L. Euler 与 Euler 定理

徐俊明

(中国科学技术大学数学科学学院)

2017年11月25日于合肥

摘要: *L. Euler* 是瑞士数学家和自然科学家, *1736* 年, 因解决 *Königsberg* 七桥问题而成为图论创始人. 著名的 *Euler* 判定定理"图 G 是 *Euler* 图 $\Leftrightarrow G$ 是连通且不含奇度点"是任何一本图论教科书的基本定理. 然而, 这个简单实用的定理并不完全属于 *Euler*. 本文介绍有关这个定理背后的人和故事.

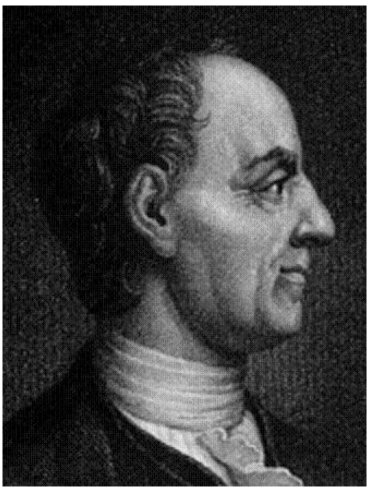


图 1: L. Euler

L. Euler (Leonhard Euler, 1707-1783) 是瑞士数学家和自然科学家. 他 13 岁时入巴塞尔大学 (University of Basel), 15 岁大学毕业, 16 岁获硕士学位, 19 岁发表论文, 26 岁任彼得堡科学院数学教授, 18 世纪数学界最杰出的人物之一. 他是数学史上最多产的数学家, 平均每年写出八百多页的论文和著作, 其中《无穷小分析引论》、《微分学原理》、《积分学原理》、《代数学入门》等都成为数学界中的经典著作. 28 岁 (1735 年) 时, 因劳累过度不幸一只眼睛失明, 59 岁 (1766 年) 时, 他的另一只眼睛也失明了. 1771 年彼得堡失火, 殃及 Euler 住宅, 带病而失明的 64 岁的 Euler 被围困在大火之中被人救出, 但书库及大量研究成果全部化为灰烬. 沉重的打击, 仍然没有使 Euler 倒下, 发誓要把损失夺回来. Euler 口述其内容, 由他的学生和大儿子 A. Euler（1734－1800 年, 数学家和物理学家）笔录. Euler 完全失明之后, 仍然以惊人的毅力与黑暗搏斗, 凭着记忆和心算进行研究, 直到烟斗从手中落下,"停止了生命和计算", 时年 74 岁.

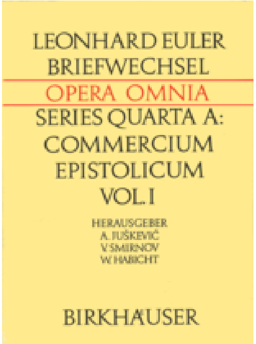


图 2: Opera Omnia

为了拯救 Euler 留给人类的宝贵科学遗产, 1907 年 6 月, 瑞士科学院成立 Euler 委员会 (Euler Committee of the Swiss Academy of Sciences) (简称 The Euler Committee, 网站: `https://bez.unibas.ch/EK/index.html`). 该委员会主要任务是搜集编辑 Euler 的科学著作、论文和书信, 以系列丛书《欧拉全集》(Euler Opera Omnia) 由 Birkhäuser 出版社出版 (见图 2). Euler 的著作和论文被收集在系列 I–III 中, 共 74 卷, Euler 的学术通信被收集在系列 IVA 中, 共 9 卷.

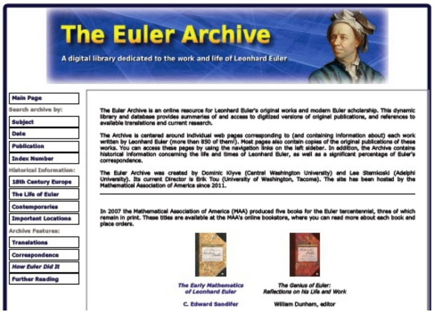


图 3: Euler-Archive 网页

美国中盛顿大学 (Central Washington University) 的 Dominic Klyve 教授和 爱达菲大学 (Adelphi University) Lee Stemkoski 教授创建了 Euler 档案 (The Euler-Archive) 网站: `http://eulerarchive.maa.org/` (图 3 所示的是该网站首页). 从 2011 年起, 该网站由美国数学协会 (MAA, Mathematical Association of America) 主办.

Euler 在自然科学各个领域做了许多开创和奠基性工作. 他生活和工作过的三个国家瑞士、俄国和德国都视 Euler 为自己国家的科学家, 为他而感到骄傲. 作为国家名片, 发行纪念 Euler 的邮票, 其中的部分见图 4. 瑞士更是为本国出生 Euler 而感到自豪, 将他的图像印在纸币上 (见图 4). Euler 是全世界科学家学习的楷模, 受到全世界各国人民的尊重和爱戴, 出版的 Euler 著作、纪念和介绍 Euler 的文献和书籍数不胜数.

图 4: 纪念 L. Euler 的邮票和纸币

1736 年, Euler 因解决 Königsberg 七桥问题而成为图论创始人. 1993 年, 国际学术组织 Institute of Combinatorics and its Applications 设立 Euler 奖 (终身成就

奖), 奖励那些终身为组合学做出卓越贡献的数学家. 欧拉奖是组合学方面的最高荣誉, 也是组合数学界许多探索者的毕生追求和梦想. Claude Berge (1926 – 2002) 和 Ronald Graham 获得首届 Euler 奖. 我国著名组合学家苏州大学朱烈教授获 2004 年度 Euler 奖.

* * * * * * * * * * * * *

设 G 是图. 人们习惯称 G 中点和边交错序列为链; 边不重复出现的链为迹; 包含 G 中每个点和边的迹为 Euler 迹. 若 G 中含闭 Euler 迹, 则称 G 为 Euler 图. Euler 迹 (Euler trail) 和 Euler 图 (Euler graph) 的概念是由 D. König [11] (1936) 首先提出来的. 之所以用 Euler 命名, 是因为 Euler 首先考虑和研究这个问题. 怎样判定给定的图是 Euler 图? 现代图论教科书都称下面的定理为 Euler 判断定理 (参见笔者 [19] (2010) 或者 [20] (2019)).

定理 0.1 **图 G 是 Euler 图 $\Leftrightarrow G$ 是连通且不含奇度点.**

推论 0.2 **图 G 有 Euler 迹 $\Leftrightarrow G$ 连通且最多有两个奇度点.**

本文探索上述定理是否完全属于 Euler 的及其背后的人物和鲜为人知的故事. 无可争议的事实是, 上述定理起源于 Königsberg 七桥问题.

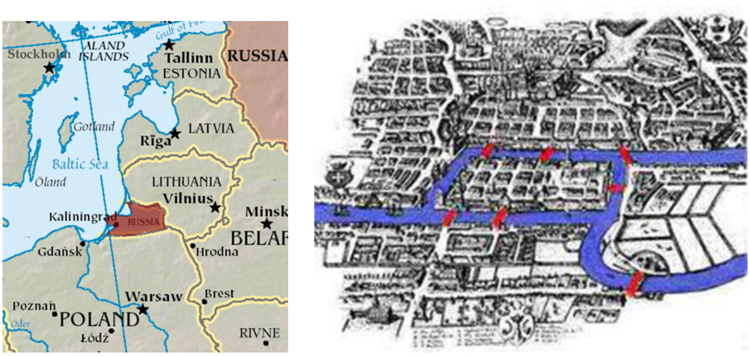


图 5 Königsberg (Kaliningrad) 的位置及其 Pergel 河和七座桥

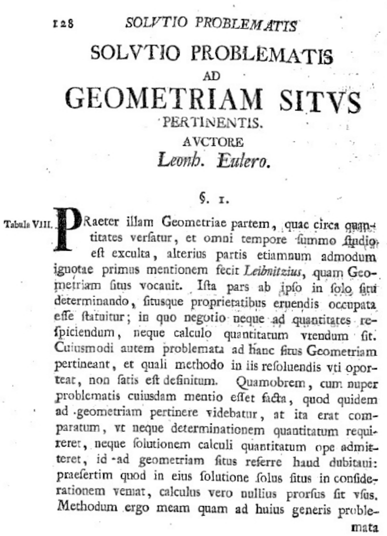
18 世纪, 东 Prussia (北欧王国, 后属于德意志帝国) 的首都 Königsberg 城 (第二次世界大战后划归苏联, 改称加里宁格勒 (Kaliningrad, 今属俄罗斯) 是一座景色迷人的城市. Pergel 河从这个城市穿过, 并在这儿形成两条支流, 把整座城市分割

成 4 块陆地区域. 当时有七座桥横跨 Pergel 河及其支流, 把河岸、半岛和河心岛连接起来 (见图 5 中所示, 蓝色是河, 红色是桥).

当时流传一个有趣的问题: 是否存在一条经过每座桥一次且仅一次的行走路线? 人们通常称这个问题为 Königsberg 七桥问题?

Euler 发表在《Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae》(彼得堡皇家科学院纪事) 上的著名论文 "Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis [4] (The solution of a problem relating to the geometry of position, 关于位置几何问题的解)", 对此问题给出了否定的回答.

图 6 所示的是 Euler 原始论文的首页 (从网上下载) 和该杂志封面 (截自论文 [1]). 该文由 21 个自然段组成, 各段用阿拉伯字母编号, 前 9 段讨论 Königsberg 七桥问题, 其余的讨论一般问题. 原文为拉丁文, 英文翻译见 N. L. Biggs 等 [3] (1976), pp.3 - 11, 也可以参见 R. J. Wilson [18] (1986).

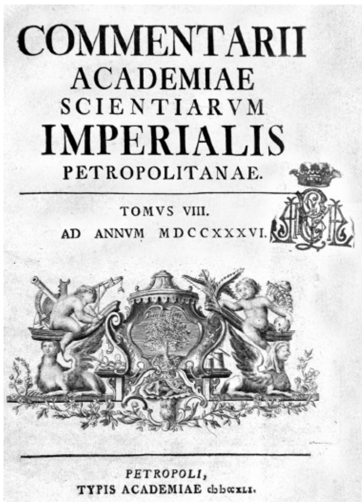


128 SOLVTIO PROBLEMATIS

SOLVTIO PROBLEMATIS
AD
GEOMETRIAM SITVS
PERTINENTIS.
AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

Tabula VIII. PRaeter illam Geometriae partem, quae circa quantitates versatur, et omni tempore summo studio est exculta, alterius partis etiamnum admodum ignotae primus mentionem fecit *Leibnitzius*, quam Geometriam situs vocauit. Ista pars ab ipso in solo situ determinando, situsque proprietatibus eruendis occupata esse statuitur; in quo negotio neque ad quantitates respiciendum, neque calculo quantitatum vtendum sit. Cuiusmodi autem problemata ad hanc situs Geometriam pertineant, et quali methodo in iis resoluendis vti oporteat, non satis est definitum. Quamobrem, cum nuper problematis cuiusdam mentio esset facta, quod quidem ad geometriam pertinere videbatur, at ita erat comparatum, vt neque determinationem quantitatum requireret, neque solutionem calculi quantitatum ope admitteret, id ad geometriam situs referre haud dubitaui: praesertim quod in eius solutione solus situs in considerationem veniat, calculus vero nullius prorsus sit vsus. Methodum ergo meam quam ad huius generis problemata



COMMENTARII
ACADEMIAE
SCIENTIARVM
IMPERIALIS
PETROPOLITANAE.
TOMVS VIII.
AD ANNVM MDCCXXXVI.

PETROPOLI,
TYPIS ACADEMIAE clↄbccxli.

图 6 Euler 论文的首页和杂志封面

Euler 的方法是用大写字母 A, B, C, D 分别表示四块陆地区域, 小写字母 a, b, c, d, e, f, g 分别表示 7 座桥 (如图 7 所示, 截自 Euler 论文 [4] (1936)). 用 AB 表示某位游客从陆地区域 A 经过桥 a 或者 b 进入陆地区域 B, 用 ABD 表示这位游客再从陆地区域 B 经过桥 f 进入陆地区域 D, 以此类推.

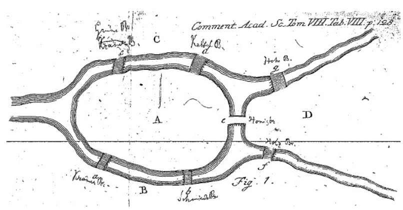


图 7: Königsberg 城中的 4 块陆地和 7 座桥

如果所要求的路线存在, 那么这条路线由 8 个字母组成, 其中 A 与 B 必相邻 (adjacent) 两次, 因为这两个陆地区域有两座桥 a 和 b. 同样地, A 与 C 必相邻两次, 而 A 与 D, B 与 D, D 与 C 各相邻一次. 因此, 问题归结为: 是否可以用字母 A, B, C, D 排成 8 个字母串使得 AB 和 AC 各出现两次, 而 AD, BD 和 DC 各出现一次?

Euler 在他的文章 [4] 中研究了更一般情形, 最后得出如下结论 (原文第 20 段):

> §. 20. Caſu ergo quocunque propoſito ſtatim facillime poterit cognoſci, vtrum tranſitus per omnes pontes ſemel inſtitui queat an non, ope huius regulae. Si fuerint plures duabus regiones, ad quas ducentium pontium numerus eſt impar, tum certo affirmari poteſt, talem tranſitum non dari. Si autem ad duas tantum regiones ducentium pontium numerus eſt impar, tunc transitus fieri poterit, ſi modo curſus in altera harum regionum incipiatur. Si denique nulla omnino fuerit regio, ad quam pontes numero impares conducant, tum tranſitus deſiderato modo inſtitui poterit, in quacunque regione ambulandi initium ponatur. Hac igitur data regula problemati propoſito pleniſſime ſatisfit.

> 20. So whatever arrangement may be proposed, one can easily determine whether or not a journey can be made, crossing each bridge once, by the following rules:
>
> *If there are more than two areas to which an odd number of bridges lead, then such a journey is impossible.*
>
> *If, however, the number of bridges is odd for exactly two areas, then the journey is possible if it starts in either of these areas.*
>
> *If, finally, there are no areas to which an odd number of bridges leads, then the required journey can be accomplished starting from any area.*
>
> With these rules, the given problem can always be solved.

图 8 Euler 的结论原文和它的英译

图 8 的左边是 Euler 结论的原文 (拉丁文), 右边是它的英译 (截自 N. L. Biggs 等 [3] (1976), p.8). Euler 结论的中文表述如下.

定理 0.3 (Euler 定理) **如果有奇数座桥的陆地区域大于两个, 则满足要求的路线是不存在的.**

换句话说, 如果 Königsberg 七桥问题有解, 那么奇数座桥的陆地区域不超过两个. 因为四块陆地区域都有奇数座桥, 所以由 Euler 定理知 Königsberg 七桥问题无解. 定理 0.3 就是 Euler 判断定理 0.1 的最初始形式, 它只给出了判定条件的必要性. 与此同时, Euler 断定这个条件也是充分的. 因为他没有给出其证明, 这里暂称它为 Euler 猜想.

猜想 0.1 (Euler 猜想) **如果恰有两个区域有奇数座桥, 则从这两个区域中任何一个出发存在满足要求的路线; 如果每个区域都有偶数座桥, 则无论从哪个区域出发都存在满足要求的路线.**

Euler 之所以没有给出其证明, 或许因为他认为这个结论的证明很简单, 或许因为他认为这个结论的证明与 Königsberg 七桥问题是否有解无关, 因为当时人们关心的是 Königsberg 七桥问题是否有解. Euler 给出无解的答案, 却不关心有解的充分条件.

130 多年后的 1873 年, 德国数学家 Carl Hierholzer (1840-1871) 在德国的数学年刊《Mathematische Annalen》上发表了题为 "Über die Möglichkeit, einen Linienzug

ohne Wiederholung und ohne Unterbrechnung zu umfahren" (On the possibility of traversing a line-system without repetition or discontinuity, 不重复且不间断地走遍一个线系统的可能性) 的论文[10] (1873).

图 9 所示的是 Hierholzer 的论文首页, 文末注明收稿日期为: 1871 年 12 月. 原文为德文, 英文翻译见 N. L. Biggs 等[3] (1976), pp.11 - 12.

Ueber die Möglichkeit, einen Linienzug ohne Wiederholung und ohne Unterbrechung zu umfahren.

Von Carl Hierholzer.

Mitgetheilt von Chr. Wiener*).

In einem beliebig verschlungenen Linienzuge mögen *Zweige* eines Punktes diejenigen verschiedenen Theile des Zuges heissen, auf welchen man den fraglichen Punkt verlassen kann. Ein Punkt mit mehreren Zweigen heisse ein *Knotenpunkt*, der so vielfach genannt werde, als

*) Die folgende Untersuchung trug der leider so früh dem Dienste der Wissenschaft durch den Tod entrissene Privatdocent Dr. Hierholzer dahier (gest. 13. Sept. 1871) einem Kreise befreundeter Mathematiker vor. Um sie vor Vergessenheit zu bewahren, musste sie bei dem Mangel jeder schriftlichen Aufzeichnung aus dem Gedächtniss wieder hergestellt werden, was ich unter Beihilfe meines verehrten Collegen Lüroth durch das Folgende möglichst getreu auszuführen suchte.

图 9 Hierholzer 的论文首页

C. Hierholzer 在文章中考虑由线编织的系统, 节点被称为奇点或者偶点是根据进入和离开这个节点线数是奇还是偶. Hierholzer 获得如下结果：

定理 0.4 (Hierholzer 定理) **若线系统中存在不重复地经过每条线的路, 则奇点数目或者是 0 或者是 2. 反之, 若连通的线系统中不含奇点或者有两个奇点, 则该系统中存在不重复地经过每条线的路.**

定理 0.4 的第一部分就是 Euler 定理 (即定理 0.3), 而第二部分正是 Euler 猜想 (即猜想 0.1).

实际上, 1873 年, Hierholzer 已经去世了. 他的同事, 画法几何学家 Christian Wiener (1826 – 1896) 在代数几何学家 Jacob Lüroth (1844 – 1910) 的帮助下, 把 Hierholzer 生前告诉他的证明整理出来, 并以 Hierholzer 单独署名发表的, 注明自己作为论文的递交者 (见图 9). C. Wiener 在递交者注脚中解释了这篇文章的背景:

> 靠奖学金而无其它薪酬的 *Hierholzer* 博士不幸过早离开人世 *(1871* 年 *9* 月 *13* 日*)*. 他生前在数学朋友圈中报告了以下发现. 因为没有留下任何文字记载, 为了不使它被人遗忘, 在尊敬的同事 *Lüroth* 的帮助下, 凭自己的记忆, 我尽可能正确地把它整理出来.

这篇文章的发表是对 Hierholzer 博士最好的纪念. 发表后的文章末尾有个编者注:

> 该文的基本内容 *(*形式上有压缩, 某些地方证明不完全*)* 能在 *Listing* 的鲜为人知的论文《*Vorstudien zur Topologie*》中找到. 上述结论可能有助于引导几何学家对这项工作的关注.

这里提到的论文《Vorstudien zur Topologie》(Introductory Studies in Topology, 拓扑学初步) 是德国数学家, Carl Friedrich Gauss (高斯, 1777 – 1855) 的第一个学生, Johann Benedict Listing (1808 – 1882) 于 1847 年发表的论文[13], 原文为德文, 英文翻译见 N. L. Biggs 等[3] (1976, pp.14 - 16), 其中主要讨论"diagram-tracing puzzles", 即人们所熟知的"一笔画问题". 顺便提及一下, 正是这篇论文, J. B. Listing 发明了"topology"(拓扑)一词.

图 10: J. B. Listing

人们不知道 C. Hierholzer 研究这个问题的背景, 但从该文末的编者注可以肯定 C. Hierholzer (包括 Wiener 和编者)完全不知道 Euler 的工作. 这在当时的出版和传播通讯条件下是完全可能.

用图论的语言来陈述 Euler 的证明思想和方法就很简单.

Euler 解决 Königsberg 七桥问题的思想和方法的实质是把七桥抽象成如图 11 所示的图 G, 其中 G 的 4 个顶点 A, B, C 和 D 分别表示四块陆地, G 中边表示该边两端点对应的两块陆地之间的桥 (可惜 Euler 当时并没有这样做). 于是, Königsberg 七桥问题就可以叙述为: *G 中是否存在 Euler 迹?* Euler 的回答是: *G 中不存在 Euler 迹.*

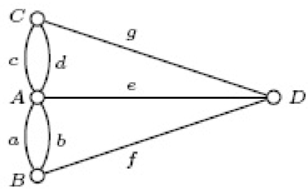


图 11: Königsberg 七桥对应的图

Euler 定理 (即定理 0.3) 可以叙述为: *奇度点数大于 2 的图不含 Euler 迹.*

Euler 猜想 (即猜想 0.1) 可以叙述为: *若 G 中恰有两个奇度点, 则 G 存在连接这两个奇度点的 Euler 迹; 若 G 没有奇度点, 则 G 是 Euler 图.*

而 Hierholzer 定理就是本文开始所陈述的定理 0.1 和推论 0.2.

Euler 图 (Euler graph) 的概念是由 D. König 在他的名著[11] (1936) 的第二章开始提出来的. 他把不含奇度点的图称为 Euler 图, 并陈述一个定理: Theorem 2 All the edges of a graph can be in a close trail if and only if the graph is a connected Euler graph. 用图论语言, 这个定理即为定理 0.1: 图 G 是 *Euler* 图 $\Leftrightarrow G$ 是连通且不含奇度点. 正是 D. König 这本书的广泛传播, 才使 Königsberg 七桥问题和 Euler 定理家喻户晓.

König 指出这个结果来源于 Euler[4]. 在第二章结尾的注释 3 中, König 解释说: "Euler proves only that the condition in Theorem 2 is necessary but not that it is also sufficient. This gap was frequently overlooked. Hierholzer gave the first complete proof for Theorem 2, without seemingly having known of Euler's work. Our proof agrees essentially with Hierholzer's proof." (*Euler* 仅证明了定理 *2* 中条件是必要的, 但没有证明它是充分的. 这个缺陷往往被忽视. *Hierholzer* 好像在不知 *Euler* 工作的情况下给出定理 *2* 的完整证明. 我们的证明与 *Hierholzer* 的证明基本一致.)

这些事实说明, **众所周知的 Euler 判定定理的完整陈述和证明并非属于 Euler, 而是属于 Hierholzer.** 尽管如此, 这个误解并不妨碍 Euler 作为图论创始人的地位.

另一个误解是: 图论教科书 (包括数学科普书、趣味数学书) 在谈及 Euler 解决 Königsberg 七桥问题时, 总要配上如图 11 所示的图.

先看看几本早期的图论教科书是怎样陈述这个问题的.

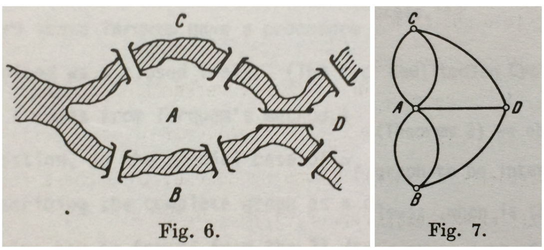


图 12 出现在 D. König 在书[11] (1936) 中两个图

D. König 在书[11] (1936) 中讨论 Königsberg 七桥问题时绘出 Fig.6 和 Fig.7 两个图, 如图 12 所示, 并且说: If A, B, C and D are the four regions separated by the river and if we let a vertex correspond to each region and we join any two vertices by as many edges as there are bridges connecting the corresponding regions, then we get the graph of Fig.7 (设 A, B, C 和 D 是由河隔开的 4 块陆地. 如果我们用一个顶点对应一块陆地, 用与桥数一样多的边连接两块陆地对应的两顶点, 那么我们得到

Fig.7 中的图). 显然, König 并没有说是 Euler 把 Fig.6 所示的七桥抽象成图 Fig.7 所示的图, 强调的是“我们”(König 自己).

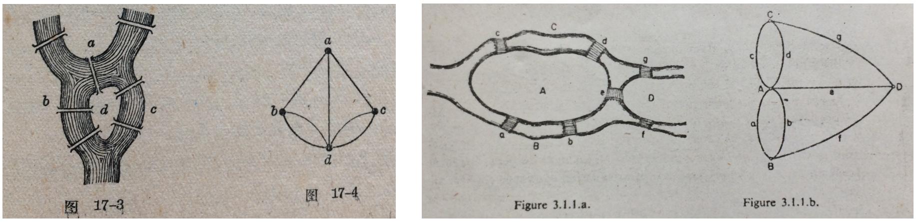


图 13 出现在 C. Berge 书[2] (1958) 和 O. Ore 书[14] (1962) 中两个图

图 13 分别是 C. Berge 书[2] (1958) 和 O. Ore 书[14] (1962) 中陈述七桥和图形关系时绘出的两个图. 他们都没有说这个图形出自 Euler 之手.

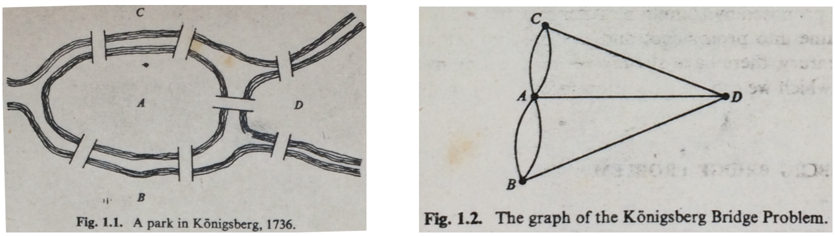


图 14 出现在 F. Harary 书[8] (1969) 中的两个图

图 14 是 F. Harary 在书[8] (1969) 中陈述七桥和图形关系时绘出的两个图, 并作如下解释 (见图 15).

In proving that the problem is unsolvable, Euler replaced each land area by a point and each bridge by a line joining the corresponding points, thereby producing a “graph.” This graph* is shown in Fig. 1.2, where the points are labeled to correspond to the four land areas of Fig. 1.1. Showing

图 15 F. Harary 书[8] (1969) 陈述七桥与图的关系

这段解释的中文大意是：在证明问题不可解的过程中, *Euler* 用点替代陆地, 用边替代对应点之间的桥, 于是得到一个“图”. 这个图如 *Fig.12* 所示, 其中点的标号对应于 *Fig.11* 中 *4* 块陆地.

事实上, Euler 并没有用点替代陆地, 用边替代对应点之间的桥. Euler 是用大写字母 A, B, C, D 分别表示四块陆地区域, 小写字母 a, b, c, d, e, f, g 分别表示 7 座桥 (参见图 7).

Harary 的这个解释明确指出是 *Euler* 把点代替陆地, 把边代替桥, 于是得到对应于 *Königsberg* 七桥的图 *Fig.1.2.* 这样的陈述给读者造成错觉, 以为 Euler 时代就有图的概念, 而且图 11 所示的图是 Euler 给出的. 事实上, “图 (graph)” 一词是英国数学家 James Joseph Sylvester (1814-1897) 在研究化学原子结构时于 1878 年在“Chemistry and Algebra”[17] (1878)一文中才“创造”出来的: “Every invariant and covariant thus becomes expressible by a *graph* (参见图 17).”

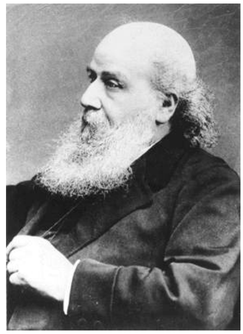
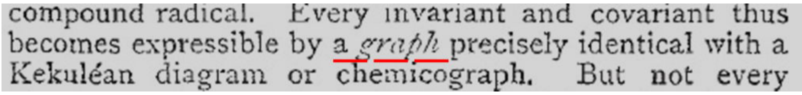


图 16: J. J. Sylvester



compound radical. Every invariant and covariant thus becomes expressible by a *graph* precisely identical with a Kekuléan diagram or chemicograph. But not every

图 17 截自 Sylvester 文章[17] (1878)

值得一提的是, 2014 国际数学家大会于 2014 年 8 月 13 日至 21 日在韩国首尔举行. 来自全球 100 个国家和地区的约 5000 名数学家参加, 这是国际数学家大会历史上规模最大的一次大会. 为纪念这次盛会, 2014 年 7 月 15 日, 韩国邮政发行 2014 国际数学家大会邮票一套 3枚 (图 18), 纪念 3 位大数学家 Pythagoras (毕达哥拉斯, 古希腊数学家、哲学家, 勾股定理的发现者), Leonhard Euler 和 Blaise Pascal (布莱士・帕斯卡, 法国数学家、物理学家、哲学家, 帕斯卡三角 (杨辉三角) 的发现者). 其中间一枚是纪念 Euler 创立了图论, 它生动形象地描述了 7 桥与图的对应关系, 而且图中标号所用的字母与 Euler 当年用来表示陆地和桥的字母一致 (见图 11). 图论工作者为之自豪, 也在世界数学家面前出尽了风头. 但这种描述也给人们造成错觉：与 7 桥对应的图出自 Euler 之手.

图 18 为纪念 2014 年国际数学家大会, 韩国邮政发行的邮票

事实并非如此, Königsberg 七桥的这种图形表示并非出现在 Euler 的文章[4] (1736) 中, 它第一次出现在英国数学家 W. W. Rouse Ball (1850－1925) 的一部通俗

数学名著《Mathematical Recreations and Problems of Past and Present Times》(过去与现在数学游戏与问题)[15] (1892) 中. 此时, Euler 的文章发表已经过去 150 多年了. R. J. Wilson[18] (1986) 就注意到这个问题. 图 19 所示的两个图截自该书第二次修订版（1896）的第 144 页.

图 19 出现在 Ball 书[15] 中的两个图

该书修订再版 12 次. 其中第 11 版 (New York, Macmillan, 1939) 是加拿大数学家 H. S. M. Coxeter 作了大量增修, 并改书名为“Mathematical Recreations and Essays”. 该书中文版《数学游戏与欣赏》由上海教育出版社出版 (2001), 译自经过 Coketer 增修的第 12 版并由多伦多大学出版社于 1974 年出版的版本.

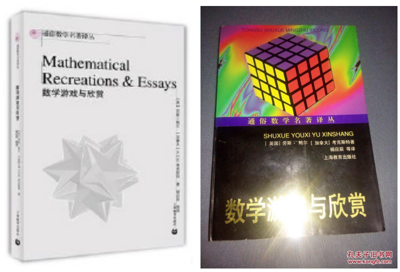


图 20: 数学游戏与欣赏

Euler 在研究 Königsberg 七桥时, 虽然没有提到“点”和“边”, 但他把四块陆地抽象成四个大写字母 A, B, C 和 D (而没有直接指明为点), 若两块陆地 A 与 B 之间有桥, 则 A 与 B 必相邻 (adjacent) (没有把桥指明为边). 这样数学抽象实际上就是现在所说的图论方法. 即使他没有画出 Königsberg 七桥对应的图 11 (只差一步之遥), Euler 仍被公认为是图论的创始人, 他的文章[4] (1736) 被公认为图论第一篇文章, 图论的创立日期就被公认为是 1736 年.

本文讨论的第 3 个问题是 Euler 解决 Königsberg 七桥问题的时间. Königsberg 七桥问题不仅是图论的起源，也是拓扑学的起源. 因此, Euler 被公认为是图论和拓扑学的创始人, 他的文章[4] (1736) 被公认为图论和拓扑学的第一篇论文, 它发表于 1741 年. 这篇论文的完成时间决定了这两门数学学科的创立时间. 因此, Königsberg 七桥问题和 Euler 文章的完成时间引起许多学者的关注.

Euler 从来没有去过 Königsberg, 他是怎么知道 Königsberg 七桥问题的呢?

据 H. Sachs, M. Stiebitz & R. J. Wilson 的研究文章[16] (1988) 介绍, Euler 有位朋友叫 Carl Gottlieb Ehler (1685–1753), Danzig 市 (波兰港口城市) 市长, 也是位数学爱好者. 1735 年到 1742 年期间, 他们之间常有书信来往. Euler 是从 Ehler 的

来往书信中得知 Königsberg 七桥问题的, 也是通过 Ehler 认识了当时的几位数学家, 比如 Heinrich Kühn (1690-1769) 和 Giovanni Jacobo Marinoni (1670-1755). 他们彼此之间通过书信讨论 Königsberg 七桥问题.

据 R. J. Wilson 等[16, 18] 和 G. Alexanderson[1] (2006) 考证, 1735 年 8 月 26 日, Euler 向圣彼得堡科学院报告了 Königsberg 七桥问题不可解的数学证明.

1736 年 3 月 9 日 Ehler 给 Euler 写了封信, 信中画出 Königsberg 七桥草图 (见图 21). 从这封信可以看到, Euler 和 Ehler 早就已经在讨论 Königsberg 七桥问题, 而且 Ehler 已经知道 Euler 解决了 Königsberg 七桥问题. 原信为拉丁文, 图 22 展示了信中部分内容的英文翻译 (截自文献[16]).

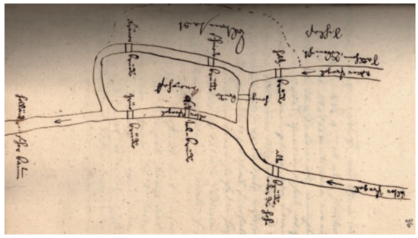


图 21: Ehler 画的 Königsberg 七桥

You would render to me and our friend Kühn a most valuable service, putting us greatly in your debt, most learned Sir, if you would send us the solution, which you know well, to the problem of the seven Königsberg bridges, together with a proof. It would prove to be an outstanding example of the calculus of position [Calculi Situs], worthy of your great genius. I have added a sketch of the said bridges . . . .

图 22 1736 年3月9日, Ehler 给 Euler 的信中部分内容 (截自文献[16])

这段话的大意是: *如果你给我们你所熟知的 Königsberg 七桥问题的解及其证明, 那将是对我和我们的朋友 Kühn 最有价值的帮助, 也算我们欠你这位最有学问先生的一分人情. Königsberg 七桥问题是位置几何的杰出例子, 值得研究, 伟大的天才. 我添加了七桥的轮廓草图 ....*

1736 年 3 月 13 日, Euler 在给 Marinoni 中表达了他处理 Königsberg 七桥问题的基本思想和方法 (图 23 截自该书信), 并强调这不是代数问题, 而是位置几何问题. 1736 年 4 月 3 日, Euler 回复 Ehler 3 月 9 日的信, 清晰地表明他考虑 Königsberg 问题的结果. 这说明 Euler 这个时候之前就已经解决了 Königsberg 七桥问题.

图 23: Euler 给 Marinoni 的信

通过与几位数学家讨论后, Euler 考虑到问题的重要性, 明确认为这是个“位置几何 (geometry of position) 问题”, 足以写篇文章. 位置几何学是 Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) 首次提出的几何学分支, 它只关注位置而不关注量的大小. 于

是, Euler 完成论文“Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis[4] (The solution of a problem relating to the geometry of position, 关于位置几何问题的解)”. 他在论文的第一段就说自己所考虑的问题与位置几何有关 (见图 24).

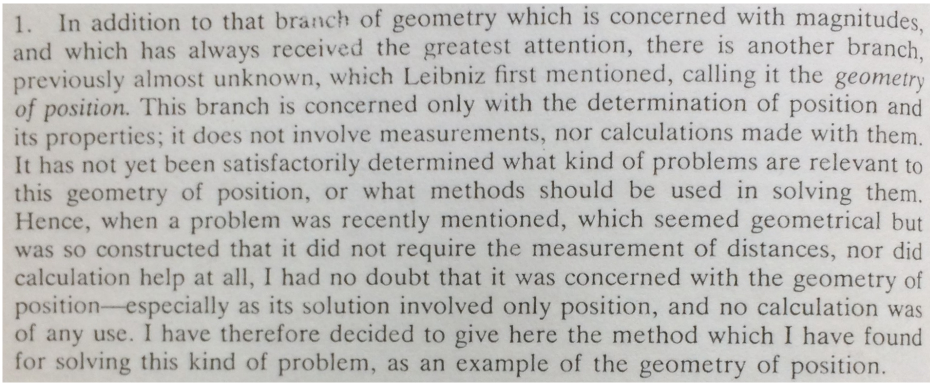

1. In addition to that branch of geometry which is concerned with magnitudes, and which has always received the greatest attention, there is another branch, previously almost unknown, which Leibniz first mentioned, calling it the *geometry of position*. This branch is concerned only with the determination of position and its properties; it does not involve measurements, nor calculations made with them. It has not yet been satisfactorily determined what kind of problems are relevant to this geometry of position, or what methods should be used in solving them. Hence, when a problem was recently mentioned, which seemed geometrical but was so constructed that it did not require the measurement of distances, nor did calculation help at all, I had no doubt that it was concerned with the geometry of position—especially as its solution involved only position, and no calculation was of any use. I have therefore decided to give here the method which I have found for solving this kind of problem, as an example of the geometry of position.

图 24 Euler 论文[4] 第一段 (英译截自 N. L. Biggs 等[3] (1976), p.3)

(与量的大小有关的几何分支已经得到极大的关注. 除此之外, 存在另一个人们几乎还不知道的几何分支叫位置几何, 是由 *Leibniz* 首先注意到的. 这个分支仅关注位置和性质, 它不涉及量的大小也不涉及量之间的计算. 究竟哪种类型的问题与位置几何有关, 或者用什么方法来解决这类问题, 还没有得到满意的确定. 最近提到一个问题, 它好像是几何问题, 但它既不要求距离度量, 也不要求计算. 我认为它与位置几何有关, 特别是因为它的解仅涉及位置, 不涉及任何计算. 所以, 作为位置几何的一个例子, 我在这里给出一个解决这种类型问题的方法.)

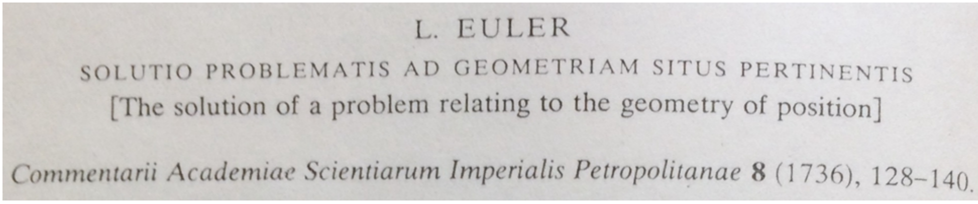
1736 年, Euler 将完成的文章递交到杂志《Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae》(彼得堡皇家科学院纪事). 这期纪事直到 1741 年才出版 (见图 6). 1751 年, 该文重新发表在新版的《纪事》(Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae, 2, 1751, 49-67) 上; 1776 年, 该文又重新发表在《Opera Omnia》(全集) 上. 看来, 在 1741 年至 1776 年之间, Euler 的文章发表和重新发表至少 3 次.

关于 Euler 的论文[4] 的发表时间, 不同作者有不同的说法. 图论文献和有关书籍在引用 Euler 文章出处时也很不一致.

例如, W. W. Rouse Ball 在他的名著《Mathematical Recreations and Problems of Past and Present Times》[15] (1892) 是这样引用 Euler 文章的出处“Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae for 1736, St Petersburg, 1741, vol. viii, pp. 128 - 140”, 杂志名称少了“Imperialis”(帝国).

D. König 在图论教科书《Theorie der endlichen und unendlichen Graphen》[11] (1936) 中注明 Euler 文章的出处为“Commentarii Academiae Petropolitanae, 8, 1736 (1741), pp. 128-140”, 杂志名称少了两个单词“Scientiarum Imperialis”(科学帝国).

N. L. Biggs 等在图论历史书《Graph Theory 1736-1936》[3] (1976) 中明确表明 Euler 文章的出处为“Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae 8 (1736), 128-140”, 杂志名与图 6 所示的一致 (见图 25).

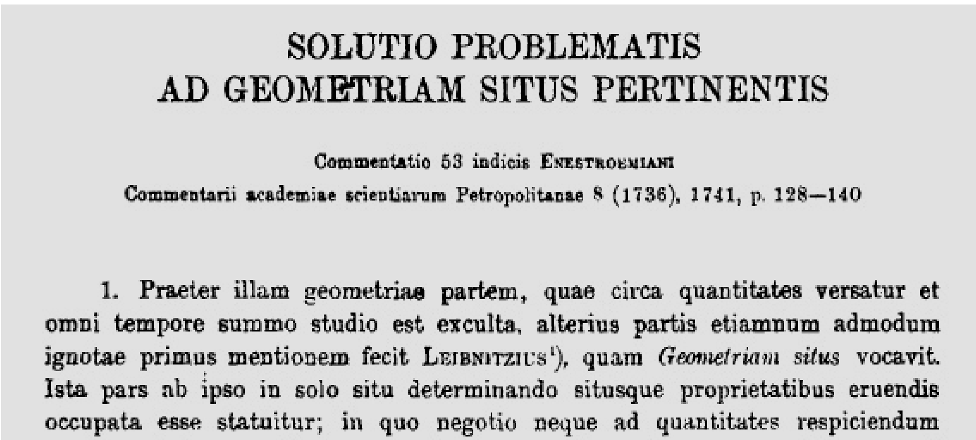

L. EULER

SOLUTIO PROBLEMATIS AD GEOMETRIAM SITUS PERTINENTIS

[The solution of a problem relating to the geometry of position]

Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae **8** (1736), 128–140.

图 25 截自 N. L. Biggs 等 [3] (1976)


SOLUTIO PROBLEMATIS AD GEOMETRIAM SITUS PERTINENTIS

Commentatio 53 indicis Enestroemiani

Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 8 (1736), 1741, p. 128—140

1. Praeter illam geometriae partem, quae circa quantitates versatur et omni tempore summo studio est exculta, alterius partis etiamnum admodum ignotae primus mentionem fecit Leibnitzius[1]), quam *Geometriam situs* vocavit. Ista pars ab ipso in solo situ determinando situsque proprietatibus eruendis occupata esse statuitur; in quo negotio neque ad quantitates respiciendum

图 26 截自 Euler 论文第一页 (截自 Wilson [18] (1986))

图 26 截自 Wilson 的文章 [18], 它与图 6 所示的首页有明显区别, 没有作者, 杂志名称也少了一个单词“Imperialis”(帝国), 标题下多了一行“Commentatio 53 indicis Enestroeniani”. 这明显不是原文. 据笔者考证, 这个版本来自《The Euler Archive》[21] (Euler 档案文件) (Publication → Commentarii (Article List)”) 中的编号为 E53 的文件. 在这个档案文件中, Euler 的论文 [4] 的出处被明确标注为“Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 8 (1736), 1741, p.128-140”. 因为它来自 Euler 的档案文件, 这样的标注应该是可靠的.

从以上的讨论可以看出，Euler 的论文[4] 的完成时间是 1736 年, 发表时间是 1741 年. 关于这段鲜为人知的历史, 有兴趣的读者可参阅 R. J. Wilson[18] (1986), H. Sachs, M. Stiebitz & R. J. Wilson[16] (1988) 和 M. Grötschel & Y.-X. Yuan (袁亚湘)[6] (2012) 的研究文章.

至此, 读者对 Euler 判定定理的形成有个基本的了解. 众所周知的 Euler 判定定理的完整陈述和证明并非属于 Euler, 而是属于 Hierholzer. 一般图论教科书提到 Euler 判定定理, 不提 Hierholzer, 更不提令人敬佩的幕后贡献者 C. Wiener. 第一次把 Königsberg 七桥抽象成如图 11 所示的图 G 的人并不是 Euler, 而是英国数学家 W. W. Rouse Ball. 作为图论研究与发展的继承者, 我们不能忘记曾对图论做出贡献的人, 要永远记住他们.

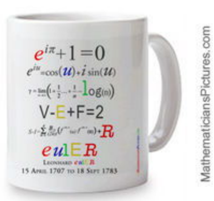


图 27: 纪念杯

Euler 对图论的另一个重要贡献是发现了凸多面体点数（e）、边数（k）和面数（f）之间关系的 Euler 公式 (L. Euler[5] (1753)): $e-k+f=2$. 这个公式出现在许多数学会议的纪念品中 (见图 27). 德国（1983）和瑞士（2007）发行的纪念 Euler 的邮票中含有这个著名公式体 (如图 28 所示).

图 28　德国（1983）和瑞士（2007）发行的纪念 Euler 的邮票

最后一个有趣的故事是关于 Königsberg 七桥问题中 Pergel 河的河心有一个小岛还是两个小岛. 至于是一个小岛还是两个小岛, 丝毫不影响问题的解决. 但从尊重事实的角度, 弄清这个问题是必要的.

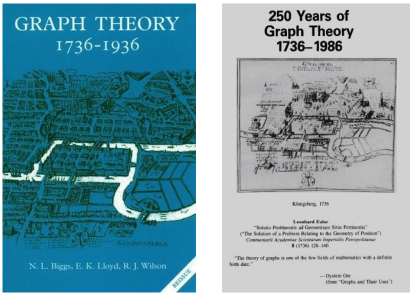


图 29: Königsberg 七桥地图

由 N. L. Biggs, E. K. Lloyd, R. J. Wilson 合编的图论历史书《Graph Theory 1736-1936》[3] (1976) 的封面就有 Königsberg 七桥地图 (见图 29 左图). 图论杂志《Journal of Graph Theory》出版专辑纪念 Euler 文章[4] （1936）发表 250 周年, 该专辑扉页刊登了 Königsberg 七桥地图 (见图 29 右图). 这两个图是一致的, Pergel 河的河心只有一个小岛.

Euler 的原始论文[4] 为拉丁文, 英文翻译见 N. L. Biggs 等[3] (1976), pp.3 – 11. 这个英文版本对 Königsberg 七桥问题的描述如图 30 所示, 其中 Fig [1.2] 是指本文图 7, 它表明 Pergel 河的河心只有一个小岛.

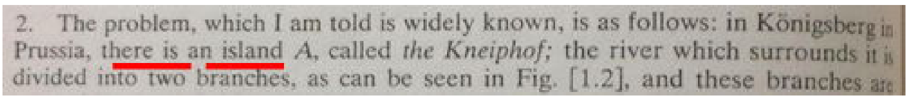

2. The problem, which I am told is widely known, is as follows: in Königsberg in Prussia, there is an island *A*, called *the Kneiphof;* the river which surrounds it is divided into two branches, as can be seen in Fig. [1.2], and these branches are

图 30 截自 N. L. Biggs 等[3] (1976)

然而, 某些作者在他们的图论文献和教科书却说 Königsberg 七桥问题的中 “Pergel 河的河心有两个小岛”, 最为著名的图论人物是 F. Harary. 应编辑的邀请, F. Harary 将他 1959 年 8 月 5 日在 Los Alamos Science Laboratory 关于图论历史的科普演讲稿发表在杂志 SIAM Review 上 [7] (1960), 其中的 Königsberg 七桥及其解释分别如图 31 和图 32 所示的图.

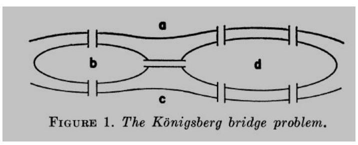


FIGURE 1. *The Königsberg bridge problem.*

图 31: 截自 F. Harary 文章[7] (1960)

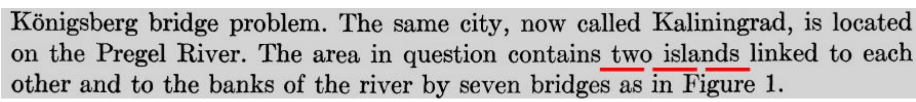
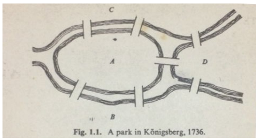

Königsberg bridge problem. The same city, now called Kaliningrad, is located on the Pregel River. The area in question contains two islands linked to each other and to the banks of the river by seven bridges as in Figure 1.

图 32 截自 F. Harary 文章[7] (1960)

从这段文字和图来看, Harary 认为 Königsberg 七桥问题中, Pergel 河的河心有两个小岛.

10 年后, F. Harary 著作《Graph Theory》[8] (1969) 出版. 在该书中, Harary 对 Königsberg 七桥描述如图 33 中图和文字所示. 从图形看不出 Königsberg 七桥问题中有两个小岛, 但在文字叙述中却画蛇添足说 “Pergel 河的河心有两个小岛”.



THE KÖNIGSBERG BRIDGE PROBLEM

Euler (1707–1782) became the father of graph theory as well as topolog
when in 1736 he settled a famous unsolved problem of his day called the
Königsberg Bridge Problem. There were two islands linked to each other
and to the banks of the Pregel River by seven bridges as shown in Fig 1.1.

图 33 截自 F. Harary 著作 [8] (1969)

1976 年, N. L. Biggs, E. K. Lloyd, R. J. Wilson 合编的图论历史书《Graph Theory 1736-1936》[3] (1976) 出版. 该书的封面刊有 Königsberg 七桥地图, 书中有 Euler 原始论文的英文翻译. Harary 或许看到这些, 觉得自己以前对 Königsberg 七桥描述有错误, 在对该书的评论中公开承认了错误 [9] (1977) (见图 34).

This book will facilitate the correction of some historical errors which have been appearing in standard works on graph theory. One of the most striking of these is that the seven bridges of Kŏnigsburg involve the two banks of the Pregel River and two islands; actually there is one island and a fork in the river. (This particular error appeared in the reviewer's book [*Graph Theory* 1969, Reading (Addison-Wesley)], which may be viewed as a subjective continuation of the book under review to 1968.)

图 34 截自 F. Harary 文章 [9] (1977)

令人不解的是 1986 年图论杂志《Jornal of Graph Theory》为 Euler 论文 [4] (1936) 发表 250 周年而出版的专辑中发表了 L. Lesniak and O. R. Oellermann 文章 “An Eulerian exposition” [12] (1986), 他们在文章还在陈述 Königsberg 七桥问题有两个岛 (见图 35), 其中 Figure 1 是指本文图 33 中左图. 更令人不解的是作者提醒读者 “For a more detail account of Königsber bridge problem see [6]”, 其中文献 [6] 是指 N. L. Biggs, E. K. Lloyd, R. J. Wilson 合编的图论历史书《Graph Theory 1736-1936》[3] (1976). 笔者完全有理由怀疑他们就根本没有认真去读那本历史书.

Figure 1 shows a map of Königsberg as it appeared in the 18th century. The river Pregel was crossed by the seven bridges which connected two islands in the river with each other and the opposite banks. We denote the land regions by

图 35 截自 L. Lesniak and O. R. Oellermann 文章 [12] (1986)

参考文献

[1] Alexanderson, G. L., About the cover: Euler and Königsberg's Bridges: A historical view. Bulletin of the American Mathematical Society, 43 (4) (2006), 567- 573.

[2] Berge, C., Théorie des Graphen et ses Applications. Paris: Dunod, 1958. (中译本: 贝尔热. 图的理论及其应用. 李修睦, 译. 上海: 上海科学技术出版社, 1963.)

[3] Biggs, N. L., Lloyd, E. K. and Wilson, R. J., Graph Theory 1736-1936. Oxford: Clarendon Press, 1976.

[4] Euler, L., Solutio Problematis ad geometriam situs pertinentis. Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, 1736, 8 (1741), 128 – 140 = Opera Omnia, Ser. 1, Vol. 7, 1 – 10. Reprinted and translated in Biggs, N. L.; Lloyd, E. K.; Wilson, R. J., Graph Theory 1736 - 1936, Oxford University Press, 1976, 3 – 8.

[5] Euler, L., Demonstratio nommullarum insignium proprietatum quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita. Novi Comm. Acad. Sci. Imp. Petropol, 4 (1752-1753), 140 – 160.

[6] Grötschel, M. and Yuan, Y.-X. (袁亚湘), Euler, Mei-Ko Kwan, Königsberg and a Chinese Postman. *Documenta Mathematica*, Extra Volume ISMP (2012), 43 – 50.

[7] Harary, F., Some historical and intuitive aspects of graph theory. SIAM Review, 2 (2) (1960), 123 – 131.

[8] Harary, F., Graph Theory. Addison-Wesley Publishing Company, 1969. (中译本: F. 哈拉里, 图论. 李慰萱, 译. 上海: 上海科学技术出版社, 1980).

[9] Harary, F., Review for Graph Theory 1736-1936. Review, 1977, 480 – 481.

[10] Hierholzer, C., Über die Möglichkeit, einen Linienzug ohne Wiederholung und ohne Unterbrechnung zu umfahren (in German). Mathematische Annalen, 6 (1873), 30 – 32.

[11] König, D., Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Leipzig: Ajademische Verlagsgesell schaft, 1936; Reprinted Chelsea, New York, 1950. Translated from German by Richard McCoart; with commentary by W.T. Tutte, Theory of finite and infinite graphs, Birkhäuser, 1990.

[12] Lesniak, L. and Oellermann, O. R., An Eulerian exposition. Journal of Graph Theory, 10 (3) (1986), 277 – 297.

[13] Listing, J. B., Vorstudien zur Topologie (Introductory studies in toplogy). Göttinger Studien (Abtheilung 1), 1 (1847), 811- 875.

[14] Ore, O., Theory of Graphs. Providence, R. I.: Amer. Math. Soc. 1962.

[15] Rouse Ball, W. W., Mathematical Recreations and Problems of Past and Present Times. London: Macmillan, 1892. 中译本: 数学游戏与欣赏, 杨应辰等译. 上海: 上海教育出版社, 2001.

[16] Sachs, H., Stiebitz, M. and Wilson, R. J., An Historical Note: Euler's Königsberg Letters. Journal of Graph Theory, 12 (1) (1988), 133 – 139.

[17] Sylvester, J. J.. Chemistry and Algebra. Nature, 17 (1877-1878), 284 = Math. Papers, 3, 103 – 104.

[18] Wilson, R. J., An Eulerian trail through Königsber. Journal of Graph Theory, 10 (3) (1986), 265 – 275.

[19] 徐俊明. 图论及其应用（第 3 版）. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2010.

[20] 徐俊明, 图论及其应用 (第 4 版). 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2019.

[21] `http://eulerarchive.maa.org/`, ("Publication → Commentarii (Article List)").