总40卷 第2期
2007年6月

数 学 研 究
Journal of Mathematical Study

Vol. 40 No. 2
Jun. 2007

超立方体网络的(d,k)控制数

谢 歆[1,2] 徐俊明[2]

(1. 黄山学院数学系，黄山 245021；2. 中国科学技术大学数学系，安徽 合肥 230026)

摘 要 (d,k)控制数是刻画容错网络中资源共享可靠性的一个新参数. 本文考虑了k维超立方体Q_k的(d,k)控制数，得到：$\gamma_{1,k}(Q_k)=2^{k-1}(k>1)$；$d=\left[\frac{k}{2}\right]+1$ $(k>2)$时，$\gamma_{d,k}(Q_k)=2$；$d\le\left[\frac{k}{2}\right]$ $(k\ge 4)$时，$3\le\gamma_{d,k}(Q_k)\le 2^{k-d+1}$；以及若$d$为正整数，且$\left[\frac{k}{d}\right]=\left[\frac{k}{d-1}\right]+1$，则$\gamma_{d,k_1}(Q_k)=\gamma_{d,k}(Q_k)$，其中$\left[\frac{k}{d}\right]\cdot d+1\le k_1\le k$.

关键词 可靠性；宽直径；超立方体网络；(d,k)控制数

中图分类号 O 157.5 **文献标识码** A

1 引 言

本文采用[1]中有关图论术语和记号，用图来表示网络. 设$G=(V,E)$是k连通的简单无向图，由Menger定理知：对于G中任何两个不同的顶点x和y，G中至少存在k条内部点不交的(x,y)路.

为了刻画网络中数据传输延迟的可靠性，Hsu和Lyuu[2]以及Flandrin和Li[3]分别独立地提出宽直径的概念：

定义1 设G是一个k连通图，G中从顶点x到顶点y宽度为k的距离$d_k(G;x,y)$是指最小正整数d使得G中存在k条内点不交且长度都不超过d的(x,y)路. G的宽度为k的直径$d_k(G)$是指最小正整数d使得G中任何两个顶点x与y之间存在k条内点不交且长度都不超过d的(x,y)路.

在实时系统网络中，为了能更好地度量容错网络中资源共享的可靠性，Li和Xu[4]定义了一个新的参数-(d,k)控制数；

定义2 设$d(\ge 1)$是整数，G是$k(\ge 1)$连通图，$\emptyset\ne S\subset V(G)$，对任何$y\in V(G-S)$，从顶点$y$连到$S$中任何顶点的路称为$(y,S)$路. 对于给定的正整数$d$，如果$G$中存在$k$条内点不交且长度$\le d$的$(y,S)$路，则称$S$能$(d,k)$控制顶点$y$. 如果$S$能$(d,k)$控制$G-S$中每个顶点，则称$S$是$G$的$(d,k)$控制集. G中所有(d,k)控制集的全体记为$S_{d,k}(G)$. 定义参数

$$\gamma_{d,k}(G)=\min\{|S|:S\in S_{d,k}(G)\}$$

* 收稿日期：2006—01—24

基金项目：国家自然科学基金(10671191)，安徽省高等学校青年教师科研资助计划项目(2005jk114l)

为 G 的 (d,k) 控制数. 顶点数目为 $\gamma_{d,k}(G)$ 的 (d,k) 控制集称为最小的 (d,k) 控制集.

$(1,1)$ 控制集和 $(1,1)$ 控制数就是通常意义下的控制集和控制数,因此 (d,k) 控制集和 (d,k) 控制数是通常意义下的控制集和控制数的推广. 确定图的控制数(即 $(1,1)$ 控制数)是 NPC 问题[5],所以确定图的 (d,k) 控制数也是 NPC 问题,确定特殊图的 (d,k) 控制数显得很重要. 显然,如果 $d \geq d_k(G)$,则 $\gamma_{d,k}(G)=1$; 且当 $d<d_k(G)$ 时,有 $\gamma_{d,k}(G)\geq 2$. 对于并行互连网络,有意义的是确定当 $d<d_k(G)$ 时的 $\gamma_{d,k}(G)$ 的值.

超立方体网络在网络理论中被广泛应用,是人们研究得最深入的网络,其最常见的定义如下:

定义 3 k 维超立方体,记为 Q_k:顶点集 $V=\{x_1x_2\cdots x_k \mid x_i\in\{0,1\},\ i=1,2,\cdots,k\}$, 顶点 $x=x_1x_2\cdots x_k$ 和 $y=y_1y_2\cdots y_k$ 相邻当且仅当 $\sum_{i=1}^{k}|x_i-y_i|=1$.

k 维超立方体 Q_k 含 2^k 个顶点,有 $k2^{k-1}$ 条边,是点可迁的 k 正则二部分图,它有直径 k 和最大连通度 k, 并且 $d_k(Q_k)=k+1$[6]. Li 和 Xu[4] 确定了当 $d=k$ 和 $d=k-1$ 时的 (d,k) 控制数 $\gamma_{k,k}(Q_k)=\gamma_{k-1,k}(Q_k)=2$. 这个结果已被 Lu 和 Zhang[7] 推广,得到当 $k\geq 4$, $\left[\frac{k}{2}\right]+2\leq d \leq k$ 时, $\gamma_{d,k}(Q_k)=2$.

本文考虑了 k 维超立方体 Q_k 的 (d,k) 控制数,得到: $\gamma_{1,k}(Q_k)=2^{k-1}\,(k>1)$; $d=\left[\frac{k}{2}\right]+1\ (k>2)$ 时, $\gamma_{d,k}(Q_k)=2$; $d\leq\left[\frac{k}{2}\right]\ (k\geq 4)$ 时, $3\leq\gamma_{d,k}(Q_k)\leq 2^{k-d+1}$; 以及若 d 为正整数,且 $\left[\frac{k}{d}\right]=\left[\frac{k}{d-1}\right]+1$, 则 $\gamma_{d,k_1}(Q_k)=\gamma_{d,k}(Q_k)$, 其中 $\left[\frac{k}{d}\right]\cdot d+1\leq k_1\leq k$.

2 主要结果

由定义 2 可得到下面引理:

引理 1 设 d 和 k 是两个给定的正整数, G 为 k 连通图,则

(1) $\gamma_{d+1,k}(G)\leq\gamma_{d,k}(G)$; (2) $\gamma_{d,k-1}(G)\leq\gamma d,k(G)$.

引理 2[8,9] 设 x 和 y 为 Q_k 中任何两个距离为 $l(>0)$ 的顶点,则

(1) Q_k 中存在 l 维子超立方体 H_{xy}^{l} 使得其中存在 l 条内点不交的长度为 l 的 (x,y) 路;

(2) Q_k 中存在 k 条内点不交的 (x,y) 路,其中 l 条长度为 l,其余 $k-1$ 条路长为 $l+2$.

引理 3[6] 设 x 和 y 是 Q_k 中距离为 $l(>0)$ 的两个顶点,则

$$d_k(Q_k;\ x,y)=\begin{cases}1, & 若\ l=k;\\ l+2, & 若\ l<k.\end{cases}$$

定理 4 设 $k>1$,则 $\gamma_{1,k}(Q_k)=2^{k-1}$.

证明 由于 Q_k 为二部分图,故存在 $V(Q_k)$ 的一个二部划分 $\{V_1,V_2\}$. 又 Q_k 为 k 正则图,则 V_2 中任一点必与 V_1 中 k 个点相邻,容易得到 V_1 能 $(1,k)$ 控制 V_2 中任一点,因此 $\gamma_{1,k}(Q_k)\leq |V_1|=2^{k-1}$. 若 $\gamma_{1,k}(Q_k)<2^{k-1}$, 设 S 为一个最小的 $(1,k)$ 控制集,即 S 能 $(1,k)$ 控制 $V(Q_k)-S$ 中任一点,因此 $V(Q_k)-S$ 中任一点必与 S 中 k 个点相邻,则有

$$|E(Q_k)|\geq k\cdot|V(Q_k)-S|\geq k\cdot(2^{k-1}+1)>k2^{k-1}=|E(Q_k)|,$$

显然不成立. 因此 $\gamma_{1,k}(Q_k)=2^{k-1}$.

定理 5　设 $k>2$，当 $d=\left[\frac{k}{2}\right]+1$ 时，$\gamma_{d,k}(Q_k)=2$.

证明　令 $S=\{u,v\}$，其中 $u=\overbrace{0\cdots0}^{k}$，$v=\overbrace{1\cdots1}^{k}$. 对于 $V(Q_k)-S$ 中任意顶点 w，由于 Q_k 点可迁，不妨令 $w=\overbrace{1\cdots1}^{l_1}\overbrace{0\cdots0}^{k-l_1}$，其中 $0<l_1<k$，则 u，w 间的距离为 l_1，u，w 间的距离为 $k-l_1$.

情形 1　若 $0<l_1\leq d-2(<k)$，则由引理 3 知 $d_k(Q_k;\ u,\ w)=l_1+2\leq d$，这说明 u 能$(d,\ k)$控制 w，显然 S 能$(d,\ k)$控制 w；

情形 2　否则 $k>l_1>d-2$，分以下三种情况讨论.

(1) 如果 $l_1=d-1$，则

$$k-l_1=k-d+1=k-\left(\left[\frac{k}{2}\right]+1\right)+1=k-\left[\frac{k}{2}\right]\leq\left[\frac{k}{2}\right]+1=d.$$

由引理 2 得 Q_k 中存在 l_1 维子超立方体 $H^{l_1}_{uw}$ 使得其中存在 l_1 条内点不交且长为 $d-1$ 的$(u,\ w)$路，存在 $k-l_1$ 维子超立方体 $H^{k-l_1}_{vw}$ 使得其中存在 $k-l_1$ 条内点不交且长不超过 d 的$(v,\ w)$路. 并且除了顶点 u，w 外，l_1 维子超立方体 $H^{l_1}_{uw}$ 中任一顶点其第 l_1+1 到第 k 个坐标均为 0，而 $k-l_1$ 维子超立方体 $H^{k-l_1}_{vw}$ 中任一顶点其第 l_1+1 到第 k 个坐标中至少有一个为 1，且 $H^{l_1}_{uw}\neq H^{k-l_1}_{vw}$，显然这 k 条路内点不交. 因此 Q_k 中存在 k 条内点不交且长不超过 d 的$(w,\ S)$路，即 S 能$(d,\ k)$控制 w.

(2) $l_1=d$，则

$$k-l_1=k-d=k-\left(\left[\frac{k}{2}\right]+1\right)\leq\left[\frac{k}{2}\right]=d-1.$$

此时类似(1)，S 能$(d,\ k)$控制 w.

(3) 如果 $k>l_1\geq d+1$，则

$$k-l_1\leq k-d-1=k-\left(\left[\frac{k}{2}\right]+1\right)-1\leq\left[\frac{k}{2}\right]-1=d-2<k.$$

类似情形 1，S 能$(d,\ k)$控制 w.

由上述情形知 S 能$(d,\ k)$控制 $V(Q_k)-S$ 中每一点，这样得到 $\gamma_{d,k}(Q_k)\leq2$. 又由于 $d<d_k(Q_k)=k+1$ 时，$\gamma_{d,k}(Q_k)\geq2$，因此 $d=\left[\frac{k}{2}\right]+1$ 时，$\gamma_{d,k}(Q_k)=2$.

定理 6　当 $d\leq\left[\frac{k}{2}\right]$ $(k\geq4)$ 时，$3\leq\gamma_{d,k}(Q_k)\leq2^{k-d+1}$.

证明　先证 $\gamma_{d,k}(Q_k)\geq3$. 当 $d=\left[\frac{k}{2}\right]$ 时，假设 $\gamma_{d,k}(Q_k)=2$. 由于 Q_k 点可迁且必存在最小$(d,\ k)$控制集，不妨令 $S=\{u,v\}$ 为其一个最小(d,k)控制集，且 $u=\overbrace{0\cdots0}^{k}$，$v=\overbrace{0\cdots0}^{t}\overbrace{1\cdots1}^{k-t}$，其中 $0\leq t<k$.

情形 1　若 $t=0$，则 $v=\overbrace{1\cdots1}^{k}$. 对于 $V(Q_k)-S$ 中顶点 $w_0=\overbrace{0\cdots0}^{\left[\frac{k}{2}\right]-1}\ \overbrace{1\cdots1}^{k-\left(\left[\frac{k}{2}\right]-1\right)}$，$U$，$w_0$ 的距离为 $k-\left(\left[\frac{k}{2}\right]-1\right)\left(>d=\left[\frac{k}{2}\right]\right)$，$v$，$w_0$ 的距离为 $\left[\frac{k}{2}\right]-1$. 因此 u，w_0 间任一条路

长均大于d，而由于引理 2 知，v，w_0 间长度不超过d的内点不交的路至多有$\left[\frac{k}{2}\right]-1$条，且由引理 3 知 $d_k(Q_k;\ v,\ w_0)=\left[\frac{k}{2}\right]+1>d$，可以得到$S$不能$(d,\ k)$控制点$w_0$.

情形 2　若$t=1$，则$v=0\overbrace{1\cdots1}^{k-1}$. 对于$V(Q_k)-S$中顶点$w_1=1\overbrace{0\cdots0}^{\left[\frac{k}{2}\right]-2}\ \overbrace{1\cdots1}^{k-\left(\left[\frac{k}{2}\right]-1\right)}$，$u$，$w_1$的距离为$k-\left(\left[\frac{k}{2}\right]-1\right)+1$，$v$，$w_1$的距离为$\left[\frac{k}{2}\right]-1$. 类似情形 1，$S$也不能$(d,\ k)$控制点$w_1$.

情形 3　若$2\leq t<k$. 对于Q_k-S中顶点

$$w_2=\overbrace{0\cdots0\underbrace{1\cdots1}_{l_1}}^{t}\overbrace{0\cdots0\underbrace{1\cdots1}_{l_2}}^{K-t}$$

其中$0\leqslant L_1=\left[\frac{k}{2}\right]+1\leq t$，$0\leq l_2=\left[\frac{k}{2}\right]-\left[\frac{t}{2}\right]\leq k-1$，则$u$，$w_2$的距离为$l_1+l_2=\left[\frac{k}{2}\right]+1=d+1$，$v$，$w_2$的距离为$l_1+k-t-l_2$，且

$$l_1+k-t-l_2=\left[\frac{t}{2}\right]+1+k-t-\left(\left[\frac{k}{2}\right]-\left[\frac{t}{2}\right]\right)\geq k-\left[\frac{k}{2}\right]\geq\left[\frac{k}{2}\right]=d.$$

且

$$l_1+k-t-l_2=\left[\frac{t}{2}\right]+1+k-t-\left(\left[\frac{k}{2}\right]-\left[\frac{t}{2}\right]\right)\leq k+1-\left[\frac{k}{2}\right]\leq\left[\frac{k}{2}\right]+2<k.$$

这说明u，w_2间任意一条路长度至少为$d+1$，且v，w_2间的宽距离$d_k(Q_k;\ v,\ w_2)\geq d+2$. 显然知$S$也不能$(d,\ k)$控制$w_2$.

由上述情形，因此$\gamma_{d,k}(Q_k)\geq 3$. 又由引理 1，因此当$d\leq\left[\frac{k}{2}\right]$时，$\gamma_{d,k}(Q_k)\geq 3$.

下证$\gamma_{d,k}(Q_k)\leq 2^{k-d+1}$.

令$S=\{x_1x_2\cdots x_{k-d+1}0\cdots0,\ |x_i=0,\ 1;i=1,\ \cdots,\ k-d+1\}\subset V(Q_k)$，则$|S|=2^{k-d+1}$. 对于$V(Q_k)-S$中任一顶点$y=y_1y_2\cdots y_{k-d+1}y_{k-d+2}\cdots y_k$，其中$y_i=0$或$1$，$i=1,2,\cdots,k$，且$y_{k-d+2},\cdots,y_k$不全为 0.

情形 1　如果$y_{k-d+2},\cdots,y_k$不全为 1，不妨假设$y_{k-d+2}=0$，则此时有$y=y_1y_2\cdots y_{k-d+1}0y_{k-d+3}\cdots y_k$. 令$x=y_1y_2\cdots y_{k-d+1}0\cdots0\in S$，显然$x,y$的距离不超过$d-2$，由引理 2 易得$x$能$(d,k)$控制$y$.

情形 2　如果$y_{k-d+2},\cdots,y_k$全为 1，则此时有$y=y_1y_2\cdots y_{k-d+1}1\cdots1$，令$x=y_1y_2\cdots y_{k-d+1}0\cdots0\in S$，则$x,y$的距离为$d-1$，由引理 2 知存在$d-1$条内点不交且长度为$d-1$的$(x,y)$的路，不妨记为$P_{k-d+2},\cdots,P_k$.

令$u_i=y_1y_2\cdots y_{i-1}\bar{y}_iy_{i+1}\cdots y_{k-d+1}0\cdots0\in S$，其中$\bar{y}_i=1-y_i$，则$u_i$，$y$的距离为$d$，且连接$u_i$，$y$的一条长为$d$的路为

$$P_i:u_i=y_1y_2\cdots y_{i-1}\bar{y}_iy_{i+1}\cdots y_{k-d+1}0\cdots0\rightarrow y_1y_2\cdots y_{i-1}\bar{y}_iy_{i+1}\cdots y_{k-d+1}1\cdots0$$

$$\rightarrow y_1y_2\cdots y_{i-1}\bar{y}_iy_{i+1}\cdots y_{k-d+1}11\cdots0\rightarrow y_1y_2\cdots y_{i-1}\bar{y}_iy_{i+1}\cdots y_{k-d+1}111\cdots0$$

$$\rightarrow\cdots$$

$\to y_1y_2\cdots y_{i-1}\bar{y}_iy_{i+1}\cdots y_{k-d+1}11\cdots 11 \to y = y_1y_2\cdots y_{i-1}y_iy_{i+1}\cdots y_{k-d+1}11\cdots 1$
其中$i=1,2,\cdots,k-d+1$.

容易得到$P_1,P_2,\cdots,P_{k-d+1}$, P_{k-d+2}, $\cdots,P_k$构成了k条内点不交且长度不超过d的(y, S)路,这说明S能(d, k)控制点y.

由y的任意性知S为Q_k的一个(d, k)控制集,因此$\gamma_{d,k}(Q_k) \le |S| = 2^{k-d+1}$.

定理 7　设d为正整数,且$\left[\frac{k}{d}\right]=\left[\frac{k}{d-1}\right]+1$,则$\gamma_{d,k_1}(Q_k)=\gamma_{d,k}(Q_k)$,其中$\left[\frac{k}{d}\right]\cdot d+1\le k_1\le k$.

证明　显然超过立方体Q_k是k_1连通的. 由引理1得$\gamma_{d,k_1}(Q_k)\le\gamma_{d,k}(Q_k)$. 下证$\gamma_{d,k_1}(Q_k)\ge\gamma_{d,k}(Q_k)$也成立.

设S为超立方体的一个最小(d, k_1)控制集. 对于$V(Q_k)-S$中任一顶点u, S中必存在一个顶点数最小的子集S_1使得S_1能(d, k)控制点u.

(1) 若S_1中存在顶点v使得u, v的距离不超过$d-2$,由S_1的最小性,即$S_1=\{v\}$. 由引理3知$d_k(Q_k;\ v,\ u)\le d$,显然S_1能(d, k)控制点u.

(2) 若不然,不妨设$S_1=\{w_1, w_2,\cdots,w_l\}$,且令$w_i$与$u$的距离$d(w_i, u)$为$d_i,i=1,2,\cdots,l$,此时有$d-2<d_i\le d$. 由引理2易知$Q_k$中至少存在$d-1$条内点不交的$(u, w_i)$路,$i=1,2,\cdots,l$,且这些$l(d-1)$条路分别属于不同的$d-1$维子超立方体$H^d_{uw_1},\cdots,H^d_{uw_l}$, 因此这些$l(d-1)$条路内点不交. 由于$S_1$能$(d,k_1)$控制点$u$,则有$k_1\le ld$,即$\left[\frac{k}{d}\right]\cdot d+1\le k_1\le ld$,可得$l\ge\left[\frac{k}{d}\right]+1$. 又由于$\left[\frac{k}{d}\right]=\left[\frac{k}{d-1}\right]+1$. 易得$l\ge\left[\frac{k}{d-1}\right]+1$, 由此可以得到$k<l(d-1)$. 因此容易得到$Q_k$中存在$k$条内点不交且长度不超过$d$的$(u, S_1)$路,显然$S_1$能$(d, k)$控制点$u$.

由u的任意性知S为一个(d, k)控制集,由定义得$\gamma_{d,k_1}(Q_k)\ge\gamma_{d,k}(Q_k)$.

定理证毕.

参 考 文 献

[1] Bond J A, Murty U S R. Graph Theory with Applications. London: Macmillan Press, 1976.

[2] Hsu D F, Lyuu Y D. A graph-theoretical study of transmission delay and fault tolerance. International Journal of Mini and Microcomputers, 1994, 16(1):35—42.

[3] Flandrin E, Li H. Mengerian properties, hamiltonicity, and claw-free graphs. Networks, 1994, 24(2): 177—183.

[4] Li H, Xu J M. (d,m)-dominating number of m-connected graphs. Rapport de Recherche, LRI, URA 410 du CNRS Universite de paris-sud, 1997, 1130: 1—17.

[5] Garey M R, Johnson D S. Computers and Intactability. A Guide to the Theory of NP-Completencess, San Francisco: W.H. Freeman, 1979.

[6] 谢歆,徐俊明. 关于超立方体网络的(d,k)独立数. 数学研究与评论,2005,25(4):691—694.

[7] Lu C H, Zhang K M. (d, m)-dominating numbers of hypercube. Appl. Math. J. Chinese Univ. Ser. B, 2002, 17(1):105—108.

[8] Armstrong J R, Gray F G. Fault diagnosis in a Boolean n-cube array of microprocessors. IEEE Trans. Comput, 1981, 30(8), 587—590.

[9] Saad Y, Schutlz M H. Topological properties of hypecubes. IEEE Trans. Comput. 1988, 37(7):867—872.

(d,k)-Dominating Numbers of Hypercube Networks

Xie Xin[1,2] *Xu Junming*[2]

(1. Department of Mathematics, Huangshan College, Huangshang 245021;
2. Department of Mathematics, USTC, Hefei 230026)

Abstract The (d,k)-dominating number is a new measure to characterize reliability of resoures-shring in fault tolerant networks. This paper considers the (d,k)-dominating number of the k-dimensional hypercube network and obtains $\gamma_{1,k}(Q_k)=2^{k-1}(k>1)$, $\gamma_{d,k}(Q_k)=2$ for $d=\left[\frac{k}{2}\right]+1$ $(k>2)$, $3\leq\gamma_{d,k}(Q_k)\leq 2^{k-d+1}$ for $d\leq\left[\frac{k}{2}\right]$ $(k\geq 4)$ and $\gamma_{d,k_1}(Q_k)=\gamma_{d,k}(Q_k)$ for given values d if $\left[\frac{k}{d}\right]=\left[\frac{k}{d-1}\right]+1$, where $\left[\frac{k}{d}\right]\cdot d+1\leq k_1\leq k$.

Keywords Reliability; Wide-diameter; Hypercube Network; (d,k)-dominating number

(上接 216 页)

[16] Feng R, Wan Z. A Construction of Cartesian Authentication Codes from Vector Space and Dual uthentication Codes. Northeast. Math. J. 1997, (13):63—67.

Two Combinatorial Designs and Their Applications to Authentication Codes

Chen Qunshan *Zeng Jiwen*

(School of Mathematical Sciences, Xiamen University, Xiamen 361005)

Abstract W. Ogata et al. [1] define two new types of combinatorial designs, which are called External difference family (EDF) and External balanced incomplete block design (EBIBD). The paper presents a construction to EDF by cyclotomic fields. Then we construct an optimal splitting authentication code with perfect secrecy by using EBIBD, and prove that the authentication codes constructed by two special EBIBD are isomorphism.

Key Words differnece family; block design; authentication code