《图论》课程小结的建议

（仅供参考）

一、掌握基本概念

图论概念非常多，这给初学图论的人带来很大的困难。学完图论后，有些概念就烟消云散了，但基本概念是不能忘记的。

1. 掌握和正确理解图的概念

图(Graph): 图是一个数学结构 (V, R), 其中 V 是有限集, R 是定义在 V 上的二元关系。

特点：强调图论是数学的重要分支之一，即具有自己的研究特色，又有很强的数学理论。R 只是二元关系，没有任何其它要求，因而有广泛的应用（特别是在计算机和网络领域的应用）。

目的：研究这种数学结构的结构性质和应用。

图表示：与其它数学结构一样，为了便于研究，图有各种各样的表示。本学期讲了两种表示。

1) 图形表示（几何表示）：这种表示是自然的，因为关系 R 可以用几何图形表示。这种表示借助于几何图形的直观，有利于理解和发现图的一些结构性质。画出漂亮的图形，给人以美的享受。最重要的是：通过这种表示，人们可以借助拓扑理论和方法研究图论，以致形成图论重要的研究领域——拓扑图论（平面图和非平面图就属于这一类）。

这种表示的缺点是局限性，大阶图的几何图形是画不出来的。

2) 矩阵表示（代数表示）：图的邻接矩阵和关联矩阵是图的两个最基本的矩阵表示。这种表示有利于图在计算机里存储，有利于图论算法的执行。通过这种表示，人们可以代数理论和方法研究图论，特别是对图的特征多项式和特征值的研究，现已成为图谱理论，是图论另一个重要研究领域——代数图论的重要研究内容。

掌握各种图的定义、关系和区别：有向图、无向图、重图、简单图、定向图、二部图、完全图等

2. 掌握图的运算和基本概念

1) 子图概念： 子图、支撑子图、导出子图等概念。

2) 基本运算： 图的交、并、线图、笛卡尔乘积等。

3) 基本概念： 顶点度（有向图和无向图）、连通、强连通、距离、直径、链、迹、路、回、圈、Euler 回、Hamilton 圈、邻接矩阵和关联矩阵、树（林）、支撑树（林）、余树（林）、平面图与平图等。掌握它们的定义和区别。

4) 高级概念： 图的边空间、网络流、连通度、割集（分离集）、匹配、覆盖、独立集、（点、边）染色等。

二、 掌握图的基本结构和性质

1. 一个基本定理

图论第一定理：**Theorem 1.1** For any digraph D,

$$\varepsilon(D) = \sum_{x \in V} d_D^+(x) = \sum_{x \in V} d_D^-(x).$$

Corollary 1.1 For any undirected graph G,

$$2\varepsilon(G) = \sum_{x \in V} d_G(x)$$

and the number of vertices of odd degree is even.

2. 两个结构关系定理

1) 圈与割之间的关系：（Theorem 2.3, 2.4） If F is a spanning forest of a graph G, then $F + e$ contains a unique cycle for any $e \in \overline{F}$, and $\overline{F} + e$ contains a unique bond of G for any $e \in F$.

2) 圈空间与割空间之间的关系：（Corollary 2.5, 2.6）$\mathscr{E}(G) = \mathscr{C}(G) + \mathscr{B}(G)$, and $\dim \mathscr{B} = v - \omega$, $\dim \mathscr{C} = \varepsilon - v + \omega$.

3. 三个基本结构判定定理

1) 二部图判定定理：

Theorem 1.6 A strongly connected digraph is bipartite $\Leftrightarrow$ it contains no odd directed circuit.

Corollary 1.6.2 (König, 1936) An undirected graph is bipartite $\Leftrightarrow$ it contains no odd cycle.

2) **Euler** 图判定定理：

Theorem 1.7 A digraph is eulerian $\Leftrightarrow$ it is connected and balanced.

Corollary 1.7.2 An undirected graph is eulerian $\Leftrightarrow$ it is connected and has no vertex of odd degree.

3) 树判定定理：

Theorem 2.1 A graph G is a tree

$\Leftrightarrow$ G has no loop and there is a unique path between any two vertices;

$\Leftrightarrow$ G is connected and $\omega(G - e) = 2$ for any edge e of G;

$\Leftrightarrow$ G is connected and $\varepsilon = v - 1$.

4. 四个高级判定定理

1) 平面图判定定理：

Theorem 3.6 A graph is planar $\Leftrightarrow$ it contains no subdivision of K_5 or $K_{3,3}$ as its subgraph.

2) k 连通图判定定理：

Theorem 4.5 Let G be a graph of order at least $k+1$. Then

(a) $\kappa(G) \geq k \Leftrightarrow \zeta_G(x,y) \geq k,\ \forall\, x,y \in V(G)$;

(b) $\lambda(G) \geq k \Leftrightarrow \eta_G(x,y) \geq k,\ \forall\, x,y \in V(G)$.

3) 二部图完备匹配判定定理：

Theorem 5.1 (Hall's theorem) Let G be a bipartite graph with bipartition $\{X,Y\}$. Then G contains a matching that saturates every vertex in $X \Leftrightarrow |S| \leq |N_G(S)|$ for any $S \subseteq X$.

4) 完备匹配判定定理：

Theorem 5.2 (Tutte's theorem) A graph G has a perfect matching $\Leftrightarrow o(G-S) \leq |S|$ for any $S \subset V(G)$.

5. 五个基本式

1) **Euler 公式**：**Theorem 3.3** $v - \varepsilon + \phi = 2$ for any connected plane graph.

2) 平面图度和边不等式：$\delta \leq 5$ and $\varepsilon \leq 3v - 6$ for any simple planar graph.

3) **Whitney 不等式**：**Theorem 4.4** $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ for any graph G.

4) **点染色 Brooks 定理**：**Theorem 6.2** $\chi(G) \leq \Delta(G)$ if G is neither an odd cycle nor a complete graph.

5) **边染色 Vizing 定理**：**Theorem 6.3** $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$ for any simple graph G.

6. 六个等价定理

Theorem 4.1 (Maximum Flows and Minimum Cuts) $\Leftrightarrow$

Theorem 4.2 (Menger's Theorem) $\Leftrightarrow$

Theorem 4.3 (Menger's Theorem) $\Leftrightarrow$

Theorem 5.1 (Hall's Theorem) $\Leftrightarrow$

Theorem 5.2 (Tuttle's Theorem) $\Leftrightarrow$

Theorem 5.3 (König's Theorem)

三、 理清本课程的基本思路

通过复习掌握本课程的特点和内容构成的基本思路，各章概念起源，目的和核心内容是什么，通过什么手段进入这些核心内容和达到这个目的。各章内容的相互联系和各自理论的困难程度。

本课程的着眼点是有向图，无向图作为特例。涉及的概念与边的方向无关，就只图论无向图（如树、平面图、匹配、独立集和染色等）

第一章是本课程的基础。从第二章开始到第六章分别为五个图论专题。理解和掌握每个专题的最终研究目的，是通过什么手段达到这个目的。

第二章是研究最简单的图结构－树。树是发现最早、结构最简单, 而且是最重要、应用最广泛的一类图。树的概念及其理论研究主要两个来源。一是 G. R. Kirchhoff（1847 年）为寻找根据电流和电压定律得到的线性方程组中线性无关方程组的而提出来的。二是 A. Cayley（1857 年）在从事于计数给定碳原子数 n 的饱和碳氢化合物 C_nH_{2n+2} 的同分异构物时也发现了树，并提出树的计数问题。这两个似乎没有什么联系的问题，通过图的边空间得到了一致的解决。这就是为什么要讲图空间的缘故。

第三章研究平面图。平面图也是最简单的结构。平图与平面图的研究和理论发展与著名的四色猜想有关，通过几何对偶，发现平图的面染色等于几何对偶图的点染色。进一步研究发现了平图和几何对偶图中圈与割的关系（定理3.7），这不但加强了与图空间的联系，也导致提出组合对偶的概念。

平图与平面图是图论中重要研究分支–“拓扑图论”的重要研究内容。L. Euler 于 1753 年发现了 Euler 公式而成为拓扑图论的奠基人。接着中断了 170 多年。研究核心是平面图的判定。1930 年, 波兰数学家 C. Kuratowski 和美国数学家 O. Frink & P. A. Smith 发现了平面图判定准则 (定理 3.6)。

平面图的主要应用是大规模集成电路板的设计。

第四章研究图的连通度 连通是图的基本结构特征，连通度是图的连通程度的一种度量，其核心是 Menger 定理。为给出这个定理的证明，引进网络流，通过最大流最小割定理来证明 Menger 定理。这种处理，是其证明简洁、直观、明了。三个等价定理密切了图论与运筹学的关系。Menger 定理是互连网络设计和分析的基础。最优运输方案的设计，用到图空间理论。

第五章研究图的匹配和独立集 匹配概念来源于实际应用，本章主要是介绍匹配理论。核心问题是完备匹配的判定。通过介绍三个定理（即定理5.1, 5.2，5.3）与网络流理论和 Menger 定理的等价性，说明表面上看起来毫无相关的概念，却有本质的联系，体现了图论的数学美。这也说明，第五章是第四章内容的继续。独立集与匹配只是点边之差，其理论确实天壤之别。很遗憾，对独立集，没有类似的理论。建立独立集理论是当今最难的问题之一。

第六章讲染色理论，出发点源于四色问题，其本质是第五章的继续，通过定理 6.1 和它的证明，加强了染色理论与连通度和匹配理论之间的联系。但建立完整的染色也是当今最难的问题之一。

四、 了解基本应用和解决问题的基本方法

图论（乃至整个数学）的来源于应用，图论的希望也在于应用。本课程讲了 10 多个应用，特别是介绍了一些算法。通过这些实例，了解图论在数学的其它分支（矩阵论、运筹学、组合学等）、管理科学、计算机科学、电子学等方面的应用和联系。通过这些实例，学会和掌握怎么把一个实际问题转化为图论问题，设计算法，分析算法，给出问题的解来。

五、 掌握图论的基本论证方法

一般分成两类：分析性证明和构造性证明。

分析性证明：图论中最常用的基本方法，如数学归纳法、反证法、最大边法、最短路法、最长路法、极值图（最大最小反例）等。这种证明方法逻辑性强，比较简洁。

构造性证明：这种方法比较适用特殊结构的图，根据图的结构构造出所需要的结论来。比如定理 4.6 的证明就是使用构造性证明，构造出所要求的内点不交的路来。这种证明有利于算法设计，但包含烦杂的验证，很多审稿人不喜欢。

图论命题证明的技巧性相当高。

下面的结果属于 O. Ore (1968) [Ore O, Diameter in graphs, Journal of Combinational Theory, 5(1968): 75-81], 这里给出比较简单的证明.

例 1. (O. Ore, 1968) 设 G 是 υ 阶连通 k 直径无向图, 则

$$\varepsilon(G) \leqslant k + \frac{1}{2}(\upsilon - k + 4)(\upsilon - k - 1).$$

证明 设 x 和 y 是 G 使得 $d_G(x, y) = k$ 的两顶点, P 是最短 xy 路. 令 $Z = V(G - P)$. 则对任何 $z \in Z$ 均有 $|N_G(z) \cap V(P)| \leqslant 3$. 因此,

$$\begin{aligned}
\varepsilon(G) &= \varepsilon(P) + \varepsilon(G[Z]) + |E_G(Z, P)| \\
&\leqslant k + \binom{\upsilon-k-1}{2} + 3(\upsilon - k - 1) \\
&= k + \tfrac{1}{2}(\upsilon - k - 1)(\upsilon - k - 2) + 3(\upsilon - k - 1) \\
&= k + \tfrac{1}{2}(\upsilon - k + 4)(\upsilon - k - 1)
\end{aligned}$$

命题得证. ∎

例 2. Prove by the graph-theoretical language that for $2n + 1$ points in the plane if there are two points among any three points with distance less than 1, then at least $n + 1$ points of them lie in an identical circle.

Proof Let $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_{2n+1}\}$ be the set of $2n + 1$ points in the plane. Construct a graph $G = (V, E)$ with $V = S$ and $x_i x_j \in E$ if and only if the distance between x_i and x_j is less than 1. By the hypothesis, there is an edge among any three vertices in G.

Arbitrarily choose a vertex $x \in V$. If $d_G(x) \geq n$, then all vertices in $N_G(x) \cup \{x\}$ lie the identical circle with the center x, and $|N_G(x) \cup \{x\}| \geq n + 1$. If $d_G(x) \leq n - 1$, then there is a vertex y not in $N_G(x) \cup \{x\}$ since $|V| = 2n + 1$. Since there is an edge among any three vertices in G, all vertices not in $N_G(x) \cup \{x, y\}$ must be adjacent to y. Thus, $d_G(y) \geq n$, and so all vertices in $N_G(y) \cup \{y\}$ lie the identical circle with the center y, and $|N_G(y) \cup \{y\}| \geq n + 1$. The conclusion follows.

(This exercise can be changed as: Let G be a graph of order $2n + 1$. If there is an edge among any three vertices in G, then $\Delta(G) \geq n$.)

六、诚征修改意见

任何一本书都有不完美之处，该讲义也一样。这些不完美之处，有些是作者有意识的留点破绽，有些则是作者的疏忽。

例如，该讲义在谈到最大流最小割定理时，就没有谈到最大流和最小割定理的存在性。这是作者故意留下一个破绽，相信读者会论证它们的存在性。怎么证明？同学们想过没有？

又例如，在介绍最小树算法的时候，为什么都假定每条边上的权都非负？如果允许有负权，结果将这么样？同学们想过没有？

作者本人企图系统性科学性地处理所讲述的图论材料，但这个目的达到没有？

本讲义的所讲述的图的理论和应用材料的深度和广度是否适合于数学系高年级本科生和低年级研究生？

等等。

所有疏忽都不是故意的。欢迎对本讲义提出批评和修改建议。

特别提醒！！

1. 考试内容： 前五章的理论部分，70% 为课题上所布置的习题之内；20% 为讲义上的例子和定理；10% 为习题课和补充题。

2. 答卷要求： 答题可用中文或者英文、语句通顺、条理清楚、表达清晰、论据充分、推理要符合逻辑。避免"显然、显而易见、容易看出、同理可证"之类的含糊语句。

3. 考试安排： 期末考试时间：12 月 29 日（星期四）下午 2：30-4：30，五教 5406 教室（数学院 08 级本科生）和 5407 教室（研究生、其他院系和数学院 09 级的本科生）。

4. 考试纪律： 闭卷考试，不得带书和有关资料。遵守学校考试纪律，不得交头接耳，不得作弊。无特殊情况不得缓考，缓考者须提前经校教务处批准，不参加考试者不记分。

谢谢同学们的热情和忍耐

欢迎同学们提出批评和建议