H. Whitney 与 Whitney 不等式

徐俊明

(中国科学技术大学数学科学学院)

2018 年 *04* 月 *20* 日于合肥

摘要: *H. Whitney* 是美国数学家, 是拓扑图论和拟阵的开创者之一. 著名的 *Whitney* 不等式"$\kappa(G) \leqslant \lambda(G) \leqslant \delta(G)$"表达了连通图 G 的点连通度 $\kappa(G)$、边连通度 $\lambda(G)$ 和最小度 $\delta(G)$ 之间的基本关系. 然而, 这个不等式并不是由 *Whitney* 首先表述的. 本文介绍有关这个不等式背后的人和故事.

Hassler Whitney (1907-1989) 是美国数学家, 哈佛大学博士 (1932), 哈佛大学和普林斯顿大学教授, 1989 年中风后去世. 他是奇异理论创立者之一, 在拟阵、嵌入、特征类和几何积分理论方面做出许多奠基工作. 他曾任美国数学会副主席 (1948-1950), 获得美国国家科学奖 (1976), Wolf 奖 (1982) 和 Steele 奖 (1985). 他早期研究工作 (1930-1933, 23-26 岁, 读博期间) 主要是图论 (他的博士论文"The Coloring of Graphs (1932)"就是研究图的染色问题, 导师为 George David Birkhoff), 主要贡献是在平面图、四色问题和图的连通性, 是拓扑图论的开创者之一. 论文《2-Isomorphic Graphs》[21] (1933) 是他在图论研究方面顶峰之作, 被称为所有嵌入定理的祖父, 也正是这篇文章为拟阵的创立奠定了基础. H. Whitney 生平和数学贡献的进一步介绍见 K. Kendig 的专题纪念文章《Hassler Whitney: 1907 – 1989》[12] (2013).

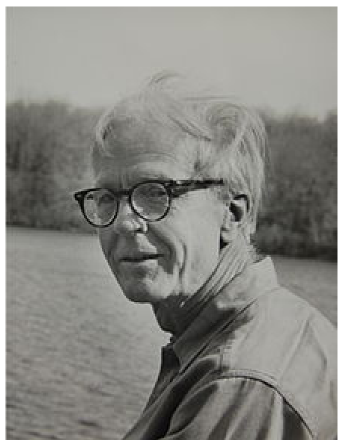


图 1: H. Whitney

* * * * * * * * * * * * *

1932 年, 年仅 25 岁的 H. Whitney 在论文《Congruent graphs and the connectivity of graphs》[20] (1932) 中首次提出图的连通度 (connectivity) 概念 (见图 2).

> *Definitions.* Let G be a graph containing at least $n+1$ vertices, such that it is impossible to drop out $n-1$ or fewer vertices and the arcs on them in such a manner that the resulting graph is not connected. We shall say then that G is n-tuply connected. (We consider only numbers $n \geqq 1$). If G is n-tuply connected but not $(n+1)$-tuply connected, we say its connectivity is n.

图 2 截自 H. Whitney 的论文[20] (1932)

在现代图论中, 连通度已成为最基本的概念, 在图论中发挥越来越大的作用. W. T. Tutte 以此为主题写了一本专著《Connectivity in Graphs》[17] (1966). 后来就没有看见有关连通度专题著作, 但标准的现代图论教科书都将“连通度”作为重要的专题内容加以介绍和深入阐述.

用 $\kappa(G)$、$\lambda(G)$ 和 $\delta(G)$ 分别表示图 G 的点连通度、边连通度和最小顶点度. 几乎所有现代图论教科书都提到参数 $\kappa(G)$, $\lambda(G)$ 与 $\delta(G)$ 之间的下列关系式 (见笔者著作[23] (2010) 或者[24] (2019) 中定理 4.3.1):

$$\kappa(G) \leqslant \lambda(G) \leqslant \delta(G). \tag{0.1}$$

图论文献中通常称不等式 (0.1) 为 Whitney 不等式, 并且不约而同地将此不等式出处指向 Whitney 提出连通度概念的最原始文献[20] (1932). 不等式 (0.1) 最早出现在 G. Chartrand & F. Harary 的论文[6] (1968) 中 (见图 3).

> Let $\mu(G)$ denote the minimum degree of the points of G. Amongst other things, WHITNEY [5] has shown that for any nontrivial connected graph G
>
> (1) $$0 < \varkappa(G) \leq \lambda(G) \leq \mu(G) .$$
>
> The object of this note is to provide constructions which show that all integers satisfying the inequalities (1) are realizable.

图 3 截自 G. Chartrand & F. Harary 的论文[6] (1968)

其中文献 [5] 是指 Whitney 的文献[20] (1932). Chartrand & Harary 在论文[6] (1968) 中主要结果是证明了: 对任意给定的 3 个正整数 κ, λ 和 μ ($\kappa \leqslant \lambda \leqslant \mu$), 存在无向图 G 使 $\kappa(G)=\kappa, \lambda(G)=\lambda$ 且 $\mu(G)=\mu$.

不等式 (0.1) 对无向图和有向图都是成立的. 有向图的结论属于 D. Geller & F. Harary [9] (1971), 是笔者第一次将它写进图论教科书中 (见 [22, 23, 24], 见图 4).

> 令 $\delta(D)=\min\{\delta^+(D),\delta^-(D)\}$. 参数 $\kappa(D)$, $\lambda(D)$ 与 $\delta(D)$ 之间有下列关系, 其无向图形式属于 H. Whitney [378] (1932), D. Geller & F. Harary [144] (1971) 推广它到有向图. 现在图论教科书和文献都称它为 **Whitney 不等式**[1].
>
> **定理 4.3.1** (Whitney 不等式) $\kappa(D)\leqslant\lambda(D)\leqslant\delta(D)$.

图 4 截自笔者的著作 [24] (2019)

其中注释 1 是说: 虽然 Whitney 的文章 [20] (1932) 没有直接提到这个不等式, 也没有边连通度概念, 但文中定理 7 蕴含着这个不等式. D. Geller & F. Harary [9] (1971) 也将不等式 $\kappa(G)\leqslant\lambda(G)$ 归功于 Whitney.

本文探讨不等式 (0.1) 的无向图结论究竟属于谁, Whitney 的文章 [20] (1932) 中定理 7 是否蕴含着这个不等式.

事实上, Whitney 在文献 [20] (1932) 中提出的连通度 (connectivity) 概念是对点而言, 并没有提出边连通度概念, 更没有类似于 κ, λ 和 δ 记号, 谈不上不等式 (0.1). 那么不等式 (0.1) 是怎么形成的呢? 为什么称它为 Whitney 不等式?

首先注意到, 对于点连通度和边连通度, 不同的作者所用的记号不同. 本文采用的记号 $\kappa(G)$ 和 $\lambda(G)$ 是由 F. Harary [10] (1962) 首先使用的 (参见图 5).

> A graph G is called *n-connected* if G has at least $n+1$ points and it is impossible to disconnect G by removing $n-1$ or fewer points. The *connectivity* of G, denoted $\kappa(G)$, is defined to be n if G is n-connected but not $(n+1)$-connected. The *com-*
> ·
>
> The *line-connectivity* $\lambda(G)$ is the minimum number of lines whose removal results in a disconnected graph. It is known[2] that for any graph, $\kappa\leq\lambda$.

图 5 截自 F. Harary 的文章 [10] (1962)

其中的注释 2 是指 Whitney 的文章 [20] (1932).

无向图中不等式 (0.1) 是图论中重要结论之一, 现代大多数图论作者都将不等式 (0.1) 写进图论教科书中. 至于这个不等式的出处, 有些作者指明, 有些作者则不指明.

有些作者不但完整地陈述不等式 (0.1), 而且将它归属于 H. Whitney. 如 F. Harary [11] (1969, 该书中定理 5.1, 见图 6) 和 D. B. West [18] (2001, 该书中定理 4.1.9, 使用记号 κ' 代表边连通度 λ, 见图 7), 其中图 6 中的 [W11] 和图 7 中的 [1932a] 都是指 Whitney 的文章 [20] (1932).

that of a connected graph with a bridge is 1. Connectivity, line-connectivity, and minimum degree are related by an inequality due to Whitney [W11].

Theorem 5.1 For any graph G,

$$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G).$$

图 6 截自 F. Harary 的著作[11] (1969)

4.1.9. Theorem. (Whitney [1932a]) If G is a simple graph, then

$$\kappa(G) \leq \kappa'(G) \leq \delta(G).$$

图 7 截自 D. B. West 的著作[18] (2001)

为了称呼上的方便, 有作者干脆称它 Whitney 不等式, 如 笔者[24] (2019, 该书中定理 4.3.1, 见图 4). 这些把这个不等式 (0.1) 归属于 H. Whitney 的作者都毫无例外地将其出处指向 Whitney 的论文[20] (1932), 并给出严格证明.

有些作者虽然完整地陈述了不等式 (0.1), 但不提它的归属. 如, J. A. Bondy & U. S. R. Murty[4] (1976, 该书中定理 3.1, 使用记号 κ' 代表边连通度 λ, 见图 8). 他们虽然没有指明不等式 (0.1) 的出处, 但给出其严格证明.

Theorem 3.1 $\kappa \leq \kappa' \leq \delta.$

图 8 截自 J. A. Bondy & U. S. R. Murty 的著作[4] (1976)

有些作者只提到不等式 (0.1), 但他们既没有指明它的出处, 也没有给出它的证明, 只作为习题留给读者. 如, J. A. Bondy & U. S. R. Murty [5] (2008) (见该书的第 217 页和习题 9.3.2) 和 R. Diestel[8] (2016) (见该书的第 11 页和第 1 章的习题 10).

在早期出版的图论著作中, 基本上都不提不等式 (0.1). 匈牙利数学家 D. König (1884-1944, 现代图论的奠基人之一) 的图论第一本教科书[13] (1936) 和法国数学家 C. Berge (1926-2002, 现代图论奠基人之一) 的图论第二本教科书[1] (1958) 既没有提到不等式 (0.1), 也没有提到不等式 (0.1) 中的任何不等式. 不过, Berge 在他的书中不仅给出点连通度的定义, 而且还给出边连通度的定义, 并称点连通度为连通数 (connection number), 记为 $\omega(G)$, 称边连通度为结合数 (cohesion number), 记为 $\chi(G)$ (根据李修睦的中译本[1] (1963)).

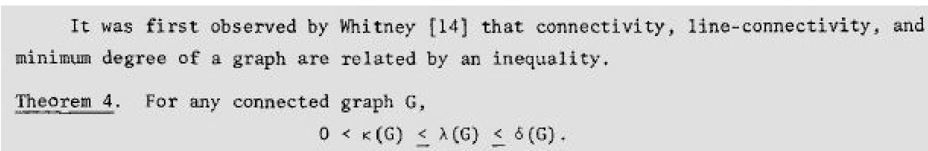
W. T. Tutte 在他的专著《Connectivity in Graphs》[17] (1966) 的第 10.1 节定义了点连通度概念, 用的记号是 $\lambda(G)$, 但书中没有定义边连通度概念. C. Berge 在他的另一本图论著作《Graphes et Hypergraphe》[2] (1970) 的第一部分英文版 (第二次

修改版)[3] (1985) 中第 9 章明确给出点连通度, 记为 $\kappa(G)$, 和 n 连通图的定义; 也给出 n 边连通图和边连通度的定义, 但没有给出边连通度的记号, 更没有提到关于点和边连通度之间关系. 不过, 他最后给出一道习题: Show that a k-connected graph is k-edge-connected. 用本文的记号, 这个习题意味着: $\kappa(G) \leqslant \lambda(G)$.

按照 $\lambda(G)$ 和 $\delta(G)$ 的定义, 不等式 (0.1) 中的“$\lambda(G) \leqslant \delta(G)$”应该是明显的. 问题是“$\kappa(G) \leqslant \lambda(G)$”究竟是谁首先明确表达的.

O. Ore 在其图论著作《Theory of Graphs》[15] (1962) 中虽然没有提到边连通度和点连通度概念, 但他定义了两个记号 τ 和 σ, 按现在的图论概念, 它们分别表示局部边连通度和局部点连通度. 在该书的第 202 页, O. Ore 给出不等式: $\tau \geqslant \sigma$. 然而, O. Ore 既没有给出它的证明, 也没有指明它的出处.

不等式“$\kappa(G) \leqslant \lambda(G)$”的明确表达式第一次出现在 F. Harary 的论文[10] (1962) 中 (参见图 5). 虽然 F. Harary 没有给出其证明, 但他指出这个不等式的出处为 H. Whitney[20] (1932), 而且给出“$\kappa(G) \leqslant \delta(G)$”的证明 (尽管这个不等式成立是明显的). 后来, D. Geller & F. Harary[9] (1971) 将不等式 (0.1) 推广到有向图时也指出不等式“$\kappa(G) \leqslant \lambda(G)$”是由 H. Whitney 观察到的, 并指明出处[20] (1932) (见图 9).

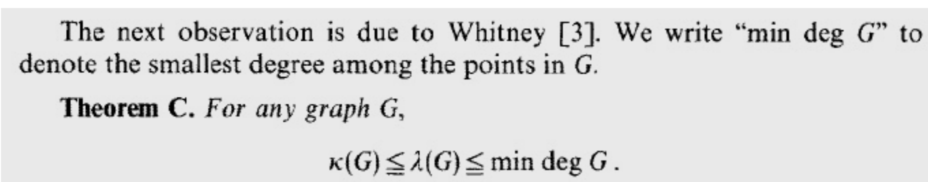

It was first observed by Whitney [14] that connectivity, line-connectivity, and minimum degree of a graph are related by an inequality.

Theorem 4. For any connected graph G,

$$0 < \kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G).$$

图 9 截自 D. Geller & F. Harary 的文章[9] (1971)

这些事实说明 (尽管最小度记号各有不同), 不等式 (0.1) 第一次完整地出现在 G. Chartrand & F. Harary 的论文[6] (1968) 中 (见图 3). 随后出现在 G. Chartrand & M. J. Stewart 的文章[7] (1969) 中 (该文的 Theorem C, 文中 [3] 是指文献[20] (1932), 见图 10) 和 F. Harary 的《Graph Theory》[11] (1969) 中 (见该书定理 5.1, 见图 6).


The next observation is due to Whitney [3]. We write “min deg G” to denote the smallest degree among the points in G.

Theorem C. *For any graph G,*

$$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \min \deg G.$$

图 10 截自 G. Chartrand 和 M. J. Stewart 的论文[7] (1969)

对任何连通图 G 和 G 中任何点 x, 删去关联于 x 的所有边会导致 G 不连通.

这个事实说明: “$\lambda(G) \leqslant \delta(G)$” 是很显然的事情.

现在来考察一下把不等式 “$\kappa(G) \leqslant \lambda(G)$” 归属为 H. Whitney [20] (1932) 有没有道理. H. Whitney 在文献 [20] (1932) 中首次提出图的连通度 (connectivity) 和 n 连通 (n-tuply connected) 图的概念 (见图 2):

H. Whitney 在论文 [20] (1932) 中定义了（点）连通度概念, 但没有提出边连通度概念, 更没有 $\kappa(G)$、$\lambda(G)$ 和 $\delta(G)$ 等记号. Whitney 在该文中陈述了一个重要结论 (即该文的定理 5, 见图 11):

> THEOREM 5. *If the graph G containing at least two vertices can be disconnected by dropping out n — 1 or fewer arcs, it is not n-tuply connected.*

图 11 截自 H. Whitney 的论文 [20] (1932)

这个定理是说: 如果从图中删去最多 $(n-1)$ 条边就导致它不连通, 那么这个图不是 n 连通的. 换句话说, 要使 n 连通图不连通至少要删去 n 条边. 用本文的记号, 这个结论意味着 “$\kappa(G) \leqslant \lambda(G)$”.

H. Whitney 在论文 [20] (1932) 中获得现代图论中另一个非常重要的结论 (即该文中的定理 7, 见图 12):

> THEOREM 7. *A necessary and sufficient condition that a graph containing no 2-circuit be n-tuply connected is that any two of its vertices be joined by n distinct chains.**

图 12 截自 H. Whitney 的论文 [20] (1932)

用现代图论语言这个结论可以陈述为: 简单图是 n 连通的充分必要条件是任何两点之间存在 n 条内点不交的路. 这说明要使 n 连通图不连通, 每条路至少要除掉一条边. 这个结论也意味着 “$\kappa(G) \leqslant \lambda(G)$”. Whitney 在该定理后面作了如下注脚 (见图 13):

> * i. e. chains which have only the two given vertices in common. Similar theorems have been proved by K. Menger, “Zur allgemeinen Kurventheorie,” *Fundamenta Mathematicae*, Vol. 10 (1926), pp. 96-115, Satz β; N. E. Rutt, “Concerning the Cut-Points of a Continuous Curve When the Arc Curve *ab* Contains Exactly *n* Independent Arcs,” *American Journal of Mathematics*, Vol. 51 (1929), pp. 217-246.

图 13 截自 H. Whitney 的论文 [20] (1932)

Whitney 在这个注脚中说明: K. Menger [14] (1927) 和 N. E. Rutt [16] (1929) 也

得到同样的结果. Whitney 提到的 Menger 结果见图 14 所示; 提到的 Rutt 结果见图 15 所示.

Satz *β. Ist K ein kompakter regulär eindimensionaler Raum, welcher zwischen den beiden endlichen Mengen P und Q n-punktig zusammenhängend ist, dann enthält K n paarweise fremde Bögen, von denen jeder einen Punkt von P und einen Punkt von Q verbindet.*

图 14　截自 K. Menger 的论文 [14] (1927)

1. GENERAL THEOREM. *If there exists an integer n such that for two given points a and b of a continuous curve E there are arcs ax_ib $(i=1,2,\cdots,n)$ of E no two of which have any points except a and b in common, and such that by no means is it possible to construct $n+1$ arcs like these from a to b, then there exists a set of n distinct points $p_1, p_2, \cdots, p_n$ of E such that $E-(p_1+p_2+\cdots+p_n)$ is the sum of two mutually separated sets E_a and E_b, E_a containing a and E_b containing b.*

图 15　截自 N. E. Rutt 的论文 [16] (1929)

Whitney 注脚中提到的 K. Menger 的论文 [14] 实际上发表于 1927 年, 并非 1926 年. 如果说 Whitney 的论文 [20] (1932) 中的定理 7 蕴含不等式 (0.1), 那么 K. Menger [14] (1927) 和 N. E. Rutt [16] (1929) 中结论也蕴含不等式 (0.1), 而且比 Whitney [20] (1932) 更早.

综上所述, 在图论历史上, 不等式 (0.1) 作为一个整体并不是一开始就出现的, 是图论工作者在长期的研究过程中不断简化、补充、完善和符号化而形成的结果, 是集体智慧的结晶. H. Whitney 首先提出连通度概念并获得 n 连通图判定定理, 该定理蕴含不等式 (0.1) 所表达的关系. 因此, 该不等式所表达的原始思想属于 H. Whitney. 人们之所以称这个不等式为 Whitney 不等式是为了纪念他对图论的研究与发展做出的卓越贡献.

参考文献

[1] Berge, C., Théorie des Graphen et ses Applications. Paris: Dunod, 1958 (中译本: 贝尔热 C. 图的理论及其应用. 李修睦, 译. 上海: 上海科学技术出版社, 1963.)

[2] Berge, C., Graphes et Hypergraphe. Paris: Dunod, 1970.

[3] Berge, C., Graphs. New York: Elsevier Science Publishing Company, 1985.

[4] Bondy, J. A. and Murty, U. S. R., Graph Theory with Applications. London and Basingstoke: Macmillan Press, 1976 (中译本: 邦迪 J A, 默蒂 U S R. 图论及其应用. 吴望名等, 译. 北京: 科学出版社, 1984.)

[5] Bondy, J. A. and Murty, U. S. R., Graph theory. Volume 244 of Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York: 2008.
[6] Chartrand, G. and Harary, F., Graphs with prescribed connectivities. Theory of Graphs (P. Erdős and G. Katona, Eds.) Akadémiai Kiadó, Budapest, 1968, 61 – 63.
[7] Chartrand, G. and Stewart, M. J., The connectivity of line-graphs Math. Ann., 182 (1969), 170 – 174.
[8] Diestel, R., Graph Theory (5th edition). New York: Springer-Verlag, 2016.
[9] Geller, D. and Harary, F., Connectivity in digraphs. In *Recent Trends in Graph Theory* (edited by M. Capobuanco, J. B. Frechen and M. Krolik), Lecture Notes in Mathematics, **186**, Springer-Verlag, 1971, 105 – 115.
[10] Harary, F., The maximum connectivity of a graph, Proc. N. A. S., 48 (1962), 1142 – 1146.
[11] Harary, F., Graph Theory. Addison-Wesley Publishing Company, 1969.
[12] Kendig, K. Hassler Whitney: 1907 – 1989. Celebratio Mathematica, 2013 (1), 1 – 19.
[13] König, D., Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Leipzig: Akademische Verlagsgesell schaft, 1936 (英译本: Könis. Theory of Finite and Infinite Graphs. Translated by McCoart R with commentary by Tutte W T. Boston: Birhhäuser, 1990).
[14] Menger, K., Zur allgemeinen Kurventheorie. Fund. Math., 1927, 10: 96 – 115.
[15] Ore, O., Theory of Graphs. Providence, R. I.: Amer. Math. Soc. 1962.
[16] Rutt, N. E., Concerning the cut-points of a continuous curve when the arc curve ab contains exactly n independent arcs. American Journal of Mathematics, 51 (1929), 217- 246.
[17] Tutte, W. T., Connectivity in Graphs. (Mathematical expositions, no.15) London: Oxford University Press, 1966; Toronto: Toronto Univ. Press, 1967
[18] West, D. B., Introduction to Graph Theory. New York: Prentice-Hall, 2001.
[19] Whitney, H., Non-separable and planar graphs. Trans Amer. Math. Soc. 34 (1932), 339 – 362.
[20] Whitney, H., Congruent graphs and the connectivity of graphs. Amer. J. Math. 54 (1932), 150 – 168.
[21] Whitney, H., 2-Isomorphic Graphs. American Journal of Mathematics, 55 (1933), 245 – 254.
[22] 徐俊明, 图论及其应用. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 1998.
[23] 徐俊明. 图论及其应用（第 3 版）. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2010.
[24] 徐俊明, 图论及其应用 (第 4 版). 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2019.