中 国 科 学 (E 辑)
第 29 卷 第 3 期 SCIENCE IN CHINA (Series E) 1999 年 6 月

计算机互连双环网络的最优设计 *

徐俊明
(中国科学技术大学数学系,合肥 230026)

摘要 双环网络 $G(N;r,s)$ 有 N 个结点 $0,1,2,\cdots,N-1$,并从每个结点 i 发出两条有向边 $i\to i+r(\bmod N)$ 和 $i\to i+s(\bmod N)$,其中 $1\leq r\neq s<N$. 一个自然的问题是:对于给定的 N,怎样选取 r 和 s 使得 $G(N;r,s)$ 有最小直径. 发展了李乔等人就 $r=1$ 的特殊情形提出的一个构造方法,并构造出其最小直径都不可能在 $r=1$ 时达到的双环网络无限族. 同时指出 Esqué等人结果中的一个错误.

关键词 计算机互连网络 最优设计 双环网络 循环有向图 直径

众所周知,计算机互连网络或通讯系统的拓扑结构可以用有向图 G 来模拟,其中 G 的顶点表示处理机或开关元件,G 的有向边表示单向通讯连线. 网络的有效性的一个重要参数是信息的传输延迟,它可以用图的直径来度量. 双环网络具有对称性、简单性和可扩性,因而被广泛用于计算机互连网络或通讯系统的拓扑结构中. 双环网络的图论模型是指这样一个有向图 $G(N;r,s)$,它的每个顶点记为 $0,1,2,\cdots,N-1$,并从每个顶点 i 发出两条有向边 $i\to i+r(\bmod N)$ 和 $i\to i+s(\bmod N)$,其中 r 和 s 是两个自然数,而且 $1\leq r\neq s<N$. 从定义立即可知,对于给定的 N, r 和 s 唯一决定了一个双环网络 $G(N;r,s)$ 的结构,因而也决定了它的直径. 一个自然的问题是:对于给定的 N,怎样选取 r 和 s 使得 $G(N;r,s)$ 有最小的直径?

易知, $G(N;r,s)$ 存在有限的直径 $\Leftrightarrow G(N;r,s)$ 为强连通的 $\Leftrightarrow N,r,s$ 满足条件

$$\mathrm{g.c.d.}(N,r,s)=1. \tag{1}$$

如果 $G(N;r,s)$ 存在有限直径,那么记 $G(N;r,s)$ 的直径为 $\mathrm{d}(N;r,s)$,并记

$$\mathrm{d}_1(N)=\min\{\mathrm{d}(N;1,s):1<s<N\},\ \mathrm{d}(N)=\min\{\mathrm{d}(N;r,s):1\leq r\neq s<N\}.$$

显然, $\mathrm{d}_1(N)\geq\mathrm{d}(N)$. 若 $\mathrm{d}_1(N)>\mathrm{d}(N)$,则 $\mathrm{d}(N)$ 不可能在 $r=1$ 时达到. 我们称这样的 N 为奇异的. 若存在 s 使得 $\mathrm{d}(N;1,s)=\mathrm{d}_1(N)$,则称 $G(N;1,s)$ 是优的. 若存在 r 和 s 使得 $\mathrm{d}(N;r,s)=\mathrm{d}(N)$,则称 $G(N;r,s)$ 是最优的. 设 m 是一个正实数, $\lceil m\rceil$ 表示不小于 m 的最小整数.

早在 1974 年,Wong 和 Coppersmith[1]就证明了

$$\mathrm{d}_1(N)\geq\lceil\sqrt{3N}\,\rceil-2. \tag{2}$$

并且提出研究下述组合问题:对每个 $N\geq 4$,确定 $\mathrm{d}_1(N)$ 的精确值,并且构造出优的 $G(N;1,s)$. 由于问题的困难性和应用的局限性,这个问题的研究一直没有得到足够的重视. 随着计算机的广泛应用和大规模集成电路以及光缆技术的出现,这个问题才得到广泛深入的研

1998-08-14 收稿,1999-01-22 收修改稿
*国家自然科学基金资助项目(批准号:19671057)和国家博士点基金及中国科学院基金资助项目

究[2~8]. 直到 1987 年,人们才陆续构造出 16 个优的双环网络无限族. 但这 16 个无限族不能包含 50 以内的所有自然数. 突破性进展是在 1993 年. 李乔等人[7]提出一个系统的构造方法,并且根据这个方法列表展示出 102 个优的双环网络无限族,其中包含已知的 16 个和所有的自然数 N, $4 \le N \le 300$.

1987 年, Fiol 等人[6]证明了(2)式中的下界对于一般的双环网络 $G(N; r, s)$ 仍然成立,即

$$d(N) \ge [\sqrt{3N}] - 2. \tag{3}$$

同时,他们通过计算机搜索后发现,奇异的 N 确实存在,它的最小值是 450. 事实上 $d_1(450) = 36$,并且 $G(450; 1, 59)$ 是优的. 然而, $d(450; 2, 185) = [\sqrt{3 \cdot 450}] - 2 = 35$. 由(3)式知 $G(450; 2, 185)$ 是最优的.

对 $N \ge 4$,记 $lb(N) = [\sqrt{3N}] - 2$. $G(N; r, s)$ 称为紧优的,如果 $d(N; r, s) = lb(N)$. 易知,若 $G(N; r, s)$ 是紧优的,则它一定是最优的. 反之不真. 李乔等人在文献[7]中所展示的 102 个优的双环网络无限族中,有 69 个是紧优的. 紧优的 $G(N; r, s)$ 称为奇异的,如果 N 是奇异的. 由上面的说明知, $G(450; 2, 185)$ 是奇异紧优的.

Esqué等人在文献[3]的结尾断言找到一个奇异紧优双环网络无限族 $\{G(N(e); r(e), s(e)) : e \in Z\}$,其中 $N(e) = 2700e^2 + 2220e + 450$, $r(e) = 30e + 2$, $s(e) = 420e + 185$, Z 是非负整数无限集. 令 $Z' = \{157k + 136 : k \in Z\}$,则 $Z' \subset Z$,因而 $\{G(N(e); r(e), s(e)) : e \in Z'\}$ 是 $\{G(N(e); r(e), s(e)) : e \in Z\}$ 的一个无限子集. 然而,不难验证

$$\text{g.c.d.}(N(e), r(e), s(e)) \ge 157, \quad \forall e \in Z'.$$

由条件(1)知, $\{G(N(e); r(e), s(e)) : e \in Z'\}$ 中每个双环网络都是非强连通的. 因而不存在有限直径. 这一事实说明 Esqué等人的断言是不正确的.

本文发展李乔等人提出的方法,并据此对于给定的奇异紧优双环网络 $G(N_0; r_0, s_0)$,构造出一个以 $G(N_0; r_0, s_0)$ 为起始元素的紧优双环网络无限族 $\{G(N(t); r(t), s(t)) : t \in U \subseteq Z\}$ 使得其中包含一个奇异紧优双环网络无限子族 $\{G(N(t(e)); r(t(e)), s(t(e))) : e \in E \subseteq Z\}$,且 $t(0) = t_0$, $N(t_0) = N_0$, $r(t_0) = r_0$, $s(t_0) = s_0$. 双环网络的这种性质,以往从未揭示过. 作为实例,我们将进一步讨论和修订 Esqué等人的上述结果.

1　定义和引理

因为 $G(N; r, s)$ 是点对称的[9],所以要研究 $G(N; r, s)$ 的直径只需考察从顶点 0 到其他顶点 k 的距离. 为此,在 Descartes 平面直角坐标系中,令 x 轴的单位为 r(或 s), y 轴的单位为 s(或 r). 把第 1 象限中的所有格点 (x, y) 按下列顺序排成序列:

$$(0,0), (1,0), (0,1), (2,0), (1,1), (0,2), \cdots, (j,0), (j-1,1), \cdots, (j-i, i), \cdots, (1, j-1), (0, j), \cdots.$$

并且依次在每一格点 (x, y) 的右上角的单位方格内安置一个数 $k \in \{0, 1, 2, \cdots, N-1\}$,其中 $k \equiv xr + ys \pmod N$. 如果在此之前数 k 已出现过,则空出此方格,考察下一个格点,直到数 $0, 1, 2, \cdots, N-1$ 都出现时为止.

图 1 所示的是 $G(16; 3, 5)$ 按上述方法所确定的构图,其中, $N = 16$, $r = 3$, $s = 5$. 文献[1,6]已经证明:如果 N, r, s 满足条件(1)式,则由 $G(N; r, s)$ 所确定的 N 个方格组成的构图呈图 2

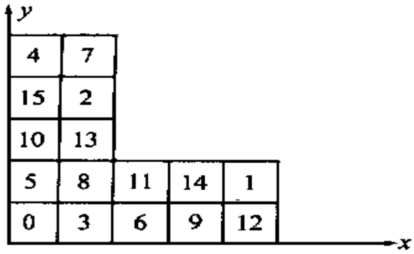

图1

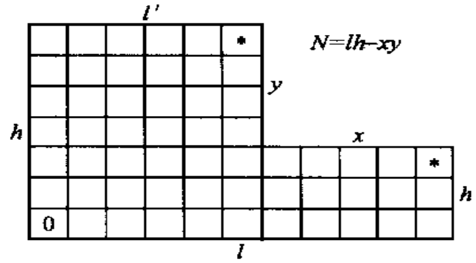

图2

所示的面积为 N 个单位的L形(可能是矩形或正方形. 例如, $G(15;1,3)$ 和 $G(16;1,4)$) 区域, 记为 $L(N;r,s)$. 易知,若数 k 位于格点 (x,y) 的右上角的方格内,则在强连通的 $G(N;r,s)$ 中,顶点0到顶点 k 的距离是 $x+y$.

定义 如图2所示,由 l,h,x,y 所确定的面积为 N 的L形区域称为L形瓦,记为 $L(N;l,h,x,y)$,其中 l,h,x,y 都是整数,并且规定 $l,h\geq 2, 0\leq x<l, 1\leq y<h, y<l, x\leq h$. 令 $D(L(N;l,h,x,y))=\max\{h+l'-2, l+h'-2\}$,称为 $L(N;l,h,x,y)$ 的直径. 记在面积为 N 的所有L形瓦中直径的最小值为 $D(N)$. 记由 $G(N;r,s)$ 确定的L形瓦的直径为 $D(N;r,s)$. $L=L(N;l,h,x,y)$ 称为紧的,如果 $D(L)=lb(N)$; L 称为可被 (r,s) 实现的,如果存在一个 $G(N;r,s)$ 使得 $L(N;r,s)=L(N;l,h,x,y)$.

根据上述记号和定义可知,对任何 $G(N;r,s)$,均有 $\mathrm{d}(N;r,s)=\mathrm{D}(N;r,s)$,并且 $\mathrm{d}(N)\geq \mathrm{D}(N)$. 若 $G(N;r,s)$ 是紧优的,则它所对应的L形瓦一定是紧瓦. 反之不真.

引理1[6~8] 设 $L=L(N;l,h,x,y)$. 则

(a) L 可被 $(1,s)$ 实现的充分必要条件是 g.c.d. $(y,h-y)=1$;

(b) L 可被 (r,s) 实现的充分必要条件是 g.c.d. $(l,h,x,y)=1$,其中, r(或 s) $\equiv h\alpha+y\beta\pmod N$, s(或 r) $\equiv x\alpha+l\beta\pmod N$,且 N,r,s 满足条件(1), α 和 β 是满足 $lr-ys=\alpha N$ 和 $-xr+hs=\beta N$ 的某两个整数.

引理2[7] 对正整数 T,整数区间 $[4,3T^2+6T+3]$ 可以分拆成 $3T$ 个整数区间之并:

$$\bigcup_{t=1}^{T}\bigcup_{i=1}^{3}I_i(t),$$

其中, $I_1(t)=[3t^2+1,3t^2+2t]$, $I_2(t)=[3t^2+2t+1,3t^2+4t+1]$, $I_3(t)=[3t^2+4t+2,3t^2+6t+3]$,并且对每个 $i=1,2,3$, $N\in I_i(t)$ 当且仅当 $lb(N)=3t-2+i$.

文献[7]中引理1和引理5(a)的证明,实际上证明了这些结论对一般的 r 和 s 亦成立,我们将本文用到的部分叙述为下述引理3和引理4.

引理3 设 $L=L(N;l,h,x,y)$. 如果 $|y-x|\geq 1$,则

$$D(L)\geq\left\lceil\sqrt{3N-\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}\right\rceil-2.$$

引理4 设 $L=L(N;l,h,x,y)$ 中 $N=3t^2+At+B\in I_i(t)$, $l=2t+a$, $h=2t+b$. 若 $z=y-x\geq 0$. 则 L 是紧瓦当且仅当

$$(a+b-i)(a+b-i+z)-ab+(A+z-2i)t+B=0. \tag{4}$$

2　方法和实例

本文的方法旨在构造出包含奇异无限子族的紧优双环网络无限族. 有两种情形. 第 1 种情形是已知某个奇异紧优双环网络 $G(N_0;r_0,s_0)$ (它可以通过计算机搜索来实现. 例如 $G(450;2,185)$). 设Z是非负整数无限集. 我们试图构造一个以 $G(N_0;r_0,s_0)$ 为起始元素的紧优双环网络无限族$\{G(N(t);r(t),s(t)):t\in U\subseteq Z\}$, $N(t)\in I_i(t)$,使得其中包含一个奇异的无限子族$\{G(N(t(e));r(t(e)),s(t(e))):e\in E\subseteq Z\}$,且 $t(0)=t_0$, $N(t_0)=N_0$, $r(t_0)=r_0$, $s(t_0)=s_0$. 第 2 种情形是在起始元素未知的条件下构造一个包含奇异无限子族的紧优双环网络无限族.

首先介绍处理第 1 种情形的构造方法. 其基本的思想是:设 $G(N_0;r_0,s_0)$ 是一个奇异紧优的双环网络,并取它作为起始元素.

第 1 步　适当选取 A, B 和 t_0 使得当 $t\geq t_0$ 时, $N(t)=3t^2+At+B\in I_i(t)$, $1\leq i\leq 3$,并且 $N(t_0)=N_0$.

第 2 步　利用引理 3 和引理 4 找出所有的面积为 $N(t)=3t^2+At+B$ 的L形紧瓦 $L(t)=L(N(t);l(t),h(t),x(t),y(t))$,并利用引理 1(b) 判定它们是否可被$(r(t),s(t))$实现. 若存在某个 $L(t)$ 可被$(r(t),s(t))$实现,则适当选取 α 和 β 以确定 $r(t)$ 和 $s(t)$ 使得 $r(t_0)=r_0$ 和 $s(t_0)=s_0$. 从而确定一个无限集 $U\subseteq Z$,并且得到一个紧优双环网络无限族$\{G(N(t);r(t),s(t)):t\in U\}$且包含 $G(N_0;r_0,s_0)$. 若此步不能实施,则回到第 1 步重新选取 A, B 和 t_0.

第 3 步　利用引理 1(a) 寻找第 2 步中所有可被$(r(t),s(t))$实现的L形紧瓦 $L(t)$ 不可被$(1,s(t))$实现的 t 所要满足的充分条件. 若此步不能实施,则回到第 1 步重新选取 A, B 和 t_0.

第 4 步　试选取一个正整数值函数 $t=t(e)$ 使得 $t(0)=t_0$,并且满足第 3 步所找到的充分条件. 确定一个无限集 $E\subseteq Z$ 使得对 $\forall e\in E$, $t(e)\in U$,从而构造出紧优双环网络无限族$\{G(N(t);r(t),s(t)):t\in U\}$的一个奇异子族. 若此步不能实施,则回到第 1 步重新选取 A, B 和 t_0.

下面,用实例来说明这一方法的应用. 例如,取引言中提到的奇异紧优双环网络 $G(450;2,185)$ 作为起始元素.

(1) 取 $A=2$, $B=-6$ 且 $t_0=12$. 则 $N(t)=3t^2+2t-6$, $N(12)=450$. 因为当 $t\geq 12=t_0$ 时, $N(t)=3t^2+2t-6\in I_1(t)$,所以 $lb(N(t))=3t-1$.

(2) 设 $L(t)=L(N(t);l(t),h(t),x(t),y(t))$ 是一个面积为 $N(t)=3t^2+2t-6$ 的L形紧瓦,则 $D(L(t))=lb(N(t))=3t-1$. 令 $z=|x-y|$. 若 $z\geq 1$, 则因为当 $t\geq 7$ 时,有

$$3N(t)-\frac{3}{4}=8t^2+6t-18-\frac{3}{4}=\left(3t+\frac{1}{2}\right)^2+3t-19>\left(3t+\frac{1}{2}\right)^2.$$

所以,由引理 3 知,当 $t\geq 7$ 时,

$$D(L(t))\geq\left\lceil\sqrt{3N(t)-\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}\right\rceil-2\geq 3t-2+2=3t.$$

这矛盾于 $D(L(t))=3t-1$. 所以, $z=0$. 由引理 4 知,当 $A=2$, $B=-6$, $i=1$, $z=0$ 时(4)式为

$$b^2+(a-2)b+a^2-2a-5=0. \tag{5}$$

不定方程(5)有解

$$(a,b)=(-2,1),(-2,3),(1,3),(1,-2),(3,-2),(3,1).$$

与它们对应的 L 形紧瓦 $L(N(t);l(t),h(t),x(t),y(t))$ 分别是 $L_1(t)=L(N(t);2t-2,2t+1,t-2,t-2)$, $L_2(t)=L(N(t);2t-2,2t+3,t,t)$, $L_3(t)=L(N(t);2t+1,2t+3,t+3,t+3)$ 和它们的转置. 容易验证这 6 个 L 形瓦都满足

$$\text{g.c.d.}(l(t),h(t),x(t),y(t))=1,\quad \forall t\in \mathrm{Z} \text{ 且 } t\geqslant 7.$$

所以由引理 1(b)知对任何 $t\in \mathrm{Z}$ 且当 $t\geqslant 12$ 时,它们都可被 $(r(t),s(t))$ 实现.

考察 L 形瓦 $L_1(t)=L(N(t);l(t),h(t),x(t),y(t))$,其中, $N(t)=3t^2+2t-6$, $l(t)=2t-2$, $h(t)=2t+1$, $x(t)=y(t)=t-2$. 在引理 1(b)中适当选取 α 和 β. 例如,令 $\alpha=9$, $\beta=-4$,则得到

$$r(t)=t-10,\ s(t)=14t+17,\ t\in \mathrm{Z}, t\geqslant 12,$$

而且满足 $r(12)=2$ 和 $s(12)=185$.

下面,利用条件(1)来确定 t 的取值范围. 假定存在某个 t, $t\geqslant 12$ 使得

$$\text{g.c.d.}(3t^2+2t-6,t-10,14t+17)=m\geqslant 2.$$

则存在两个非零整数 k,g 使得 $t-10=km$ 且 $14t+17=gm$. 于是由此得 $(g-14k)m=157$. 由于 157 是素数且 $m\geqslant 2$,则得 $m=157$, $t=157k+10$, $k\in \mathrm{Z}$, $k\geqslant 1$. 令

$$U=\{t:t\in \mathrm{Z}, t\geqslant 12\}\setminus\{157k+167:k\in \mathrm{Z}\}.$$

则 $U\subset \mathrm{Z}$ 是一个无限集,并且

$$\text{g.c.d.}(N(t),r(t),s(t))=1,\quad \forall t\in U.$$

于是,对 $\forall t\in U$, $G(N(t);r(t),s(t))$ 都是紧优的,其直径是 $lb(N(t))=3t-1$.

(3) 由引理 1(a),不难验证,如果 t 同时满足下列 3 个条件:

$$t\equiv 0(\mathrm{mod}2),\quad t\equiv 0(\mathrm{mod}3),\quad t\equiv 2(\mathrm{mod}5), \tag{6}$$

那么对任何 $t\in \mathrm{Z}$ 且 $t\geqslant 12$,其面积为 $N(t)=3t^2+2t-6$ 的 L 形瓦中任何一个都不可被 $(1,s(t))$ 实现,即(6)式是所有的面积为 $N(t)=3t^2+2t-6$ 的 L 形紧瓦都不可被 $(1,s(t))$ 实现的 t 所要满足的充分条件.

(4) 为确定一个满足要求的正整数值函数 $t=t(e)$. 令 $t=2g$, $g=3f$, $f=5e+2$,则 $t=30e+12$, $t(0)=12=t_0$,并且满足(6)式中所有条件. 为确定使 $t(e)\in U$ 的 e 的取值范围,先确定使 $30e+12\equiv 10(\mathrm{mod}157)$ 的 e 的取值范围. 设存在某个 $e\in \mathrm{Z}$ 和一个正整数 m,使得 $30e+12=157m+10$,即 $30e+2=157m$. 由此得 $e=5m+(7m-2)/30$. 由于 $e\in \mathrm{Z}$,所以存在 $k\in \mathrm{Z}$,使得 $m=30k+26$. 于是, $e=157k+136$, $k\in \mathrm{Z}$. 令

$$E=\mathrm{Z}\setminus\{157k+136:k\in \mathrm{Z}\}.$$

注意到满足(6)式中所有条件的 t 的最小值是 12. 于是,可以取

$$t=t(e)=30e+12,\quad \forall e\in E.$$

则 t 满足(6)式中所有条件, $t(0)=12=t_0$. 并且对任何 $e\in E$,均有 $t(e)\in U$. 此时

$$N(t(e))=2700e^2+2220e+450,\quad \forall e\in E.$$

$$r(t(e))=30e+2,\ s(t(e))=420e+185,\quad \forall e\in E.$$

$$lb(N(t(e)))=3t(e)-1=90e+35,\quad \forall e\in E.$$

由 $t(e)$ 的选取知,对 $\forall e\in E$,有 $d_1(N(t(e)))\geq 90e+36$. 因而,$N(t(e))$ 是奇异的. 于是,$\{G(N(t(e));r(t(e)),s(t(e))):e\in E\}$ 是 $\{G(N(t);r(t),s(t)):t\in U\}$ 的一个奇异无限子族. 当 $e=0$ 时,$G(450;2,185)$ 是奇异紧优的. 因而它是该无限族的起始元素,其直径是 35. 至此,我们证明了下述结果:

定理 1　设 Z 是非负整数无限集,$U=\{t:t\in Z,t\geq 12\}\setminus\{157k+167:k\in Z\}$,$E=Z\setminus\{157k+136:k\in Z\}$. 则 $\{G(3t^2+2t-6;t-10,14t+17):t\in U\}$ 是一个紧优双环网络无限族,其直径为 $3t-1$;而 $\{G(2700e^2+2220e+450;30e+2,420e+185):e\in E\}$ 是其中的一个奇异无限子族,其直径为 $90e+35$;它们的起始元素是 $G(450;2,185)$,其直径是 35.

注　定理 1 中的奇异紧优双环网络无限族修订了 Esqué等人在文献[3]中所断言的结果.

下面用处理第 1 种情形的方法来考虑第 2 种情形,起始元素 $G(N_0;r_0,s_0)$ 待定. 举例简述如下.

考察 $N(t)=3t^2+4t-5$. 则当 $t\geq 3$ 时,$N(t)\in I_2(t)$. 因此 $lb(N(t))=3t$. 当 $t\geq 7$ 时,所有面积为 $N(t)=3t^2+4t-5$ 的 L 形紧瓦分别为 $L_1(t)=L(N(t);2t+1,2t-1,t-2,t-2)$,$L_2(t)=L(N(t);2t+4,2t+1,t+3,t+3)$,$L_3(t)=L(N(t);2t+4,2t-1,t+1,t+1)$ 和它们的转置.

考察 L 形瓦 $L_2(t)$. 容易验证对任何 $t\in Z$ 且当 $t\geq 7$ 时,$L_2(t)$ 可被 $(r(t),s(t))$ 实现. 在引理 1(b) 中,令 $\alpha=-1$,$\beta=2$,则得 $r(t)=5$,$s(t)=3t+5$. 不难验证当 $t\neq 5k+5$,$k\in Z$,则 $N(t)$,$r(t)$,$s(t)$ 满足条件(1)式.

由引理 1(a),如果 t 同时满足下列 3 个条件:

$$t\equiv 1\pmod 2,\quad t\equiv 2\pmod 3,\quad t\equiv 2\pmod 5,\tag{7}$$

那么这 6 个 L 形紧瓦中任何一个都不可被 $(1,s(t))$ 实现. 注意到满足(7)式中所有条件的 t 的最小值是 17. 于是取

$$V=\{t:t\in Z,t\geq 17\}\setminus\{5t+20:t\in Z\},$$
$$t(e)=30e+17,\quad \forall e\in Z,$$

则对 $\forall e\in Z$,$t(e)\in V$ 满足(7)式中所有条件. 此时,$t(0)=17=t_0$,$N(17)=930$,而且

$$N(t(e))=2700e^2+3180e+930,\quad \forall e\in Z,$$
$$r(t(e))=5,\quad s(t(e))=90e+56,\quad \forall e\in Z,$$
$$lb(N(t(e)))=3t(e)=90e+51,\quad \forall e\in Z,$$

由 $t(e)$ 的选取知,对任何 $e\in Z$,有 $d_1(N(t(e)))\geq 90e+52$,因而,$N(t(e))$ 是奇异的. 于是,$\{G(N(t(e));r(t(e)),s(t(e))):e\in Z\}$ 是 $\{G(N(t);r(t),s(t)):t\in V\}$ 的一个奇异无限子族. 当 $e=0$ 时,$G(930;5,56)$ 是奇异紧优的. 因而它是该无限子族的起始元素,其直径是 51. 我们将这一结果叙述成下述定理:

定理 2　设 Z 是非负整数无限集,$V=\{t:t\in Z,t\geq 17\}\setminus\{5t+20:t\in Z\}$. 则 $\{G(3t^2+4t-5;5,3t+5):t\in V\}$ 是一个紧优双环网络无限族,其直径为 $3t$;而 $\{G(2700e^2+3180e+930;5,90e+56):e\in Z\}$ 是其中的一个奇异的无限子族,其直径为 $90e+51$;它们的起始元素是 $G(930;5,56)$,其直径是 51.

如果考察 $N(t)=3t^2+4t-11\in I_2(t)$,$t\geq 6$. 当 $t\geq 13$ 时,所有面积为 $N(t)$ 的 L 形紧瓦

$L_1(t)=L(N(t);2t-2,2t+1,t-3,t-3)$, $L_2(t)=L(N(t);2t+1,2t+5,t+4,t+4)$, $L_3(t)=L(N(t);2t-2,2t+5,t+1,t+1)$ **和它们的转置都不可被** $(1,s(t))$ **实现的** t **所要满足的充分条件是**

$$t\equiv 2 \pmod 3),\quad t\equiv 3 \pmod 4),\quad t\equiv 3 \pmod 7).$$

考察 L **形紧瓦** $L_2(t)$, **它可被** $(3,3t-2)$ **实现. 那么当** $t=t(e)=84e+59$ **时,可以得到下述定理(其证明细节留给读者).**

定理 3 **设** Z **是非负整数无限集. 则** $\{G(3t^2+4t-11;3,3t-2):t\in Z,t\geq 59\}$ **是一个紧优的双环网络无限族,其直径为** $3t$; **而** $\{G(21168e^2+30072e+10688;3,252e+57):e\in Z\}$ **是其中的一个奇异的无限子族,其直径为** $252e+59$; **它们的起始元素是** $G(10688;3,57)$, **其直径是** 59.

参 考 文 献

1 Wong G K, Coppersmith D. A combinatorial problem related to multimodule memory organization. J Assoc for Comput Mach, 1974, 21: 392～401

2 Erdös P, Hsu D F. Distributed loop networks with minimum transmission delay. Theoretical Computer Sci, 1992, 100: 223～241

3 Esqué P, Aguiló F, Fiol M A. Double commutative-step digraphs with minimum diameters. Discrete Math, 1993, 114: 147～157

4 Hwang F K. A survey of double loop networks. In: Roberts F, Hwang F K, Monma C, eds. Reliability of Computer and Communication Networks. DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science 5. Providence, RI: American Mathematical Society, 1991. 143～152

5 Hwang F K, Xu Y H. Double loop networks with minimum delay. Discrete Math, 1987, 66: 109～118

6 Fiol M A, Yebra J L, Alegre I, et al. A discrete optimization problem in local networks and data alignment. IEEE Trans Comput, 1987, 36: 702～713

7 李 乔, 徐俊明, 张忠良. 最优双环网络的无限族. 中国科学, A 辑, 1993, 23(9): 979～992

8 沈 建, 李 乔. 关于双环网络的两个定理(英文). 中国科学技术大学学报, 1993, 25(2): 127～132

9 徐俊明. 图论及其应用. 合肥:中国科学技术大学出版社, 1998. 340～342