K. Kuratowski 与 Kuratowski 定理

徐俊明

(中国科学技术大学数学科学学院)

2018 年 *01* 月 *15* 日于合肥

摘要: *K. Kuratowski* 是波兰数学家, *1930* 年, 因发现了平面图判定定理使他闻名于图论界. 著名的 *Kuratowski* 判定定理"G 是平面图 $\Leftrightarrow$ 它不含 K_5 和 $K_{3,3}$ 的细分图"是任何一本图论教科书中的基本定理. 然而, 这个简单实用的定理并不一定完全属于 *Kuratowski*. 本文介绍有关这个定理背后鲜为人知的人和故事.

图 1: K. Kuratowski

Kazimierz Kuratowski (1896-1980) 是波兰数学家, 1921 年获得华沙大学博士学位. 他曾任华沙大学教授, 波兰科学院副院长 (1957-1968), 长期担任波兰数学研究所所长, 华沙科学院院士, 爱丁堡、奥地利、意大利、匈牙利皇家科学院和前苏联科学院等外籍院士. 他的研究兴趣主要集中在抽象拓扑. 1930 年, Kuratowski 发现了平面图判定定理使他闻名于图论界. 1981 年, 波兰数学会设立 Kuratowski 奖, 奖励 30 岁以下的优秀数学人才. 除了他的自传 [24] 外, 有许多文章介绍 K. Kuratowski 的生平和数学贡献, 例如 S. Ulam (Kuratowski 的第一位博士, 1933) [30, 31] (1981, 1986), R. Engelking (Kuratowski 的最后一位博士, 1961) [11] (1998) 和 J. Wojnarowski & S. Zawiślak [34] (2017).

* * * * * * * * * * * * *

在对平面图的研究中, 人们发现了许多平面图判断准则. 任何一本图论教科

书在介绍平面图判定准则时, 必介绍下面的定理 (见笔者著作[35] (2010) 或者[37] (2019) 中定理 3.2.1):

定理 0.1 G **是平面图** $\Leftrightarrow G$ **不含** K_5 **或** $K_{3,3}$ **的细分图,**

其中 K_5 和 $K_{3,3}$ 如图 2 所示.

这个结果是图论中最优美最基本的经典定理之一, 一般图论文献和教科书都把这个结果归功于波兰数学家 K. Kuratowski, 故称它为 **Kuratowski 定理**, 并且都毫不例外地指出它的出处为 C. Kuratowski[21] (1930).

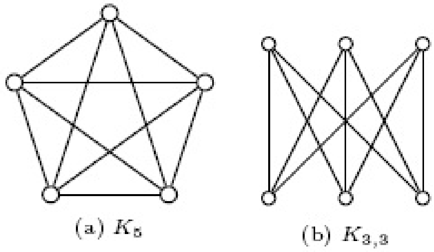
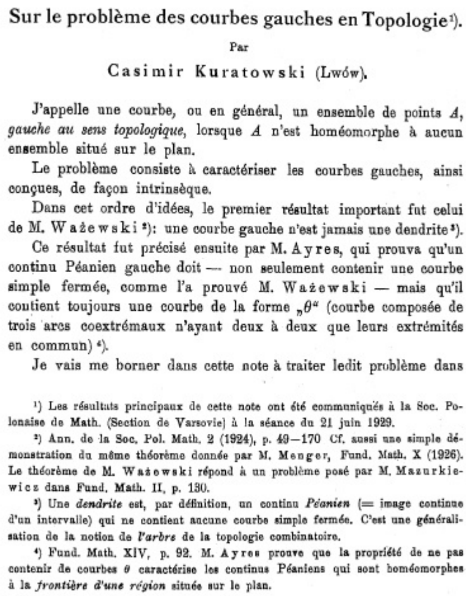


图 2: 完全图 K_5 和完全 2 部图 $K_{3,3}$

然而, 这个简单实用的定理并不一定完全属于 Kuratowski. 本文介绍与这个定理有关的数学家及其背后鲜为人知的故事.

据 G. Berman[5] (1977) 分析, Kuratowski 的论文[21] (1930) 是图论中引用率最高的文献. Kuratowski 的论文[21] 为法文 (见图 3), 作者署名为 Casimir Kuratowski, 其中 "Casimir" 是波兰人名 "Kazimierz" 的英文、法文和拉丁文译名. 考虑到人名翻译习惯, 不少作者在引用论文[21] 时, 将作者姓名缩写成 K. Kuratowski, 而不是 C. Kuratowski, 如 F. Harary & W. T. Tutte[17] (1965) 等. 1981 年, Jan Jaworowski 将 Kuratowski 的论文[21] 译为英文[22], 并将作者的名字 "Casimir" 改为 "Kazimierz". 在本文以下的陈述中, 笔者采用 Kazimierz Kuratowski 的缩写 K. Kuratowski.



Sur le problème des courbes gauches en Topologie[1]).

Par

Casimir Kuratowski (Lwów).

J'appelle une courbe, ou en général, un ensemble de points A, *gauche au sens topologique*, lorsque A n'est homéomorphe à aucun ensemble situé sur le plan.

Le problème consiste à caractériser les courbes gauches, ainsi conçues, de façon intrinsèque.

Dans cet ordre d'idées, le premier résultat important fut celui de M. Ważewski[2]): une courbe gauche n'est jamais une dendrite[3]).

Ce résultat fut précisé ensuite par M. Ayres, qui prouva qu'un continu Péanien gauche doit — non seulement contenir une courbe simple fermée, comme l'a prouvé M. Ważewski — mais qu'il coutient toujours une courbe de la forme „θ" (courbe composée de trois arcs coextrémaux n'ayant deux à deux que leurs extrémités en commun)[4]).

Je vais me borner dans cette note à traiter ledit problème dans

1) Les résultats principaux de cette note ont été communiqués à la Soc. Polonaise de Math. (Section de Varsovie) à la séance du 21 juin 1929.

2) Ann. de la Soc. Pol. Math. 2 (1924), p. 49–170 Cf. aussi une simple démonstration du même théorème donnée par M. Menger, Fund. Math. X (1926). Le théorème de M. Ważewski répond à un problème posé par M. Mazurkiewicz dans Fund. Math. II, p. 130.

3) Une *dendrite* est, par définition, un continu *Péanien* (= image continue d'un intervalle) qui ne contient aucune courbe simple fermée. C'est une généralisation de la notion de *l'arbre* de la topologie combinatoire.

4) Fund. Math. XIV, p. 92. M. Ayres prouve que la propriété de ne pas contenir de courbes θ caractérise les continus Péaniens qui sont homéomorphes à la *frontière d'une région* située sur le plan.

图 3: Kuratowski 的论文[21] (1930) 首页

Kuratowski 在他的论文[21] (1930) 中并不是像定理 0.1 那样表达他的结果的. 定理 0.1 是 F. Harary & W. T. Tutte[17] (1965) 的表述 (见图 4).

> The celebrated criterion of Kuratowski [1] for the planarity of a graph G asserts that G is nonplanar if and only if it contains a subgraph homeomorphic to K_5 or $K_{3,3}$.

图 4 截自 F. Harary & W. T. Tutte [17] (1965)

首先来看看 K. Kuratowski 在论文 [21] 中是怎样陈述他的结果的. Kuratowski 的结果即为原文中的定理 A, 它的原始表述被截图如下:

> ***Théorème A.** A étant un continu Péanien gauche qui ne contient qu'un nombre fini de courbes simples fermées, A contient une courbe homéomorphe à la courbe de la fig. 1 ou à celle de la fig. 2.*

图 5 截自 Kuratowski 文献 [21] (1930)

原文为法文而且用的是拓扑语言, 用现代图论语言英译如下 (英译见 N. L. Biggs, E. K. Lloyd & R. J. Wilson [6] (1976), p.145):

> *Theorem A. If A is a connected non-planar graph which has only a finite number of circuits, then A contains a subgraph homoeomorphic to the graph of type 1 or the graph of type 2.*
> (定理 A. 如果 A 是仅含有限个点的连通非平面图, 那么 A 包含同胚于类型 1 或者类型 2 的子图.)

定理 A 中提到的"homoeomorphic"(同胚, 拓扑学概念)等价于图论概念"细分"(subdivision), 其中"type 1"和"type 2"即为本文的图 6 中的 Fig.1 和 Fig.2. 显然, 它们分别同构于现在人们所熟悉的完全 2 部图 $K_{3,3}$ 和完全图 K_5. Kuratowski 讨论的是非平面图, 而且没有证明 $K_{3,3}$ 和 K_5 的非平面性, 所以他的结果只说明了"$K_{3,3}$ 或者 K_5"是非平面图的必要条件, 而没有说明其充分性. 这说明定理 A 与定理 (0.1) 还是有一定的差距.

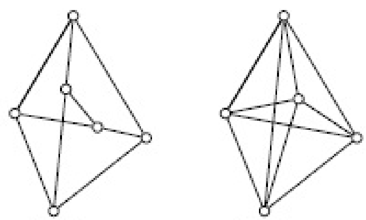


Fig. 1 Fig. 2

图 6: 截自 Kuratowski 的论文 [21] (1930)

现在来看看早期图论专家在他们的著作和论文中是怎样陈述 K. Kuratowski 论文 [21] (1930) 的结果的.

匈牙利数学家 D. König (1884-1944) 的图论有史以来的第一本教科书《Theorie der endlichen und unendlichen Graphen》[20] (1936) 中没有提到 K. Kuratowski 的

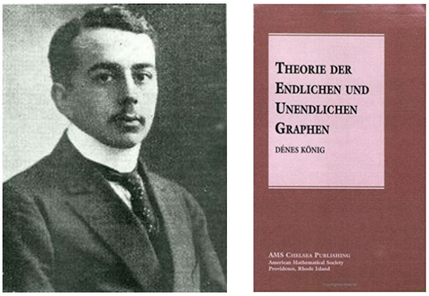
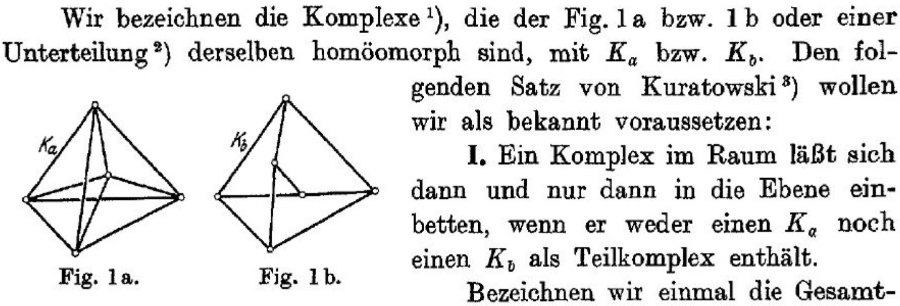


图 7: Konig 和他的图论专著

结果, 但在书末参考文献中提到 C. Kuratowski 的论文[21] (1930). 据 D. König 在这本书中介绍, 2 部图 (bipartite graph) 的概念是他在论文[19] (1923) 提出来的 (这篇论文最初是在 1914 年 4 月 7 日在巴黎召开的数学哲学大会上报告), 完全图 (complete graph) 的概念是由 A. Sainte-Laguë[28] (1924) 提出来的. 但他们都没有给出用来表示 2 部图和完全图的记号.

K. Wagner[33] (1937) 是最早将 Kuratowski 的结果说成 Kuratowski 定理 (Satz von Kuratowski) 的人 (参见图 8).


Wir bezeichnen die Komplexe ¹), die der Fig. 1a bzw. 1b oder einer Unterteilung ²) derselben homöomorph sind, mit K_a bzw. K_b. Den folgenden Satz von Kuratowski ³) wollen wir als bekannt voraussetzen:

I. Ein Komplex im Raum läßt sich dann und nur dann in die Ebene einbetten, wenn er weder einen K_a noch einen K_b als Teilkomplex enthält.

Bezeichnen wir einmal die Gesamt-

图 8 截自 Wagner 的论文[33] (1937)

根据 W. T. Tutte 在《Mathematical Review》(MR0063013 (16,58d)) 的评论, G. A. Dirac & S. Shuster 在《A theorem of Kuratowski》[10] (1954) 一文中将 Kuratowski[21] (1930) 的结果命名为 Kuratowski 定理, 并用图论语言从平面图的角度陈述该定理, 并给出简单证明.

Kuratowski 定理: *有限图是平面的充分必要条件是它不含 Thomsen 图或 5 阶完全图的细分图.*

其中 Thomsen 图是指完全 2 部图 $K_{3,3}$. 这应该是最早从平面图的角度用“充分必要”的形式来陈述 Kuratowski 定理的. (笔者目前无法找到此文, 敬请有条件的读者帮助核实一下.)

法国数学家 C. Berge 在他的《Théorie des Graphen et ses Applications》[2] (1958, 图的理论及其应用) 一书的最后一章“平面图”中引用了 G. A. Dirac & S.

Shuster 的论文[10] (1954). 在“一般性质”的一节中, Berge 利用 Euler 公式证明了“3 别墅和 3 工厂问题”（即完全 2 部图 $K_{3,3}$）和“5 个顶点的完全图”是非平面图, 而且陈述 Kuratowski 的结果时明确表述它为

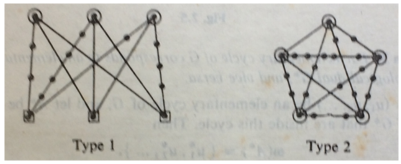


图 9: 截自 Berge 的著作[2] (1958)

Kuratowski 定理: *图 G 是平面的充分必要条件是 G 不含类型 1 或者类型 2 的部分子图.*

Berge 绘出的两类图如图 9 所示, 实际上是完全 2 部图 $K_{3,3}$ 和完全图 K_5 的细分图, 只不过他没有引入 2 部图和完全图的概念, 也没有使用 $K_{3,3}$ 和 K_5 的记号, 但这是第一次在图论教科书中以充分必要的形式陈述 Kuratowski 定理. Berge 在另一本图论教科书《Graphes et Hypergraphe》[4] (1970) 中虽然引入 2 部图和完全图的概念以及记号 $K_{p,q}$ 和 K_n, 但在陈述 Kuratowski 的结果时仍然依旧.

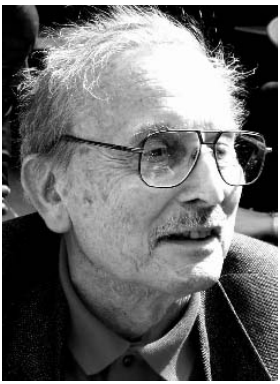


图 10: Claude Berge

Claude Jacques Berge (1926-2002) 是法国数学家, 现代组合学和图论的奠基人之一, 1953 年获得巴黎大学博士学位, 曾任巴黎大学教授, 指导过罗马国际计算中心, 访问过普林斯顿大学、宾夕法尼亚州立大学、纽约大学和印第安纳统计学院. Berge 出版了 5 本有关博弈论、拓扑、图论和组合学方面的专著和教科书, 其中的《Théorie des Graphen et ses Applications》[2] (1958) 是图论有史以来第二本专著, 被译成许多文字, 其中中文《图的理论及其应用》是由李修睦翻译并由上海科学技术出版社于 1963 年出版. 他以 Berge 引理[1] (1957)“G 中匹配 M 是最大的 $\Leftrightarrow G$ 不含 M 交错路”和 Berge 关于完备图的两个猜想[3] (1961) 而闻名于图论界. Berge 获得欧洲运筹学协会颁发 EURO 金奖 (1989) 和组合学及其应用研究所颁发的首届 Euler 奖 (1993). 2006 年 10 月 6 日, Discrete Mathematics 出版了由 A. Bondy & V. Chvátal[7] (2006) 编辑的纪念 Berge 的专辑 (见《Discrete Mathematics》, 306 (19-20) (2006)).

O. Ore 在其图论著作《Theory of Graphs》[27] (1962) 中既没有提到 Kuratowski 定理, 也没有提到 K. Kuratowski 的任何文献; 他虽然给出了 2 部图和完全图的定义, 但没有给出表示这两类图的任何记号.

据笔者目前所看到的资料表明, 现在人们看到的记号 $K_{3,3}$ 和 K_5 以及 Kuratowski 定理 0.1 的表述是由 F. Harary & W. T. Tutte[17] (1965) 首先给出

的 (见图 4). 图 11 中所示的 4 行诗和两个图出现在 F. Harary 的著作《Graph Theory》[14] (1969) 的扉页中. 这可能是 Harary 最得意之作. 可惜的是, 李慰萱翻译的该书中文版中没有这个扉页.

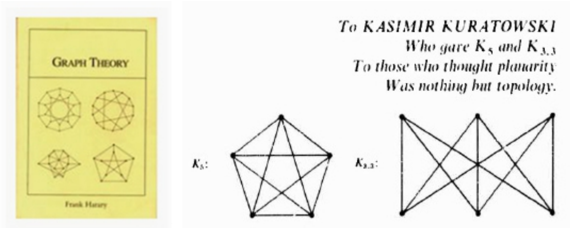


图 11: F. Harary 的著作 [14] 和扉页

图 12: F. Harary

Frank Harary (1921-2005) 是美国多产数学家, 1948 年获美国加州大学伯克利分校 (University of California at Berkeley) 博士学位, 曾任密西根大学 (University of Michigan) 教授和新墨西哥州立大学 (New Mexico State University) 计算机科学名誉教授. Harary 的专业方向是图论, 发表 700 多篇学术文章. 他的著作《Graph Theory》[14] (1969) 为图论术语和记号的标准化起了重要作用. 他是《Journal of Combinatorial Theory》(1966) 和《Journal of Graph Theory》(1977) 创办人, 积极推广普及图论及其应用, 被广泛认为是现代图论的开创者之一.

F. Harary 为什么要这么做, 他在文章 [16] (1981) 中解释了其中的奥秘. 他说: 他最后一次见到 Kuratowski 是在 1973 年 9 月 7–10 日在罗马召开的组合会议期间. 他们之间有下述一段有趣的对话 (见图 13):

KK: The notation K_5 and $K_{3,3}$ for the two skew graphs is very nice. Who made this up?
FH: I must admit that I am to blame.
KK: But why did you choose this letter rather than others?
FH: Well, the K in K_5 stands for Kazimierz and the K in $K_{3,3}$ for Kuratowski!

图 13 截自 Harary 的文章 [16] (1981)

于是, Harary 很得意地写道 (见图 14):

I had seen Professor Kuratowski smile many times previously, but never so broadly or shyly as when he realized that I had dedicated to him not only my book, but also the complete graphs and bigraphs.

图 14 截自 Harary 的文章 [16] (1981)

1980 年 6 月 18 日, K. Kuratowski 不幸去世, 享年 84 岁. 这一年正好是 K.


The Editors dedicate this issue of the
Journal of Graph Theory

to the memory of
Kazimierz Kuratowski

Honorary member of the Editorial Board of *Journal of Graph Theory*,
President of the Polish Mathematical Society,
Director of the Mathematical Institute of the Polish Academy of Science,
Author of five books on topology, set theory, and calculus,

who died at the age of 84 on
18 June 1980

1980—the 50th anniversary of "Kuratowski's Theorem"

Kazimierz Kuratowski, Sur le probléme des courbes gauches en topologie.
Fundamenta Mathematicae 15(1930) 271–283.

His many friends and colleagues are deeply sorrowed by his loss.

图 15 Journal of Graph Theory, Vol 4 (4) (1980) 中的首页

Kuratowski 论文[21] (1930) 发表 50 周年. 图论杂志 (Journal of Graph Theory) (Vol 4 (4), 1980) 对 K. Kuratowski 的不幸去世发布讣告 (见图 15), 并在 (Vol 5 (3), 1981) 发表几篇纪念文章.

1981 年 2 月 10–13 日, 在波兰卡斯尔 (tagów Zamek (Castle)) 举行国际图论会议, 纪念 Kazimierz Kuratowski. 会议论文由 M. Borowiecki, J. W. Kennedy & M. M. Syslo 编辑为文集《Graph Theory》, 由 Springer 出版社作为系列丛书《Lecture Notes in Mathematics》的第 1018 卷于 1983 年出版. 特别有意思的是, 采用 F. Harary 的含义, 该文集的扉页中将 Kazimierz Kuratowski 的姓名写成 "K_5azimierz

$K_{3,3}$uratowski” (见图 16).

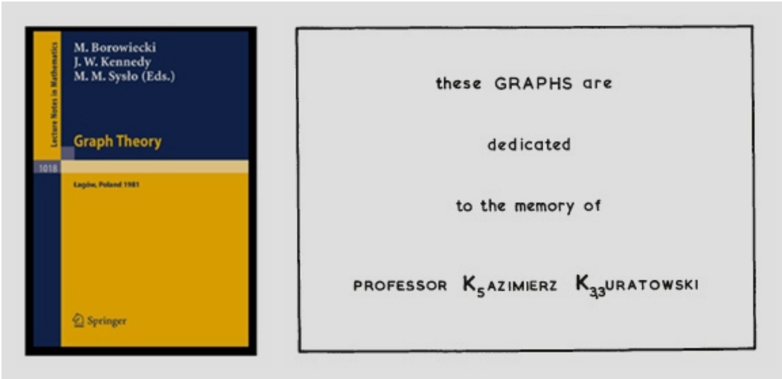
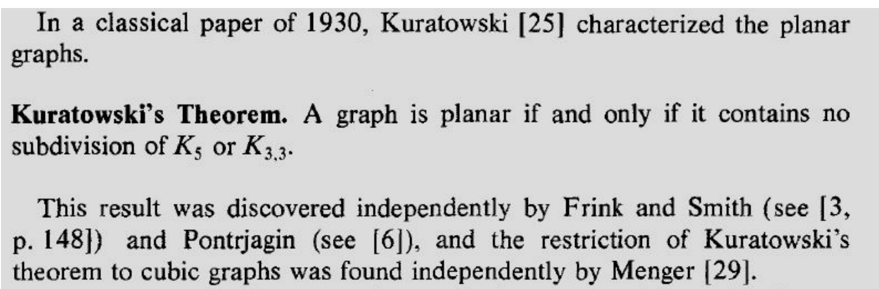


图 16 纪念 K. Kuratowski 的波兰图论会议文集和它的扉页

至此, 读者大致了解了定理 (0.1) 的来历, 它源于 K. Kuratowski [21] (1930), 经 K. Wagner [33] (1937), G. A. Dirac & S. Shuster [10] (1954), C. Berge [2] (1958), F. Harary & W. T. Tutte [17] (1965) 等人的加工, 补充和完善才形成. Kuratowski 定理也获得图论工作者的认可.

这里还应该提及一下: 对于 3 正则平面图, K. Menger [25] (1930) 得如下结果: 3 正则平面图不含 $K_{3,3}$ 细分图.

事情并没有到此结束. 尽管现代图论教科书都将定理 (0.1) 归功于 Kuratowski 并称它为 Kuratowski 定理, 但在图论文献中还存在一些争议, 因为这个结果几乎同时被不同作者独立发现, 其中涉及的作者主要有两位美国数学家 O. Frink & P. A. Smith 和一位前苏联数学家 L. Pontryagin (庞特里亚金) (见 C. Thomassen [29] (1981), 参见图 17).



In a classical paper of 1930, Kuratowski [25] characterized the planar graphs.

Kuratowski's Theorem. A graph is planar if and only if it contains no subdivision of K_5 or $K_{3,3}$.

This result was discovered independently by Frink and Smith (see [3, p. 148]) and Pontrjagin (see [6]), and the restriction of Kuratowski's theorem to cubic graphs was found independently by Menger [29].

图 17 截自 C. Thomassen 的文章 [29] (1981)

其中文献 [25] 是指本文的 Kuratowski 文章 [21] (1930), 文献 [3] 是指本文的 Biggs, Lloyd, Wilson 的历史书[6] (1976), 文献 [6] 是指本文的 Burstein 的文章[8] (1978), 文献 [29] 是指本文的 Menger 的文章[25] (1930).

为了弄清 Kuratowski 定理的来由和归属, J. W. Kennedy, L. V. Quintas & M. M. Syslo 对此作了深入研究, 查阅了一些资料并与有关作者的通信证实, 最后写成文章[18] (1985). 本文以下叙述的部分资料来源于这篇历史研究文章.

据 Kuratowski 在文[21] (1930) 中第一个脚注中注释 (见图 3), Kuratowski 于 1929 年 6 月 21 日向波兰数学会宣布了这个结果, 文章的正式发表是在 1930 年. 在 Kuratowski 的文章发表之前, 波兰会议之后, 美国数学家 O. Frink (1901 - 1988) 和 P. A. Smith (1900 - 1980) 得到相同结论, 并投到《Transaction of the American Mathematical Society》, 但被拒绝 (见 Harary[16] (1981)). 后来在《Bulletin of the American Mathematical Society》(1930)[13] 上发表了一个摘要, 宣布了他们的结果 (见图 18):

> One of the results of this paper is a simple necessary and sufficient condition that an arbitrary linear graph be mappable on a plane. (Received February 10, 1930.)

图 18 截自 Harary 的文章[16] (1981)

至于这个充分必要条件是怎么表述的, 不得而知. N. L. Biggs, E. K. Lloyd & R. J. Wilson 在《Graph Theory 1736-1936》[6] (1976) 一书的第 148 页是这样评论的：

In fact, the authors of this paper, Orrin Frink and P. A. Smith, had independently arrived at the same result as Kuratowski. Their paper was intended for publication in the Transaction of the American Mathematical Society, but, as Frink informed us in a letter written in 1974: 'Unfortunately Kuratowski's proof came out in Fundamenta just at that time, and equally unfortunate was the fact that our proof was similar to Kuratowski's. Hence our paper was simply rejected by the Transaction.'

Such are the pitfalls of original research. However, Frink and Smith could at least console themselves with the thought that the credit had gone to the first person to announce the result. History has not been so kind to Kirkman and his work on 'Hamiltonian' Circuite.

这两段评论的中文大意是:

事实上, 这篇文章的作者 Frink 和 Smith 已独立地得到与 Kuratowski 一样的结果. 他们将文稿投稿到美国数学会会报 (Transaction of the American Mathematical Society), 但正如 Frink 在 1974 年写给我们的信中所说的: "不幸的是, 正好那个时候 Kuratowski 的证明已在 Fundamenta 上发表, 而且更不幸运的事实是, 我们的证

明也与 *Kuratowski* 的证明一样. 因此, 我们的文章就这样简单地被学报拒绝了."

这就是原始研究常常遇到的尴尬. 然而, *Frink* 和 *Simth* 至少可以用这样的想法安慰自己: 成功总是属于第一个公布结果的人. 历史对 *Kirkman* 也并不友好, 他的工作被标以"*Hamilton*"圈.

对于这些评论, O. Frink 做如下证实 (见 J. W. Kennedy 等[18] (1985)):

> The quote from my letter to Dr. Wilson is accurate. Kuratowski's proof was actually different from ours, since he did not use the notion of an irreducible non-planar graph, but the two papers were not different enough so that ours could be published. [Letter from O. Frink, 1981]

图 19 截自 Kennedy 等[18] (1985)

这封由 O. Frink 于 1981 年写给文章[18] (1985) 作者的信的中文大意是: 引自我给 *Wilson* 博士的信是准确的. *Kuratowski* 的证明实际上不同于我们的证明, 因为他没有用到不可约非平面图概念. 但两篇文章还没有差别到使我们的文章可以发表的程度. F. Harary[15] (1979) 在评论这一事件时说:

> **Orrin Frink and Paul A. Smith, had already submitted (independently, and independently of each other) papers containing precisely the same theorem, which they promptly withdrew.**

图 20 截自 Harary[15] (1979

(*Frink* 和*Smith* 已呈送 *(*独立地, 相互独立地*)* 恰含同样定理的文章, 后迅速撤回.) 对于这样的评论, Frink 感到很不爽, 特别是 Harary 在文中提到他与 Smith 独立得到这个结果 (见 J. W. Kennedy 等[18] (1985)):

> Harary is quite wrong in saying that Paul Smith and I worked independently. We knew each other well, having been together for a year or more at Princeton. I was then interested in graph theory, having published a proof of Petersen's Theorem in the Annals in 1926 (see [Frink 1926]). We discussed the question, conjectured the result, and then tried (independently perhaps), to prove it. Paul was then at Barnard in N.Y., and I was at Penn State. We corresponded. We were lucky that an abstract of the paper was printed in 1930.
>
> It seems to me that almost anybody who had thought of the question would soon conjecture the answer. Poor Paul Smith is no longer with us. [Letter from O. Frink, 1981]

图 21 截自 Kennedy 等[18] (1985)

在这封信中, Frink 说: *Harary* 说我与 *Paul Smith* 的工作是独立的说法是相当错误的. 我们一起在普林斯顿相处一年多, 相互非常熟悉. 那时我对图论发生了兴趣, *1926* 年, 我在 *Annals* 上还发表了证明 *Petersen* 定理的文章[12]. 我们一起讨论问题, 猜想结果并试图证明它 *(*或许是独立地*)*. 后来, *Paul* 去了纽约的 *Barnard*, 我在宾夕法尼亚州, 相互之间还有通信来往. 幸运的是, 我们那篇文章的摘要在 *1930* 年被发表了.

后来, F. Harary 在另一篇文章[16] (1981) 在评论这一事件时做了如下纠正:

> It has been noted that there is a great deal of independent, almost simultaneous discovery in the explosively growing field of graph theory. This was the case with Kuratowski's theorem. For it was independently found and proved by Frink and Smith [2], who even sent an abstract of the result to the American Mathematical Society in 1930:

图 22 截自 Harary 的文章[16] (1981)

这些事实说明, 与 Kuratowski 同时, O. Frink 和 P. A. Smith 也独立发现和证明了定理 (0.1) 中的结论, 因与 Kuratowski 的证明方法相同, 投稿被拒而只发表了一个简短的摘要.

因此, O. Frink 和 P. A. Smith 与 K. Kuratowski 关于 Kuratowski 定理的争议就有了明显的结论. Kuratowski 是胜利者, Frink 和 Simth 只能用 N. L. Biggs 等人的话来安慰自己: *成功总是属于第一个公布结果的人*.

最为受到争议的是前苏联数学家 L. Pontryagin (庞特里亚金, 1908-1988) 也发现了定理 (0.1) 中的结论. 不过, 据史料记载, Pontryagin 的发现没有发表出来, 只出现在他未发表的笔记中. Kuratowski 在他的文章[21] (1930) 的第 5 个 (该文第 2 页第 1 个) 脚注中也提到了这个事实 (见图 23):

> 1) Ces continus peuvent être définis comme continus qui sont *localement* des dendrites. Ils présentent une généralisation des *réseaux* de la topologie combinatoire; pour ces derniers, un théorème analogue au mien fut trouvé — comme j'ai appris de M. Alexandroff — par M. Pontrjagin il y a plusieurs années mais n'a pas été publié jusqu'à présent.

图 23 截自 Kuratowski 文章[21] (1930)

“As I have learned from Mr. Alexandroff, a theorem for graphs, analogous to my theorem, has been found by Mr. Pontrjagin several years ago, but has not been published so far.” (摘英译版[22] (1983)) (*我从亚历山德罗夫 (Alexandroff) 那里得知, 若干年前, 庞特里亚金 (Pontrjagin) 也发现了类似于我的图论定理, 但至今未被发表.*)

Kuratowski 之所以说 Pontrjagin 的结论是个图论定理, 是因为他自己的结果是从拓扑学的角度发现、陈述和证明的.

Kuratowski 的注释说明: 如果 Alexandroff 告诉 Kuratowski 的事情是真的, 那么 Pontryagin 的发现比 Kuratowski 早若干年. 在前苏联, 该平面图判定准则被称

为 Kuratowski-Pontryagin 定理 (见 M. Burstein [8] (1978), 见图 24) 或者 Pontryagin-Kuratowski 定理.

> THEOREM (Kuratowski-Pontrjagin). *Any nonplanar graph contains a homeomorph of K_5 or $K_{3,3}$.*

图 24 截自 M. Burstein 论文 [8] (1978))

事实上, 1962 年, 前苏联数学家 A. A. Zykov 将 C. Berge 的书 [2] 翻译成俄文, 在介绍 Kuratowski 定理时作了如下的注脚 (见图 25):

> This theorem was introduced (but not published) by L. S. Pontryagin in 1927 and in 1930, and independently of him [Pontryagin], proved again by Kuratowski [1930]. As a result we call it the Pontryagin–Kuratowski Theorem. —translator's comment. [Zykov translation of [Berge 1958]]

图 25 截自 Kennedy 等论文 [18] (1985)

(这个定理是 L. S. Pontryagin 于 1927 年发现的 (但没有发表), 1930 年, Kuratowski 独立发现并证明了它. 因此, 我们称它为 Pontryagin-Kuratowski 定理.)

A. A. Zykov 在他的图论著作《Theory of Finite Graphs》[38] (1969, 这是前苏联第一部图论著作) 中陈述 Pontryagin-Kuratowski 定理时作了如下注释 (见图 26).

> [This theorem] has been proved (but not published) in 1927 by L. S. Pontryagin, and then independently obtained by K. Kuratowski [1930]. [Zykov 1969, 437]

图 26 截自 Kennedy 等论文 [18] (1985)

(1927 年, L. S. Pontryagin 就已经证明了该定理 (但没有发表), 1930 年, Kuratowski 独立得到了它.)

据历史研究文章 [18] (1985) 考证, 在 C. Berge 的书 [2] 被翻译成俄文之前, 苏联数学家通常都称 Kuratowski 定理. 从那以后, 特别是 A. A. Zykov 的图论著作 [38] (1969) 出版以后, 情况大变.

1973 年, V. P. Kozyrev 把 F. Harary 的图论著作《Graph Theory》[14] (1969) 译成俄文. 在俄文版的扉页中仍保留原始扉页中插图 (见图 11), 但书中的 Kuratowski 定理被改成 Pontryagin-Kuratowski 定理, 并作了如下注释 (见图 27).

L. S. Pontryagin proved (however, did not publish) the planarity criterion in 1927. Kuratowski (independently of Pontryagin) obtained this result in 1930. This is the reason why we call it the Pontryagin–Kuratowski Theorem. —translator's comment. [Translation of [Harary 1969], p. 126]

图 27 截自 Kennedy 等论文[18] (1985)

(*1927 年, L. S. Pontryagin 证明了 (但没有发表) 该平面性准则, 1930 年, Kuratowski 独立得到这个结果. 这就是为什么叫它 Pontryagin-Kuratowski 定理的原因. – 译者注*)

1977 年, I. G. Nikitana 把 R. J. Wilson 的图论著作《Introduction to Graph Theory》[32] (1972) 译成俄文. 俄文版的编者 (G. P. Gavrilov) 在前言中提到"Pontryagin-Kuratowski 定理". 虽然通篇 (甚至名词索引) 仍保持 Wilson 对"Kuratowski 定理"陈述, 但有两处添加了编者注释 (见图 28).

Precisely, [the theorem should be] the Pontryagin–Kuratowski Theorem since L. S. Pontryagin proved [but did not publish] the theorem in 1927. —editor's comment. [Translation of [Wilson 1972], pp. 74, 77]

图 28 截自 Kennedy 等论文[18] (1985)

(*准确地说, 这个定理应该叫 Pontryagin-Kuratowski 定理, 因为 1927 年, L. S. Pontryagin 证明了 (但没有发表) 它. – 编者注*)

尽管这样, "Pontryagin-Kuratowski 定理"还是不被苏联以外的学者所接受或者疑惑. 例如, 苏联图论学者 M. Burstein 的论文[8] (1978) 被《J. Combin. Theory Ser. B》(communicated by A. A. Zykov) 发表后, S. Schuster 在《Mathematical Reviews》(MR 80h:05023) 对此文作如下评论 (见图 29).

The reviewer is puzzled by the unusual attachment of Pontrjagin's name to the theorem. It is fairly well known that O. Frink and P. A. Smith obtained a proof of the theorem almost simultaneously with C. Kuratowski [see Frink and Smith, Bull. Amer. Math. Soc. 36 (1930), 214]; yet their names are never attached to the theorem. No reference is given to justify the linking of Pontrjagin's name to the result.
Reviewed by Seymour Schuster

图 29 截自《Mathematical Reviews》(MR 80h:05023)

(*评审者感到疑惑, 该定理通常不冠以 Pontryagin 的名字. 众所周知的是 O. Frink 和 P. A. Smith 几乎与 Kuratowski 同时得到该定理 [见 Frink and Smith, Bull. Amer. Math. Soc. 36 (1930), 214], 但他们的名字从未出现在该定理中. 也没有文献证实 Pontryagin 的名字与该定理有关.*)

1981 年, C. Thomassen 在《Journal of Graph Theory》发表的论文[29] (1981) 中陈述 Kuratowski 定理后, 作了些解释 (见图 30).

Kuratowski's Theorem. A graph is planar if and only if it contains no subdivision of K_5 or $K_{3,3}$.

This result was discovered independently by Frink and Smith (see [3, p. 148]) and Pontrjagin (see [6]), and the restriction of Kuratowski's theorem to cubic graphs was found independently by Menger [29].

图 30 截自 C. Thomassen 的论文[29] (1981)

其中的参考文献 [6] 是指 M. Burstein 的论文[8] (1978). 这表明 C. Thomassen 坚持 "Kuratowski 定理" 的说法, 并提及几位独立发现者.

图 31: L. Pontryagin

Lev Semyonovich Pontryagin (庞特里亚金, 1908-1988) 是前苏联最传奇数学家, 曾任国际数学联盟 (International Mathematical Union) 副主席 (1971-1974). 他出生在莫斯科, 14 岁时因汽化煤油灶爆炸而双目失明, 在母亲帮助自学数学 (他母亲 Tatyana Andreevna 念当代著名数学家 (如, H. Hopf, J. H. C. Whitehead, H. Whitney) 的著作和文献给他听), 最终使他成为 20 世纪最伟大的数学家之一. 他的贡献在数学的各个领域, 其中包括拓扑, 代数和控制论.

据历史研究文章[18] (1985) 考证, 时为莫斯科国立大学二年级学生的 Pontryagin 是从 Alexandrov 主持的讨论班中 (1927-1928 的冬季) 得知 Kuratowski 的原始工作, 指出其中的错误 (原始工作中不含 $K_{3,3}$), 并给出正确结论和证明. 由于 Pontryagin 的证明没有发表, 他的工作没有得到广泛传播而不被众多人知晓. Pontryagin 在给文章[18] 的作者信中解释了他的工作为什么没有发表 (见图 32 和图 33):

My result was not submitted for publication by P. S. Aleksandrov because he wanted [me to] prove the same result for one-dimensional locally-connected [continua]. [Letter from L. S. Pontryagin, 1982]

图 32 截自 Kennedy 等论文[18] (1985)

(*P. S. Alexandrov 没有把我的结果投出去发表是因为他要求我把这个结果推广到 1 维连续统中去.*)

> Thank you very much for your letter of 17 January, 1983. I have no published paper on non-planar graphs. But I remember exactly that I [found] the mistake in Kuratowski's theorem and told P. S. Aleksandrov about it in Winter 1927–28. Maybe P. S. Aleksandrov told Kuratowski about it, but I don't know it. Maybe Kuratowski himself [found] the mistake.
> That's all the information I can tell you [Letter from L. S. Pontryagin, 1983]

图 33 截自 Kennedy 等论文[18] (1985)

（非常感谢你的 *1983* 年 *1* 月 *17* 日的来信. 我没有发表过关于非平面图的文章, 但我清楚地记得, 我发现了 *Kuratowski* 定理中的错误, 并于 *1927-28* 年的冬天告诉了 *P. S. Alexandrov.* 或许 *P. S. Alexandrov* 将此事告诉了 *Kuratowski,* 但我不知道, 或许 *Kuratowski* 自己发现了这个错误.）

对于 Pontryagin 的说法, 1973 年, Kuratowski 在回忆文章[23] (1976) 中也承认了这个事实 (见图 34)：

> I must confess that when I started to think that problem over, I had in mind just one graph. Namely, the graph called now commonly K_5 (according to [Harary 1969]).
> But I noticed soon that there is another one which is also irreducibly non-embeddable in the plane. Namely the graph $K_{3,3}$. Now (fortunately for me) [there does] not exist any other irreducible skew graph.

图 34 截自 Kuratowski 的回忆文章[23] (1976)

（我必须承认, 当我开始思考这个问题的时候, 脑海里就只有一个图, 即现在的图 K_5. 但不久我就注意到还有另一个不可约非平面嵌入图, 即图 $K_{3,3}$. 对我来说, 幸运的是再没有另外的不可约非平面图了.）

没有证据表明 Alexandrov 是否将禁子图 $K_{3,3}$ 告诉了 Kuratowski. 历史研究文章[18] (1985) 的作者通信联系过 Frink, 问他是否知道 Pontryagin 在平面图定理的证明中作用时, Frink 回信说 (见图 35)：

> I never heard that Pontryagin had a proof of the planar graph theorem prior to 1930, or at that time. Perhaps he did, but I know nothing about it. Karl Menger was supposed to have known the result before 1930, but I have no proof of this. [Letter from O. Frink, 1981]

图 35 截自 Kennedy 等论文[18] (1985)

（*1930* 年或之前, 我从来没有听说过 *Pontryagin* 有关于平面图定理的证明. 或许有但我不知道. *1930* 年前, *Karl Menger* 或许知道, 但我没有看到这个证明.）

其实在那个时候, K. Menger 的确在研究 3 正则图的平面性时, 发现了 $K_{3,3}$ 是不可嵌入平面的, 并把这个结果告诉了几位拓扑学家, 包括 Brouwer, Hurewicz, 和 Alexandrov. Menger 的文章没有发表, 只发表了很短的注记[25] (1930) (笔者无法找到此文献). 不过, Menger 在回忆文章中[26] (1981) 也提到了这件事.

从这里, 人们很容易提出一个疑问：Kuratowski 在修改他的结果之前是否知道 Menger 的结果? 或者 Alexandrov 是否将 Menger 的结果告诉了 Kuratowski ?

据历史研究文章[18] (1985) 介绍, Pontryagin 是从 Alexandrov 主持的讨论班中得知 Kuratowski 的工作, 而且 Pontryagin 的文章之所以没有发表与 Alexandrov 有关 (当然这只是 Pontryagin 的一面之词, 无法得到 Alexandrov 的证实).

另一方面, Kuratowski 是通过 Alexandrov 了解到 Pontryagin 也得到类似的结果, 但他们之间的所有通信被毁于第二次世界大战, 现在无法考证. 不过可以肯定, Alexandrov 是判定定理 (0.1) 归属的关键人物, 因为他最了解该定理的形成过程和 Pontryagin 对该定理的贡献, 但他对此事却没有留下任何证词, 那怕是只言片语. 历史研究文章[18] (1985) 作者在开始通信采访时, Alexandrov 已经去世了.

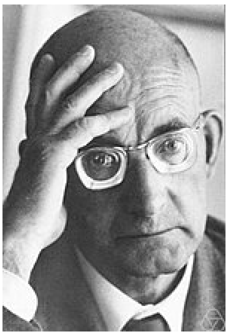


图 36: P. Alexandroff

Alexandroff (Pavel Sergeyevich Alexandrov, 亚历山德罗夫, 1896 - 1982) 是前苏联数学家, 1927 年获得莫斯科国立大学博士学位, 俄罗斯科学院院士, 曾任国际数学联盟副主席 (1959-1962), 主要学术贡献是在数论和拓扑学. 他是著名数学家 Nikolai Nikolaevich Luzin (卢金, 1883-1950) 的学生, 又是“Luzin 事件”的积极参与者. 所谓“Luzin 事件”是指 Luzin 的几位学生 (其中包括 P. Alexandrov 和 Lev Pontryagin) 指控 Luzin 为“现行反革命分子”. 1936 年, USSR 科学院委员会肯定了“Luzin 是戴着苏联公民面具的敌人”的所有指控, 2012 年才予以平反.

图 37 数学家卢金和纪念他的邮票

尼古拉 • 卢金 (Nikolai Nikolaevich Luzin (1883-1950) 是二十世纪二、三十年代最有影响的数学家之一, 是现代实变函数论点主要奠基人. 在他的努力下形成的卢金学派使苏联跻身于世界数学强国之林. 卢金学派涌现出很多世界级别的数学家, 如 P. S. 亚历山德罗夫, L. 庞特里亚金等. 1930 年, 导师叶戈罗夫 (Dmitri Egorov,

1869 – 1931, 前苏联数学家, 曾任莫斯科数学会主席) 因"宗教宗派"被关进监狱后, 卢金离开莫斯科大学和数学会, 成为"Luzin 事件"的当事人, 从此走向人生的低谷. 2000 年, 为怀念卢金在二十世纪二、三十年代对数学的贡献, 俄罗斯发行了纪念卢金的邮票 (见图 37).

现在看来, 1930 年左右, 有史料可查的几位学者几乎同时都发现了定理 (0.1), 但这些史料也说明 Kuratowski 是第一位公开宣布这个结果并全文发表 (包括其证明), 称它为 Kuratowski 定理应该是名正言顺的. Menger 的结论不完整, Frink & Smith 只宣布了结果全文没有发表, Pontryagin 既没有公开宣布也没有发表这个结果. 历史就是这样, 谁先宣布并发表正确的证明, 其结论就应该属于谁. Kuratowski 定理的简洁表述 (0.1) 是由 Harary & W. T. Tutte [17] (1965) 首先给出的.

笔者认为, 为尊重原创和公平起见, 图论文献和图论教科书在陈述定理 (0.1) 时, 应该让读者知道, 除了 Kuratowski 外, 还有其他几位学者几乎同时发现了这个结果. 有些作者已经注意到这一点, 如 C. Thomassen [29] (1981, 见图 30), G. Chartrand, L. Lesniak & P. Zhang [9] (2010) 和笔者 [36, 37] (2015, 2019) 等.

参考文献

[1] Berge, C., Two theorems in graph theory. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 43 (1957), 842 – 844.

[2] Berge, C., Théorie des Graphen et ses Applications. Paris: Dunod, 1958 (中译本: 贝尔热 C. 图的理论及其应用. 李修睦, 译. 上海: 上海科学技术出版社, 1963.)

[3] Berge, C., Färbung von Graphen, deren sämtliche bzw. deren ungerade Kreise starr sind, Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg Math.-Natur. Reihe 10 (1961), 114.

[4] Berge, C., Graphes et Hypergraphe. Paris: Dunod, 1970.

[5] Berman, G., Frequently cited publications in pure graph theory. J. Graph Theory, 1 (2) (1977), 175 – 180.

[6] Biggs, N. L., Lloyd, E. K., Wilson, R. J., Graph Theory 1736-1936. Oxford: Clarendon Press, 1976.

[7] Bondy, A. and Chvátal, V. (eds.), Creation and Recreation: A Tribute to the Memory of Claude Berge. Discrete Mathematics, 306 (19-20) (2006), 2293 – 2636.

[8] Burstein, M., Kuratowski-Pontrjagin theorem on planar graphs. J. Combin. Theory, Ser. B, 24 (1978), 228 – 232.

[9] Chartrand, G., Lesniak, L. and Zhang, P., Graphs & Digraphs (5th ed.), CRC Press, p. 237, 2010.

[10] Dirac, G. A. and Shuster, S., A theorem of Kuratowski. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. 57 = Indagationes Math. 16 (1954), 343 – 348.

[11] Engelking, R., Kazimierz Kuratowski (1896 – 1980) His Life and Work in Topology. In: Aull C.E., Lowen R. (eds) Handbook of the History of General Topology. History of Topology, vol 2. Springer, Dordrecht, 1998.

[12] Frink, 0., A proof of Petersen's theorem. Annuls Of Mathematics, 27 (1926), 491 – 493.
[13] Frink, O. and Smith, P. A., Irreducible non-planar graphs. Bulletin of the American Mathematical Society, 36 (1930), 214.
[14] Harary, F., Graph Theory. Addison-Wesley Publishing Company, 1969 (中译本: F. 哈拉里, 图论. 李慰萱, 译. 上海: 上海科学技术出版社, 1980; Russian translation by V. P. Kozyrev, edited by G. P. Gavrilov. Moscow: lzdatelstvo Mir. 1973).
[15] Harary, F., Independent discoveries in graph theory. In Topics in graph theory (F. Harary. ed.), Annals of the New York Academy of Sciences 328, 1979, 1-4.
[16] Harary, F., Homage to the memory of Kazimierz Kuratowski. Journal of Graph Theory, 1981, 5 (3): 217-219.
[17] Harary, F. and Tutte, W. T., A dual form of Kuratowski's theorem. Canadian Mathematical Bulletin, 8 (1965): 17- 20; also see Bull. Amer. Math. Soc. 71 (1965), 168.
[18] Kennedy, J. W., Quintas, L. V. and Syslo, M. M., The theorem on planar graphs. *Historia Mathematica*, **12** (2) (1985), 356-368.
[19] König, D., Sur unproblème de la thòrie générale des ensembles et la thèorie des graphes. Revue de Métaphysique et de Morale, 30 (1923), 443 – 449.
[20] König, D., Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Leipzig: Akademische Verlagsgesell schaft, 1936 (英译本: Könis. Theory of Finite and Infinite Graphs. Translated by McCoart R with commentary by Tutte W T. Boston: Birhhäuser, 1990).
[21] Kuratowski, C., Sur le problème des courbes gauches en topologie. *Fundamenta Mathematicae*, **15** (1930), 271-283.
[22] Kuratowski, K. (translated by Jan Jaworowski), On the problem of skew curves in topology [1]. In Lecture Notes in Mathematics, 1018, Graph Theory (Proceedings of a Conference held in Laglow, Poland, February 10-13, 1981. M. Borowiecki, J. W. Kennedy, M. M. Syslo, eds), Springer, Berlin Heidelberg New York Tokyo 1983, pp. 1 – 13.
[23] Kuratowski, K., My personal recollections connected with the research on some topological problems. In Colloquia Internazionale sulle Théorie Combinatorie (Rome 1973). Tomo I, pp. 43-47. Atti dei Convengni Lincei, No. 17 (1976). Rome: Accademia Nazionale dei Lincei.
[24] Kuratowski, K., A half century of polish mathematics: Remembrances and reflections. (Translated by Andrzej Kirkor, Preface by Stanislaw Ulam), vol. 1, Oxford, Pergamon Press (1980).
[25] Menger, K., Über plättbare Dreiergraphen und Potenzen nichtplättbarer Graphen. Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Wien, 67 (1930), 30 – 31.
[26] Menger, K., On the origin of the n-arc theorem. Journal of Graph Theory, 1981, 5 (4): 341 – 350.
[27] Ore, O., Theory of Graphs. Providence, R. I.: Amer. Math. Soc. 1962.
[28] Sainte-Laguë, A., Les réseaux. Toulouse, 1924, p.4.
[29] Thomassen, C., Kuratowski's theorem. J. Graph Theory, 1981, 5: 225 – 241.
[30] Ulam, S., Kazimierz Kuratowski (1896-1980). The Polish Review, 26 (1) (1981), 62 – 66.
[31] Ulam, S. M., Kazimierz Kuratowski. In: Reynolds, M. C., Rota, G. C. (eds) Science, Computers, and People. Birkhäuser Boston, 1986, 253 – 258.
[32] Wilson, R. J., Introduction to graph theory. London: Academic Press, 1972.Russian translation by I. G. Nikitana, edited by G. P. Gavrilov. Moscow: Izdatelstvo Mir, 1977.
[33] Wagner, K., Über eine Eigenschaft der ebenen Komplexe. Math. Ann., 114 (1937), 570 – 590.

[34] Wojnarowski, J. and Zawiślak, S., Kazimierz Kuratowski—Biography and Genesis of the Theorem on Planar Graphs. In: Zawiślak S., Rysiński J. (eds) Graph-Based Modelling in Engineering. Mechanisms and Machine Science, vol 42, 233-246. Springer, Cham, 2017.

[35] 徐俊明. 图论及其应用（第 *3* 版）. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2010.

[36] 徐俊明, A First Course in Graph Theory (图论基础教程)(运筹与管理科学丛书, 24). 北京: 科学出版社, 2015.

[37] 徐俊明, 图论及其应用 *(*第 *4* 版*)*. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2019.

[38] Zykov, A. A., Theory of Finite Graphs (in Russian). Novosibirsk: Izdatelstvo Nauka, Sibirskoe Otdelkenie, 1969.