研究简报

doi：10.7694/jdxblxb20130219

有向图最小圈长不大于 4 的一个充分条件

梁　浩[1]，徐俊明[2]
（1. 西南财经大学 经济数学学院，成都 611130；2. 中国科学技术大学 数学科学学院，合肥 230026）

摘要： 运用组合计数的方法，给出了与 Caccetta-Haggkvist 猜想有关的一个近似结果，即给出最小出度至少为 αn 的 n 阶有向图含有长度不超过 4 的有向圈的充分条件：$\alpha \geqslant 0.288\,66$.

关键词： 有向图；有向圈；出度；定向三角形；充分条件
中图分类号： O157.5　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1671-5489(2013)02-0241-03

A Sufficient Condition for Digraphs with Girth at Most 4

LIANG Hao[1], XU Jun-ming[2]
(1. *College of Mathematics, Southwestern University of Finance and Economics, Chengdu* 611130, *China*;
2. *School of Mathematical Sciences, University of Science and Technology of China, Hefei* 230026, *China*)

Abstract: Using some combinatorial techniques, the authors gave an approximate result related to Caccetta-Haggkvist conjecture, that is, a sufficient condition $\alpha \geqslant 0.288\,66$ for which any digraph on n vertices with minimum out-degree at least αn contains a directed cycle of length at most 4.

Key words: digraph; directed cycle; out-degree; transitive triangle; sufficient condition

设 $G=(V,E)$ 是简单有向图(即不含环和平行边)，其中：$V=V(G)$ 表示 G 的顶点集；$E=E(G)$ 表示 G 的边集.

猜想 1[1]　任意含有 n 个顶点的有向图，如果顶点的最小出度不小于 r，则图中必存在圈长不大于 $\lceil n/r \rceil$ 的有向圈.

当 $r=1$ 时，猜想 1 显然成立；Caccetta 等[1]证明了当 $r=2$ 时猜想成立；Hamidoune[2]和 Hoang 等[3]相继证明了当 $r=3$ 及 $r=4,5$ 时猜想成立；Shen[4]证明了当 $r<\sqrt{n/2}$ 时猜想成立. 对于一般的 r，猜想 1 目前仍未解决，文献[5]得到了一些较弱的近似结果.

猜想 1 中，对于 $r=n/3$ 这一特殊情形受到了较多的关注：当含有 n 个顶点的有向图中顶点的最小出度不小于 $n/3$ 时，图中一定存在长度不大于 3 的有向圈. 由于简单有向图不含环和平行边，此时图中一定存在有向三角形. 这一简单猜想至今仍然未被证明，于是人们考虑从另一个方向给出一些近似结果，即寻找一个尽可能小的常数 α，使得当最小出度不大于 αn 时，图中一定存在长度不大于 3 的有向圈，即猜想 1 中的 $\alpha=1/3$. Caccetta 等[1]证明了 $\alpha<0.381\,9$ 时的结果，之后文献[6-8]对其进行了改进. Hladký 等[9]将该结果改进为 $\alpha<0.346\,5$，即任意含有 n 个顶点的有向图中顶点的最小出度不小于 $0.346\,5n$ 时，图中一定存在长度不大于 3 的有向圈. 本文考虑尽可能小的常数 α，使得当最小出度不大于 αn 时，图中必存在长度不大于 4 的有向圈，猜想中 $\alpha=1/4$.

定理 1　若 $\alpha \geqslant 0.288\,66$，则 n 个顶点且最小出度不小于 αn 的有向图中一定存在圈长不大于 4 的有向圈.

收稿日期： 2012-06-06.
作者简介： 梁　浩(1982—)，男，汉族，博士，讲师，从事组合图论的研究，E-mail：lianghao@mail.ustc.edu.cn.
基金项目： 国家自然科学基金(批准号：11071233；61272008).

下面对有向图的顶点数 n 使用归纳法证明定理1. 当 $n\leqslant 4$ 时，由于每个顶点的出度至少为1，故必存在圈长不大于4的有向圈，结论成立. 假设对顶点数目小于 n 的任意有向图定理1都成立. 令 G 是顶点数为 n 的有向图，且 G 中任一有向圈的长度都大于4. 不失一般性，设 G 是 r 出度正则的，即所有顶点的出度都为 r，此处 $r=\lceil \alpha n\rceil$，$\alpha\geqslant 0.288\,66$. 先给出一些定义和记号[7]：

对任意的顶点 $v\in V(G)$，令 $N^+(v)=\{u\in V(G):(v,u)\in E(G)\}$，$\deg^+(v)=|N^+(v)|$ 称为 v 的出度；$N^-(v)=\{u\in V(G):(u,v)\in E(G)\}$，$\deg^-(v)=|N^-(v)|$ 称为 v 的入度.

如果 $(u,v),(u,w),(v,w)\in E(G)$，则称 $\langle u,v,w\rangle$ 是定向三角形. 其中 (u,v) 称为定向三角形的基，顶点 u 称为定向三角形的源点. 如果 $(u,v),(v,w)\in E(G)$，但 u 与 w 之间不连边，则称 uvw 是长为2的导出子路. 对任意的 $(u,v)\in E(G)$，令 $P(u,v)=N^+(v)\setminus N^+(u)$，由定义可知 $p(u,v)=|N^+(v)\setminus N^-(u)|$ 表示以 (u,v) 为第一条边长为2的导出子路的数目. $Q(u,v)=N^-(u)\setminus N^-(v)$，类似可知 $q(u,v)=|N^-(u)\setminus N^-(v)|$ 表示以 (u,v) 为第二条边长为2的导出子路的数目. $T(u,v)=N^+(u)\cap N^+(v)$，则 $t(u,v)=|N^+(u)\cap N^+(v)|$ 表示以 (u,v) 为基的定向三角形的数目.

引理1 对任意的 $(u,v)\in E(G)$，有
$$n>r+\deg^-(v)+q(u,v)+(1-\alpha)r+(1-\alpha)^2t(u,v). \tag{1}$$

证明：对 $(u,v)\in E(G)$，当 $t(u,v)=0$ 时，不等式(1)简化为
$$n>r+\deg^-(v)+q(u,v)+(1-\alpha)r. \tag{2}$$

在以 $N^+(v)$ 为顶点的导出子图中，至少存在一个顶点 w，它在以 $N^+(v)$ 为顶点的导出子图中的出度小于 αr. 否则由归纳假设可知，在这个顶点数为 r 的导出子图中必存在长度不大于4的有向圈. 因此，$|N^+(w)\setminus N^+(v)|\geqslant r-\alpha r$. 再由假设条件，$G$ 中有向圈的长度都大于4，可知 $N^+(v)$，$N^+(w)\setminus N^+(v)$，$N^-(v)$ 及 $N^-(u)\setminus N^-(v)$ 是两两不交的点集，故有
$$n>|N^+(v)|+|N^-(v)|+|N^-(u)\setminus N^-(v)|+|N^+(w)\setminus N^+(v)|\geqslant r+\deg^-(v)+q(u,v)+(1-\alpha)r.$$
从而当 $t(u,v)=0$ 时，式(1)成立.

当 $t(u,v)>0$ 时，至少存在一个顶点 $w\in N^+(u)\cap N^+(v)$，在以 $N^+(u)\cap N^+(v)$ 为顶点的 G 的导出子图中，w 的出度小于 $\alpha t(u,v)$，否则由归纳假设，在此导出子图中必存在长度不大于4的有向圈，故有
$$|N^+(w)\cap(N^+(u)\cap N^+(v))|<\alpha t(u,v). \tag{3}$$

另一方面，$N^+(w)$ 包含于 $N^+(v)\setminus N^+(u)$ 中的顶点数目满足
$$|N^+(w)\cap(N^+(v)\setminus N^+(u))|\leqslant|N^+(v)\setminus N^+(u)|=p(u,v). \tag{4}$$
注意到 $t(u,v)=r-p(u,v)$，综合式(3),(4)并代入
$$|N^+(w)\setminus N^+(v)|=|N^+(w)|-|N^+(w)\cap(N^+(u)\cap N^+(v))|-|N^+(w)\cap(N^+(v)\setminus N^+(u))|$$
可得
$$|N^+(w)\setminus N^+(v)|\geqslant r-\alpha t(u,v)-p(u,v)=(1-\alpha)t(u,v). \tag{5}$$

由归纳假设，G 中不含有向三角形，故 $N^+(w)\setminus N^+(v)$，$N^-(u)\setminus N^-(v)$，$N^-(v)$ 是两两不交的点集. 考虑 G 中以 $N^+(v)\cup N^+(w)$ 为顶点的导出子图. 根据归纳假设，存在顶点 $x\in N^+(v)\cap N^+(w)$，在此导出子图中，x 的出度小于 $\alpha|N^+(v)\cup N^+(w)|$. 于是 $N^+(x)$ 中落在 $N^+(v)\cup N^+(w)$ 以外的顶点数目满足
$$\begin{aligned}|N^+(x)\setminus(N^+(v)\cup N^+(w))|&=|N^+(x)|-|N^+(x)\cap(N^+(v)\cup N^+(w))|\geqslant\\ &r-\alpha|N^+(v)\cup N^+(w)|=r-\alpha(|N^+(v)|+|N^+(w)\setminus N^+(v)|)=\\ &(1-\alpha)r-\alpha|N^+(w)\setminus N^+(v)|,\end{aligned}$$
即
$$|N^+(x)\setminus(N^+(v)\cup N^+(w))|\geqslant(1-\alpha)r-\alpha|N^+(w)\setminus N^+(v)|. \tag{6}$$

由于 G 中不含长为4的有向圈，故 $N^+(x)\setminus(N^+(v)\cup N^+(w))$，$N^-(u)\setminus N^-(v)$，$N^-(v)$ 也是两两不交的点集. 于是 $N^-(v)$，$N^+(w)\setminus N^+(v)$，$N^+(x)\setminus(N^+(v)\cup N^+(w))$，$N^-(u)\setminus N^-(v)$，$N^-(v)$ 为两两不交的点集，其顶点数目分别为 r，$|N^+(w)\setminus N^+(v)|$，$|N^+(x)\setminus(N^+(v)\cup N^+(w))|$，$q(u,v)$ 和 $\deg^-(v)$，故
$$n>r+|N^+(w)\setminus N^+(v)|+|N^+(x)\setminus(N^+(v)\cup N^+(w))|+q(u,v)+\deg^-(v). \tag{7}$$

将式(5),(6)代入式(7)得

$$
\begin{aligned}
n > r + |N^+(w)\backslash N^+(v)| + (1-\alpha)r - \alpha|N^+(x)\backslash(N^+(v)| + q(u,v) + \deg^-(v) = \\
r + (1-\alpha)r + (1-\alpha)|N^+(w)\backslash N^+(v)| + q(u,v) + \deg^-(v) \geqslant \\
r + \deg^-(v) + q(u,v) + (1-\alpha)r + (1-\alpha)^2 t(u,v).
\end{aligned}
$$

证毕.

下面证明定理 1. 注意到 $t(u,v)=r-p(u,v)$，将不等式(1)重写为

$$(2\alpha-\alpha^2)t(u,v) > (3-\alpha)r - n + \deg^-(v) + q(u,v) - p(u,v). \tag{8}$$

两端对所有的$(u,v)\in E(G)$求和，可得

$$\sum_{(u,v)\in E(G)} t(u,v) = t, \tag{9}$$

$$\sum_{(u,v)\in E(G)} [(3-\alpha)r-n] = nr[(3-\alpha)r-n], \tag{10}$$

其中 t 表示 G 中定向三角形的数目. 再由 Cauchy 不等式得

$$\sum_{(u,v)\in E(G)} \deg^-(v) = \sum_{v\in V(G)} (\deg^-(v))^2 \geqslant \frac{1}{n}\Big(\sum_{v\in v(G)} \deg^-(v)\Big)^2 = nr^2,$$

即

$$\sum_{(u,v)\in E(G)} \deg^-(v) \geqslant nr^2. \tag{11}$$

因为 $\sum_{(u,v)\in E(G)} p(u,v)$ 与 $\sum_{(u,v)\in E(G)} q(u,v)$ 都表示 G 中长为 2 的导出子路的数目，故有

$$\sum_{(u,v)\in E(G)} p(u,v) = \sum_{(u,v)\in E(G)} q(u,v). \tag{12}$$

在式(8)两端对所有的$(u,v)\in E(G)$求和，并将式(9)～(12)代入可得

$$(2\alpha-\alpha^2)t > (4-\alpha)nr^2 - n^2 r. \tag{13}$$

对任意的 $v\in V(G)$，由于 $\deg^+(v)=r$，G 中以 v 为源点的定向三角形的数目最多为$\binom{r}{2}$，故 G 中定向三角形的数目 $t\leqslant n\binom{r}{2}$. 因此可得

$$(2\alpha-\alpha^2)t \leqslant n\binom{r}{2}(2\alpha-\alpha^2) < \frac{nr^2}{2}(2\alpha-\alpha^2). \tag{14}$$

比较式(13),(14)有

$$(4-\alpha)nr^2 - n^2 r < (nr^2/2)(2\alpha-\alpha^2). \tag{15}$$

不等式(15)两端同时除以 nr^2，再利用 $r=\lceil \alpha n\rceil > \alpha n$，有$(4-\alpha)-1/\alpha<(4-\alpha)-n/r<(2\alpha-\alpha^2)/2$，整理可得 $\alpha^3-4\alpha^2+8\alpha-2<0$. 进而可得 $\alpha<0.288\ 65$，与归纳假设条件 $\alpha\geqslant 0.288\ 66$ 矛盾. 故当 $\alpha\geqslant 0.288\ 66$时，$G$ 中一定存在长度不大于 4 的有向圈，定理 1 证毕.

参　考　文　献

[1] Caccetta L, Haggkvist R. On Minimal Digraphs with Given Girth [C]//Proc 9th S-E Conf Combinatorics, Graph Theory and Computing. Boca Raton: Utilitas Mathematica Publishing, Inc, 1978: 181-187.

[2] Hamidoune Y O. A Note on Minimal Directed Graphs with Given Girth [J]. J Combin Theory: Ser B, 1987, 43(3): 343-348.

[3] Hoang C, Reed B. A Note on Short Cycles in Digraphs [J]. Discrete Math, 1987, 66(1/2): 103-107.

[4] SHEN Jian. On the Girth of Digraphs [J]. Discrete Math, 2000, 211(1/2/3): 167-181.

[5] Sullivan B D. A Summary of Results and Problems Related to the Caccetta-Haggkvist Conjecture [J/OL]. 2006-05-24. http://arxiv.org/abs/math/0605646.

[6] Bondy J A. Counting Subgraphs: A New Approach to the Caccetta-Haggkvist Conjecture [J]. Discrete Math, 1997, 165/166: 71-80.

[7] SHEN Jian. Directed Triangles in Digraphs [J]. J Combin Theory: Ser B, 1998, 74(2): 405-407.

[8] Hamburger P, Haxell P, Kostochka A. On Directed Triangles in Digraphs [J]. Electronic J Combin, 2007, 14(1): 19.

[9] Hladký J, Král D, Norin S. Counting Flags in Triangle-Free Digraphs [J]. Electron Notes Discrete Math, 2009, 34(1): 621-625.

(责任编辑：赵立芹)