组合网络理论研究的回顾与思考

(讨论稿)

徐俊明

中国科技大学数学系，合肥，230026

说　明

这是我在《组合网络理论》讨论班上的报告. 主要内容是对开展组合网络理论研究的回顾和特点, 与图论研究的关系, 我们课题组在同行研究中的地位, 今后研究的思考与建议. 这是个讨论稿, 现把它贴出来, 抛砖引玉. 希望读者提出建议, 提供材料, 以便修改和完善.

§1　组合网络理论研究的回顾与特点

§1.1　组合网络理论研究的回顾

组合网络理论研究始于上世纪六十年代, Elspas [27] 首先提出来的一个网络设计问题. 用图论的语言, 这个问题可以叙述为: *求最大度为 d, 直径最多为 k 的图的最大阶数 $n(d,k)$.* 这就是图论中著名的 (d,k) 图问题. 由于 (d,k) 图问题在互连网络设计中的潜在应用, 它已吸引了许多图论学者的研究兴趣. 著名数学家 P. Erdös [28] 在这个领域做出开创性研究工作. Brualdi (组合矩阵论创始人) 和李乔 [19] 也曾参与这方面的研究, 他们得到的 $n(3,4) \geq 38$ 至今还没有打破. 获得 $n(d,k)$ 紧的上界是困难的, 它需要新的理论, 方法和证明技巧. 下界的获得是通过构图, 这就需要新的构图方法. 热衷于这方面研究的作者还建立了专业网站 [82], 及时报道 $n(d,k)$ 的下界最新研究成果. 这个问题至今仍未解决, 仍在挑战图论, 以至对它的研究现已成为图论的重要专题, 出现了许多构造图的新方法 [11].

七十年代, Wong 和 Coppersmith [60] 提出另一个网络设计问题. 用图论的语言, 这个问题可以叙述为: *对于给定的 n 和 k, 怎样选取 S 使得 $|S|=k$ 且循环图 $G(n;S)$ 有最大的连通度和最小的直径?* Erdös 也介入此研究领域(见 [29]), 黄光明, 堵丁柱, 许德标等著名图论专家都做出了出色贡献. 黄光明 [45] 和 Bermond 等人 [10] 曾分别写出综述文章. 这个问题的解决, 一般说来是相当困难的. 导致人们对最简单的情形, 双循环网络的研究. 近几年的主要研究学者是中国人和西班牙人(巴塞罗那大学的 Fiol 教授和他的学生们), 国内学者在这方面研究走在前列.

另一个研究问题是根据网络应用背景提出的 G 中关于参数 $\zeta_\ell(G)$ 和 $\kappa_\ell(G)$ 之间的关系问题: 寻找某些特殊的 ℓ 使得 $\zeta_\ell(G)=\kappa_\ell(G)$. 1978 年, 著名的组合数学大家 Lovász 和 Plummer 等 [54] 首先提出并研究了这个问题, 发现了某些特殊的 ℓ. 这是一个很难的问题, 著名图论专家 Chung, Bondy, Boesch, Harary 和 Mader 都参与了研究(参见 [15, 18, 21, 56]). 也有图论大家被落入圈套, 例如, Boesch 和 Harary 等人 [15], 得出错误结论: $\zeta_d(G)=\kappa_d(G)$, 其中 d 是 G 的直径.

八十年代, 随着大规模集成电路 (VLSI) 和微电子技术的飞速发展, 大规模超级计算机系统的出现, 人们对网络系统的拓扑结构的要求越来越高, 图论思想和方法在网络设计和分析中的应用越来越被计算机理论工作者认可和采用, 推动了网络拓扑结构和图论的深入研究, 新的网络结构, 新的概念和问题层出不穷. 例如, 在对网络可靠性和有效性的研究中, Bauer 和 Boesch 等人 [5, 13, 14], Harary [36], Esfahanian 和Hakimi [30] 发现图的连通度不能准确地度量网络的可靠性和容错性, 分别提出图的超连通性, 条件连通度和限制连通度概念, 推动了图论连通度的研究. Akers 等人 [1] 利用代数方法对高对称网络的研究, 推动了对可迁图, 特别是对 Cayley 图的研究 [39]. 为了更准确地度量网络路由选择给网络节点带来的负载, Chung 等 [22] 提出度量路由优劣的参数–转发指数概念, 法国国家科研中心(CNRS)的信息研究实验室(LRI) 中许多著名图论人物也都介入此研究领域. 1981 年, Boesch 和 Harary 等人 [15] 提出网络的脆弱性(vulnerability) 研究, 即网络的点或者边发生故障对直径的影响. 法国国家科研中心(CNRS)的信息研究实验室(LRI) 中以 Bermond 为首的著名图论人士也介入此项研究, 推动了对直径的研究 [9]. 针对容错网络, Chung 和 Garey [23] 提出边添加问题和边减少问题. 著名数学家 N. Alon [2] 也介入此研究领域. 1987 年, Krishnamoorthy 和 Krishnamirthy [48] 正式提出容错直径概念.

这段时间, "网络"一词是最为时尚的名词. 网络拓扑结构性质的研究成为最时髦的研究. 甚至, "网络 (networks)"一词也被众多的图论工作者替代了"图 (graph)", 包括许多图论大家. 如曾任 Journal of Graph Theory 主编金方蓉 [20, 22]. "图的直径 (diameter of a graph)"也写成了"网络的最小传输延迟(minimum transmission delay of a network)", 如 Erdös [29] 和 Boesch [16] 等. 明明是"图的连通度研究"也写成了"网络可靠性研究"或者"网络容错性研究".

九十年代, 著名的图论专家 Bollobás 在"Quo Vadis, Graph Theory?"(图论向何处?)大会的著名演讲"图论的未来" [17] 结尾时预测: "今后二十或五十年, 图论是否会存在? 它将变化吗? 如果是, 将以何种方式变化? 我相信图论的未来是灿烂光明的, 因为有太多美好的事情为它纷至沓来. 图论有一个极大的问题源供给漂亮、自然的问题, 它还是与计算机科学非常密切的一个数学分支. 我们几乎没有开始发展解决我们的问题的工具, 也几乎未利用我们与计算机科学的这种亲近关系. 当二者均发生时, 我们将真正腾飞."(此译摘自《数学译林》第 15 卷 1996 年第二期). Bollobás 的演讲推动了图论与计算机网络理论研究, 也推动了组合网络和图论的蓬勃发展.

美、英、法、德、日等国和大计算机公司都已充分认识到组合网络理论的重要性, 成立了由数学家和计算机科学家组成的国家级研究中心或研究组, 如美国的"离散数学与理论计算机科学(DIMACS)" 中心(由 Princeton 大学, Rutgers 大学, AT&T 联合创办的, 设在 Rutgers 大学), 法国国家科研中心(CNRS)的信息研究实验室(LRI)（设在巴黎南大学）等. 世界许多著名的大网络和计算机公司, 信息技术研究所和大学计算机科学系都有一批著名的图论专家, 例如, 著名的图论专家 L.Lovász 加盟微软公司, 黄光明在 AT&T Bell 实验室, F.T.Boech 在 Stevens 技术研究所, Bermond 曾在 LRI 等. 还有许多图论专家供职大学计算机系. 有关图论与计算机和通信网络的国际学术会议频繁召开, 出版了许多专著和文集. 计算机科学、网络和信息论权威刊物 IEEE Trans. Computers, SIAM J.Computers, Networks, Information Processing Letters 等每期都刊登大量图论论文, 提出许多图论问题. 国际著名杂志 Discrete Applied Math. 和 Networks 从 92 年起出版了多期专刊, DIMACS系列专著在从 91 年起也出版了多本专题论文集《DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science》, 2000 年, 由堵丁柱教授担任主编开始出版系列丛书《Networks Theory and Applications》(参见 [8, 24, 43, 49, 59, 76]).

著名的图论和理论计算机科学家黄光明(F. K. Hwang), 金芳荣(F. R. K. Chung)、堵丁柱和许德标(D. F. Hsu)等在组合网络方面做了许多先驱工作, 提出许多至今还没有解决的问题. 他们被多次应邀回国讲学, 在国内举办的图论会议上作报告. 在他们的倡导和影响下, 国内学者开展组合网

络理论研究. 现已形成了一支不可忽视的研究力量, 在国际上赢得了一席之地. 福州大学(范更华, 成立了离散数学与理论计算机科学研究中心)、上海交通大学(李乔)、厦门大学(张福基)、新疆大学(孟吉翔)、华南师范大学(柳柏廉)和北京大学(方新贵)和漳州师范学院(陈协彬)等单位都有很强的队伍开展组合网络理论研究, 做出了许多令国际同行关注的成果, 并培养了一大批年轻科研人员和研究生. 有许多博士生以组合网络理论为研究内容的博士论文. 我国台湾省也有许多大学和研究所有众多人员从事这方面的研究. 从目前发表的文献中可以看出, 国内大多数组合网络研究仅局限在双环网络的设计和限制边连通度方面, 但对组合网络理论涉及到的其他图论参数的研究得却很少. 在宽直径, 容错直径和圈嵌入研究方面, 台湾学者走在大陆学者的前面.

§1.2 组合网络理论研究的特点

组合网络研究的对象是互连网络的拓扑结构, 即超大规模计算机系统中的元件连接模式. 因此, 网络拓扑是具体的, 结构是给定的. 网络拓扑与图有一个很自然的对应, 因此, 对应的图也是具体的. 我们就是利用图论这个数学工具研究这些具体的图的结构性质.

组合网络理论的研究特点就是研究具体网络拓扑结构中的理论问题, 具体是研究哪些网络, 哪些理论问题, 与计算机网络的发展有密切关系. 我们从 Feng 的一篇关于互连网络的综述文献 [31] 中发现, 早期网络拓扑只涉及一些简单的拓扑结构 (如: 线阵列(路), 单环网(圈), 星图, 树, 两维网状网, Systolic array, 完全图, 双环网, 低维超立方体和立方连通圈), 没有什么深刻的理论而言.

图的连通度和直径有很强的网络背景, 它们是网络可靠性和有效性的度量参数. 在组合网络理论研究的初级阶段主要是研究这两个参数和与之有关的 (d,k) 图问题, 这些参数和问题与具体网络结构没有什么关系, 是纯图论问题.

1964 年, 伊利诺斯州立大学研制出第一个并行处理计算机 ILLIAC IV 型计算机 [4], 它的互连网络拓扑就是由 n^2 $(n=8)$ 处理器组成的循环无向图 $G(n^2;\pm\{1,n\})$. 当时, 设计者认为, 在所有 n^2 阶循环无向图 $G(n^2;\pm\{1,s\})$ 中, $G(n^2;\pm\{1,n\})$ 的直径最短. 但取 $s=n$ 是否有最短直径, 这个问题引起七八十年代对循环图 $G(n;\pm\{1,s\})$ 和 $G(n;\{1,s\})$ 直径的研究, 以及后来对一般循环图的连通度和直径的研究.

1977 年, Columbia 大学设计出第一台以超立方体为互连网络拓扑结构的并行处理机 BHPP, 即 Bolumbia Homogeneous Parallel Processor [68, 69]. 八十年代, 有许多基于超立方体网络的超级计算机投入商业运行, 比如: Caltech 的 Cosmic [67], Intel 的 iPSC/2 [58] 和 Connection Machines [42]. 正是由于超立方体作为互连网络拓扑结构的广泛应用, 掀起了超立方体的研究热潮. 有关超立方体研究的早期结果和基于超立方体网络超级计算机的发展见 [37, 38, 66]. 1987 年, 还召开了有关超立方体网络的国际会议 [12]. 1992 年, 还出版了基于超立方体网络算法的专著 [49].

那个时候, 图的连通度, 超连通度和直径对分析网络性能发挥了重要作用. 随着对超立方体网络的深入研究, 人们发现超立方体网络有些不尽人意的缺点, 比如: 它的直径比较大. 基于这些缺点, 人们又提出许多超立方体的变形网络做为下一代超级计算机网络替代超立方体网络. 如我们大家所熟知的折叠立方体, 交叉立方体, Möbius 立方体, 纽立方体, 局部纽立方体, 星网络等等. 这些超立方体变形网络的直径大约是超立方体网络的一半.

做为新的互连网络拓扑结构, de Bruijn 网络是由哈佛大学的 Schlumberger [61] 于 1974 年首先提出来的. de Bruijn 结构在某些方面优于超立方体网络. 引起人们对 de Bruijn 和 Kautz 有向图的研究兴趣. Bermond 和 Peyrat [12] 对 de Bruijn 和 Kautz 网络的结构性质和与之相关的基本研究结果进行了总结, 并预测, 它们将是做为下一代超级计算机网络替代超立方体网络.

寻找新的网络拓扑, 分析和研究它们的连通度, 超连通度, 直径和平均距离, 掀起了组合网络理

论研究的高潮, 形成那个时代的特色. 引进的新图论概念主要是有界连通度, 超连通度, 容错直径和路由转发指数. 但对这些概念和参数其研究, 主要是针对一般网络而言, 对具体网络的研究结果较少.

到了九十年代, 超大规模集成电路和微电子技术的出现和现代通信技术的高速发展已给计算机的理论, 技术和应用都带来了深刻的革命, 它使人们能构造出更复杂的, 更快捷, 而又更经济的高性能计算机, 大规模超级计算机系统和互连网络. 随着科学技术的飞速发展, 需要利用计算机处理的数据越来越大, 随着科学技术, 商业, 电信, 军事等行业竞争的日益加剧, 并行计算技术的广泛采用, 建造更大规模的超级计算机（或处理）系统共同并行交换和处理巨大的数据是势在必行的. 这就要求人们不但要设计出既有效可靠, 又方便经济的网络来, 还要设计出与之匹配的各种支持软件(并行算法). 这是对网络设计者提出的严重挑战.

已经证实, 利用现行的硬件技术(如微电子技术, VLSI 光揽技术)构造大规模计算机互连网络和并行超级计算机系统是可能的. 各种各样的网络拓扑被相继设计出来, 但怎样度量这些网络的优劣? 度量网络拓扑优劣的参数又是什么? 仅仅分析网络的连通度, 超连通度和直径已经不适应网络应用的需要. 于是出现了度量网络路由优劣的参数路由转发指数; 度量并行实时系统的有效性参数宽直径; 度量容错网络的有效性的参数容错直径; 网络可靠性的进一步度量参数有界连通度和限制连通度; 还有子图嵌入, 距离控制数等等新的图论问题和参数 [76]. 这些问题和参数一提出, 人们就利用这些参数对研究超立方体网络进行深入研究, 重新评估超立方体网络的性能. 随即对每一个已知的著名网络拓扑照葫芦画瓢, 一个也不放过, 又一次掀起组合网络研究的高潮.

这些问题和参数的研究和解决, 为更精确的度量超级并行计算机的结构和性能提供理论依据, 对互连网络的优化设计、量化分析和性能评估将起到重要的指导作用. 因此, 开展互连网络的组合研究, 无论对网络还是对图论都具有很大的理论基础性和前瞻性, 并有广泛的应用前景.

不幸的是, 有些参数对有些网络的确定却不是一件容易的事情, 如宽直径和容错直径, 路由转发指数, 子图嵌入等等. 即使是对特殊的网络, 我们也还没有找到一个可行的方法. 特别是当这些问题和参数提高到图论问题和参数时, 相继证明了它们大多是 NPC 问题. 于是, 有人惊叹: 组合网络理论研究真难. 甚至有人说: 组合网络理论研究过时了. 事实上, 网络在发展, 新的问题会不断出现, 这个时候说组合网络理论已经过时为时过早.

总结上述分析我们发现, 研究具体网络的拓扑结构性质是组合网络理论研究的一大特点. 一旦这些问题上升到图论问题, 就完全抛开了网络背景, 成为纯图论问题, 但一般来说都是 NP-hard 的问题.

§1.3 组合网络理论研究对图论的贡献

事实已经证明, 图论是网络设计和分析的最有用的数学工具, 也越来越被广大网络理论工作者所接受. 事实上, 图论在计算机科学和通讯领域的应用是应用数学最成功的典范之一. 正是因为这一点, 几乎所有大学的计算机科学专业都把图论列为本科生重要的必修课; 同时聚集着许多杰出的图论工作者. 许多计算机科学和网络理论方面的国际著名杂志也刊登大量有很强网络背景的图论文章. 如: IEEE Transactions on Computers, Networks, Theoretical Computer Science, Information processing Letters, 等等.

计算机科学的发展给图论带来发展生机, 也带来了机遇和挑战. 近三十年来, 研究工作者就互连网络中最关心的问题, 如可靠性、容错性、路由负载、可嵌入性、可扩展性、资源控制和利用、并行算法的设计和实现等热门问题提出更多的图论问题和图论参数. 这些问题和参数的研究和解决, 大大丰富了图论的理论研究内容和应用范围, 有些已经发展成为纯图论问题.

例如, 世纪六十年代, Elspas [27] 提出的网络设计问题, 即 (d, k) 图问题. 现已成为图论的重要研究专题, 仍然吸引着众多的图论工作者的研究兴趣, 出现了对构图方法的研究.

连通度和直径是图的基本概念, 它们有很强的网络背景, 是网络可靠性和有效性的度量参数, 是整个组合网络分析的基础. 这两个图论概念也正是赋予网络背景, 才更有生命力, 更有研究意义, 才导致后来对连通度和直径及其各种衍生概念和参数的大规模的研究.

八十年代, Bauer 和 Boesch 等人 [5, 13, 14] 提出图的超连通性概念, 全面推广连通度性质, 充分或者必要条件到超连通性, 一度成为图论连通度研究的热点. Harary [36], Esfahanian 和 Hakimi [30] 分别提出图条件连通度和限制连通度概念, 经过 10 多年的沉默, 现已取代超连通性概念被广大图论工作者所接受, 又一次掀起连通度研究的热潮.

Boesch 和 Harary 等人 [15] 提出对网络的脆弱性的研究推动了图直径和容错直径的研究; Chung 等 [22] 提出的点转发指数和 Heydemann 等人 [40] 提出的边转发指数, 并分别得到它们用图的平均距离表示的下界, 推动了对平均距离的研究. Heydemann 等人 [40] 证明了对于 Cayley 图的点转发指数可以达到这个下界, 推动了对 Cayley 图的研究 [39]. 2002 年, Teranishi [70] 通过 Laplace 矩阵谱获得边转发指数, 平均距离和直径的下界, 给 Laplace 矩阵谱赋予网络意义, 将推动对 Laplace 矩阵谱的研究.

网络中大量问题被提出来以后, 被证明是 NP-hard 问题, 推动了图论算法的研究, 等等.

正如 Bollobás 所说的: 当图论和计算机科学"二者均发生时, 我们将真正腾飞".

§2 组合网络理论是我们的研究特色

§2.1 我们开展组合网络理论研究的回顾

1979 年 10 月, 国内图论工作者云集在海滨城市烟台召开第一届全国图论大会, 成立图论学会, 产生理事会, 中科院系统所朱永津研究员任理事长, 田丰任秘书长. 国内大规模研究图论是从此开始. 参加那次会议的人员后来都成为中国图论研究各方向的带头人, 现在都基本上都退出第一线了. 但他们培养的研究生大多已经成为国内图论研究的中坚力量. 当时的中科院系统所聚集了许多图论研究人员, 如朱永津, 马仲番, 蔡茂诚, 田丰等, 还有应用数学所的王建方和刘彦佩等. 八十年代初, 他们开始招收研究生研究图论, 并培养出一大批优秀图论研究人才, 如堵丁柱, 张存铨, 李浩, 范更华等, 为中国的图论研究立下汗马功劳. 但当时朱永津等主要研究方向是 Hamilton 问题, 后来发展成图的圈问题. 他们的研究方向主导并深刻影响着中国的图论研究, 导致国内许多图论工作者在研究图的圈问题.

1985 年, 李乔教授开始招收硕士研究生. 我有幸成为李老师的第一批硕士研究生. 除了我, 他的硕士研究生后来几乎都出国读研了. 那个时候, 我们没有一个固定的研究方向, 还没有形成自己的研究特点. 大概在 1989 年左右, 在李乔教授的领导下, 我们(主要有李乔, 张忠良和我)开始思索自己的研究方向. 经过反复思考, 我们确定开展组合网络理论研究. 1989 年, 由李乔教授主持申请的《关于计算机网络的组合数学研究》项目得到国家自然科学基金资助.

在《IEEE Trans. Computers》和《Networks》等计算机网络杂志上, 我们广泛收集资料，认真研读, 寻找研究问题. 其间, 我们在双环无向和有向网络, 两条平面直角路线的最大相交点数和集对集电广播(set to set broadcasting)等方面开始做一些研究工作, 如 [25, 51, 52, 53]. 特别是我们提出的有向双环网络的设计方法 [52] 仍是项目最好的方法, 至今仍被许多研究工作者所采用. 从 1992 年起, 我们先后邀请美国金芳蓉, 许德标教授和法国国家科研中心信息研究实验室的 Sotteau 教授来

我校讲学. 特别是许德标演讲的组合网络理论问题和研究进展 [44], 大大开阔了眼界, 扩大了我们的研究内容, 也坚定了我们开展组合网络理论研究的信心. 1996 年, 李乔教授和我先后访问法国国家科研中心信息研究实验室. 与 Sotteau 合作, 完成了 De Bruijn 无向图 $B(2,n)$ 的 2 宽直径等于它的直径 n 的研究 [50].

1995 年, 我们开始为研究生开设《互连网络拓扑结构》课程, 培养组合网络方面的研究生. 1996 年, 李乔教授调离科大去上海交通大学, 张忠良出国深造, 无疑对对刚刚有点起色的组合网络研究造成不可弥补的损失. 组合和图论专业由李炯生教授招收研究生, 但他主要从事代数图论研究. 组合网络还要不要坚持研究下去? 我一边给李炯生老师的研究生继续上《互连网络拓扑结构》课程, 一边坚持搜集资料和组合网络研究. 当时主要是双环网络和限制边连通度的研究, 先后发表了论文 [72, 73, 74, 78]. 特别是论文 [78], 提出利用限制边原子来研究限制边连通度, 奠定了限制边连通度研究的基础. 目前, 通过 Web of Science 搜索, 发现该文被 SCI 收录文章引用了 10 次. 后来, 南京大学张克民教授的博士生吕长虹加盟组合网络研究, 并合作完成有关 De Bruijn 无向图 $B(2,n)$ 的 $(d,2)$ 控制数方面的研究论文 [80, 55]. 于 1998 年 8 月完成了具有自己特色的本科生和研究生通用教材《图论及其应用》[71].

1997 年, 美国德克萨斯州立大学大拉斯分校计算机系汪宇科教授(我系 84 级校友)得知我正在研究组合网络理论, 便送给我 Leighton 的著作 [49] 和一些相关资料. 我如获至宝, 认真研读. 使我对超立方体及其变形网络有了更广泛的了解, 对组合网络理论研究有了很深的理解, 也为我们开好研究生课程《互连网络拓扑结构》和后来编写研究生讲义《互连网络拓扑结构分析》提供了宝贵的资料.

2000 年, 在南京师大举行的全国图论会议期间, 堵丁柱教授希望我将研究生课程《互连网络拓扑结构》的内容写成一本书. 其实, 在这期间, 我们已经投入大量时间和精力, 在搜集大量资料, 通过研读, 分析和整理, 正在编写研究生教材讲义《互连网络拓扑结构分析》[75]. 此讲义于 2000 年 4 月编写完成, 很快由堵丁柱教授推荐翻译成英文《Topological Structure and Analysis of Interconnection Networks》[76], 列入系列丛书《Networks Theory and Applications》, 并在 Kluwer Academic Publishers 出版. 该书全面总结了互连网络中三个构造方法和一些著名的网络拓扑结构, 介绍了几个主要组合问题和研究进展. 中文专著《组合网络理论》已经得到科学出版基金资助, 即将由科学出版社出版. 该书的出版, 坚定了我对组合网络理论研究的信心, 为我们的研究生提供一部教材, 为网络理论研究工作者提供一部参考书, 也为有更多的人了解和开展组合网络理论研究起到了推波助澜的作用.

开设的研究生课程《互连网络拓扑结构》(2002 年后改为《组合网络》), 选修的同学除组合图论专业的研究生外, 还有计算机系,自动化系, 无线电系的研究生, 数学系和少年班的本科生. 我们还为本科生开设 Seminar 课程和大学生研究计划. 2004 年暑期开展的大学生研究计划, 参加者多达 8 名, 他们都是来自少年班和计算机系的本科生, 完成论文 3 篇, 均被国内外杂志接收发表. 10 多年来, 我们共接收了 54 名本科生做组合网络方面的毕业论文, 至少有 6 篇论文已经在国内外杂志上发表了. 发表在《中国科学》[79] 和《Discrete Methematics》[81] 上的论文就是在 99 级刘琦和杨超的本科毕业论文的基础上完成的.

1999 年, 我开始接收硕士研究生, 博士研究生和博士后, 从事组合网络研究. 报考的学生逐年增加, 最多的时候, 在读研究生达 18 名, 博士后 2 名, 进修青年教师 1 名, 队伍可谓庞大. 我们的研究队伍在壮大, 我们的研究力量也在不断加强, 研究领域也逐渐扩大, 科研成果无论从数量和质量上都有很大的提高. 2003 年以来, 我们共发表和完成学术论文 87 篇, 其中发表 62, 接收待发表 17 篇, 完成修改的 3 篇，投稿在审 5 篇. 在发表、接收待发表和要求修改的的 82 篇中, 属于国际杂志 41 篇,

国内会议论文集3篇, 其余均属于国内核心杂志. 投稿在审的5篇，均投国际杂志. 具体的研究成果已经在国家自然科学基金资助项目《网络性能组合分析》(No. 10271114)的“研究工作主要进展和成果总结报告”做了详细总结, 这里不再赘述。

§2.2 我们的网络理论研究在国内外的影响

中国科学技术大学数学系是国内率先进行组合理论研究的单位之一. 主要研究内容是具有很强网络背景的图论问题.

从1989年开始, 在李乔教授的领导下, 开展的组合网络研究, 并且连续得到国家自然科学基金的资助: 李乔教授主持的《关于计算机网络的组合数学研究》(1989-1991)、《组合网络理论》(1994-1996)、《组合网络拓扑和图的代数结构》(1997-1999), 李炯生教授主持的《组合矩阵和组合网络理论》(2000-2002) 和徐俊明主持的《网络性能组合分析》(2003-2005) 和《网络中若干图论问题研究》(2007-2009); 李炯生教授主持的国家教委博士点基金项目:《组合矩阵和组合网络分析》(1997-1999), 徐俊明主持的中国科学院专项基金和创新基金的项目: 《计算机互连网络可靠性及容错分析》(1995-1997), 《计算机互连网络容错理论》(1998-2000), 《组合网络理论》(2001－2003) 和安徽省自然科学基金项目:《网络拓扑结构理论》(2002-2004).

2002年7月,《图论及其应用》被国家教育部列为全国研究生指定用书, 现已发行12000多册, 还仍然供不应求. 2003年该书的英文版《Theory and Application of Graphs》[77] 出版. 《Topological Structure and Analysis of Interconnection Networks》是国际上第一部全面叙述组合网络理论的专著. 这两部英文著作都被许多世界著名大学图书馆收藏.

2000年6月, 在昆明召开的第一届海峡两岸国际图论学术研讨会, 本人被邀请做大会发言, 向与会者介绍了《Topological Structure and Analysis of Interconnection Networks》的主要内容. 会后, 与会者向我索购该书的中文讲义, 其中北京大学和台湾交通大学就各索购20本. 从某种意义上讲, 国内许多图论工作者和研究生基本上都是看到我们的教材才开始组合网络研究的. 2002年6月, 在台北召开的第二届海峡两岸国际图论学术研讨会上, 本人被邀请做大会发言, 向与会者介绍了组合网络理论的主要研究进展. 台北大学教授, 会议主席张振华教授向大会推荐了该书. 台北中央研究院数学研究所将该书摆放在进阅览室门厅的新书架的醒目位置. 2002年7月, 在教育部和国家自然科学基金委联合主办全国研究生暑期学校(大连理工大学), 本人被应邀作6课时的专题讲座“组合网络理论和应用”. 2003年5月, 由堵丁柱、黄光明和许德标曾在浙江大学曾组织一次《互连网络国际研讨会》. 本人被邀请做两次《组合网络理论中若干问题》的专题报告. 万事具备, 因“非典”而流产. 2004年5月被应邀参加美国第17 届Cumberland 组合数学图论与计算大会, 并作“Super Connectivity of Line Digraphs” 的报告. 同时在美国中田纳西州立大学数学系和德克萨斯州立大学Dallas分校计算机系作学术访问. 2004年10月, 本人应邀出席中国运筹学会第七次全国代表大会暨学术交流会做主题报告: 网络分析中几个组合优化问题. 2005年7月, 在“图中结构与圈武汉国际学术研讨会”上做“ Pancyclicity of Hypercube-type Networks – A Survey” 的邀请报告.

在长期从事图论和组合网络理论研究中, 我们对互连网络中的图论问题和国际上在该领域的研究现状和方法有全面的了解, 并在双环网络的设计、连通度、限制连通度、宽直径、容错直径、路由转发指数、变更图直径、泛圈和泛连通性、距离控制数和Bondage数、反馈数等方面做过一些令国内外同行关注的研究成果, 在国际上赢得一席之地. 许多国际网络方面的会议邀请我参加, 做有关组合网络方面的报告, 因语言、时间等种种原因被谢绝. 有的会议主持人要我组织一个专题分会. 由于自己的英语原因, 本人很难胜任而谢绝. 许多离散数学、计算机网络和信息方面的杂志请我审稿, 据我的审稿记录统计, 2003年以来, 评审国内外杂志稿件近200篇. 其中, 国外专业杂志就

有100余篇, 涉及国际杂志22种, 其中包括《Theoretical Computer Science》, 《IEEE Transactions on Computers》, 《Networks》等计算机和网络方面的顶尖级国际杂志. 有的杂志已经审稿多达15篇, 如《Information Processing Letters》.

感到高兴的是: 申请的国家自然科学基金项目《网络中若干图论问题研究》(2007-2009) 已经获得批准.

§3 未来研究工作的思考与建议

综合以上的分析, 我认为: 我们应该即要坚持我们的研究特点, 发挥我们的特长, 又要适当调整我们的研究方向. 在我们现有研究基础上, 提高我们的研究出发点和研究目标. 重点研究具有很强网络背景的一般图论问题, 同时也要抽出一部分时间和精力去研究具体网络中没有解决的问题. 结合即将实施的国家自然科学基金项目《网络中若干图论问题研究》, 我对将来的研究工作提出如下建议, 仅供大家参考.

§3.1 关于限制连通度研究

限制连通度具有很强的网络背景, 也是图论连通度和超连通度概念的推广. 自从上世纪三十年代著名的Menger定理和Whiteny不等式 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ 被证明以来, 连通度是图论的基本概念, 吸引着图论工作者. 六十年代, 围绕Menger定理的简单证明成为连通度研究的中心内容. 七十年代, 临界连通度和极小连通度成为连通度研究的热点. 八十年代, 连通度成为网络分析的基础, 提出超连通性概念, 推广有关连通度的结果到超连通度成为当时研究热点. 随着网络分析的深入, 九十年代提出限制连通度概念, 推广了超连通度概念. 但当时没有引起图论工作者的重视, 十年没有什么研究进展.

上世纪末本世纪初, 我们开始限制连通度的研究, 取得了一些开创性研究成果. 我们引进限制边原子数 a' 概念, 得到: 无向图 G 是 λ' 优的充分必要条件是 $a' = 2$. 也获得点可迁无向图是 λ' 优的充分条件: 或者是奇阶, 或者是不含三角形. 我们也获得 n 阶 d 正则 $k\,(\geq 3)$ 连通有向图 G 是 λ' 优的充分条件:

$$n \geq \begin{cases} 3d^{k-1} + 2d - 4, & \text{for } k \neq 3; \\ 4(d^2 - 1), & \text{for } k = 3. \end{cases}$$

由此可以得到广义De Bruijn有向图和广义Kautz有向图的限制边连通度. 也说明这个下界是最好的. 我们在限制边连通度的研究处于国际领先水平. 到目前为止, 除《Discrete Mathematics》刊登有关限制连通度的文章外, 《Journal of Graph Thoery》已经刊登了两篇有关文章 [3, 41]. 这说明: 限制连通度成为重要的图论概念已逐渐被图论学者所接受. 可供进一步研究的问题有:

1. 从图论的角度研究限制 k 边连通图的结构性质.

2. 临界或者极小限制 k 边连通图的结构性质.

3. 利用图论其它参数, 给出更多的 λ' 优的充分或者必要条件.

4. 研究限制点连通度, 其它形式的限制连通度和高阶限制连通度.

5. 进一步研究点可迁图的限制边原子的性质, 解决下列猜想.

猜想 1: 设 G 是 $2n$ 阶且围长3的 k 度点可迁连通图. 如果 $k < \lambda'(G) < 2k-2$, 那么 $\lambda'(G) = n$.

关于限制连通度的注 限制(Restricted)连通度的概念是 由Esfahanian 和Hakimi [30]提出来的. 所谓的图 G 的"限制分离集" S, 除要求 $G - S$ 的每个连通分支至少有两个点外, 还要求 S 不含

任何点的邻集. 但现在文献中所提到的"限制"已经没有当初的这个"限制"了. 我们把原始意义下的限制点和边连通度分别记为 $\kappa_r(G)$ 和 $\lambda_r(G)$. 我们曾提出"超连通度"概念. 所谓图 G 的"超分离集" S, 只要求 $G-S$ 的每个连通分支至少有两个点. 我们把这种意义下的超点和边连通度分别记为 $\kappa_s(G)$ 和 $\lambda_s(G)$. 它们有一个很自然的解释: 为了确保每个连通分支都至少有两个点, 需要从图中移去的最少点数或者边数. 显然, 如果 $\kappa_r(G)$ 和 $\lambda_r(G)$ 都存在, 那么,

(i) $\kappa_r(G) \geq \kappa_s(G) \geq \kappa(G)$, 并且如果 $\kappa_s(G) > \kappa(G) = \delta(G)$, 那么 G 是超连通的;

(ii) $\lambda_r(G) = \lambda_s(G) \geq \lambda(G)$, 并且如果 $\lambda_s(G) > \lambda(G) = \delta(G)$, 那么 G 是超边连通的.

因此, 我们说超连通度是超连通性概念的推广. 另一方面, 在许多关于限制边连通度结果的证明中, 人们正是利用了不等式: $\lambda_s(G) = \lambda_r(G) \leq \xi(G)$.

值得注意的是, $\kappa_r(G)$ 和 $\kappa_s(G)$ 这两个概念是有区别的. 例如, 考虑图 1 所示的图 G, 它有唯一的分离集 $S = \{x_2, x_5, x_7\}$ 是超分离集, 但没有限制分离集. 所以, $\kappa_s(G) = 3$, 但 $\kappa_r(G)$ 不存在.

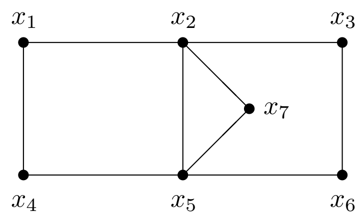

图 1: $\kappa_r(G)$ 不存在, 而 $\kappa_s(G) = 3$

§3.2 关于边增加和边减少问题的研究

1. 边增加问题

用 $P(t,d)$ 表示从在长为 d 的路中添加 t 条边后得到的变更图的最小直径. 对一般的 t 和 d, 确定 $P(t,d)$ 的值是 NPC 问题. 这是 Chung 和 Garey [23] 在《Journal of Graph Theory》上提出的"边增加问题". 在这项研究中, 我们获得

$$\left\lceil \frac{d}{5} \right\rceil \leq P(4,d) \leq \left\lceil \frac{d+4}{5} \right\rceil, \quad \left\lceil \frac{d}{6} \right\rceil \leq P(5,d) \leq \left\lceil \frac{d}{6} \right\rceil + 1.$$

特别地, 对任何正整数 k 有

$$P(t,(2k-1)(t+1)+1) = 2k.$$

注意到, 对于给定的正整数 d, 存在整数 k 和 r 使得 $d = (2k-1)t + r + 1$, 其中 $0 \leq r \leq 2t-1$. 我们也证明了: 当 $t \leq k$ 时, 有 $P(t,d) \leq \left\lfloor \frac{d}{t} \right\rfloor + 1$. 这些是目前这个方面研究的最好结果.

目前需要进一步研究的问题是: 找到新的 $d = d(k,t)$ 值确定 $P(t,d)$ 的精确值; 建立新的上下界, 尽可能缩小它们之间的差. 能否证明:

猜想 2: $P(t,d) \leq \left\lceil \frac{d}{t+1} \right\rceil + 1$ 对任何 d 成立.

2. 最大度给定条件下的边添加问题 这是由 Alon 等人 [2] 在《Journal of Graph Theory》上提出来的问题. 令 $f_d(G)$ 表示在最大度为 $\Delta\,(\geq 2)$ 的图 G 中需要添加的最小边数使得到图的直径最多为 d. 他们确定了: 当阶数 n 充分大时有 $f_2(G) = n-\Delta-1$; 并且 $f_3(G) \geq n-3(\Delta+1)^3-2(\Delta+1)^2-1$;

对于圈, $f_2(C_n) = n-3\,(n \geq 12)$. Grigorescu [34] 猜想: $f_3(C_n) = n-8\,(n \geq 9)$. 最近, Alaa 证明了这个猜想. 目前最好的界是: 对任意的正整数 h 和 n,

$$\left\lfloor \frac{n}{2h-1} \right\rfloor - 7 \leq f_{2h}(C_n) \leq \left\lfloor \frac{n}{2h-1} \right\rfloor;$$

$$\left\lfloor \frac{n}{2h-1} \right\rfloor - 146 \leq f_{2h+1}(C_n) \leq \left\lfloor \frac{n}{2h-1} \right\rfloor.$$

可以研究的问题是: 建立 $f_d(G)$ 的界; 确定更多的 $f_d(C_n)\,(d \geq 4)$ 的值, 或者更紧的上下界.

3. 边减少问题 用 $g(t,k)$ 表示从直径为 k 的图中去掉 t 条边后得到的连通图的最大直径. 对任意的正整数 t, 确定 $g(t,k)$ 的精确值是 Schoone 等人 [62] 在《Journal of Graph Theory》上提出的"边减少问题". 已经确定了: 当 $t = 1,2,3,4,6$ 时, $g(t,2) = t+3$; 其余情形有 $g(t,2) = t+2$. Schoone 等人 [62] 曾提出下列猜想:

猜想 3: $g(t,k) \leq (t+1)k - t + 1$.

我们有几位研究生(邓志国, 吴叶舟和 Alaa) 曾涉及此项研究, 取得一些好成果, 但此猜想还始终没有得到解决. 我希望有人仔细研究一下我们已经发表的几篇论文, 力争解决这个问题.

§3.3 关于 Bondage 数的研究

控制数是经典的图论参数. 图 G 的 Bondage 数 $b(G)$ 是导致控制数增加必须从 G 中移去的最小边数. 我们的课题组(黄佳)在这方面已经作出一些很有价值的工作, 希望继续深入开展 Bondage 数的研究.

Bauer 和 Harary 等人 [6] 于 1983 年在《Discrete Mathematics》上开始研究 Bondage 数, 但他们当时还没有提出 Bondage 数的概念. 1990 年, Fink 等人 [32] 在《Discrete Mathematics》上正式提出图的 Bondage 数的概念, 并猜想: 对任何图 G 均有 $b(G) \leqslant \Delta(G)+1$. 三年后, Teschner [63] 发现反例否定了这个猜想. 1998 年, Dunbar 等人 [26] 提出来如下猜想:

猜想 4: 对任何平面图 G 均有 $b(G) \leqslant \Delta(G)+1$.

2000 年, 康丽瑛和原晋江 [46] 证明了: $b(G) \leqslant \min\{8, \Delta(G)+2\}$ 对任何平面图成立 G. 这个结果意味着当 $\Delta(G) \geqslant 7$ 时, 猜想成立. 黄佳推广了康丽瑛和原晋江的结果到交叉数不大于 3 的连通图, 而且还得到: 对于交叉数不大于 3 的连通图, 如果 $\Delta(G) \geqslant 7$, 那么 $b(G) \leqslant \min\{8, \Delta(G)+1\}$. Fischermann 等人 [33] 证明了猜想对围长 $g(G) \geqslant 4$ 且最大度 $\Delta(G) \geqslant 5$ 连通平面图是成立的. 黄佳推广了这个结果到小交叉数图.

Teschner [64, 65] 证明了 $b(K_n \times K_n) = \frac{3}{2}\Delta(G_n)$ 和 $b(G) \leqslant \frac{3}{2}\Delta(G)$ 对控制数 $\gamma(G) \leqslant 3$ 的图 G, 并提出如下猜想:

猜想 5: 对任何图 G 均有 $b(G) \leqslant \frac{3}{2}\Delta(G)$.

对于独立控制数, 连通控制数, 全控制数等都可以提出 Bondage 数概念, 但目前还没有这方面的研究.

Hartnell 等人 [35] 推广经典 Bondage 数到距离 Bondage 数 $b_k(G)$, 并证明了: 对任何树 T 和正整数 k, 有 $1 \leqslant b_k(T) \leqslant 2$. 除此以外没有任何结果. 是否可以把经典的 Bondage 数的已知结果推广到距离 Bondage 数 $b_k(G)$?

特殊图类和特殊网络的Bondage数研究.

有向图的Bondage数研究.

§3.4 关于控制数和距离控制数的研究

经典控制数有一个未解决的猜想, 是由Vizing [Some unsolved problems in graph theory. Usp. Mat. Nauk 23(1968), no. 6(144), 117-134] 提出来的.

猜想 6: 两个图的控制数的乘积不超过这两个图笛卡儿乘积的控制数.

目前最好结果是Clark 和Suen [An inequality related to Vizing's conjecture, Electron. J. Combin. 7(2000), No.1, Note 4, 3pp] 给出的不超过两个图笛卡儿乘积的控制数的2倍.

距离控制数是台北大学张镇华教授在他的博士学位论文 [k-domination and graph covering problems. Ph.D. Thesis, School of OR and IE, Cornell University, Ithaca, NY(1982)] 中提出来的, 是经典控制数的推广. 但在1975年, Meir 和Moon [57] 就对树的距离控制数和距离独立数进行了研究. 20多年来没有什么研究进展. 显然, 确定距离控制数问题是NP-hard 的. 因此, 对于给定的ℓ, 推广经典控制数的结果到距离控制数, 建立图G 的ℓ 距离控制数$\gamma_\ell(G)$ 紧的上下界, 确定特殊图类的距离控制数, 研究距离控制数与其它类型的控制数之间的关系是有意义的. 我们在这方面也做了一些工作, 希望能继续做下去.

猜想 7: $\gamma_2(K(d,k)) = \left\lceil \frac{d^k+d^{k-1}}{d^2+d+1} \right\rceil$.

其次, 我们可以考虑距离独立数, 距离独立数与距离控制数之间的关系.

§3.5 关于反馈数的研究

图G 的反馈数$f(G)$ 是使得G不含圈所需要移去的最小顶点数目. 已经证明: 对一般图G确定反馈数$f(G)$ 的问题NP-hard 问题(M. R Garey, D. S. Johnson, Computers and Intractability, Freeman, San Francisco, CA, 1979). 于是, 可以从以下几个方面来研究反馈数问题：

1. 寻找近似多项式算法, 使其性能比尽可能的小. 目前, 我们还不知道文献中是否有这方面的算法.

2. 寻找尽可能紧的上下界. Beineke 和Vandell [7] 给出一个下界是$f(G) \geqslant \frac{m-n+1}{\Delta-1}$ 如果G 是n个顶点m条边的连通图, 其中$\Delta = \Delta(G)$. 目前, 还没有一个比较理想的上界. 文献中有通过独立数, 围长等参数给出反馈数的上界. 是否可以通过图论参数(比如, 连通度, 最大度等)来讨论反馈数的界.

3. 确定特殊网络的反馈数. 即使是特殊的网络, 确定它们的反馈数也是一件不容易的事情. 目前, 连超立方体网络Q_n 的反馈数都还没有确定($n \geq 9$). 我们只知道很少几个网络的反馈数. 例如, Kralovic 和 Ruzicka [47] 证明: 对于洗牌交换(shuffle-exchange)网络SE_n, $f(SE_n) = 2^{n-2} - 1$ 如果n 是偶数, $f(SE_n) = 2^{n-2}$ 如果n 是奇数; 对于de Bruijn 无向图$B(2,n)$, $f(B(2,n)) = \lceil \frac{2^n-1}{3} \rceil$; 对于Kautz 无向图$K(2,n)$, $f(K(2,n)) = 2^{n-1}$. 对网状网, 蝶形网和星图的反馈数都已经有些已经, 但都只得到一些上下界. 我们研究了折叠超立方体和Kautz 有向图的反馈数问题. 确定特殊网络的反馈数是一个具有挑战性的问题, 值得去研究.

4. 类似地可以提出反馈边数$f_e(G)$ 问题. 吴叶舟得到Kautz 有向图$K(d,n)$ 的反馈数和反馈边

数之间的关系: $f_e(K(d,n)) = f(K(d,n+1))$. 可以考虑线图的反馈数, 是否有关系式: $f_e(G) = f(L(G))$?

§3.6 关于泛圈性和泛连通性的研究

这纯粹是个网络问题, 对特殊的网络, 研究其泛圈性和泛连通性, 容错泛圈性和泛连通性. 有一批台湾人在研究这些问题, 许多网络方面的国际杂志仍在刊登这方面的文章. 我们在这方面也做了不少工作, 所获得的结果基本上都发表在国际杂志上. 目前, 我仍然还不断接到这方面的审稿文章. 超立方体网络和大部分超立方体的变形网络的泛圈性和泛连通性基本搞清, 容错泛圈性和泛连通性, 限制泛圈性和泛连通性是目前研究的重点.

§3.7 关于宽直径的研究

已经证明, 对一般的 k 连通图 G, 确定其宽直径 $d_k(G)$ 的问题是个 NP-hard 问题. 因此, 确定其上下界和著名网络的宽直径是很有意义的.

1. 文献中还没有发现一个求宽直径的性能比较好的近似多项式算法.

2. 对一般图宽直径上界, 已经知道的有价值的结果很少. 能否通过图论参数（比如最小度, 独立数, 围长等）给出一个比较紧的上界?

3. 对于一些特殊的网络, 人们已经确定了它们的宽直径, 所用的方法基本上是根据网络的具体结构特征估计任意两点之间 k 条内点不交路的长度. 这种方法不能用于一般的图. 因此, 寻找新的方法来研究宽直径问题很有必要.

4. 宽直径 $d_k(G)$ 与 Rabing 数 $r_k(G)$ 之间关系. 我们已经知道: $d_k(G) \le r_k(G) + 1$. Kojima 和 Ando [T. Kojima and K. Ando, Wide-diameter and minimum length of fan. *Theoretical Computer Science*, 235(2000), 257-266] 得到: $d_k(G) - 1 \le r_k(G) \le \max\{d_k(G), (k-1)d_k(G) - 4k + 7\}$. 从这个结果, 当 $k = 2$ 时有: $d_2(G) - 1 \le r_2(G) \le d_2(G)$. 能否给出使得等号成立的 2 连通图 G 的刻划? 当 $k \ge 3$ 时, 这个上界是否可以改进?

5. 我们已经得到宽直径 d_k 与 Menger 数 ζ_ℓ 之间的关系: 对任何 k 连通图 G, $d_k(G) = \ell \Leftrightarrow \zeta_{\ell-1}(G) < k \le \zeta_\ell(G)$. 能否得到比这更深入的结果?

§3.8 关于容错直径的研究

容错直径概念是一个具有很强网络应用背景的研究课题, 也是本项目的研究内容之一, 取得了一些成果. 但也发现许多可供进一步研究的问题.

1. Schoone 等人 [Diameter increase caused by edge deletion, *J. Graph Theory Theory*, 11(3)(1987), 409-427] 已经证明：对于给定的直径为 k' 的图和正整数 $k < k'$, 确定需要去掉多少条边使得到的图的直径至多为 k 的问题是 NPC 问题. 但目前还不知道: 类似的问题对点容错是否是 NP-hard 问题? 对于给定的 w 连通图 G, 确定 $D_w(G)$ 和 $D'_w(G)$ 问题是否是 NP-hard 问题?

2. 目前还没有得到 $D_w(G)$ 和 $D'_w(G)$ 比较理想的紧的上界, 主要困难是：还没有发现一个比较好的研究方法. 人们确定了许多特殊网络的容错直径, 采用的方法是：对于 w 连通图 G, 确定任意

去掉 $(w-1)$ 个顶点(或者边)后得到的图的直径. 这个方法用于一般图就难了. 寻找新的研究方法, 得到好的界.

3. 关于 w 连通图的宽直径 d_w 和容错直径 D_w 之间的关系, 当 $w=2$ 时, 我们曾得到: $d_2 \le \max\{(d_1-1)(D_2-\frac{1}{2}d_1-1)+1,\ D_2+1\}$; 而且当 $d_1=2$ 时, $d_2=D_2+1$ 的充分必要条件: $d_2=3$ 或 4 且达到 d_2 值的两顶点相邻. 我们也获得一些当 $w=3$ 时的结果, 但不理想.

4. 关于限制容错直径问题, 我们得到了超立方体 Q_n 和星图 S_n 的限制容错直径(是原直径加 2). 但对已经确定了容错直径且限制连通度的其它著名网络的限制直径却没有研究. 希望有人继续研究, 得到类似的结果.

参考文献

[1] S. B. Akers and B. Krishnamurthy, A group-theoretic method for symmetric interconnection networks. *IEEE Transactions on Computers*, **38** (1989), 555-565.

[2] N. Alon, A. Gyárfás and M. Ruszinkó, Decreasing the diameter of bounded degree graphs. *Journal of Graph Theory*, **35** (3) (2000), 161-172.

[3] C. Balbuena, P. García-Vázquez and X. Marcote, Sufficient conditions for λ'-optimality in graphs with girth g. *Journal of Graph Theory*, **52** (2006), 73-86.

[4] G. H. Barnes, R. M. Brown, M. Kato, D. J. Kuck, D. L. Slotnick and R. A. Stokes, The ILLIAC IV computers. *IEEE Transactions on Computers*, **17** (1968), 746-757.

[5] D. Bauer, F. Boesch, C. Suffel and R. Tindell, Connectivity extremal problems and the design of reliable probabilistic networks. *The Theory and Application of Graphs*, Wiley, New York, 1981, 89-98.

[6] D. Bauer, F. Harary, J. Nieminen, C.L. Sujel, Domination alteration sets in graphs. *Discrete Math.* **47** (1983), 153-161.

[7] L. W. Beineke, R. C. Vandell, Decycling graphs. *J. Graph Theory*, **25**(1997), 59-77.

[8] J. C. Bermond (ed.), Interconnection Networks. *Discrete Applied Mathematics*, **37/38** (1992) (special issue).

[9] J. C. Bermond, J. Bond, M. Paoli and C. Peyrat, Graphs and interconnection networks: diameter and vulnerability. *London Mathematical Society Lecture Note Series*, **82** (1983), 1-30.

[10] J. C. Bermond, F. Comellas and D. F. Hsu (许德标), Distributed loop computer networks: a survey. *Journal of Parallel and Distributed Computing*, **24** (1995), 2-10.

[11] J. C. Bermond, C. Delorme and J. J. Quisquater, Strategies for interconnection networks: Some methods from graph theory. *Journal of Parallel and Distributed Computing*, **3** (1986), 433-449.

[12] J. C. Bermond and C. Peyrat, De Bruijn and Kautz networks: a competitor for the hypercube? In *Hypercube and Distributed Computers* (F. Andre and J. P. Verjus eds.). Horth-Holland: Elsevier Science Publishers, 1989, 278-293.

[13] F. T. Boesch, Synthesis of reliable networks–A survey. *IEEE Trans. Reliability*, **35** (1986), 240-246.

[14] F. T. Boesch, On unreliability polynomials and graph connectivity in reliable network synthesis. *Journal of Graph Theory*, **10** (3) (1986), 339-352.

[15] F. T. Boesch, F. Harary and J. A. Kabell, Graphs as models of communication network vulnerability. *Networks*, **11** (1981), 57-63.

[16] F. T. Boesch and J. F. Wang, Reliable circulant networks with minimum transmission delay. *IEEE Trans. Circuits Systems*, **32**(12) (1985), 1286-1291.

[17] B. Bollobás, The future of graph theory. In "Quo Vadis, Graph Theory? A Source for Challenges and Directions" (eds,J.Gimbel, J.W.Kennedy and L.V.Quinta, Annals of Discrete Math. 55), Elsevier Sci.Pub. 1993, pp5-11.

[18] J. A. Bondy and P. Hell, Counterexamples to theorems of Menger type for the diameter. *Discrete Mathematics*, **44** (1983), 217-220.

[19] R. A. Brualdi and Q. Li (李乔), Small diameter interchange graphs of matrices of zeros and ones. *Linear Algebra Appl.* **46** (1982), 177-194.

[20] F. R. K. Chung (金芳蓉), Diameter of communication networks. *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics*, **34**(1986, 1-18.

[21] F. R. K. Chung (金芳蓉), Problem. in *Finite And Infinite Sets. Proc. Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai. Eger. Hungary.* Amsterdam: North-Holland, 1981, 873.

[22] F. R. K. Chung (金芳蓉), E. G. Coffman, M. I. Reiman and R. Simon, The forwarding index of communication networks. *IEEE Transactions on Information Theory*, **33** (2) (1987), 224-232.

[23] F. R. K. Chung (金芳蓉) and M. R. Garey, Diameter bounds for altered graphs. *Journal of Graph Theory*, **8** (4) (1984), 511-534.

[24] D. Z. Du (堵丁柱) and D. F. Hsu (许德标), *Combinatorial Network Theory.* Science Press, London, 1998.

[25] 堵丁柱, 许德标, 李乔, 徐俊明, A combinatorial problem related to distributed loop networks. *Networks*, **20** (2) (1990), 173-180.

[26] J. E. Dunbar, T. W. Haynes, U. Teschner and L. Volkmann, Bondage, insensitivity, and reinforcement. *Domination in Graphs: Advanced Topics* (T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi, P.J. Slater eds.), Marcel Dekker, New York, 1998, pp. 471-489.

[27] B. Elspas, Topological constraints on interconnection-limited logic. In *Proceedings of the 5th Annual Symposium on Switching Circuit Theory and Logic Design*, **5** (1964), 133-147.

[28] P. Erdös, S. Fajtlowicz and A. J. Hoffman, Maximum degree in graphs of diameter 2. *Networks*, **10** (1980), 87-90.

[29] P. Erdös and D. F. Hsu (许德标), Distributed loop networks with minimum transmission delay. *Theoretical Computer Science*, **100** (1992), 223-241.

[30] A. H. Esfahanian and S. L. Hakimi, On computing a conditional edge-connectivity of a graph. *Information processing Letters*, **27** (1988), 195-199.

[31] T. Y. Feng, A survey of interconnection networks. *Computers*, **14**(12) (1985), 12-27.

[32] J. F. Fink, M. S. Jacobson, L. F. Kinch, J. Roberts, The bondage number of a graph. *Discrete Mathematics*, **86** (1990) 47-57.

[33] M. Fischermann, D. Rautenbach and L. Volkmann, Remarks on the bondage number of planar graphs. *Discrete Mathematics*, **260** (2003), 57-67.

[34] E. Grigorescu, Decreasing the diameter of cycles. *Journal of Graph Theory*, **43**(2003), 299-303.

[35] B.L. Hartnell, L.K. Jorgensen, P.D. Vestergaard and Carol Whitehead, Edge stability of the k-domination number of trees. *Bulletin of the ICA*, **22** (1998) 31-40.

[36] F. Harary, Conditional connectivity. *Networks*, **13** (1983), 346-357.

[37] F. Harary, J. Hayes and H. J. Wu, A survey of the theory of hypercube graphs. *Computers and Mathematics with Applications*, **15** (4) (1988), 277-289.

[38] J. P. Hayes, T. Mudge, Q. F. Stout, S. Colley and J. Palmer, A microprocessor-based hypercube supercomputer. *IEEE Micro*, October, 1986, 6-17.

[39] M.-C. Heydemann, Cayley graphs and interconnection networks. In *Graph symmetry* (G. Hahn and G. Sabidussi, eds.), 167-224. *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.*, **497**, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.

[40] M.-C. Heydemann, J.-C. Meyer and D. Sotteau, On the-forwarding index of networks. *Discrete Appl.*

Math., **23**(2) (1989), 103-123.

[41] A. Hellwig and L. Volkmann, Sufficient conditions for graphs to be λ'-optimal, super-edge-connected and maximally edge-connected. *Journal of Graph Theory*, **48** (2005), 228-246.

[42] W. D. Hillis, *The Connection Machine*. Cambridge, Mass. : MIT Press, 1985.

[43] D. F. Hsu (许德标)(ed.), Interconnection Networks and Algorithms. *Networks*, **23** (1993) (special issue), John Wiley and Son, Inc.

[44] D. F. Hsu (许德标), On container width and length in graphs, groups, and networks. *IEICE Transaction on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Science*, **E77-A** (1994), 668-680.

[45] F. K. Hwang (黄光明), A survey of double loop networks. in *Reliability of Computer and Communication Networks* (F. Roberts, F. K. Hwang, and C. Monma eds.), DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science 5, American Mathematical Society, Providence, RI, 1991, 143-152. A complementrary survey of double loop networks, *Theoretical Computer Science*, **265** (2001).

[46] L. Kang (康丽瑛) and J. Yuan (原晋江), Bondage number of planar graphs. *Discrete Mathematics*, **222** (2000), 191-198.

[47] R. Kralovic, P. Ruzicka, Minimum feedback vertex sets in shuffle-based interconnection networks. *Info. Process. Lett.*, **86**(2003), 191-196.

[48] M. S. Krishnamoorthy and B. Krishnamirthy, Fault diameter of interconnection networks. *Computers and Mathematics with Applications*, **13** (5/6) (1987), 577-582.

[49] F. T. Leighton, *Introduction to Parallel Algorithms and Architectures: Arrays, Trees, Hypercubes*. San Mateo, California: Morgan Kaufmann Publishers, 1992.

[50] 李乔, D. Sotteau, 徐俊明, 2-diameter of de Bruijn graphs. *Networks*, **28** (1) (1996), 7-14.

[51] 李乔, 徐俊明, 张忠良，两条平面直角路线的最大相交点数. 科学通报, **36** (22) (1991). 全文发表在应用数学学报(英文辑), **8** (2) (1992), 144-152; **10** (2)(1995), 215-222.

[52] 李乔, 徐俊明, 张忠良, 最优双环网络的无限族. 中国科学, A 辑, **23** (9) (1993), 979-992. 英文简报发表在 *Discrete Applied Math.* **46** (2) (1993), 179-183.

[53] 李乔, 张忠良, 徐俊明, A very short proof a conjecture concerning set to set broadcasting. *Networks*, **23** (4) (1993), 449-450.

[54] L. Lovász, V., Neumann-Lara and M. D. Plummer, Mengerian theorems for paths of bounded length. *Periodica Mathematica Hungarica*, **9** (1978), 269-276.

[55] 吕长虹, 徐俊明, 张克民, On $(d,2)$-dominating numbers of binary undirected de Bruijn graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **105** (2000), 137-145.

[56] W. Mader, On disjoint paths in graphs. *Annal of Discrete Mathematics*, **41** (1989), 333-340.

[57] A. Meir and J. W. Moon, Relation between packing and covering number of a tree. *Pacific Journal of Mathematics*, **61** (1) (1975), 225-233.

[58] S. F. Nugent, The iPDC/2 direct-connect communication technology. *Proceedings of Conference on Hypercube Concurrent Computers and Applications*, **1** (1988), 51-60.

[59] F. Roberts, F. K. Hwang (黄光明) and C. Monma (eds.), *Reliability of Computer and Communication Networks*, DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science 5, American Mathematical Society, Providence, RI, 1991.

[60] G. K. Wong and D. Coppersmith, A combinatorial problem related to multimodule memory organization. *Journal of Association for Computing Machinery*, **21** (1974), 392-401.

[61] M. L. Schlumberger, Proposed de Bruijn graph as a communication network. *Ph. D thesis*, Stanford University, 1974.

[62] A. A. Schoone, H. L. Bodlaender and J. van Leeuwen, Diameter increase caused by edge deletion. *Journal of Graph Theory*, **11** (3) (1987), 409-427.

[63] U. Teschner, A counterexample to a conjecture on the bondage number of a graph. *Discrete Mathematics*,

122 (1993) 393-395.

[64] U. Teschner, A new upper bound for the bondage number of graphs with small domination number. *Australas. J. Combin.* **12** (1995), 27-35.

[65] U. Teschner, The bondage number of a graph G can be much greater than $\Delta(G)$. *Ars Combin.* **43** (1996).

[66] Y. Saad and M. H. Schultz, Topological properties of hypercubes. *IEEE Transactions on Computers*, **37** (7) (1988), 867-872.

[67] C. L. Seitz, The cosmic cube. *Communications of Association for Computing Machinery*, **28** (1) (1985), 22-33.

[68] H. Sullivan and T. R. Bashkow, A large scale homogeneous full distributed parallel machine, I. *Proceeding of 4th Annual Symposium on Computer Architecture*, 1977, 105-117.

[69] H. Sullivan, T. R. Bashkow and D. Klappholz, A large scale homogeneous full distributed parallel machine, II. *Proceeding of 4th Annual Symposium on Computer Architecture*, 1977, 118-124.

[70] Y. Teranishi, Laplacian spectra and invariants of graphs. *Discrete Mathematics*, **257** (2002), 183-189.

[71] 徐俊明, *图论及其应用*, 合肥: 中国科学技术大学出版社, 第一版, 1998；第二版, 2004.

[72] 徐俊明, 不含紧优和几乎紧优双环网络的无限族. *科学通报*, **44**(5)(1999), 486-490.

[73] 徐俊明, 计算机互连双环网络的最优设计. *中国科学*, E 辑, **29** (3) (1999), 272-278.

[74] 徐俊明, 点可迁图的限制边连通度. *数学年刊*, A 辑, **21**(5) (2000), 605-608.

[75] 徐俊明, *互连网络拓扑结构分析*, 中国科学技术大学研究生院讲义, 胶印, 2000 年 4 月.

[76] 徐俊明, *Toplogical Structure and Analysis of Interconnection Networks*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 2001.

[77] 徐俊明, *Theory and Application of Graphs*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 2003.

[78] 徐俊明, 徐克力, On restricted edge-connectivity of graphs. *Discrete Mathematics*, **243** (2002), 291-298.

[79] 徐俊明, 刘琦, 一类 4 紧优双环网无限族的设计. *中国科学*, A 辑, **33** (11) (2003), 71-74.

[80] 徐俊明, 吕长虹, 张克民, A new property of binary undirected de Bruijn graphs. *数学年刊*, B 辑, **21** (1) (2000), 1-4.

[81] 徐俊明, 杨超, Connectivity of Cartesian product graphs. *Discrete Mathematics*, **306**(1) (2006), 159-165.

[82] $http://www-mat.upc.es/grup\_de\_grafs/table\_g.html$