系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
32(3) (2012, 3), 327–333

无向超环面网的 (d,m) 独立数 *

谢 歆 胡建伟

(黄山学院数学系, 黄山 245041)

徐 俊 明

(中国科学技术大学数学系, 合肥 230026)

摘要 (d,m) 独立数是度量实时平行网络性能的一个重要参数. 得到 $d<d_4(G)$ 时无向超环面网 $C_{d_1}\times C_3$ 的 $(d,4)$ 独立数, 以及 $d=d_4(G)-1$ 时无向超环面网 $C_{d_1}\times C_{d_2}$ 的 $(d,4)$ 独立数, 这里 $d_2=4$ 或 d_1.

关键词 无向超环面网, 可靠性, 宽直径, (d,m) 独立数.

MR(2000) 主题分类号 05C40, 05C69, 68M10, 68M15

1 引 言

本文采用文 [1] 中的术语和符号, 用图表示网络.

n 维无向超环面网 $C(d_1,d_2,\cdots,d_n)$, 顶点集为 $\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)|0\le x_i<d_i(i=1,2,\cdots,n)\}$. 每个顶点 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与如下 $2n$ 个顶点相邻: $(x_1\pm1,x_2,\cdots,x_n)$, $(x_1,x_2\pm1,\cdots,x_n)$, $\cdots$, $(x_1,x_2,\cdots,x_n\pm1)$, 这里 $\pm$ 取模 d_i $(1\le i\le n)$. n 维无向超环面网是 $2n$ 正则和点可迁的, 连通度为 $2n$, 是超立方体网络的推广, 被广泛用于网络理论中 [2–4].

为了刻画实时平行处理系统的传输性能, Hsu 和 Lyuu[5], Flandrin and Li[6] 分别独立地提出了宽直径的概念. 设图 G 是 m 连通图, 顶点 x 和 y 宽度为 m 的距离 $d_m(G;x,y)$, 是指最小正整数 d 使得 G 中存在 m 条内点不交且长度不超过 d 的 (x,y) 路. 图 G 的宽度为 m 的直径, 简称 m 直径, 记作 $d_m(G)$, 是指最小正整数 d 使得对于任何两顶点 x 和 y, G 中都存在 m 条内点不交且长度不超过 d 的 (x,y) 路.

对于给定的 m 连通图 G 和正整数 d, 如果 $d<d_m(G)$, 则 G 中一定存在一些顶点以致于其中任何两顶点的 m 直径超过 d. 对于这样的顶点, 信息在给定的时限 d 内不能用 m 内点不交的路进行传输. Flandrin 和 Li[6] 在 m 连通图中定义了一个新参数 (d,m) 独立数, 在某种程度上, 它比宽直径更能精确地刻画网络的性能.

* 国家自然科学基金 (11071233), 安徽省教育厅科研项目 (KJ2010B212) 和黄山学院科研项目 (2011xkj012).
收稿日期: 2010-12-29, 收到修改稿日期: 2011-09-06.

定义 1.1 设 G 是 m 连通图, $\phi \neq I \subset V(G)$, $d(\geq 1)$ 是正整数. 如果对于任何两顶点 $x, y \in I$ 有 $d_m(G; x, y) > d$, 则称 I 是 G 中一个 (d, m) 独立集. 用 $I_{d,m}(G)$ 表示 G 中所有 (d, m) 独立集的全体. 定义参数

$$\alpha_{d,m}(G) = \max\{|I| : I \in I_{d,m}(G)\}$$

为 G 的 (d, m) 独立数. 如果 $|I| = \alpha_{d,m}(G)$, 则称独立集 I 为 G 的最大独立集.

(d, m) 独立数不仅推广了通常所说的独立数而且是分析实时平行处理系统性能的重要参数. 确定图的独立数是 NP-Complete[7], 因此确定图的 (d, m) 独立数也是 NP-Complete 问题. 所以对于某些 d, 确定一些著名的网络的 (d, m) 独立数显得很有必要.

如果图 G 是 m 连通的, 容易得到 $\alpha_{d,m-1}(G) \leq \alpha_{d,m}(G)$ 以及 $\alpha_{d+1,m}(G) \leq \alpha_{d,m}(G)$. 显然 $\alpha_{d,m}(G) = 1$ 当且仅当 $d \geq d_m(G)$, 以及 $d < d_m(G)$ 时 $\alpha_{d,m}(G) \geq 2$. Xie 和 Xu[8] 讨论了 k 维超立方体网络的 (d, k) 独立数. 本文得到 $d < d_4(G)$ 时无向超环面网 $C_{d_1} \times C_3$ 的 $(d, 4)$ 独立数, 以及 $d = d_4(G) - 1$ 时 $C_{d_1} \times C_{d_2}$ 的 $(d, 4)$ 独立数, 这里 $d_2 = 4$ 或 d_1.

2 预备知识

n 维无向超环面网 $C(d_1, d_2, \cdots, d_n)$ 也可以定义为笛卡尔乘积 $C_{d_1} \times C_{d_2} \times \cdots \times C_{d_n}$, 这里 C_{d_i} 是无向圈, $i = 1, 2, \cdots, n$. 2 维无向超环面网 $C_{d_1} \times C_{d_2}$ 除了被用于平行计算机中处理器之间的互连外, 也广泛用于计算机互连网的局域网和城域网.

设图 G 为 $C_{d_1} \times C_{d_2} \times \cdots \times C_{d_n}$, $o = (0, 0, \cdots, 0)$ 和 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为顶点, 其中 $n \geq 2$, $d_i \geq 3$, $0 \leq x_i \leq \lfloor \frac{d_i}{2} \rfloor$ $(1 \leq i \leq n)$. 称顶点 x 是好的, 如果 o 和 x 之间存在 $2n$ 条内点不交的路 $P_1, P_2, \cdots, P_{2n}$, 使得路 P_1 的长度至多是 $\mathrm{diam}(G)$, 而其他路的长度至多为 $\mathrm{diam}(G)+1$, $2 \leq i \leq 2n$.

本文中, $\lfloor \frac{d_i}{2} \rfloor$ 和 $\lceil \frac{d_i}{2} \rceil$ 分别记作 e_i 和 e'_i, $i = 1, 2$. 用 o 和 e 分别表示顶点 $(0, 0)$ 和 (e_1, e_2).

引理 2.1[9] 对于任何整数 $n \geq 2$, $d_i \geq 3\,(1 \leq i \leq n)$,

$$\mathrm{diam}(C_{d_1} \times C_{d_2} \times \cdots \times C_{d_n}) = \sum_{i=1}^{n} \left\lfloor \frac{d_i}{2} \right\rfloor.$$

引理 2.2[9] 设 $G = C_{d_1} \times C_{d_2} \times \cdots \times C_{d_n}$, $n \geq 2, d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n \geq 3$, 则

$$d_{2n}(G) = \begin{cases} 2m+1 = 2\mathrm{diam}(G) - 1, & G = C_{2m+1} \times C_3,\ m \geq 2, \\ 2m+2 = 2\mathrm{diam}(G) - 2, & G = C_{2m+2} \times C_3,\ m \geq 2, \\ e_1 + 4 = \mathrm{diam}(G) + 2, & G = C_d \times C_4,\ d \geq 9 \text{ 或} \\ & G = C_d \times C_5,\ 9 \leq d \leq 13, \\ 1 + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} e_i = \mathrm{diam}(G) + 1, & \text{其他}. \end{cases}$$

由文 [9], 容易得到如下引理.

引理 2.3 设 $G = C_{d_1} \times C_{d_2} (d_1 \geq d_2 \geq 3)$, $x = (x_1, x_2) (\neq o)$, 其中 $o \leq x_i \leq e_i (i = 1, 2)$,

i) 如果 $d_1 \geq 7$, $d_2 = 3$, $1 \leq x_1 \leq e_1$, $x_2 = 0$, 则 $d_4(G; o, x) = \max\{d_1 - x_1, x_1 + 2\}$.

ii) 如果 $d_1 \geq 5$, $d_2 = 3$, $1 \leq x_1 \leq e_1$, $x_2 = 1$, 则 $d_4(G;o,x) = \max\{d_1 - x_1 + 1, x_1 + 2\}$.

iii) 如果 $d_1 \geq 9$, $d_2 = 4$, $e_1 - 4 \leq x_1 \leq e_1' - 4$, $x_2 = 0$, 则 $d_4(G;o,x) = e_1 + 4$.

iv) 如果 $d_1 = 9, 10, 11$, $d_2 = 5$, $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, 则 $d_4(G;o,x) = e_1 + 4$.

v) 如果 $d_1 = 11, 12, 13$, $d_2 = 5$, $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, 则 $d_4(G;o,x) = e_1 + 4$.

vi) 否则，顶点是好的.

3　主要结果

定理 3.1　设 $G = C_{d_1} \times C_3$, $d_1 \geq 7$. 如果 $d = d_4(G) - l$, 这里 $1 \leq l \leq e_1' - 2$, 则 $\alpha_{d,4}(G) = l + 1$.

证　由引理 2.2, 有 $d_4(G) = d_1$ 和 $d = d_4(G) - l \geq d_1 - (e_1' - 2) = e_1 + 2 = 1 + \mathrm{diam}(G)$. 设 I 是 G 中一个最大的 $(d,4)$ 独立集，不妨令顶点 $o = (0,0) \in I$. 如果 G 中存在其他顶点 $x = (x_1, x_2)(\neq o) \in I$, 那么有 $d_4(G;o,x) > d \geq 1 + \mathrm{diam}(G)$. 由引理 2.3, 得到顶点 $x = (x_1, x_2)$ 满足以下情形

情形 1　如果 $x_2 = 0$ 且 $1 \leq x_1 \leq e_1$, 那么有 $1 \leq x_1 \leq l - 1 (\leq e_1' - 3)$ 使得 $d_4(G;o,x) = \max\{d_1 - x_1, x_1 + 2\} = d_1 - x_1 > d_4(G) - l$. 由点可迁性，当 $d_1 - l + 1 \leq x_1 \leq d_1 - 1$ 且 $x_2 = 0$ 时，同样有 $d_4(G;o,x) = \max\{x_1, d_1 - x_1 + 2\} = x_1 > d_4(G) - l$.

情形 2　如果 $x_2 = 1$ 且 $1 \leq x_1 \leq e_1$, 那么有 $1 \leq x_1 \leq l (\leq e_1' - 2)$ 使得 $d_4(G;o,x) = \max\{d_1 - x_1 + 1, x_1 + 2\} = d_1 - x_1 + 1 > d_4(G) - l$. 类似地，当 $d_1 - l \leq x_1 \leq d_1 - 1$ 且 $x_2 = 1$ 时，有 $d_4(G;o,x) = \max\{x_1 + 1, d_1 - x_1 + 2\} = x_1 + 1 > d_4(G) - l$.

由点可迁性，对于任何顶点 $x = (x_1, 2)$, 有 $d_4(G;o,x) > d_4(G) - l$, 这里 $1 \leq x_1 \leq l$ 或 $d_1 - l \leq x_1 \leq d_1 - 1$.

由上述情形，顶点 $x = (x_1, x_2)(\neq o)$ 属于 I 仅当 $x_1 \neq 0$ 和 $\min\{x_1, d_1 - x_1\} \leq l$. 由 (d,m) 独立数的定义，可以得到 $\alpha_{d,4}(G) = l + 1$, $I = \{o, (1,0), (2,0), \cdots, (l-1, 0), (l, 1)\}$ 是一个最大的 $(d,4)$ 独立集.

定理 3.2　设 $G = C_{d_1} \times C_3$, $d_1 \geq 7$. 如果 $d = d_4(G) - l$, 这里 $e_1' - 1 \leq l \leq d_1 - 1$, 则

$$\alpha_{d,4}(G) = \begin{cases} d_1, & \text{如果 } e_1' - 1 \leq l \leq d_1 - 3, \\ 3d_1, & \text{如果 } l = d_1 - 1, d_1 - 2. \end{cases}$$

证　易知 $1 \leq d = d_4(G) - l \leq d_1 - e_1' + 1 = e_1 + 1$. 设 I 是一个最大 $(d,4)$ 独立集，令 $o = (0,0) \in I$. 首先设 $e_1' - 1 \leq l \leq d_1 - 3$, 即 $3 \leq d \leq e_1 + 1$. 如果 G 中存在其他顶点 $x = (x_1, x_2)(\neq o) \in I$, 考虑如下情形

情形 1　d_1 是奇数.

子情形 1.1　$x_2 = 0$ 且 $1 \leq x_1 \leq e_1$.

如果 $1 \leq x_1 \leq e_1 - 1$, 有 $d_4(G;o,x) = \max\{d_1 - x_1, x_1 + 2\} = d_1 - x_1 \geq d_1 - e_1 + 1 = e_1 + 2$; 如果 $x_1 = e_1$, 则 $d_4(G;o,x) = x_1 + 2 = e_1 + 2$.

子情形 1.2　$x_2 = 0$ 且 $e_1 + 1 \leq x_1 \leq d_1 - 1$.

由点可迁性，有 $d_4(G;o,x) = \max\{x_1, d_1 - x_1 + 2\} \geq e_1 + 2$.

子情形 1.3　$x_2 = 1$ 且 $0 \leq x_1 \leq e_1$.

如果 $1 \le x_1 \le e_1$, 有 $d_4(G;o,x) = \max\{x_1+2, d_1-x_1+1\} = d_1-x_1+1 \ge e_1+2$;

如果 $x_1 = 0$, 则 $d_4(G;o,x) = \max\{x_2+2, d_2-x_2\} = 3$.

子情形 1.4 $x_2 = 1$ 且 $e_1+1 \le x_1 \le d_1-1$.

$d_4(G;o,x) = \max\{d_1-x_1+2, x_1+1\} = x_1+1 \ge e_1+2$.

由点可迁性, 对于顶点 $x=(x_1,2)$, 得到 $d_4(G;o,x) \ge e_1+2$, 这里 $1 \le x_1 \le d_1-1$. 由上述情形, 得到 $x=(x_1,x_2)(\ne o)$ 属于 I 仅当 $x_1 \ne 0$. 因此我们有 $\alpha_{d,4}(G) = d_1$, $I = \{o,(1,0),(2,0),\cdots,(d_1-1,0)\}$ 是一个最大 $(d,4)$ 独立集.

情形 2 d_1 是偶数.

子情形 2.1 $x_2 = 0$ 且 $1 \le x_1 \le e_1$.

如果 $1 \le x_1 \le e_1-2$, 则 $d_4(G;o,x) = d_1-x_1 \ge d_1-e_1+2 = e_1+2$;

如果 $x_1 = e_1-1$, 则 $d_4(G;o,x) = d_1-x_1 = e_1+1$;

如果 $x_1 = e_1$, 则 $d_4(G;o,x) = x_1+2 = e_1+2$.

子情形 2.2 $x_2 = 0$ 且 $e_1+1 \le x_1 \le d_1-1$.

如果 $e_1+2 \le x_1 \le d_1-1$, 则 $d_4(G;o,x) = x_1 \ge e_1+2$;

如果 $x_1 = e_1+1$, 则 $d_4(G;o,x) = d_1-x_1+2 = e_1+1$.

子情形 2.3 $x_2 = 1$ 且 $0 \le x_1 \le e_1$.

如果 $x_1 = 0$, 有 $d_4(G;o,x) = \max\{x_2+2, d_2-x_2\} = 3$;

如果 $1 \le x_1 \le e_1-1$, 则 $d_4(G;o,x) = d_1-x_1+1 \ge d_1-e_1+2 = e_1+2$;

如果 $x_1 = e_1$, 则 $d_4(G;o,x) = x_1+2 = e_1+2$.

子情形 2.4 $x_2 = 1$ 且 $e_1+1 \le x_1 \le d_1-1$. 容易知道 $d_4(G;o,x) = \max\{d_1-x_1+2, x_1+1\} = x_1+1 \ge e_1+2$.

由上述情形, 顶点 $x=(x_1,x_2)$ 属于 I 仅当 $x_2 = 0$ 且 $x_1 \ne e_1-1(e_1+1)$, 或者 $x_2 \ne 0$ 且 $1 \le x_1 \le d_1-1$. 因此有 $\alpha_{d,4}(G) = d_1$, $I = \{o,(1,0),\cdots,(e_1-2,0),(e_1-1,2),(e_1,2),(e_1+1,1),(e_1+2,1),\cdots,(d_1-1,1)\}$ 是一个最大的 $(d,4)$ 独立集.

所以如果 $d = d_4(G)-l$, $\alpha_{d,4}(G) = d_1$, 这里 $e_1'-1 \le l \le d_1-3$.

接下来假设 $l = d_1-2$ 或 d_1-1, 即 $d = 1$ 或 2. 由上知道, 顶点 o 和 $G-\{o\}$ 中任何顶点的宽距离至少是 $3(>d)$. 显然有 $\alpha_{d,4}(G) = 3d_1 = |V(G)|$, $V(G)$ 是一个最大的 $(d,4)$ 独立集.

定理 3.3 设 $G = C_{d_1} \times C_4$, $d_1 \ge 12$. 如果 $d = d_4(G)-1$, 则

$$\alpha_{d,4}(G) = \begin{cases} 3, & \text{如果 } d_1 = 21,23,24,25,27, \\ 2, & \text{其他}. \end{cases}$$

证 容易知道 $d = d_4(G)-1 = e_1+3$. 设 I 是 G 的一个最大 $(d,4)$ 独立集, 且 $o=(0,0) \in I$. 如果存在顶点 $x=(x_1,x_2) \in I$, 则 $d_4(G;o,x) > d = e_1+3 = 1+\mathrm{diam}(G)$, 即 $d_4(G;o,x) = e_1+4$. 由引理 2.3, 可以得到 $e_1-4 \le x_1 \le e_1'-4$ 且 $x_2 = 0$. 考虑如下情形.

情形 1 d_1 是偶数. 那么有 $x_1 = e_1-4$, 即 $x=(e_1-4,0) \in I$. 由点可迁性, 可以得到 $d_4(G;o,(e_1+4,0)) = e_1+4 > d$. 如果 $d_1 = 24$, 即 $e_1 = 12$, 则顶点 $(e_1-4,0)$ 和 $(e_1+4,0)$ 之间的距离是 $8(=e_1-4)$, 则 $d_4(G;(e_1-4,0),(e_1+4,0)) = e_1+4 > d$. 因此顶点 $(e_1+4,0) \in I$. 否则, 顶点 $(e_1-4,0)$ 和 $(e_1+4,0)$ 的距离不等于 e_1-4, 它们不可能都属于 I.

因此 $d_1=24$ 时， $\alpha_{d,4}(G)=3$, $I=\{o,(e_1-4,0),(e_1+4,0)\}$ 是一个最大 $(d,4)$ 独立集. 否则， $\alpha_{d,4}(G)=2$, $\{o,(e_1-4,0)\}$ (或 $\{o,(e_1+4,0)\}$) 是一个最大 $(d,4)$ 独立集.

情形 2 d_1 是奇数. 那么有 $e_1-4\le x_1\le e_1-3$. 由点可迁性，同样对顶点 $y=(y_1,0)$, 有 $d_4(G;o,y)=e_1+4>d$, 这里 $e_1+4\le y_1\le e_1+5$. 另一方面，顶点 x 和 y 不可能同时属于 I, 容易得到 $e_1-4\le y_1-x_1\le e_1-3$.

子情形 2.1 $x_1=e_1-3$ 且 $y_1=e_1+4$. 有 $10\le e_1\le 11$, 即 $d_1=21$ 或 23. 容易得到 $\alpha_{d,4}(G)=3$, $\{o,(7,0),(14,0)\}$(或 $=\{o,(8,0),(15,0)\}$) 是一个最大 $(d,4)$ 独立集.

子情形 2.2 $x_1=e_1-3$ 且 $y_1=e_1+5$. 有 $11\le e_1\le 12$, 即 $d_1=23$ 或 25. 容易得到 $\alpha_{d,4}(G)=3$, $\{o,(8,0),(16,0)\}$(或 $\{o,(9,0),(17,0)\}$) 是一个最大 $(d,4)$ 独立集.

子情形 2.3 $x_1=e_1-4$ 且 $y_1=e_1+4$. 有 $11\le e_1\le 12$, 即 $d_1=23$ 或 25. 容易得到 $\alpha_{d,4}(G)=3$, $\{o,(7,0),(15,0)\}$(或 $\{o,(8,0),(16,0)\}$) 是一个最大 $(d,4)$ 独立集.

子情形 2.4 $x_1=e_1-4$ 且 $y_1=e_1+5$. 有 $12\le e_1\le 13$, 即 $d_1=25$ 或 27. 容易得到 $\alpha_{d,4}(G)=3$, $\{o,(8,0),(17,0)\}$(或 $\{o,(9,0),(18,0)\}$) 是一个最大 $(d,4)$ 独立集.

因此如果 $d_1\ne 21,23,25,27$, 有 $\alpha_{d,4}(G)=2$, $\{o,(e_1-4,0)\}$($\{o,(e_1-3,0)\}$, $\{o,(e_1+4,0)\}$ 或 $\{o,(e_1+5,0)\}$) 是一个最大 $(d,4)$ 独立集.

所以

$$\alpha_{d,4}(G)=\begin{cases}3, & \text{如果 } d_1=21,23,24,25,27,\\ 2, & \text{其他}.\end{cases}$$

定理 3.4 设 $G=C_{d_1}\times C_{d_2}$, $d_1=d_2\ge 10$. 如果 $d=d_4(G)-1$, 则 $\alpha_{d,4}(G)=2$.

证 首先假设 d_1 和 d_2 是奇数，则 $d=d_4(G)-1=2e_1$. 设 $A=\{e,(e_1-1,e_1-1),(e_1+2,e_1+2),(e_1-1,e_1),(e_1+2,e_1+1),(e_1,e_1-1),(e_1+1,e_1+2),(e_1-1,e_1-2),(e_1+2,e_1+3),(e_1-2,e_1-1),(e_1+3,e_1+2)\}$ 是 $V(G)$ 的顶点子集. 由文 [9], 容易知道仅当顶点 $x=(x_1,x_2)\in A$, 才有 $d_4(G;o,x)=2e_1+1(>d)$. 设 I 是 G 中一个最大 $(d,4)$ 独立集，顶点 $(0,0)\in I$. 假设顶点 $e\in I$, 下面证明 I 中不存在其他顶点，即 $V(G)-I$ 中任何顶点与 o(或 e) 的宽距离至多是 $d=2e_1$. 只需考虑如下情形.

情形 1 $0\le x_1\le e_1$, $0\le x_2\le e_1$.

子情形 1.1 $x_2=0$ 且 $1\le x_1\le e_1$.

构造如下内点不交的路 $P_i(1\le i\le 4)$:

$P_1: o\to(1,0)\to(2,0)\to\cdots\to(x_1-1,0)\to(x_1,0)=x$;

$P_2: o\to(0,1)\to(1,1)\to\cdots\to(x_1,1)\to(x_1,0)=x$;

$P_3: o\to(0,-1)\to(1,-1)\to\cdots\to(x_1,-1)\to(x_1,0)=x$;

$P_4: o\to(-1,0)\to(-2,0)\to\cdots\to(x_1+1,0)\to(x_1,0)=x$.

则 $|P_1|=x_1$, $|P_2|=|P_3|=x_1+2\le e_1+2\le 2e_1$, $|P_4|=d_1-x_1\le d_1-1=2e_1$. 因此 $d_4(G;o,x)\le d$.

子情形 1.2 $x_2\le e_1-x_1$, 这里 $1\le x_1\le e_1-1$ 且 $1\le x_2\le e_1-1$.

构造如下内点不交的路 $P_i(1\le i\le 4)$:

$P_1: o\to(1,0)\to(2,0)\to\cdots\to(x_1,0)\to(x_1,1)\to\cdots\to(x_1,x_2)=x$;

$P_2: o\to(0,1)\to(0,2)\to\cdots\to(0,x_2)\to(1,x_2)\to\cdots\to(x_1,x_2)=x$;

$P_3: o \to (0,-1) \to (1,-1) \to \cdots \to (x_1+1,-1) \to (x_1+1,0) \to (x_1+1,1) \to \cdots \to (x_1+1,x_2) \to (x_1,x_2) = x$;

$P_4: o \to (-1,0) \to (-1,1) \to \cdots \to (-1,x_2+1) \to (0,x_2+1) \to (1,x_2+1) \to \cdots \to (x_1,x_2+1) \to (x_1,x_2) = x$.

则 $|P_1| = |P_2| = x_1 + x_2$, $|P_3| = |P_4| = x_1 + x_2 + 4 \le e_1 + 4 \le 2e_1$. 因此 $d_4(G;o,x) \le d$.

情形 2 $e_1 + 1 \le x_1 \le d_1 - 1$ 且 $0 \le x_2 \le e_1$.

子情形 2.1 $x_2 = 0$ 且 $e_1 + 1 \le x_1 \le d_1 - 1$.

类似于子情形 1.1, 同样 $d_4(G;o,x) \le d$.

子情形 2.2 $1 \le x_2 \le x_1 - e_1$, 这里 $e_1 + 1 \le x_1 \le d_1 - 1$ 且 $1 \le x_2 \le e_1$.

可以构造类似于子情形 1.2 的四条路 $P_i (1 \le i \le 4)$, 有 $|P_1| = |P_2| = d_1 - x_1 + x_2$, $|P_3| = |P_4| = d_1 - x_1 + x_2 + 4 \le d_1 - e_1 + 4 \le 2e_1$.

情形 3 $0 \le x_1 \le e_1$ 且 $e_1 + 1 \le x_2 \le d_1 - 1$.

类似于情形 2. 因此有 $d_4(G;e,x) \le d$ (或 $d_4(G;o,x) \le d$).

情形 4 $e_1 + 1 \le x_1 \le d_1 - 1$ 且 $e_1 + 1 \le x_2 \le d_1 - 1$.

只需考虑情形 $x_2 \ge d_1 + e_1 - x_1$, 这里 $e_1 + 1 \le x_1 \le d_1 - 1$ 且 $e_1 + 1 \le x_2 \le d_1 - 1$. 可以构造类似于子情形 1.2 的四条路 $P_i (1 \le i \le 4)$, 并且 $|P_1| = |P_2| = 2d_1 - x_1 - x_2$, $|P_3| = |P_4| = 2d_1 - x_1 - x_2 + 4 \le d_1 - e_1 + 4 \le 2e_1$.

由上述可以得到如果顶点 $e \in I$, 则 I 中不存在其他顶点. 类似地，如果 A 中任何一个顶点属于 I, 则 I 中也不存在其他顶点. 因此 $I = \{o, e\}$ 是一个最大 $(d,4)$ 独立集.

接下来假设 d_1 和 d_2 是偶数, 令 $B = \{(e_1, e_1-1), (e_1, e_1+1), (e_1-1, e_1), (e_1+1, e_1), (e_1-1, e_1-2), (e_1+1, e_1+2), (e_1-2, e_1-1), (e_1+2, e_1+1)\}$ 是 $V(G)$ 的一个顶点子集. 同样可以证明仅当顶点 $x = (x_1, x_2) \in B$ 时，才有 $d_4(G;o,x) = 2e_1 + 1 (> d)$, 并且如果 B 中任何一个顶点属于 I, 则 I 中也不存在其他顶点. 因此 $I = \{o, (e_1, e_1-1)\}$ 是一个最大 $(d,4)$ 独立集.

因此，由有上述可以得到 $\alpha_{d,4}(G) = 2$.

4 结论和问题

本文研究了无向超环面网 $C_{d_1} \times C_3$, 以及 $C_{d_1} \times C_{d_2} (d_2 = 4$ 或 $d_1)$ 的宽距离，构造了 $d < d_4(G)$ 时 $C_{d_1} \times C_3$, 以及 $d = d_4(G) - 1$ 时 $C_{d_1} \times C_{d_2}$ 的 $(d,4)$ 最大独立集，得到了它们的 $(d,4)$ 独立数. 对于 $d < d_4(G) - 1$ 时无向超环面网 $C_{d_1} \times C_{d_2} (d_2 \ne 3)$ 的 $(d,4)$ 独立数，以及 $C_{d_1} \times C_{d_2} \times \cdots \times C_{d_n}$ 当 $d < d_{2n}(G) - 1$ 时的 $(d,2n)$ 独立数，值得进一步研究.

参 考 文 献

[1] Bondy J A and Murty U S R. Graph Theory with Applications. New York: American Elsevier

Publishing Co. Inc., 1976.

[2] Dally W J. Performance analysis of k-ray k-cube interconnection networks. *IEEE Trans. Comput.*, 1990, **39**: 775–785.

[3] Linder D H and Harden J C. An adaptive and fault tolerant tolerant wormhole touting strategy for k-ary n-cubes. *IEEE Trans. Comput.*, 1991, **40**: 867–872.

[4] Stout Q F. Mesh-connected computer with broadcasting. *IEEE Trans. Comput.*, 1988, **C-32**(9): 826–830.

[5] Hsu D F and Lyuu Y D. A graph-theoretical study of transmission delay and fault tolerance. *International Journal of Mini and Microcomputers*, 1994, **16**(1): 35–42.

[6] Flandrin E and Li H. Mengerian properties, hamiltonicity, and claw-free graphs. *Networks*, 1994, **24**: 660–678.

[7] Garey M R and Johnson D S. Computers and Intactability: A Guide to the Theory of NP-Completencess. San Francisco: W. H. Freeman, 1979.

[8] Xie X and Xu J M. On (d,k)-independence numbers of hypercube network. *Journal of Mathematical Research and Exposition*, 2005, **25**(4): 691–694.

[9] Ishigami Y. The wide-diameter of the n-dimensionml toroidal mesh. *Networks*, 1996, **27**: 257–266.

(d,m)-INDEPENDENCE NUMBERS OF UNDIRECTED TOROIDAL MESH

XIE Xin HU Jianwei

(*Department of Mathematics, Huangshan University, Huangshan* 245041)

XU Junming

(*Department of Mathematics, University of Science and Technology of China, Hefei* 230026)

Abstract The (d,m)-independence number is an important parameter to measure the performance of a real-time processing system network. In this paper, we study the $(d,4)$-independence number of undirected toroidal mesh $C_{d_1} \times C_3$ for $d < d_4(G)$ and $C_{d_1} \times C_{d_2}$ for $d = d_4(G) - 1$, where $d_2 = 4$ or d_1.

Key words Undirected toroidal mesh, reliability, m-diameter, (d,m)-independence number.