第56卷第4期 数学学报中文版 Vol.56, No.4
2013年7月 ACTA MATHEMATICA SINICA, Chinese Series Jul., 2013

文章编号: 0583-1431(2013)04-0479-08 **文献标识码:** A

Caccetta–Häggkvist 猜想的注记

梁 浩

西南财经大学经济数学学院 成都 611130
E-mail: lianghao@mail.ustc.edu.cn

徐俊明

中国科学技术大学数学科学学院
中国科学院吴文俊重点实验室 合肥 230026
E-mail: xujm@ustc.edu.cn

摘 要 1978 年, Caccetta 和 Häggkvist 提出如下至今仍未解决的猜想: 最小出度不小于 r 的 n 阶有向图含有长度不大于 $\lceil n/r \rceil$ 的有向圈. 本文证明了: 当 $\alpha \geq 0.28724$ 时, 最小出度至少 αn 的 n 阶有向图含有长度不超过 4 的有向圈.

关键词 有向图; 有向圈; Caccetta–Häggkvist 猜想
MR(2010) 主题分类 05C20, 05C38
中图分类 0157.5

A Note on Caccetta–Häggkvist Conjecture

Hao LIANG

Department of Mathematics, Southwestern University of Finance and Economics, Chengdu 611130*, P. R. China*
E-mail: *lianghao@mail.ustc.edu.cn*

Jun Ming XU

School of Mathematical Sciences, University of Science and Technology of China, Wentsun Wu Key Laboratory of CAS, Hefei 230026*, P. R. China*
E-mail: *xujm@ustc.edu.cn*

Abstract In 1978, Caccetta and Häggkvist made an open conjecture: Any digraph on n vertices with minimum outdegree at least r contains a directed cycle of length at most $\lceil n/r \rceil$. We prove that if $\alpha \geq 0.28724$, then any digraph on n vertices with minimum outdegree at least αn contains a directed cycle of length at most 4.

Keywords digraph; directed cycle; Caccetta–Häggkvist conjecture
MR(2010) Subject Classification 05C20, 05C38
Chinese Library Classification 0157.5

收稿日期: 2012-05-25; 接受日期: 2012-10-22
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11071233)

1 引言

设 $G=(V,E)$ 是简单有向图 (即不含环和平行边), 其中 $V=V(G)$ 表示 G 的顶点集, $E=E(G)$ 表示 G 的边集, $|V|$ 称为 G 的阶. 1978 年, Caccetta 和 Häggkvist [2] 提出如下的著名猜想:

猜想 1.1 最小出度不小于 r 的 n 阶有向图含有长度不大于 $\lceil n/r \rceil$ 的有向圈.

当 $r=1$ 时, 猜想显然成立. 当 $r=2$ 时, Caccetta 和 Häggkvist [2] 证明猜想成立. 1987 年, Hamildoune [4], Hoáng 和 Reed [5] 分别证明了当 $r=3$ 和 $r=4,5$ 时猜想成立. 最近, Shen [9] 证明了当 $r<\sqrt{n/2}$ 时猜想成立. 对于一般的 r, 此猜想至今仍未被解决. 关于猜想 1.1 及其相关问题的研究进展, 可以参阅文 [10].

当 $r=n/3$ 时, 猜想 1.1 可以表述为: 最小出度不小于 $n/3$ 的 n 阶有向图含有长度为 3 的有向圈. 然而, 这一形式简单而有趣的猜想至今仍未被证明. 于是人们从另一个角度来考虑这个猜想, 即寻找尽可能小的常数 α 以确保当最小出度不小于 αn 时, n 阶有向图含有长度为 3 的有向圈. 猜想 1.1 意味着 $\alpha=1/3$. Caccetta 和 Häggkvist [2] 证明了 $\alpha \le (3-\sqrt{5})/2 \approx 0.3819$, Bondy [1], Shen [8] 以及 Hamburger 等 [3] 相继对其作出了改进. 最近, Hlakdy 等人 [6] 将这个结果改进到 0.3465.

本文考虑最小常数 α 以确保最小出度不小于 αn 的 n 阶有向图含有长度不大于 4 的有向圈. 猜想 1.1 意味着: $\alpha=1/4$. 通过提炼归纳文 [1, 3, 7, 8] 中的方法, 我们证明了如下的结果.

定理 1.2 若 $\alpha \ge 0.28724$, 则最小出度不小于 αn 的 n (≥ 4) 阶有向图含有长度不大于 4 的有向圈.

2 定理的证明

定理 1.2 的证明需要一些记号和引理. 设 G 是有向图. 对任意 $v \in V(G)$, 定义

$$N_G^+(v)=\{u \in V(G):(v,u)\in E(G)\},\quad d_G^+(v)=|N_G^+(v)|$$

为 v 的出度; 定义

$$N_G^-(v)=\{u \in V(G):(u,v)\in E(G)\},\quad d_G^-(v)=|N_G^-(v)|$$

为 v 的入度. 定义

$$\delta^+(G)=\min\{d_G^+(v):v\in V(G)\}$$

为 G 的最小出度.

引理 2.1 (Hamburger, Haxell, Kostochka [3]) 设 G 是有向图. 若能从 G 中删去 k 条边后得到无圈图, 则存在 $v\in V(G)$, 使得 $d_G^+(v)\le\sqrt{2k}$.

引理 2.2 (Sullivan [11]) 设 G 是从完全有向图中删去 k 条边后得到的图. 若 G 含有向圈且最小圈长大于 4, 则从 G 中再删去 $k/2$ 条边后可得到无圈图.

引理 2.3 设 G 是从完全有向图中删去 k 条边后得到的图. 若 G 含有向圈且最小圈长大于 4, 则存在 $v\in V(G)$, 使得 $d_G^+(v)\le\sqrt{k}$.

证明 由引理 2.2, 从 G 中再删去 $k/2$ 条边后得到无圈图. 由引理 2.1, 存在 $v\in V(G)$, 使得 $d_G^+(v)\le\sqrt{2k/2}=\sqrt{k}$. 证毕.

我们对阶 n (≥ 4) 使用归纳法证明定理 1.2. 首先注意到: 当 $\alpha \geq 0.28724$ 且 $n \geq 4$ 时, $\alpha n \geq 1$, 最小出度不小于 αn 的 n 阶有向图必含有向圈. 因此, 当 $n=4$ 时, 结论成立. 假设定理 1.2 对阶小于 n 的任意有向图都成立. 令 G 是 n 阶有向图且不含长度最多为 4 的有向圈. 不妨假设 G 是 r 出度正则的, 即对任何 $v \in V(G)$ 均有 $d_G^+(v)=r$, 其中 $r=\lceil \alpha n \rceil$, $\alpha \geq 0.28724$. 我们的目的是导出矛盾. 首先证明几个引理.

引理 2.4 对任意的 $v \in V(G)$, 均有

$$d_G^-(v) < \frac{(1-\alpha)^3}{\alpha} r, \tag{2.1}$$

其中 $\frac{(1-\alpha)^3}{\alpha} > 1$, $\alpha < \frac{1}{3}$.

证明 对任意 $v \in V(G)$, 令 H 是以 $N^+(v)$ 为顶点的导出子图. 因为 H 不含长度最多为 4 的有向圈, 由归纳假设, 存在 $u \in V(H)$, 使得 $d_H^+(u) < \alpha r$. 由此可得

$$|N_G^+(u) \backslash N_G^+(v)| \geq r - \alpha r. \tag{2.2}$$

同样地, 考虑以 $N_G^+(v) \cup N_G^+(u)$ 为顶点的导出子图. 由归纳假设, 存在 $w \in N_G^+(v) \cup N_G^+(u)$, 在此导出子图中的出度小于 $\alpha|N_G^+(v) \cup N_G^+(u)|$. 于是有

$$\begin{aligned} |N_G^+(w) \backslash (N_G^+(v) \cup N_G^+(u))| &\geq r - \alpha|N_G^+(v) \cup N_G^+(u)| \\ &= r - \alpha(|N_G^+(v)| + |N_G^+(u) \backslash N_G^+(v)|) \\ &= (1-\alpha)r - \alpha|N_G^+(u) \backslash N_G^+(v)|, \end{aligned}$$

即

$$|N_G^+(w) \backslash (N_G^+(v) \cup N_G^+(u))| \geq (1-\alpha)r - \alpha|N_G^+(u) \backslash N_G^+(v)|. \tag{2.3}$$

由于 G 的最小圈长大于 4, 故顶点集 $N_G^+(v)$, $N_G^+(u) \backslash N_G^+(v)$, $N_G^+(w) \backslash (N_G^+(v) \cup N_G^+(u))$, $N_G^-(v)$ 两两不交, 每个点集的顶点数目分别为 r, $|N_G^+(u) \backslash N_G^+(v)|$, $|N_G^+(w) \backslash (N_G^+(v) \cup N_G^+(u))|$, $d_G^-(v)$. 由此可得

$$n > r + |N_G^+(u) \backslash N_G^+(v)| + |N_G^+(w) \backslash (N_G^+(v) \cup N_G^+(u))| + d_G^-(v). \tag{2.4}$$

将 (2.2), (2.3) 代入 (2.4) 式, 得

$$\begin{aligned} n &> r + |N_G^+(u) \backslash N_G^+(v)| + (1-\alpha)r - \alpha|N_G^+(u) \backslash N_G^+(v)| + d_G^-(v) \\ &= r + (1-\alpha)r + (1-\alpha)|N_G^+(u) \backslash N_G^+(v)| + d_G^-(v) \\ &\geq r + (1-\alpha)r + (1-\alpha)^2 r + d_G^-(v). \end{aligned}$$

注意到 $r = \lceil \alpha n \rceil \geq \alpha n$, 可得

$$\frac{r}{\alpha} \geq n > r + (1-\alpha)r + (1-\alpha)^2 r + d_G^-(v).$$

由此可以推出

$$d_G^-(v) < \frac{1}{\alpha}(r - \alpha r - \alpha(1-\alpha)r - \alpha(1-\alpha)^2 r) = \frac{(1-\alpha)^3}{\alpha} r$$

对任意的 $v \in V(G)$ 成立.

由于 G 是 r 出度正则的, 故存在 $v \in V(G)$ 满足 $d_G^-(v) \geq r$, 由此可得 $\frac{(1-\alpha)^3}{\alpha} > 1$. 令 $s(\alpha) = \frac{(1-\alpha)^3}{\alpha}$. 由于 $s(\alpha)$ 关于 α 单调递减并且 $s(\frac{1}{3}) = \frac{8}{9} < 1$, 于是有 $\alpha < \frac{1}{3}$. 引理得证.

设 $u,v,w\in V(G)$. 如果 $(u,v),(v,w),(u,w)\in E(G)$, 则称 $\langle u,v,w\rangle$ 为定向三角形. 有向边 (u,v) 称为此定向三角形的基, 顶点 u 称为此定向三角形的源. 用 $\bar{E}(G)$ 表示 G 中未连边的点对集合, 即当 $(x,y),(y,x)\notin E(G)$ 时, 有 $xy\in\bar{E}(G)$. 以下的记号来自于文 [3].

对任意 $(u,v)\in E(G)$, 用 $f(u,v)$ 表示以 $N_G^+(u)\cap N_G^+(v)$ 为顶点的导出子图中不连边的点对数目. 对任意 $u\in V(G)$, 用 H_u 表示 G 中以 $N_G^+(u)$ 为顶点的导出子图, 令

$$f(u)=\binom{r}{2}-|E(H_u)|,\quad t(u)=|E(H_u)|.$$

可以看出, $f(u)$ 表示 H_u 中不连边的点对数目, $t(u)$ 表示 G 中以 u 为源的定向三角形的个数, 并且 $t(u)+f(u)=\binom{r}{2}$. 令

$$t=\sum_{u\in V(G)}t(u),\quad f=\sum_{u\in V(G)}f(u)=\gamma nr^2,\quad \text{其中}\ \ 0\le\gamma\le\frac{1}{2}.$$

于是

$$t=\binom{r}{2}n-f=\binom{r}{2}n-\gamma nr^2\le\left(\frac{1}{2}-\gamma\right)nr^2,\quad \text{其中}\ \ 0\le\gamma\le\frac{1}{2}. \tag{2.5}$$

引理 2.5 令 $\beta=\frac{1}{6}\big(\frac{(1-\alpha)^3}{\alpha}-\frac{2\alpha}{(1-\alpha)^3}+4\big)$, 则 $\beta>\frac{1}{2}$, 并且

$$\sum_{(u,v)\in E(G)}f(u,v)<\beta r\sum_{u\in V(G)}f(u).$$

证明 令 $\beta(x)=\frac{1}{6}(x-\frac{2}{x}+4)$, $x>0$. 显然 $\beta(x)$ 关于 x 单调递增. 由引理 2.4, 有 $\frac{(1-\alpha)^3}{\alpha}>1$, 由此可得 $\beta=\beta(\frac{(1-\alpha)^3}{\alpha})>\beta(1)=\frac{1}{2}$. 由定义易知

$$\sum_{u\in V(G)}f(u)=\sum_{xy\in\bar{E}(G)}|N_G^-(x)\cap N_G^-(y)|$$

以及

$$\sum_{(u,v)\in E(G)}f(u,v)=\sum_{xy\in\bar{E}(G)}|E(N_G^-(x)\cap N_G^-(y))|.$$

因此, 为证明引理, 只需证明: 对任意的 $xy\in\bar{E}(G)$, 有

$$|E(N_G^-(x)\cap N_G^-(y))|<\beta r|N_G^-(x)\cap N_G^-(y)|. \tag{2.6}$$

任取 $xy\in\bar{E}(G)$, 令 $|N_G^-(x)\cap N_G^-(y)|=q$. 若 $q<r$, 则

$$|E(N_G^-(x)\cap N_G^-(y))|\le\binom{q}{2}<\frac{1}{2}q^2<\beta rq,$$

即不等式 (2.6) 成立. 现在假设 $q\ge r$ 且假定不等式 (2.6) 不成立, 即

$$|E(N_G^-(x)\cap N_G^-(y))|\ge\beta r|N_G^-(x)\cap N_G^-(y)|=\beta rq. \tag{2.7}$$

令 k 表示以 $N_G^-(x)\cap N_G^-(y)$ 为顶点的导出子图中不连边的点对数目. 任意 q 个顶点最大出度为 r 的无圈图, 至多有 $\binom{r}{2}+r(q-r)=\binom{q}{2}-\binom{q-r}{2}$ 条边. 以 $N_G^-(x)\cap N_G^-(y)$ 为顶点的导出子图中最小圈长大于 4, 并且任一顶点的出度至多为 r, 由引理 2.2, 此导出子图中一定存在边数不小于 $\binom{q}{2}-\frac{3}{2}k$ 的无圈子图. 于是有

$$\binom{q}{2}-\frac{3}{2}k\le\binom{q}{2}-\binom{q-r}{2},$$

即 $k \geq \frac{2}{3}\binom{q-r}{2}$. 由此可得

$$|E(N_G^-(x) \cap N_G^-(y))| = \binom{q}{2} - k \leq \binom{q}{2} - \frac{2}{3}\binom{q-r}{2}. \tag{2.8}$$

由不等式 (2.7) 和 (2.8), 有

$$\begin{aligned}
&\binom{q}{2} - \frac{2}{3}\binom{q-r}{2} \geq \beta rq \\
&\Rightarrow 3q(q-1) - 2(q-r)(q-r-1) \geq 6\beta rq \\
&\Rightarrow 3q^2 - 2(q-r)^2 > 6\beta rq \\
&\Rightarrow q^2 + (4-6\beta)rq - 2r^2 > 0 \\
&\Rightarrow \left(\frac{q}{r}\right)^2 + (4-6\beta)\frac{q}{r} - 2 > 0.
\end{aligned}$$

令 $g(x) = x^2 + (4-6\beta)x - 2$. 由于 $\beta = \frac{1}{6}\left(\frac{(1-\alpha)^3}{\alpha} - \frac{2\alpha}{(1-\alpha)^3} + 4\right)$, 易知 $\frac{(1-\alpha)^3}{\alpha}$ 是 $g(x) = 0$ 的唯一正实根. 由此可知, 当 $(\frac{q}{r})^2 + (4-6\beta)\frac{q}{r} - 2 > 0$ 时, 有 $\frac{q}{r} > \frac{(1-\alpha)^3}{\alpha}$. 因此

$$d_G^-(x) \geq |N_G^-(x) \cap N_G^-(y)| = q > \frac{(1-\alpha)^3}{\alpha} r,$$

与引理 2.4 矛盾. 因此, 不等式 (2.6) 对任意的 $xy \in \bar{E}(G)$ 成立, 引理证毕.

对任意的 $(u,v) \in E(G)$, 令

$p(u,v) = |N_G^+(v) \backslash N_G^+(u)|$, 它是以 (u,v) 为第一条边的长为 2 的有向导出子路的数目;

$q(u,v) = |N_G^-(u) \backslash N_G^-(v)|$, 它是以 (u,v) 为最后一条边的长为 2 的有向导出子路的数目;

$t(u,v) = |N_G^+(u) \cap N_G^+(v)|$, 它是以 (u,v) 为基的定向三角形的数目.

引理 2.6 对任意的 $(u,v) \in E(G)$, 有

$$n > r + (1-\alpha)r + (1-\alpha)^2 t(u,v) + d_G^-(v) + q(u,v) \tag{2.9}$$

和

$$n > r + (1-\alpha)r + (1-\alpha)(t(u,v) - \sqrt{f(u,v)}) + d_G^-(v) + q(u,v). \tag{2.10}$$

证明 我们先证明不等式 (2.9). 若 $t(u,v) = 0$, (2.9) 可简化为

$$n > r + d_G^-(v) + q(u,v) + (1-\alpha)r. \tag{2.11}$$

由归纳假设, 存在 $w \in N_G^+(v)$, 在以 $N_G^+(v)$ 为顶点的导出子图中, w 的出度小于 αr. 因此有

$$|N_G^+(w) \backslash N_G^+(v)| \geq r - \alpha r.$$

由于 G 中最小圈长大于 4, 故 $N_G^+(v)$, $N_G^+(w) \backslash N_G^+(v)$, $N_G^-(v)$ 以及 $N_G^-(u) \backslash N_G^-(v)$ 为两两不交的点集, 由此可得

$$\begin{aligned}
n &> |N_G^+(v)| + |N_G^-(v)| + |N_G^-(u) \backslash N_G^-(v)| + |N_G^+(w) \backslash N_G^+(v)| \\
&\geq r + d_G^-(v) + q(u,v) + (1-\alpha)r.
\end{aligned}$$

于是, 不等式 (2.11) 成立, 即当 $t(u,v) = 0$ 时, 不等式 (2.9) 成立.

现在假设 $t(u,v) > 0$. 考虑以 $N_G^+(v) \cap N_G^+(u)$ 为顶点的导出子图. 由归纳假设, 存在 $w \in N_G^+(v) \cap N_G^+(u)$, 在此导出子图中的出度小于 $\alpha t(u,v)$. 同时, 由于 $|N_G^+(v) \backslash N_G^+(u)| = p(u,v)$, 故 w

在以 $N_G^+(v)\backslash N_G^+(u)$ 为顶点的导出子图中的出邻点数目至多为 $p(u,v)$. 再由 $t(u,v)=r-p(u,v)$, 可得

$$|N_G^+(w)\backslash N_G^+(v)|\geq r-p(u,v)-\alpha t(u,v)=(1-\alpha)t(u,v). \tag{2.12}$$

因为 G 中不含有向三角形, 故点集 $N_G^+(w)\backslash N_G^+(v)$, $N_G^-(v)$, $N_G^-(u)\backslash N_G^-(v)$ 两两不交. 考虑以 $N_G^+(v)\cup N_G^+(w)$ 为顶点的导出子图. 由归纳假设, 存在 $x\in N_G^+(v)\cup N_G^+(w)$, 在此导出子图中的出度小于 $\alpha|N_G^+(v)\cup N_G^+(w)|$. 由此可得

$$\begin{aligned}|N_G^+(x)\backslash(N_G^+(v)\cup N_G^+(w))| &\geq r-\alpha|N_G^+(v)\cup N_G^+(w)|\\ &= r-\alpha(|N_G^+(v)|+|N_G^+(w)\backslash N_G^+(v)|)\\ &= (1-\alpha)r-\alpha|N_G^+(w)\backslash N_G^+(v)|,\end{aligned}$$

即

$$|N_G^+(x)\backslash(N_G^+(v)\cup N_G^+(w))|\geq(1-\alpha)r-\alpha|N_G^+(w)\backslash N_G^+(v)|. \tag{2.13}$$

由于 G 中最小圈长大于 4, 故点集 $N_G^-(v)$, $N_G^-(u)\backslash N_G^-(v)$ 均与 $N_G^+(x)\backslash(N_G^+(v)\cup N_G^+(w))$ 不相交. 由此可知, $N_G^+(v)$, $N_G^+(w)\backslash N_G^+(v)$, $N_G^+(x)\backslash(N_G^+(v)\cup N_G^+(w))$, $N_G^-(v)$ 和 $N_G^-(u)\backslash N_G^-(v)$ 为两两不交的点集, 且其顶点数目分别为 r, $|N_G^+(w)\backslash N_G^+(v)|$, $|N_G^+(x)\backslash(N_G^+(v)\cup N_G^+(w))|$, $d_G^-(v)$ 和 $q(u,v)$. 于是有

$$n>r+|N_G^+(w)\backslash N_G^+(v)|+|N_G^+(x)\backslash(N_G^+(v)\cup N_G^+(w))|+d_G^-(v)+q(u,v). \tag{2.14}$$

将 (2.12), (2.13) 代入 (2.14) 式, 得

$$\begin{aligned}n&>r+|N_G^+(w)\backslash N_G^+(v)|+(1-\alpha)r-\alpha|N_G^+(w)\backslash N_G^+(v)|+d_G^-(v)+q(u,v)\\ &=r+(1-\alpha)r+(1-\alpha)|N_G^+(w)\backslash N_G^+(v)|+d_G^-(v)+q(u,v)\\ &\geq r+d_G^-(v)+q(u,v)+(1-\alpha)r+(1-\alpha)^2t(u,v).\end{aligned}$$

由此可知不等式 (2.9) 成立.

对任意 $(u,v)\in E(G)$, 考虑以 $N_G^+(u)\cap N_G^+(v)$ 为顶点的导出子图, $f(u,v)$ 表示其中不连边的点对数目. 由引理 2.3, 存在 $w\in N_G^+(u)\cap N_G^+(v)$, 在此导出子图中的出度小于 $\sqrt{f(u,v)}$. 由此可知

$$|N_G^+(w)\backslash N_G^+(v)|\geq r-p(u,v)-\sqrt{f(u,v)}. \tag{2.15}$$

将 (2.13), (2.15) 代入 (2.14) 式, 得

$$\begin{aligned}n&>r+|N_G^+(w)\backslash N_G^+(v)|+(1-\alpha)r-\alpha|N_G^+(w)\backslash N_G^+(v)|+d_G^-(v)+q(u,v)\\ &=r+(1-\alpha)r+(1-\alpha)|N_G^+(w)\backslash N_G^+(v)|+d_G^-(v)+q(u,v)\\ &\geq r+d_G^-(v)+q(u,v)+(1-\alpha)r+(1-\alpha)(r-p(u,v)-\sqrt{f(u,v)})\\ &=r+d_G^-(v)+q(u,v)+(1-\alpha)r+(1-\alpha)(t(u,v)-\sqrt{f(u,v)}).\end{aligned}$$

即 (2.10) 式成立. 引理得证.

定理 1.2 的证明 将 $t(u,v)=r-p(u,v)$ 代人 (2.9) 和 (2.10) 式, 得

$$(2\alpha-\alpha^2)t(u,v)>(3-\alpha)r-n+d_G^-(v)+q(u,v)-p(u,v) \tag{2.16}$$

和

$$(1-\alpha)\sqrt{f(u,v)}+\alpha t(u,v)>(3-\alpha)r-n+d_G^-(v)+q(u,v)-p(u,v). \tag{2.17}$$

对所有 $(u,v)\in E(G)$ 求和, 得

$$\sum_{(u,v)\in E(G)} t(u,v)=t, \tag{2.18}$$

其中 t 为 G 中定向三角形的数目, 并且

$$\sum_{(u,v)\in E(G)} (3-\alpha)r-n=nr[(3-\alpha)r-n]. \tag{2.19}$$

由柯西不等式和文 [12, 定理 1.1] (即图论第一定理), 得

$$\sum_{(u,v)\in E(G)} d_G^-(v)=\sum_{v\in V(G)}(d_G^-(v))^2\geq\frac{1}{n}\left(\sum_{v\in V(G)} d_G^-(v)\right)^2=nr^2,$$

即

$$\sum_{(u,v)\in E(G)} d_G^-(v)\geq nr^2. \tag{2.20}$$

因为 $\sum_{(u,v)\in E(G)}p(u,v)$ 和 $\sum s_{(u,v)\in E(G)}q(u,v)$ 均表示 G 中长为 2 的有向导出子路的数目, 故有

$$\sum_{(u,v)\in E(G)} p(u,v)=\sum_{(u,v)\in E(G)} q(u,v). \tag{2.21}$$

由引理 2.5, 有

$$\sum_{(u,v)\in E(G)}\sqrt{f(u,v)}\leq nr\sqrt{\frac{\sum_{(u,v)\in E(G)}f(u,v)}{nr}}<nr\sqrt{\frac{\beta r\sum_{u\in V(G)}f(u)}{nr}}.$$

又因为

$$\sum_{u\in V(G)} f(u)=\gamma nr^2,$$

有

$$\sum_{(u,v)\in E(G)}\sqrt{f(u,v)}<nr^2\sqrt{\beta\gamma}. \tag{2.22}$$

在不等式 (2.16) 和 (2.17) 的两端对所有的 $(u,v)\in E(G)$ 求和, 再将 (2.18)–(2.22) 代入这两个不等式可得

$$(2\alpha-\alpha^2)t>(4-\alpha)nr^2-n^2r \tag{2.23}$$

和

$$(1-\alpha)nr^2\sqrt{\beta\gamma}+\alpha t>(4-\alpha)nr^2-n^2r. \tag{2.24}$$

由 (2.5) 式, $t\leq(\frac{1}{2}-\gamma)nr^2$, 其中 $0\leq\gamma\leq\frac{1}{2}$. 代入 (2.23) 和 (2.24) 式, 得

$$\left(\frac{1}{2}-\gamma\right)(2\alpha-\alpha^2)nr^2>(4-\alpha)nr^2-n^2r \tag{2.25}$$

和

$$(1-\alpha)nr^2\sqrt{\beta\gamma}+\alpha\left(\frac{1}{2}-\gamma\right)nr^2>(4-\alpha)nr^2-n^2r. \tag{2.26}$$

将 (2.25), (2.26) 式两端同时除以 nr^2, 并且注意到 $r=\lceil\alpha n\rceil\geq\alpha n$, 可以得到

$$\left(\frac{1}{2}-\gamma\right)(2\alpha-\alpha^2)>(4-\alpha)-\frac{1}{\alpha} \tag{2.27}$$

和

$$(1-\alpha)\sqrt{\beta\gamma}+\alpha\left(\frac{1}{2}-\gamma\right)>(4-\alpha)-\frac{1}{\alpha}. \tag{2.28}$$

由 (2.27) 式得

$$\gamma<\frac{2-8\alpha+4\alpha^2-\alpha^3}{2(2-\alpha)\alpha^2}. \tag{2.29}$$

令 $h(\gamma)=(1-\alpha)\sqrt{\beta\gamma}+\alpha(\frac{1}{2}-\gamma)$, 则 $h'(\gamma)=\frac{1-\alpha}{2}\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}-\alpha$. 由于 $\beta>\frac{1}{2}$ 和 $\alpha<\frac{1}{3}$, 对任意的 $0\leq\gamma\leq\frac{1}{2}$ 有 $h'(\gamma)\geq 0$. 由此可知, $h(\gamma)$ 关于 γ 是单调递增的. 将 (2.29) 代入 (2.28) 式, 得

$$h\left(\frac{2-8\alpha+4\alpha^2-\alpha^3}{2(2-\alpha)\alpha^2}\right)\geq h(\gamma)>(4-\alpha)-\frac{1}{\alpha},$$

即

$$(1-\alpha)\sqrt{\beta\frac{2-8\alpha+4\alpha^2-\alpha^3}{2(2-\alpha)\alpha^2}}+\frac{4\alpha-\alpha^2-1}{\alpha(2-\alpha)}>(4-\alpha)-\frac{1}{\alpha}.$$

将 $\beta=\frac{1}{6}\big(\frac{(1-\alpha)^3}{\alpha}-\frac{2\alpha}{(1-\alpha)^3}+4\big)$ 代入上式可得

$$\alpha^{10}-12\alpha^9+75\alpha^8-320\alpha^7+877\alpha^6-1402\alpha^5+1261\alpha^4-628\alpha^3+188\alpha^2-38\alpha+4>0.$$

由此可得: $\alpha<0.287238$ 与 $\alpha\geq 0.28724$ 矛盾. 定理 1.2 得证.

致谢 本文作者感谢编委和审稿专家的帮助.

参 考 文 献

[1] Bondy J. A., Counting subgraphs: A new approach to the Caccetta–Häggkvist conjecture, *Discrete Math.*, 1997, **165/166**: 71–80.

[2] Caccetta L., Häggkvist R., On minimal digraphs with given girth, Proc. 9th S-E Conf. Combinatorics, Graph Theory and Computing, 1978: 181–187.

[3] Hamburger P., Haxell P., Kostochka A., On the directed triangles in digraphs, *Electronic J. Combin.*, 2007, **14**: Note 19.

[4] Hamidoune Y. O., A note on minimal directed graphs with given girth, *J. Combin. Theory, Ser. B*, 1987, **43**(3): 343–348.

[5] Hoáng C., Reed B., A note on short cycles in digraphs, *Discrete Math.*, 1987, **66**(1–2): 103–107.

[6] Hladky J., Král' D., Norin S., Counting flags in triangle-free digraphs, *Electron. Notes Discrete Math.*, 2009, **34**: 621–625.

[7] Li Q., Brualdi R. A., On minimal regular digraphs with girth 4, *Czechoslovak Math. J.*, 1983, **33**: 439–447.

[8] Shen J., Directed triangles in digraphs, *J. Combin. Theory, Ser. B*, 1998, **74**: 405–407.

[9] Shen J., On the girth of digraphs, *Discrete Math.*, 2000, **211**(1–3): 167–181.

[10] Sullivan B., A summary of results and problems related to the Caccetta–Häggkvist conjecture, Arxiv preprint math/0605646, 2006-arxiv.org.

[11] Sullivan B., Extremal Problems in Digraphs, Ph.D. thesis, Princeton University, May, 2008.

[12] Xu J. M., Theory and Application of Graphs, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 2003.