appl. Math, 2002, 120: 219-237.
 [10] Huang W T, Tan J J M, Huang C N, Hsu L H. Fault-tolerant hamiltonicity of twisted cubes[J]. Parallel and Distributed Computing, 2002, 62: 591-640.

(上接第 40 页)

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} > \sum_{i=1}^m a_i \quad \text{且} \quad \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_{ij} > \sum_{j=1}^n b_j$$

设运输问题 (TRP2) 的对偶变量为

$$y_1, y_2, \dots, y_m, y_{m+1}, y_{m+2}, \dots, y_{m+n}$$

则数学模型 (TRP2) 的对偶线性规划问题为 (TRDP2)

$$\begin{aligned} \max W &= \sum_{i=1}^m a_i y_i + \sum_{j=1}^n b_j y_{m+j} \\ \text{(TRDP2)} \quad \text{s. t.} &\begin{cases} y_i + y_{m+j} \leq c_{ij}, (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n) \\ y_i \geq 0, y_{m+j} \geq 0, (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n) \end{cases} \end{aligned}$$

根据对偶规划问题的松紧定理, 又可以得到:

定理 3 若对偶规划问题的 (TRDP2) 最优解为

$$y_i^* (i = 1, 2, \dots, m), \quad y_{m+j}^* (j = 1, 2, \dots, m)$$

那么运输问题 (TRP1) 存在“多反而少”现象的必要条件是: $y_i^* (i = 1, 2, \dots, m)$ 中至少有一个等于零且 y_{m+j}^*

$(j = 1, 2, \dots, m)$ 中至少有一个等于零, 即: $\sum_{i=1}^m y_i^* = 0$, 且 $\sum_{j=1}^n y_{m+j}^* = 0$ 。

参考文献:

[1] 文平, 王生喜. 运输问题悖论及其研究[J]. 数学的实践与认识, 2005, 35(9): 129-133.
 [2] 吴其苗. 运输问题的悖论及其数学、经济解释[J]. 绍兴文理学院学报, 2004, 24(7): 45-48.
 [3] 杨桂元. 也谈线性规划的“悖论”问题[J]. 运筹与管理, 1996, 5(3): 46-48.
 [4] 张鸣龙. 在最优解上挖潜——运输问题研究[J]. 系统工程理论与实践, 1987, 11(2): 1-6.
 [5] 谢金星, 薛毅. 优化建模与 LINDO/LINGO 软件[M]. 北京:清华大学出版社, 2005.
 [6] 胡清怀, 魏一鸣. 线性规划及其应用[M]. 北京:科学出版社, 2004.
 [7] 胡运权. 运筹学基础及应用[M]. 北京:高等教育出版社, 2004.
 [8] 钱颂迪. 运筹学[M]. 北京:清华大学出版社, 1990.
 [9] 徐玖平, 胡智能, 王委. 运筹学(类)[M](第二版). 北京:科学出版社, 2004.