国家自然科学基金资助项目

《网络中若干图论问题研究》

研究工作主要进展和成果总结报告

(2007.01-2009.12. 项目编号: 10671191)

项目负责人: 徐俊明

中国科技大学数学系，合肥，230026

xujm@ustc.edu.cn

说　明

这是国家自然科学基金资助项目《网络中若干图论问题研究》的结题报告的第二部分“研究工作主要进展和成果总结报告”. 该项目是上一个国家自然科学基金资助项目《网络性能组合分析》*(No. 10271114)* 的继续和深入. 因此, 此报告中部分内容与上一个项目的结题报告不免有重覆的地方, 重覆的内容主要是上一个项目结题时接收的文章在这个项目期间发表的.

摘　要

本项目研究互连网络中的图论问题和图论参数, 如: 连通度与限制连通度、路由转发指数、容错直径、控制数与距离控制数、约束数、反馈数、泛圈性与泛连通性等, 确定了笛卡尔乘积等乘积图的点连通度和边连通度的精确表达式、建立了路由转发指数、容错直径、各种类型控制数、约束数和反馈数的新界, 确定了这些参数对某些特殊图类的精确值; 解决了超立方体及其某些变型网络的容错泛圈性和泛连通性. 这些研究成果均属于创新性研究成果, 也推广了许多已知的结果. 本项目共完成学术论文 75 篇, 其中发表 66 篇（SCI 杂志收录 47 篇）, 接收 9 篇; 出版专著一部《组合网络理论》, 获中国科学院首届教学成果二等奖; 修改教材《图论及其应用》（该教材为中国科学技术大学精品教材, “十一五”国家重点图书, 教育部推荐研究生用书, 获中国科学技术大学优秀教材一等奖）. 这些研究成果大大丰富了图与组合网络理论和研究内容.

目 录

§1 关于连通度和有界连通度的研究

连通度是图论的经典概念, 也是网络可靠性和容错性的传统度量参数. 图 G 的点（边）连通度 $\kappa(G)$ ($\lambda(G)$) 是 G 中的最小点（边）割中的点（边）数. 我们继续上一个国家自然科学基金项目《网络性能组合分析》(No.10271114) 的研究, 获得以下研究成果.

1.1 各种乘积图的连通度研究

图的各种乘积（包括笛卡尔乘积）是重要的构图的方法. 在上一个项目中, 我们已经了这些图的连通度, 但我们(包括前人)用的方法是通过 Menger 定理, 构造出点(边)不交的路, 故障复杂, 验证困难, 只能给出下界, 得不到精确表达式. 在这个项目中我们找到一个新方法– 对最小分离集的分析方法, 是我们在审稿时发现的, 见 [C. Balbuena, P. Garcia-Vazquez and X. Marcote, Reliability of Interconnection Networks Modeled by a Product of Graphs. Networks, 48 (3) (2006), 114-120]. 利用这个方法, 我们给出各种乘积图的连通度的精确表达式. 用 $\kappa_i, \lambda_i, \delta_i$ 和 υ_i 表示图 G_i 的连通度, 边连通度, 最小度和阶数.

① 笛卡尔乘积无向图 $G_1 \times G_2$ 的连通度研究.

笛卡尔乘积是众所周知的图论运算. 关于笛卡尔乘积图的连通度和边连通度, 从 1958 年到 1998 年, 已知的结果是:

$$\kappa(G_1 \times G_2) \geq \kappa(G_1) + \kappa(G_2)$$

和

$$\lambda(G_1 \times G_2) \geq \lambda(G_1) + \lambda(G_2),$$

其中前一个结论是由 G. Sabidussi [Graphs with given group and given graph theoretical properties. Canadian Journal of Mathematics, 9 (1957), 515-525] 得到的, 徐俊明[Connectivity of Cartesian product digraphs and fault-tolerant routings of generalized hypercube.《高校应用数学学报》(英文辑), 13B (2) (1998), 179-187] 将这个结果推广到了有向图; 而后一个结论是由 K. Day, A.-E. Al-Ayyoub [The cross product of interconnection networks. IEEE Trans. Parallel Distributed Systems, 8(2) (1997), 109-118] 得到的.

在上一个研究项目中, 我们确定了笛卡尔乘积无向图的边连通度的精确表达式为(Discrete Math. 360(1) (2006), 159-165):

$$\lambda(G_1 \times G_2) = \min\{\delta_1 + \delta_2, \lambda_1 \upsilon_2, \lambda_2 \upsilon_1\}.$$

用的是构造性方法, 对点连通度, 只给出了下界: $\kappa(G_1 \times G_2) \geq \min\{\kappa_1 + \delta_2, \kappa_2 + \delta_1\}$. 在这个项目中, 我们利用新方法, 确定了笛卡尔乘积无向图的点连通度的精确表达式为:

$$\kappa(G_1 \times G_2) = \min\{\kappa_1 \upsilon_2, \kappa_2 \upsilon_1, \delta_1 + \delta_2\}.$$

这个结果发表在《Ars Combinatoria》(95 (2010), 235-245)上.

② 笛卡尔乘积有向图 $G_1 \times G_2$ 的连通度研究.

我们利用新方法, 完全确定了笛卡尔乘积有向图的点连通度和边连通度的精确表达式:

$$\kappa(G_1 \times G_2) = \min\{\kappa_1 \upsilon_2, \kappa_2 \upsilon_1, \delta_1^+ + \delta_2^+, \delta_1^- + \delta_2^-\};$$
$$\lambda(G_1 \times G_2) = \min\{\lambda_1 \upsilon_2, \lambda_2 \upsilon_1, \delta_1^+ + \delta_2^+, \delta_1^- + \delta_2^-\}.$$

这个结果已经发表在《Networks》(52 (2008), 202-205) 上.

③ **强乘积图 $G_1 \otimes G_2$的连通度研究.**

图的强乘积也是一个重要的构图的方法, 它包含笛卡尔乘积作为它的子图.

两个无向图 $G_1 = (V_1, E_1)$ 和 $G_2 = (V_2, E_2)$ 的强乘积 $G_1 \boxtimes G_2$ 有顶点集 $V_1 \times V_2$, 两顶点 (x_1, x_2) 和 (y_1, y_2) 相邻当且仅当对每个 $i = 1, 2$ 或者 $x_i = y_i$ 或者 $x_i y_i \in E_i$.

在上一个项目中, 我们给出点连通度的上界: $\kappa(G_1 \boxtimes G_2) \geq \min\{\kappa_1(1+\delta_2),\ \kappa_2(1+\delta_1)\}$ (《中国科学技术大学学报》, 36(3) (2006), 241-243). 在这个项目, 我们给出强乘积图 $G_1 \boxtimes G_2$ 的边连通度的精确表达式:

$$\lambda(G_1 \boxtimes G_2) = \min\{\lambda_1(v_2 + 2\varepsilon_2), \lambda_2(v_1 + 2\varepsilon_1), \delta_1 + \delta_2 + \delta_1\delta_2\};$$

而且, 如果 $\kappa_i = \delta_i$ $(i = 1, 2)$, 则它们的强乘积图的点连通度为:

$$\kappa(G_1 \boxtimes G_2) = \min\{\delta_1 v_2, \delta_2 v_1, \delta_1 + \delta_2 + \delta_1\delta_2\}.$$

这个结果发表在《中国科学技术大学学报》(38(5) (2008), 449-455) 上. (这篇文章的发表有一段小插曲, 见我的《科研随笔》中的"一件不吐不快的窝囊事"一文.)

1.2 笛卡尔乘积图的有界边连通度研究

设 G 是无向图, k 是不小于 G 的直径的整数. 图 G 关于 k 的有界边连通度 $\lambda_k(G)$ 是 G 中的最小边数, 这个数目的边集被移走到后的子图有直径大于 k. 对于笛卡尔乘积图, 我们获得如下结果: 如果 $k_i \geq 2$, 则

$$\lambda_{k_1+k_2}(G_1 \times G_2) \geq \lambda_{k_1}(G_1) + \lambda_{k_2}(G_2).$$

这个结果发表在《Discrete Applied Mathematics》(157 (2009), 3249- 3257) 上.

§2 限制连通度的研究

限制连通度是著名计算机专家 A.H.Esfahanian, 和 S.L.Hakimi [On computing a conditional edge-connectivity of a graph. Information Processing Letters, 27 (1988), 195-199] 提出来的. 连通图 G 的限制点(边)连通度为 κ'(或者 λ')意味着要使 G 不连通而且每个分支至少有两个点至少要从 G 中去掉 κ' 个点(或者 λ' 条边). Esfahanian 等得到限制边连通度的上界, 即: $\lambda'(G) \leq \xi(G)$, 等号成立, 则称 G 为 λ' 优的, 其中 $\xi(G)$ 是 G 的最小边度. 该项目对限制边连通度的研究, 得到下列结果.

2.1. 笛卡尔乘积图的限制边连通度

关于笛卡尔乘积图 $G_1 \times G_2$ 的限制边连通度, Chiue 和 Shieh [W.S. Chiue and B.S. Shieh, On connectivity of the Cartesian product of two graphs, Appl Math Comput 102 (1999), 129-137] 给出 $G_1 \times G_2$ 是 λ' 优的一些充分条件; Shieh [B.S. Shieh, Super edge- and point-connectivities of the Cartesian product of regular graphs, Networks 40 (2002), 91-96] 证明了: 如果 G_1 和 G_2 都是正则的, 则 $G_1 \times G_2$ 是 λ' 优的. Ueffing 和 Volkmann [N. Ueffing and L. Volkmann, Restricted edge-connectivity and minimum edge-degree, Ars Combin 66 (2003), 193-203] 在 G_1 和 G_2 都是 λ' 优的条件下, 也研究了 $G_1 \times G_2$ 的 λ' 优连通性. Li 和 Xu [L. Li and J.M. Xu, On restricted edge-connectivity of vertex-transitive graphs, J China Univ Sci Tech 34 (2004), 266-272] 确定了 $\lambda'(K_2 \times G) = \min\{\upsilon(G), 2\delta(G), 2\lambda'(G)\}$.

我们给出了笛卡尔乘积图的限制边连通度的下界:

$$\lambda'(G_1 \times G_2) \geq \min\{\lambda'_1 \upsilon_2, \lambda'_2 \upsilon_2, \lambda'_1 + 2\lambda'_2, \lambda'_2 + 2\lambda'_1\};$$

特别地, 如果 $\lambda'(G_i) = \xi(G_i)$, 则

$$\lambda'(G_1 \times G_2) = \min\{\lambda'_1 \upsilon_2, \lambda'_2 \upsilon_2, \xi(G_1 \times G_2)\};$$

以及

$$\lambda'(K_2 \times G) = \min\{\upsilon(G), 2\lambda(G)\}.$$

这些结果发表在《Networks》(49 (2007), 152-157) 上, 它改进了上面提到的一些结果.

2.2. 广义笛卡尔乘积图的限制边连通度

Bermond 等人[J.C. Bermond, C. Delorme, G. Farhi, Large graphs with given degree and diameter II, J. Combin. Theory, Ser. B 36 (1984) 32-48] 提出广义笛卡尔乘积图 $G_1 * G_2$.

设 $G_1 = (V_1, E_1)$ 和 $G_2 = (V_2, E_2)$ 是两个图. 对每个边 $xx' \in E_1$, 设 $\pi_{xx'}$ 是 V_2 上的置换. 乘积图 $G_1 * G_2$ 有顶点集 $V_1 \times V_2$, 两顶点 $(x, y), (x'y')$ 相邻当且仅当或者 $x = x'$ 且 $yy' \in E_2$ 或者 $xx' \in E_1$ 且 $y' = \pi_{xx'}(y)$. 如果对每个 $xx' \in E_1$, 选取 $\pi_{xx'}(y) = y$, 那么 $G_1 * G_2 = G_1 \times G_2$, 即笛卡尔乘积.

C. Balbuena, P. Garcia-Vazquez and X. Marcote [Reliability of Interconnection Networks Modeled by a Product of Graphs. Networks, 48 (3) (2006), 114-120] 获得点连通度的下界：

$$\kappa(G_1 * G_2) \geq \min\{\kappa(G_1)\upsilon(G_2), (\delta(G_1) + 1)\kappa(G_2), \delta(G_1) + \delta(G_2)\}.$$

我们研究了 $G_1 * G_2$ 的限制边连通度, 推广了一些已知结果, 并获得限制边连通度的界:

$$\min\{\lambda_1 \upsilon_2; \lambda_2 \upsilon_1; \lambda_1 + 2\lambda_2; \lambda_2 + 2\lambda_1\} \leq \lambda'(G_1 * G_2) \leq \min\{\lambda_1 \upsilon_2; \xi(G_1 * G_2)\}.$$

这些结果发表在《Applied Mathematics and Computation》（207 (2009), 300-306）上.

2.3. 确定了某些特殊图的限制连边通度

我们完全确定了有向 de Bruijn 网络、Kautz 网络（包括广义的）和一些超立方体变形网络（如增广超立方体、变形超立方体网络等）的限制点连通度和限制边连通度, 为这些网络的性能分析提供有了有力的理论依据.

① 有向 de Bruijn 网络

我们继上一个项目确定有向 Kautz 网络 $K(d, k)$ 的限制边连通度之后[The restricted edge-connectivity of Kautz undirected graphs. Ars Combinatoria. 81 (2006), 369-379], 完全确定了有向 de Bruijn 网络 $B(d, k)$ 的限制边连通度. 对任何 $k \geq 1$ 和 $d \geq 2$,

$$\lambda'(B(d,k)) = \begin{cases} \infty, & \text{for } k = 1 \text{ and } 2 \leq d \leq 3, \text{ or } k = d = 2; \\ 2d - 4, & \text{for } k = 1 \text{ and } d \geq 4; \\ 2d - 2, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

这个结果发表在《Ars Combinatoria》(87 (2008), 385-392) 上.

② 无向 de Bruijn 网络

我们继上一个项目确定无向 Kautz 网络 $UK(d,k)$ 的限制边连通度之后[Super edge-connectivity of de Bruijn and Kautz undirected graphs. 高校应用数学学报, 19B (4) (2004), 449-454] 完全确定了无向 de Bruijn 网络 $UB(d,k)$ 的限制边连通度. 对任何 $k \geq 1$ 和 $d \geq 2$,

$$\lambda'(UB(d,k)) = \begin{cases} \infty & \text{for } k=1 \text{ and } 2 \leq d \leq 3; \\ 2d-4 & \text{for } k=1 \text{ and } d \geq 4; \\ 4d-5 & \text{for } k=2 \text{ and } d \geq 2, \text{or } k=3 \text{ and } d=2; \\ 4d-4 & \text{for } k \geq 3 \text{ and } d \geq 3, \text{or } k \geq 4 \text{ and } d=2. \end{cases}$$

这个结果发表在《Ars Combinatoria》(83 (2007), 321-333)上.

③ **增广超立方体网络限制连通度**

作为超立方体网络的变形, n 维增广超立方体网络(augmented cube)AQ_n 是由 Choudum 和 Sunitha [S.A. Choudum, V. Sunitha, Augmented cubes, Networks 40 (2) (2002) 71-84] 提出来的, 并被证明了它是 $(2n-1)$ 正则 $(2n-1)$ 连通的. 该项目确定了它的限制点连通度和限制边连通度:

$$\kappa'(AQ_n) = 4n-8 \text{ if } n \geq 6;$$
$$\lambda'(AQ_n) = 4n-4 \text{ if } n \geq 5.$$

这个结果发表在《Information Processing Letters》(106 (2) (2008), 59-63)上(证明的修订见: 109(12) (2009), 592-593).

④ **变形超立方体网络的限制连通度**

作为超立方体网络的变形, n 维变形超立方体(Varietal hypercube)VQ_n 是 Cheng 和 Chuang [Cheng Shou-yi, Chuang Jen-hui. Varietal hypercube-a new interconnection networks topology for large scale multicomputer [C]. Prooceedings of International Conference on Parallel and Distributed Srstems, 1994, 703-708]于 1994 年提出来的. 本项目确定了它的连通度和限制连通度:

$$\kappa(VQ_n) = \lambda(VQ_n) = n \text{ if } n \geq 1;$$
$$\kappa'(VQ_n) = 2n-2 \text{ if } n \geq 3;$$
$$\lambda'(VQ_n) = 2n-2 \text{ if } n \geq 2.$$

这个结果发表在《中国科学技术大学学报》(39 (12) (2009), 1248-1252)上.

⑤ **置换图的限制连通度**

Chen 等人[Appl. Math. Comput. 140 (2003) 245-254] 提出一类图, 我们暂时叫它置换图, 它包含超立方体和许多变形作为它的特例. 设 G_0 和 G_1 是两个 n 阶图, M 是 G_0 和 G_1 之间的完备匹配. 所谓置换图 $G(G_0, G_1; M)$ 的顶点集为 $V(G_0) \cup V(G_1)$, 边集为 $E(G_0) \cup E(G_1) \cup M$.

Chen 等人研究了这种置换图的超连通性. 我们通过研究了置换图的限制边连通度和限制边连通度, 推广了他们的结果.

设 G_1 和 G_2 是 n 阶 k 正则 k 连通图, $G = G(G_0, G_1; M)$, 则对任何 $k \geq 2$,

(1) $\kappa'(G) = k+1$ 当且仅当 $n = k+1$, $k \geq 3$;

(2) $k+1 < \kappa'(G) \leq 2k$ 当且仅当 $n \geq k+2$;

(3) $\kappa'(G) = 2k$ 如果 G_0 和 G_1 都不含三角形.

设 G_1 和 G_2 是 n 阶 k 正则 k 连通图, $G = G(G_0, G_1; M)$, 则对任何 $k \geq 1$,

(1) $\lambda'(G)=k+1$ 当且仅当 $n=k+1$;

(2) $k+1<\lambda'(G)\leq 2k$ 当且仅当 $n\geq k+2$;

(3) $\lambda'=2k$ 如果 G_0 和 G_1 都不含三角形.

作为这两个结果的推论, 我们立即获得超立方体 Q_n, 交叉立方体 CQ_n, Möbius 立方体 MQ_n, 扭立方体 TQ_n 和局部扭立方体 LTQ_n 等网络的限制点连通度和限制边连通度均为 $2n-2$.

这个结果发表在《Ars Combinatoria》(Ars Combinatoria, 94 (2010), 25-32)(2006) 上.

2.4. 强限制连通度

关于限制点(边)连通度一种推广是 h 强限制点(边)连通. 连通图 G 的 h 强限制点(边)连通度为度 $\kappa^{(h)}$ ($\lambda^{(h)}$) 意味着要使 G 不连通而且每个分支至少含 $h+1$ 个点至少要从 G 中去掉 $\kappa^{(h)}$ 个点($\lambda^{(h)}$ 条边).

① 置换图的 2 强限制连通度

在上一个项目中, 我们研究了置换图(定义见 2.3 节中 ⑤)的 2 强限制边连通度 [Q. Zhu, J.-M. Xu, M. Lü, Edge fault tolerance analysis of a class of networks, Applied Mathematics and Computation 172 (1) (2006) 111 - 121], 该项目研究了置换图的 2 强限制点连通度:

设 $G=G(G_0,G_1;M)$, G_0 和 G_1 都是 $(k-1)$ 正则, 不含三角形, $\kappa'(G_0)=\kappa'(G_1)=2k-4$. 如果 G_0 和 G_1 中任何两顶点至多只有两个公共邻点, 那么

$$\kappa^{(2)}(G)=3k-5 \text{ for } k\geq 8;$$
$$\kappa^{(2)}(G)\geq 3k-5 \text{ for } 6\leq k\leq 7.$$

作为这个结果的推论, 我们立即获得超立方体 Q_n, 交叉立方体 CQ_n, Möbius 立方体 MQ_n, 扭立方体 TQ_n 和局部扭立方体 LTQ_n 等网络的 2 强限制点连通均为 $3n-5$ 如果 $n\geq 8$.

这个结果分别发表在《Information Processing Letters》(103 (2007), 222-226).

② 折叠超立方体的 2 强限制连通度

置换图不包含折叠超立方体, 该项目确定了 n 维折叠超立方体 FQ_n 的 2 强限制点和边连通度分别为:

$$\kappa^{(2)}(FQ_n)=3n-2 \text{ for } n\geq 8;$$
$$\lambda^{(2)}(FQ_n)=3n-1 \text{ for } n\leq 5.$$

这个结果发表在《Information Science》(177 (2007), 1782-1788)上.

§3 关于泛圈性和泛连通性的研究

泛圈性和泛连通性反映网络的结构特征, 它对执行某些算法特别有用, 也是近几年网络结构研究热点之一. 显然, 泛圈性和泛连通性问题是NP-hard 的, 确定某些著名网络的泛圈性和泛连通性显得更有现实意义.

n 阶图 G 被称为是 k 泛圈的 (k-pancyclic) ($k\leq n$) 如果它包含所有长度从 k 到 n 的圈, G 被称为泛圈的 (pancyclic) 如果它是 g 泛圈的, 其中 $g=g(G)$ 是 G 的围长. 图 G 被称为是点(边)泛圈的(vertex-pancyclic, edge-pancyclic)如果 G 中任何点都落在所有长度从 $g(G)$ 到 n 的圈上.

图 G 被称为是 Hamilton 连通的 (hamiltonian connected) 如果对 G 中任何两顶点之间有一条 Hamilton 路. 图 G 被称为是泛连通的 (panconnected) 如果对 G 中任何两顶点 x 和 y, 距离为 d, G 中存在所有长度从 d 到 $n-1$ 的 xy 路.

Hamilton 性、Hamilton 连通性、泛圈性、点泛圈性、边泛圈性、泛连通性之间的包含关系见图 1.

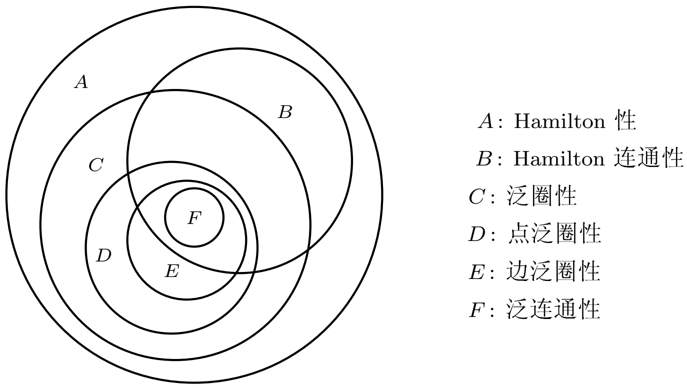

图 1 泛圈性和泛连通性的包含关系.

该项目继续上一个项目研究, 完成了一篇综述文章, 发表在《Frontiers of Mathematics in China》（4 (2) (2009), 217-252）上; 确定了一些著名网络（如超立方体、增广立方体、纽立方体, 局部扭立方体、折叠超立方体, 交叉立方体等）的泛圈性和泛连通性, 容错泛圈性和容错泛连通性. 具体结果分述如下.

3.1 超立方体的容错泛圈性与泛连通性

① 混合容错泛圈性

关于超立方体（hypercubes） Q_n 的容错泛圈性, 我们证明了: 对于有 f_v 个故障点和 f_e 条故障边的超立方体 Q_n, 如果 $f_v+f_e\le 2n-4$, $f_e\le 2n-5$, $n\ge 3$ 且每个顶点至少有两条非故障边, 那么中存在长至少为 2^n-2f_v 的非故障圈. 这个结果改进了许多关于超立方体的泛圈性已知结果, 并发表在《中国科学技术大学学报》（38 (2008), 1020-1023）上.

② 边容错泛连通性

关于超立方体的边容错泛圈性, 我们证明了: 对于至多有 $n-1$ 条故障边的容错超立方体 Q_n, 如果它正好有 $n-1$ 条故障边但不关联于同一个顶点, 那么对于 Q_n 中任意两点 x 和 y, 距离为 d, 存在一条长为 ℓ 的 xy 非故障路, 其中 ℓ 满足 $d+2\le\ell\le 2^n-1$ 且 $\ell-d\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ 2)$. 这个结果改进了许多关于超立方体的边容错泛圈性的已知结果, 并发表在《中国科学技术大学学报》（38 (2008), 1017-1019）上.

③ 更多边故障的容错泛连通性

关于超立方体有更多故障边的容错泛连通性, 我们证明了: 设 x 和 y 是 Q_n 中任意两点, 距离为 d, ℓ 是满足 $d+2\le\ell\le 2^n-1$ 且 $\ell-d\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ 2)$ 的整数. 如果 Q_n 中至多有 $2n-5$ 条边同时发生故障, 但每个点至少有两条非故障边, 那么中存在一条不含故障边且长为 ℓ 的 xy 路. 这个结果是目前关于超立方体容错泛连通性研究中最好的结果, 它推广了许多已知结果, 发表在《Information Sciences》（179 (2009), 404-409）上.

3.2 增广超立方体的泛连通性和泛圈性

① 泛连通性和边容错泛圈性

对于增广超立方体（augmented cubes）AQ_n, 我们证明了它的泛连通性, 即: 对 AQ_n 中任意两点 x 和 y, 距离为 d, 和满足 $d \le \ell \le 2^n - 1$ 的整数 ℓ, AQ_n 中存在一条长为 ℓ 的非故障路.

我们也证明了 AQ_n 是 $2n-3$ 边容错泛圈的, 即, 只要 AQ_n 中边故障数不超过 $2n-3$, 则对任何满足 $3 \le \ell \le 2^n$ 的整数 ℓ, AQ_n 中存在长为 ℓ 且不含故障边圈.

这两个结果发表在《Parallel Computing》（33 (2007), 36-42）上.

② 混合故障的容错圈性

对于点故障和边故障都出现的情形, 我们证明了: AQ_n 是 $2n-3$ 容错泛圈的, 即, 只要 AQ_n 中故障点和故障边数不超过 $2n-3$, 则对任何满足 $3 \le \ell \le 2^n$ 的整数 ℓ, AQ_n 中存在长为 ℓ 且不含故障点和故障边圈.

这个结果改进了一些已知结果, 发表在《Information Processing Letters》（103 (2007), 52-56）上.

③ 混合故障的容错泛连通性

对于容错泛连通性研究, 我们得到如下结果: 如果 AQ_n 有至多 $2n-5$ 个故障点和故障边, 对 AQ_n 中任意两个非故障点 x 和 y, 距离为 d, 和满足 $d+2 \le \ell \le 2^n - 1 - f_v$ 的整数 ℓ, AQ_n 中存在长为 ℓ 且不含故障点和边的 xy 路.

这个结果已经发表在《Frontiers of Mathematics in China》（4 (2009), 697-719）上.

3.3 纽立方体的泛圈性

我们证明了纽立方体（twisted cubes）TQ_n 是 $n-2$ 容错泛圈的, 即, 只要 TQ_n 中点故障数和边故障数不超过 $n-2$, 则对任何满足 $4 \le \ell \le 2^n - f_v$ 的整数 ℓ, TQ_n 中存在长为 ℓ 且不含故障点和故障边圈. 这个结果发表在《运筹与管理》（16 (1) (2007), 52-57）上.

3.4 局部纽超立方体的边泛圈性

我们证明局部扭立方体（locally twisted cubes）LTQ_n 的边泛圈性, 即局部扭立方体 LTQ_n 的每条边含在每个长度（从 4 到 2^n ）的圈上. 这个结果已经发表在《Ars Combinatoria》（89 (2008), 89-94）上.

3.5 平衡超立方体的边泛圈性

平衡超立方体（balanced hypercube）BQ_n 也是超立方体网络的一种变形, 是由 Huang 和 Wu [Area efficient layout of balanced hypercubes, Int'1 J. High Speed Electronics and Systems, 6(4), (1995), 631-646] 提出来的, 并且证明了: BQ_n 是二部图, 并且对任何满足 $2 \le 2n$ 的整数 ℓ, BQ_n 中包含长为 ℓ 的圈. 我们改进了这个结果, 证明了: BQ_n 是边泛圈的, 即: 对任何满足 $4 \le \ell \le 2^{2n}$ 的偶整数 ℓ, BQ_n 中的每条边含在长为 ℓ 的圈中. 而且, 我们还证明了: BQ_n 是 Hamiltonian laceable. 这些结果已发表在《Applied Mathematics and Computation》（189 (2007), 1393-1401）上.

3.6 折叠超立方体的容错 Hamilton 性

关于折叠超立方体（folded hypercubes）FQ_n 的容错 Hamilton 性, D.Wang [Embedding hamiltonian cycles into folded hypercubes with faulty links. J. Parallel and Distributed Computing, 61(2001),

545-564] 证明了: FQ_n 是 $(n-1)$ 边容错 Hamilton 的. 我们改进了这个结果, 得到: FQ_n 是 $(2n-3)$ 限制边容错 Hamilton 的. 这个结果将发表在《Ars Combinatoria》(95 (2010), 179-186) 上.

3.7 交叉超立方体的容错泛连通性

关于交叉立方体(crossed hypercubes) CQ_n 的容错泛连通性, Huang et al [On the fault-tolerant hamiltonicity of faulty crossed cubes, IEICE Trans. Fundamentals, E85-A (6) (2002), 1359-1370] 和Chen et al [On some super fault-tolerant Hamiltonian graphs, Applied Math. and Computation], 148 (2004), 729-741] 证明了 CQ_n 是 Hamilton 连通的. 我们改进了这个结果, 证明了: 对任何整数 $n \geq 3$, 如果 CQ_n 中点故障数 f_v 和边故障数 f_e 之和不超过 $n-3$, 那么对任何满足 $2_{n-1}- \leq \ell \leq 2^n - f_v - 1$ 的整数 ℓ, CQ_n 中任何两个非故障点之间存在长为 ℓ 且不含故障点和故障边的路. 这个结果发表在《Theoretical Computer Science》(407 (2008),110-116) 上.

3.8 笛卡尔乘积图的泛圈性和泛连通性

关于笛卡尔乘积图的泛圈性和泛连通性, 我们获得如下结果. 如果 G_1 和 G_2 都是泛连通的且阶数至少为 3, 那么笛卡尔乘积图 $G_1 \times G_2$ 也是泛连通性的; 如果 G_1 和 G_2 都是奇阶且是二部泛连通的 Hamilton 图, 或者都是阶数至少为 4 的二部泛连通的二部图, 那么 $G_1 \times G_2$ 是二部泛连通的. 这两个结果推广了许多有关结论, 它们分别发表在《Journal of Supercomputing》(DOI 10.1007/s11227-009-0356-8, 2009) 和《Australasian Journal of Combinatorics》(46 (2010), 297-306) 上.

§4 关于路由转发指数的研究

路由是网络的基本功能, 路由转发指数是度量路由优劣的重要度量参数之一, 由金芳蓉等人[The forwarding index of communication networks. IEEE Trans. Info. Theory, 33 (1987), 224-232] 提出. 已被证明: 路由转发指数的确定问题是 NP-hard 的[R. Saad, Complexity of theforwarding index problem.SIAM J. Discr. Math. 6 (1993),418-427]. 本项目继续上一个项目的的研究, 获得以下成果.

4.1 点转发指数的上界

关于点转发指数的上界, 金芳蓉等人在提出路由转发指数概念时, 给出了一个上界 $(n-1)(n-2)$, 其中 n 是图的阶. 我们通过证明一个数论结果改进了这个上界:

$$(n-1)(n-2) - \left(2n-2-\Delta\left\lfloor 1+\frac{n-1}{\Delta}\right\rfloor\right)\left\lfloor\frac{n-1}{\Delta}\right\rfloor,$$

其中 Δ 是图的最大度. 另外, 我们确定了参数 $\xi_{\delta,n}$ (所有阶数为 n 最小度为 δ 图的点转发指数 $\xi(G)$ 的最小值) 的精确值:

$$\xi_{\delta,n} = \left\lceil\frac{2(n-1-\delta)}{\delta}\right\rceil,$$

其中 δ (≥ 1) 为图 G 的最小度.

这一结果发表在《Ars Combinatoria》(83 (2007), 289-293) 上.

4.2 连通正则图的转发指数

对于 k 连通 k 正则图 G 的转发指数, Fernandez de la Vega 和 Manoussakis [Discrete Applied Mathematics, 1989, 23(2): 103-123] 给出了点转发指数 $\xi(G)$ 和边转发指数 $\pi(G)$ 的上界, 并且猜想:

$$\xi(G) \leq \lceil (n-k)(n-k-1)/k \rceil.$$

该项目证明了这个猜想当 $k = 3$ 时成立, 并改进上界为:

$$\xi(G) \le \lceil (n-k)(n-k-1)/k \rceil - (n-k-1)$$

和

$$\pi(G) \le n\lceil (n-k-1)/k \rceil - (n-k).$$

这个结果发表在《中国科学技术大学学报》(38 (2008), 456-459)上.

4.3 确定了某些著名网络的转发指数

确定了某些著名网络, 如: 增广超立方体、循环网络、立方连通圈网络、缠绕蝶形有向图和缠绕蝶形无向图等的点和边转发指数.

① 增广超立方体网络的边和点转发指数

广超立方体 A_n 是 S. A. Choudum and V. Sunitha [Augmented Cubes. *Networks*, 40 (2) (2002), 71-84] 提出来的超立方体的一个变形. 我们确定了它的点转发指数和边转发指数分别为

$$\xi(AQ_n) = \frac{2^n}{9} + \frac{(-1)^{n+1}}{9} + \frac{n2^n}{3} - 2^n + 1, \quad \pi(AQ_n) = 2^{n-1}.$$

这个结果发表在《Information Processing Letters》(101 (2007), 185-189)上.

② 立方连通圈网络的点转发指数

n 维立方连通圈(cube-connected cycle), 记为 $CCC(n)$, 是将长为 n 的无向圈 C_n 替代 n 维超立方体 Q_n 的每个顶点而构造出来的, 其中 Q_n 中第 i 维边连到 C_n 中第 i 个顶点. Shahrokhi 和 Székely [Discrete Appl. Math., 108 (2001), 175-191] 得到 $CCC(n)$ 的边转发指数的近似表达式:

$$\pi(CCC_n) = \frac{5}{4}n^2 2^n (1 - o(1)).$$

该项目得到 $CCC(n)$ 的点转发指数的近似表达式:

$$\xi(CCC_n) = \frac{7}{4}n^2 2^n (1 - o(1)).$$

这个结果发表在《Discrete Appl. Math.》(157 (2009), 1-7)上.

③ 缠绕蝶形有向图的点转发指数

对于正整数 Δ 和 n, 设 $\mathbf{Z}_n = \{0, 1, \cdots, n-1\}$ 是模 n 的加法群, $\mathbb{Z}_\Delta^n = \{x_0 x_1 \cdots x_{n-1} : x_i \in \mathbf{Z}_\Delta\}$. 度为 Δ 且维数为 n 的缠绕蝶形有向图(wrapped butterfly digraph)$B_\Delta(n)$ 的顶点为 $(\ell; \mathbf{x})$, 其中 $\ell \in \mathbf{Z}_n$, $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_\Delta^n$; 顶点 $(l; x_0 x_1 \cdots x_{n-1})$ 与顶点 $(l+1; x_0 \cdots x_{l-1} \alpha x_{l+1} \cdots x_{n-1})$ 对任何 $\alpha \in \mathbf{Z}_\Delta$. 显然, $B_\Delta(n)$ 是强连通的 Δ 正则有向图, 阶为 $N = n\Delta^n$. 除掉 $B_\Delta(n)$ 中所有边的方向得到的无向图叫缠绕蝶形无向图, 记为 $UB_\Delta(n)$.

该项目确定了 $B_\Delta(n)$ 的点转发指数为:

$$\xi(B_\Delta(n)) = \frac{3n(n-1)}{2}\Delta^n - \frac{n(\Delta^n - 1)}{\Delta - 1} + 1.$$

对于 $UB_\Delta(n)$ 的点转发指数, 我们只获得一个上界:

$$\xi(UB_\Delta(n)) < \frac{5n^2 - 4n}{4}\Delta^n - 2n\left(\Delta^{\lfloor n/2 \rfloor} + \Delta^{\lceil n/2 \rceil - 1}\right) + (3n+1).$$

这些结果发表在《Networks》(53 (2009), 329-333) 上.

④ **强连通循环有向图的转发指数**

对于强连通循环有向图 $G(n;S)$, 其中 $S=\{s_1,s_2,\cdots s_k\}\subseteq\{1,2,\cdots,n-1\}$, $s_1<s_2<\cdots<s_k$, 我们得到:

$$\xi(G(n;S))=\min_E\left\{\sum_{i=1}^{n-1}(e_{i1}+e_{i2}+\ldots+e_{ik})\right\}-(n-1);$$

$$\min_E\left\{\sum_{i=1}^{n-1}(e_{i1}+e_{i2}+\ldots+e_{ik})/k\right\}\le\pi(G(n;S))$$
$$\le\min_E\{\max_{i\in\{1,2,\ldots,k\}}\{e_{1i}+e_{2i}+\ldots+e_{(n-1)i}\}\},$$

其中 $E=\{e_{i1}s_1+e_{i2}s_2+\cdots+e_{ik}s_k(\bmod n):1\le i\le n-1,\ 1\le j\le k\}$ 是 n 关于 S 的表示. 特别地, 如果 $n=d^m$ 且 $S=\{1,d,\cdots,d^{m-1}\}$, $d\ge 2$, 那么

$$\begin{aligned}\xi(G(d^m;S)) &= \sum_{i=1}^{d^m-1}(a_{i1}+a_{i2}+\cdots+a_{im})-(d^m-1),\\ \pi(G(d^m;S)) &= (d-1)d^m/2.\end{aligned}$$

这个结果发表在《数学杂志》(27 (2007), 621-629) 上.

§5 关于容错直径的研究

图的容错直径概念是由 F. R. K. Chung 和 M. R. Garey [Diameter bounds for altered graphs. Journal of Graph Theory, 8 (4) (1984), 511-534] 首先提出来的. k 连通图 G 的容错直径 $D_k(G)$ 是从 G 中任意去掉 $k-1$ 个顶点后得到的图的最大直径. 它们是容错网络有效性的重要度量参数.

5.1. 广义笛卡尔乘积图容错直径

对于笛卡尔乘积图 $G_1\times G_2$ 的容错直径, Krishnamoorthy 和 Krishnamurthy [M. S. Krishnamoorthy, B. Krishnamurthy, Fault diameter of interconnection networks. Comput. Math. Appl. 13 (5/6) (1987), 577-582] "证明" 了: $D_{k_1+k_2}(G_1\times G_2)\leqslant D_{k_1}(G_1)+D_{k_2}(G_2)$.

然而, 徐敏等人 [M. Xu, J.-M. Xu, X.-M. Hou, Fault diameter of Cartesian product graphs. Info. Process. Lett., 93 (2005), 245-248] 给出一个反例 $C_4\times C_4$, 并修改上界为: $D_{k_1+k_2}(G_1\times G_2)\leqslant D_{k_1}(G_1)+D_{k_2}(G_2)+1$.

Banič 和 Žerovnik [I. Banič and J. Žerovnik, Fault-diameter of Cartesian graph bundles. Info. Process. Lett., 100 (2) (2006), 47-51] 考虑笛卡尔图束 (Cartesian graph bundle) $G_1\cdot G_2$ (它包含笛卡尔乘积), 推广了徐敏等人的结果: $D_{k_1+k_2}(G_1\cdot G_2)\leqslant D_{k_1}(G_1)+D_{k_2}(G_2)+1$.

对于广义笛卡尔乘积图 (定义见 2.2 节, 它包含笛卡尔图束) G_1*G_2 的容错直径, 我们获得以下结果:

$$D_{k_1+k_2}(G_1*G_2)\leqslant D_{k_1}(G_1)+D_{k_2}(G_2)+1.$$

这个结果发表在《Information Processing Letters》(102 (2007), 226-228) 上.

5.2. 参数 $f(t,3)$

Chung 和 Garey 在研究容错直径时, 提出参数 $f(t,k)$, 它表示直径为 k 的 $(t+1)$ 边连通图中移去 t 条边后得到的图的最大直径. 显然, 对于直径为 k 的图 G, 有 $D_{t+1}(G) \le f(t,k)$. 1984 年, C. Peyrat [Diameter vulnerability of graphs. Discrete Appl. Math., 9(3) (1984), 245-250] 确定了 $f(t,2)=4$ 并给出 $f(t,3)$ 的"上界": 当 t 充分大时,

$$3\sqrt{2t}-3 \le f(t,3) \le 3\sqrt{2t}+4.$$

该项目得到如下的界：当 $t \ge 4$ 时

$$4\sqrt{2t}-6 < f(t,3) \le \max\{59, 5\sqrt{2t}+7\}.$$

显然, 当 $t \ge 50$ 时, 我们的下界大于 Peyrat 的上界. 与此同时, 我们还确定了: $f(2,k)=3k-1$ 和 $f(3,k)=4k-2$. 这些结果发表在《Discrete Mathematics》（309 (2009), 1001-1006）上.

5.3 边持久数

设 G 是无向图, 直径为 d, k 是不小于 d 的整数. 图 G 关于 k 的有界点连通度 $\kappa_k(G)$（边连通度 $\lambda_k(G)$）是最小点（边）数, 这个数目的边集从 G 中移走到后的子图有直径大于 d. G 的点持久数（persistence）定义为 $\kappa_d(G)$, 边持久数定义为 $\lambda_d(G)$. 持久数是直径脆弱性度量, 这个概念的点情形是由 Boesch 等人[Graphs as models of communication network vulnerability: connectivity and persistence,Networks, 11 (1981), 57-63] 首先提出来的, 边情形由 Exoo [G. Exoo, On a measure of communication network vulnerability, Networks, 12(1982), 405-409] 提出来的. 该项目研究了边持久数, 用 $D^+(G)$ 表示图 G 的边持久数.

Graham 和 Harary [N. Graham and F. Harary, Changing and unchanging the diameter of a hypercube, Discrete Applied Mathematics, 37/38 (1992), 265-274] 确定了 $D^+(Q_n)=n-1$. Sung 和Wang [Changing the diameter of graph products (J. Wang ed.): COCOON 2001, LNCS 2108, Springer, 2001, 390-394] 研究了笛卡尔乘积图的边持久数, 给出（没有证明）了 $C_m \times C_n$, $Q_n \times C_m$ 和 $C_m \times P_n$ 的边持久数的"精确值", 同时他们猜想:

$$D^+(G_1 \times G_2) \ge \max\{D^+(G_1), D^+(G_2)\}+1.$$

我们通过证明

$$\lambda_{k_1+k_2}(G_1 \times G_2) \ge \lambda_{k_1}(G_1)+\lambda_{k_2}(G_2) \text{ for } k_i \ge 2,$$

得到

$$D^+(G_1 \times G_2) \ge D^+(G_1)+D^+(G_2) \text{ for } k_i \ge 2.$$

从而证明 Sung 和Wang 的上述猜想, 并确定了上述提到的笛卡尔乘积图的边持久数的精确值：

$$D^+(C_n \times P_m) = \begin{cases} 1 & \text{for } n=3; \\ 2 & \text{for } n \ge 4. \end{cases}$$

$$D^+(C_n \times C_m) = \begin{cases} 2 & \text{if } n=3 \text{ or } m=3 \text{ or both } n \text{ and } m \text{ are odd;} \\ 3 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$D^+(Q_n \times P_m) = n \text{ for } n \ge 2 \text{ and } m \ge 2.$$

$$D^+(Q_n \times C_m) = \begin{cases} n & \text{for } m = 3, \\ n+1 & \text{for } m \geq 4 \end{cases}$$

这些值说明 Sung 和Wang 所确定的值是不正确的. 我们的结果发表在《Discrete Applied Mathematics》(157 (2009), 3249-3257) 上.

§6 控制数及相关问题研究

关于笛卡尔乘积 $G\times H$ 的控制数, Vizing [V. G. Vizing, Some unsolved problems in graph theory. Usp. Mat. Nauk. 23(6(144)) (1968), 117-134] 提出如下猜想: 对任何两个图 G 和 H,

$$\gamma(G)\gamma(H) \leq \gamma(G \times H). \tag{6.1}$$

2000 年, Clark 和 Suen [W. E. Clark, S. Suen, An inequality related to Vizing's conjecture. Electron J Combin, 7(1) (2000), No.4] 证明了: $\gamma(G)\gamma(H) \leq 2\gamma(G \times H)$.

本项目围绕 Vizing 猜想开展了一些研究.

6.1 整数 k 控制数及 Vizing 猜想

设 G 是图, k 是正整数, N 是非负整数集. 函数 $f: V(G) \to N$ 称为 G 的整数 k 控制数（k-domination number）函数, 如果

$$\sum_{y\in N_G[x]} f(y) \geq k \ \ \forall\, x \in V(G). \tag{6.2}$$

G 的整数 k 控制数（k-domination number）$\gamma^k(G)$ 定义为 G 的所有整数 k 控制函数 f 的最小权, 即: 令 $F(G)$ 是 G 的 k 控制数函数集, 则

$$\gamma^k(G) = \min_{f\in F(G)} \left\{ \sum_{x\in V(G)} f(x) \right\}. \tag{6.3}$$

子集 $S \subset V(G)$ 是 G 的包装（packing）如果对 S 中任何两个不同顶点 x 和 y 均有 $N_G[x] \cap N_G[y] = \emptyset$. G 的包装数（packing number）$\rho(G)$ 定义为 G 的包装中的最大点数. 显然, 对任何图 G, $\rho(G) \leq \gamma(G)$. 对 $0 \leq k < \rho(G)$, 图 G 称为 $(\rho, \gamma - k)$ 图, 如果 $\rho(G) = \gamma(G) - k$.

对于参数 ρ, γ 和 γ^k, Domke 等人[G. Domke, S.T. Hedetniemi, R.C. Laskar, G. Fricke, Relationships between integer and fractional parameters of graphs, in: Graph Theory, Combinatorics, and Applications, vol. 2, John Wiley & Sons, Inc., 1991, pp. 371-387] 证明: 对任何图 G 和 k 均有 $k\rho(G) \leq \gamma^k(G) \leq k\gamma(G)$. Hartnell 和 Rall [B. L. Hartnell, D. F. Rall, Vizing's conjecture and the one-half argument, Discuss. Math. Graph Theory, 15 (1995) 205-216] Vizing 猜想（ 6.1）对 (ρ, γ) 图和 $(\rho, \gamma - 1)$ 图都是成立的.

至于笛卡尔乘积图 $G \times H$ 的整数 k 控制数, Brešar 等人 [B. Brešar, M.A. Henning, S. Klavzar, On integer domination in graphs and Vizing-liking problems, Taiwanese J. Math. 10 (5) (2006), 1317-1328] 得到:

$$\gamma^k(G)\gamma^k(H) \leq k(k+1)\gamma^k(G \times H) \tag{6.4}$$

该项目研究了笛卡尔乘积图 $G \times H$ 的整数 k 控制数, 得到它的下界:

$$\gamma^k(G \times H) \geq \max\{\rho(G)\gamma^k(H), \rho(H)\gamma^k(G)\};$$

而且, 如果 $m = \gamma^k(G) - k\rho(G)$, 那么

$$\gamma^k(G \times H) \geq \rho(G)\gamma^k(H) + \gamma^m(H).$$

特别, 如果 $k = 1$, 那么

$$\gamma(G \times H) \geq \rho(G)\gamma(H) + \gamma^m(H). \tag{6.5}$$

这个结果改进了 Chen 等人 [G. Chen, W. Piotrowski, W. Shreve, A partition approach to Vizing's conjecture, J. Graph Theory, 21 (1996) 103-111] 的结果. 在式（6.5）中, 如果 $\rho(G) = \gamma(G)$ 或者 $\rho(G) = \gamma(G) - 1$, 它意味着: $\gamma(G \times H) \geq \gamma(G)\gamma(H)$. 结合式（6.4）, 即得上面提到的 Hartnell 和 Rall 结果: Vizing 猜想（ 6.1）对 (ρ, γ) 图和 $(\rho, \gamma - 1)$ 图成立. 我们的证明采用了和文献中不同的方法, 不仅改进了前人的结果而且从不同的角度得到了文献中的结论, 审稿人强烈推荐发表该论文, 该证明方法为解决 Vizing 猜想提供了新的思路.

这些结果发表在《Discrete Mathematics》（309 (2009), 3413-3419）上.

6.2 全控制数及整数 k 全控制数

① 全控制数的 Vizing 猜想研究

为了研究 Vizing 猜想是否对全控制数 $\gamma_t(G)$ 成立, Henning 和 Rall [M. A. Henning, D. F. Rall, On the total domination number of Cartesian products of graphs. Graph Comb. 21 (2005), 63-69] 得到: 对任何没有孤立点的两个图 G 和 H,

$$\gamma_t(G)\gamma_t(H) \leq 6\gamma_t(G \times H), \tag{6.6}$$

并提出如下猜想:

$$\gamma_t(G)\gamma_t(H) \leq 2\gamma_t(G \times H). \tag{6.7}$$

该项目改进了式（6.6）中的上界, 得到:

$$\gamma_t(G)\gamma_t(H) \leq 5\gamma_t(G \times H),$$

这个结果发表在《Discuss Math Graph Theory》（27 (2007), 175-178）上.

② 整数 k 全控制数

2008 年, Ho [P. T. Ho, A note on the total domination number. Util. Math. 77 (2008), 97-100] 将我们的结果改进为: $\gamma_t(G)\gamma_t(H) \leq 2\gamma_t(G \times H)$, 从而证明了猜想（6.7）.

该项目考虑整数 k 全控制数. G 的整数 k 全控制数（total k-domination number）$\gamma_t^k(G)$ 的定义是把整数 k 控制数定义（6.3）中的闭邻集改为开邻集即可. 显然, $\gamma_t^1(G) = \gamma_t(G)$. 全 k 控制数概念是由 Cockayne 等人 [E. J. Cockayne, R. M. Dawes, S. T. Hedetniemi, Total domination in graphs. Networks, 10 (1980), 211-219] 首先提出来的. 该项目证明了对于笛卡尔乘积图的整数 k 全控制数有类似于式（6.4）的结果, 即: 对任何没有孤立点的两个图 G 和 H,

$$\gamma_t^k(G)\gamma_t^k(H) \leq k(k+1)\gamma_t^k(G \times H).$$

当 $k=1$ 时, $\gamma_t(G)\gamma_t(H)\le 2\gamma_t(G\times H)$, 这就是 Ho 的结果, 即猜想（6.7）成立. 这个结果发表在《J. Comb. Optim.》（18 (2009),173-178）上.

③ 强全控制边临界图

设 G 是不含孤立点图, 它的全控制数 $\gamma_t(G)$. 如果对 G 中任何不相邻两顶点 x 和 y 均有 $\gamma_t(G+xy)<\gamma_t(G)$, 则称 G 为 γ_t 临界的. γ_t 临界图被称为强 γ_t 临界的, 如果对 G 中任何顶点 x 均存在一个点数为 $\gamma_t(G)-1$ 的控制集 S 使得导出子图 $G[S]$ 不含除 x 外的孤立点.

该项目研究了 γ_t 临界的的性质, 并提出从小强 γ_t 临界图构造大强 γ_t 临界图的方法. 这些结果发表在《中国科学技术大学学报》（38(9) (2008), 1024-1029）上.

6.3 成对控制数

图 G 的顶点子集 S 称为 G 的成对控制集（paired-dominating set）, 如果 S 是 G 的控制集, 而且导出子图 $G[S]$ 包含完备匹配. 图 G 的成对控制数（paired-domination number）$\gamma_p(G)$ 定义为 G 中所有成对控制集中的最小点数. 显然, $\gamma_t(G)\le\gamma_{pr}(G)\le 2\gamma(G)$ 对任何图 G 成立.

① 关于树的成对控制数

康丽瑛和堵丁柱等 [J. of Global Optimization, 25(2003)] 刻画了具有 $\gamma_{pr}(T)=\gamma(T)$ 的所有树 T. 康丽瑛和 Henning 等 [Australas. J. Combin. 30(2004)] 刻画了具有 $\gamma_t(T)=\gamma_{pr}(T)$ 的所有树 T. Henning [Util. Math. 60(2001)；Util. Math. 69 (2006)] 分别刻画了具有 $\gamma_t(T)=2\gamma(T)$ 以及 $\gamma_t(T)=\gamma_{pr}(T)$ 的所有树 T. 该项目刻画了使得 $\gamma_{pr}(T)=2\gamma(T)$ 的所有树 T. 这个结果发表在《Discrete Mathematics》（308 (2008), 3420-3426）上.

② 临界成对控制图的直径

图 G 称为成对控制临界图（paired domination vertex critical）, 记为 $\gamma_{pr}(G)$ 临界图, 如果对 G 中任何顶点 x（不相邻于 1 度点）, 均有 $\gamma_{pr}(G-x)>\gamma_{pr}(G)$.

Edwards [M. Edwards, Criticality concepts for paired domination in graphs. Masters Thesis, University of Victoria (2006)] 证明了: $\gamma_{pr}(G)$ 临界图的直径 $d(G)\le 2\gamma_{pr}(G)-4$. 当 $\gamma_{pr}(G)\le 8$ 时, Henning 和 Mynhardt [Henning, M.A., Mynhardt, C.M.: The diameter of paired-domination vertex critical graphs. Czechoslovak Math. J., 58 (4) (2008), 887-897] 证明了: $d(G)\le\frac{3}{2}(\gamma_{pr}(G)-2)$, 并猜想这个上界对一般图也成立. 该项目证明了这个猜想, 发表在《Graphs and Combinatorics》（24(2008), 453-459）上.

6.4 关于树的 p-控制数下界

对于给定的正整数 p, 图 G 的顶点子集 S 称为 G 的 p 控制集（p-dominating set）, 如果对每个 $x\in\overline{S}$ 均有 $|N_G(x)\cap S|\ge p$. 图 G 的 p 控制数（p-domination number）$\gamma_p(G)$ 定义为 G 中所有 p 控制集中的最小点数.

这个概念是 Fink 和 Jacobson [J. F. Fink, M. S. Jacobson, n-Domination in graphs, in: Y.Alavi, A.J.Schwenk (Eds.), Graph Theory with Applications to Algorithms and Computer Science, Wiley, New York, 1985, 283-300] 提出来的.

设 T 是 n 阶树且 $n\ge 3, p\ge 2$, $L_p(T)$ 表示 T 中度至多为 $p-1$ 的点集, $S_p(T)$ 表示 T 中不在 $L_p(T)$ 中但与 $L_p(T)$ 中至少一个点相邻的点集. 令 $l_p=|L_p(T)|$, $s_p=|S_p(T)|$. Lemańska [M. Lemańska, Lower bound on the domination number of a tree, Discuss. Math. Graph Theory, 24(2) (2004), 165-169] 证明了 $\gamma(T)\ge(n+2-l_2)/2$. Chellali [M. Chellali, Bounds on the 2-domination number in cactus graphs. Opuscula Math., 26 (2006), 5-11] 证明了 $\gamma_2(T) \geq (n+l_2-s_2)/2$, Blidia 等 [M. Blidia, M. Chellali and L. Volkmann, Some bounds on the p-domination number in trees. Discrete Math. 306 (2006), 2031-2037] 证明了 $\gamma_p(T) \leq (n+l_p)/2$. 该项目获得如下结果：

$$\gamma_p(T) \geq (n+l_p-s_p)/2.$$

它推广了 Chellali 的结果. 我们的结果发表在《Opuscula Mathematica》（29 (2) (2009), 157-164）上.

§7 关于距离控制数的研究

距离控制数是台北大学张镇华教授在他的在 Cornell 大学的博士学位论文[k-domination and graph covering problems. Ph.D. Thesis, School of OR and IE, Cornell University, Ithaca, NY(1982)]中提出来的.

设 G 是直径为 d 的图. 对于给定的整数 k $(1 \leq k \leq d)$, G 的 k 距离控制集是一个控制集 S, 使得 $\overline{S}$ 中每个点到 S 的距离最多为 k. k 距离控制数 $\gamma_k(G)$ 是 G 中 k 距离控制集中的最小点. 显然, $\gamma_1(G)=\gamma(G)$.

因此, k 距离控制是经典控制概念的推广. 近 30 年来, 关于k 距离控制数的研究没有什么进展. 显然, 确定距离控制数问题是 NP-hard 的. 因此, 对于给定的整数 k $(1 \leq k \leq d)$, 建立图 G 的 k 距离控制数 $\gamma_k(G)$ 的上下界, 确定特殊图类的距离控制数, 研究距离控制数与其它类型的控制数之间的关系是有意义的. 距离控制数也是我们上一个项目研究内容之一, 在该项目中, 我们继续研究, 得到如下结果.

7.1 距离控制数的上界

① 连通图距离控制数的上界

关于$n\,(\geq k+1)$ 阶连通图G 的 k 距离控制数$\gamma_k(G)$ 的上界, 已知的结果是：$\gamma_k(G) \leq \lfloor \frac{n}{k+1} \rfloor$. 它是由Meir 和Moon [A. Meir and J. W. Moon, Relation between packing and covering number of a tree. Pacific Journal of Mathematics, 61(1) (1975), 225-233] 给出的, 但一直没有引起人们的重视. 导致在2002 年, Sridharan 等人[N. Sridharan, V. S. A. Subramanian and M. D. Elias, Bounds on the distance two-domination number of a graph. Graphs and Combinatorics, 18 (2002), 667-675] 还独立证明了：$\gamma_2(G) \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$. 这是Meir-Moon 上界的特例. 事实上, 我们通过图的最大度 Δ 给出 γ_k 紧的上界:

$$\gamma_k(G) \leq \left\lfloor \frac{n-\Delta+k-1}{k} \right\rfloor.$$

另外, 对于经典的控制数$\gamma(G)$, N. Alon [Transversal numbers of uniform hypergraphs. Graphs Combin., 6 (1990), 1-4] 和 Lovasz [L. Lovász, On the ratio of optimal and integral fractional covers. Discrete Math., 13 (1975), 383-390] 通过图的最小度δ 给出$\gamma(G)$ 的上界:

$$\gamma(G) \leq n\frac{1+\ln(\delta+1)}{\delta+1}.$$

我们推广这个的结果到一般的正整数 k, 得到

$$\gamma_k(G) \leq n\frac{1+\ln(m(\delta+1)+2-t)}{m(\delta+1)+2-t},$$

其中 where $m=\lceil \frac{k}{3} \rceil$, $t=3\lceil \frac{k}{3} \rceil-k$.

这些结果发表在《The Australasian Journal of Combinatorics》（43 (2009), 181-190）上.

② **2 连通图距离控制数的上界**

我们用 $\gamma_k^2(G)$ 表示 2 连通图 G 的 k 距离控制数. 对于 $\gamma_1^2(G)$, Y. Caro, R. Yuster [2-connected graphs with small 2-connected dominating sets. Discrete Math., 269 (2003), 265-271] 获得一个上界: $\gamma_1^2(G) \leq (1+o_\delta(1))n\frac{\ln(\delta+1)}{(\delta+1)}$ 我们利用概率方法得到一个更强的结果：

$$\gamma_k^2(G) \leq (1+o_\delta(1))\, n\frac{\ln[m(\delta+1)+1-t]}{[m(\delta+1)+1-t]},$$

其中 $m = \lceil \frac{k}{3} \rceil$, $t = 3\lceil \frac{k}{3} \rceil - k$.

这个结果发表在《Theoretical Computer Science》（410 (2009), 3804-3813）上.

7.2 距离连通控制数的上界

图 G 中的 k 距离控制集 S 所导出的子图 $G[S]$ 是连通的, 则称 S 为 G 的 k 距离连通控制集. k 距离连通控制数 $\gamma_k^c(G)$ 是 G 中 k 距离连通控制集中的最小点.

对于阶为 n 且最大度为 Δ 的连通图 G, 我们得到距离连通控制数 $\gamma_\ell^c(G)$ 的上界:

$$\gamma_k^c(G) \leq \max\{1, n-2\ell-\Delta+2\}.$$

而且, 如果 S 是 G 的 k 距离控制集, 且 $G[S]$ 有 p 个连通分支, 则

$$\gamma_k^c(G) \leq |S| + 2(p-1)k.$$

对于经典的连通控制数 $\gamma^c(G)$, Caro 等人 [Y. Caro, D. B. West and R. Yuster, Connected domination and spanning trees with many leaves. *SIAM J. Discrete Math.*, 13(2) (2000), 202-211] 通过图的最小度 δ 给出 $\gamma^c(G)$ 的上界:

$$\gamma_1^c(G) \leq (1+o_\delta(1))n\frac{\ln(\delta+1)}{\delta+1}.$$

利用概率方法, 我们得到 $\gamma_\ell^c(G)$ 的渐进上界.

定理 9.5 设 ℓ 是任意正整数, G 是 $n\,(\geq 2)$ 阶最小度为 δ 的连通图, 则

$$\gamma_\ell^c(G) < n\frac{72k+20km^2+17+0.5\sqrt{\ln q}+\ln q}{q}, \text{ or } \gamma_\ell^c(G) \leq (1+o_\delta(1))n\frac{\ln q}{q},$$

其中 $q = m(\delta+1)+2-t$, $m = \lceil \frac{k}{3} \rceil$ 且 $t = 3\lceil \frac{\ell}{3} \rceil - \ell$.

在上式中令 $\ell = 1$ 就分别得到 Caro 等人的结果.

这些结果发表在《Ars Combinatoria》（84 (2007), 357-367）上.

7.3 距离控制临界图的直径

图 G 称为控制临界图, 如果对每个顶点 x 均有 $\gamma(G-x) < \gamma(G)$. 控制临界图(简称 γ 临界图) 的研究是图论经典内容之一, 它对研究控制数发挥了重要作用. Fulman 等人 [Fulman, J., Hanson, D. and MacGillivray, G., Vertex domination-critical graphs. Networks, 25 (1995), 41-43] 证明了: 对于 γ 临界图 G, 如果 $\gamma \geq 2$, 那么它的直径 $d(G) \leq 2(\gamma-1)$.

γ 临界图的概念推广到距离控制临界图是很自然的. 对于正整数 $k \geq 1$, 图 G 是 k 距离控制临界(简称 γ_k 临界) 的, 如果对 G 中每个顶点 x 均有 $\gamma_k(G-v) < \gamma_k(G)$. Henning *et al* [Henning, M. A., Oellermann, O. R. and Swart, H. C., Distance domination critical graphs. J. Comb. Inform. Syst. Sci., 5(1) (1994), 69-79] 首先研究了这种图的性质. 我们推广 Fulman 等人的结果到 γ_k 临界图.

设 G 是 γ_ℓ 临界图. 则它的直径 $d(G) \leq 2\ell(\gamma_\ell - 1)$. 特别地, 如果 $\gamma_2 \geq 2$, 那么 $d(G) \leq 3(\gamma_2 - 1)$, 而且这个上界是最好的.

这个结果发表在到《Applied Mathematics Letters》(21 (2008), 416-420)上. (这篇文章的发表有段小插曲, 见我的科研随笔《一篇论文的死里逃生记》一文.)

7.4 平均距离与距离控制数

n 阶连通图 G 的平均距离定义为

$$\mu(G) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{x,\, y \in V} d_G(x, y).$$

平均距离是分析和度量网络性能的重要参数, 因此, 引起人们的极大研究兴趣. 例如, P. Dankelmann [Average distance and domination number, *Discrete Appl. Math.*, **80** (1997), 21-35] 通过控制数 $\gamma(G)$ 给出 n 阶连通图 G 平均距离 $\mu(G)$ 的紧的的上界:

如果 $\gamma \leq \frac{n}{3}$, 那么

$$\mu(G) \quad \leq \begin{cases} \frac{n+1}{3} - \frac{(n-3\gamma)(n-3\gamma+2)(2n+3\gamma-7)}{6n(n-1)}, & \text{if } n-\gamma \text{ is odd;} \\ \frac{n+1}{3} - \frac{(n-3\gamma)(n-3\gamma+2)(2n+3\gamma-7)-9(\gamma-1)}{6n(n-1)}, & \text{if } n-\gamma \text{ is even;} \end{cases}$$

如果 $\gamma \geq \frac{n}{3}$, 那么

$$\mu(G) \leq \begin{cases} \frac{n+1}{3} - \frac{(3\gamma-n)(3\gamma-n-2)(5n-6\gamma-4)}{3n(n-1)}, & \text{if } n-\gamma \text{ is even;} \\ \frac{n+1}{3} - \frac{(3\gamma-n-1)(3\gamma-n-3)(5n-6\gamma-2)+6(2n-3\gamma-1)}{3n(n-1)}, & \text{if } n-\gamma \text{ is odd.} \end{cases}$$

我们将这个结果推广到 k 距离控制数 γ_k. 当 $k=1$ 时, 就是上述结果. 不过, 表达式更为复杂, 叙述如下.

设 G 是 n 阶连通图. $\gamma_k \leq \left\lceil \frac{n}{2k+1} \right\rceil$, 那么

$$\mu(G) \quad \leq \begin{cases} \frac{n+1}{3} - \frac{\left(n-(2k+1)\gamma_k\right)\left(n-(2k+1)\gamma_k+2\right)\left(2n+(2k+1)\gamma_k-7\right)}{6n(n-1)}, & \\ \qquad\qquad \text{if } \gamma_k \leq \frac{n}{2k+1} \text{ and } n-\gamma_k \text{ is odd;} & \\ \frac{n+1}{3} - \frac{\left(n-(2k+1)\gamma_k\right)\left(n-(2k+1)\gamma_k+2\right)\left(2n+(2k+1)\gamma_k-7\right)-3\left((2k+1)\gamma_k-3\right)}{6n(n-1)}, & \\ \qquad\qquad \text{if } \gamma_k \leq \frac{n}{2k+1} \text{ and } n-\gamma_k \text{ is even;} & \\ \frac{n+1}{3}, \qquad \text{if } \gamma_k = \left\lceil \frac{n}{2k+1} \right\rceil. & \end{cases}$$

如果 $\gamma_k > \left\lceil \frac{n}{2k+1} \right\rceil$, 则存在 t 使得 $(2k+1)\gamma_k - n \equiv t \pmod{k}$. 如果 $\frac{\gamma_k-n-t}{k}$ 是偶数, 则

$$\begin{aligned} \mu(G) \quad &\leq \tfrac{n+1}{3} - \tfrac{B}{6n(n-1)}\Big[\big((2k+1)\gamma_k - n - t - 2k\big)\big(C - 2(k+1)\big) \\ &\quad +3t\big(D-2\big)\Big] - 2t(k-t)\Big(\tfrac{A+t-k-1}{n(n-1)}\Big) \end{aligned}$$

如果 $\frac{\gamma_k-n-t}{k}$ 是奇数, 则

$$\begin{aligned}\mu(G) \quad \le\ & \tfrac{n+1}{3}-\tfrac{B-k-1}{6n(n-1)}\Big[\big((2k+1)\gamma_k-n-t-3k\big)\big(C-(k+1)\big)\\ & +3t\big(D+2k\big)+3\big(kD+(k-1)t-k(k+1)\big)\Big]\\ & -2t(k-t)\big(\tfrac{A+t}{n(n-1)}\big),\end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned}A &= \tfrac{(2k+1)n-(k+1)(2k+1)\gamma_k+t}{k},\\ B &= \tfrac{(2k+1)(k+1)\gamma_k-(k+1)n-(k+1)t}{k}\\ C &= \tfrac{(4k+1)n-(k+1)(2k+1)\gamma_k+(k+1)t}{k}\\ D &= \tfrac{(3k+1)n-(2k+1)(k+1)\gamma_k-(k-1)t}{k}.\end{aligned}$$

这个结果发表在《Discrete Applied Mathematics》(157 (2009)1113-1127)上.

§8 关于约束数及相关问题的研究

为了更准确地度量网络边故障对控制数的影响, Fink et al. [The bondage number of a graph. *Discrete Math.* 86 47-57 (1990)] 提出图的约束 (bondage) 数 $b(G)$ 概念, 它表示导致控制数增加必须从 G 中移去的最小边数.

8.1 小交叉数图的约束数

Dunbar 等人 [J.E. Dunbar, T.W. Haynes, U. Teschner, L. Volkmann, Bondage, insensitivity, and reinforcement. *Domination in Graphs: Advanced Topics* (T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi, P.J. Slater eds.), Marcel Dekker, New York, 1998, pp. 471-489] 提出平面图约束数的猜想.

Dunbar 等人猜想: 对任何平面图 G 均有

$$b(G) \leqslant \Delta(G)+1.$$

康丽瑛和原晋江 [L. Kang, J. Yuan, Bondage number of planar graphs. *Discrete Math.* 222 (2000) 191-198] 证明了:

$$b(G) \leqslant \min\{8, \Delta(G)+2\} \quad \text{对任何平面图}\, G.$$

这个结果意味着当 $\Delta(G) \geqslant 7$ 时, Dunbar 等人的猜想是成立的. Fischermann 等人[M. Fischermann, D. Rautenbach and L. Volkmann, Remarks on the bondage number of planar graphs. *Discrete Math.* 260 (2003) 57-67] 证明了Dunbar 等人的猜想对围长 $g(G) \geqslant 4$ 且最大度 $\Delta(G) \geqslant 5$ 连通平面图是成立的. 事实上, 他们证明了下面的结果:

$$b(G) \leqslant \begin{cases} 6, & \text{if } g(G) \geqslant 4;\\ 5, & \text{if } g(G) \geqslant 5;\\ 4, & \text{if } g(G) \geqslant 6;\\ 3, & \text{if } g(G) \geqslant 8.\end{cases}$$

我们推广这个结果到小交叉数的连通图 G, 得到如下结果: 对于交叉数 $cr(G)$ 的连通图 G, 有

$$b(G) \leqslant \begin{cases} 6, & \text{if } g(G) \geqslant 4,\ cr(G) \leqslant 3;\\ 5, & \text{if } g(G) \geqslant 5,\ cr(G) \leqslant 4;\\ 4, & \text{if } g(G) \geqslant 6,\ cr(G) \leqslant 2;\\ 3, & \text{if } g(G) \geqslant 8,\ cr(G) \leqslant 2.\end{cases}$$

我们也推广康丽瑛和原晋江的结果到小交叉数的连通图G, 得到如下结果:

$$b(G) \leqslant \min\{8, \Delta(G)+2\} \text{ 如果 } cr(G) \leq 3.$$

我们还获得小交叉数连通图约束数的更深入更详细的结果. 这些结果由两篇文章组成, 分别由《Discrete Mathematics》(307（14）(2007), 1881-1897) 发表和被《Ars Combinatori》接收 (2008-08-24). 其中发表在《Discrete Mathematics》文章的评审人的意见让人激动:“The results appearing in this paper are correct and of interest. The authors generalize results concerning the bondage number on connected graphs to connected graphs with small crossing number. This is an excellent paper that deserves to be published.”

8.2 点可迁图的约束数

对于点可迁无向图和有向图的约束数, 获得一些结果.

设G 是n 阶点可迁图, $\gamma=\gamma(G)$, 则

$$b(G) \geqslant \begin{cases} \lceil n/2\gamma \rceil & \text{如果 } G \text{ 是无向图;} \\ \lceil n/\gamma \rceil & \text{如果 } G \text{ 是有向图.} \end{cases}$$

如果G 的度为k, 那么

$$b(G) \leqslant \begin{cases} k & \text{如果 } G \text{ 是无向图且 } n \geqslant \gamma(k+1)-k+1; \\ k+1+\ell & \text{如果 } G \text{ 是有向图且 } n \geqslant \gamma(k+1)-\ell,\ 0 \leqslant \ell \leqslant k-1. \end{cases}$$

作为这些结果的应用,我们还获得一些著名点可迁无向图和有向图的约束数. 例如: 对于循环有向图$G=\overrightarrow{C}(n;1,s)$, 如果 $3 \mid n$ 且$s \equiv 2 \pmod 3$, 那么$b(G)=3$; 对于循环无向图$G=C(n;1,s)$, 如果$5 \mid n$ 且$s \equiv \pm 2 \pmod 5$, 那么$b(G)=3$.

这些结果发表在《Discrete Mathematics》(308 (2008), 571-582) 上.

8.3 广义 de Bruijn 和 Kautz 有向图的全约束数

另一种意义下的广义(extended) de Bruijn 有向图 $EB(d,n;q_1,\ldots,q_p)$ 和Kautz 有向图 $EK(d,n;q_1,\ldots,q_p)$ 是由Y. Shibata and Y. Gonda [Extension of de Bruijn graph and Kautz graph. *Comput. Math. Appl.* 30(9) 51-61 (1995)] 提出的). 显然, 当$p=1$时, $EB(d,n;n)=B(d,n)$, $EK(d,n;n)=K(d,n)$. 在上一个项目中, 对q_i 的特殊取值, 我们建立了这些图的约束数的一些上界和下界, 并对某些特殊的值确定了它们的约束数. 在这个项目中, 我们考虑这些图的全约束数.

因为有全(total) 控制数概念, 所以考虑全约束数是自然的. 图 G 的控制集 S 称为全控制集, 如果 S 的导出子图 $G[S]$ 不含孤立点. 全控制数 $\gamma_t(G)$ 是 G 中全控制集中的最小点数. 使得 G 的全控制数增加所必需移去的最小边数 $b_t(G)$ 称为 G 的全约束数.

对于广义de Bruijn 有向图 $EB(d,n;q_1,\ldots,q_p)$ 和Kautz 有向图 $EK(d,n;q_1,\ldots,q_p)$, 我们得到比一般意义下的约束数的结果要好得多.

设 $EB=EB(d,n;q_1,\ldots,q_p)$, $d \geqslant 2$. 如果存在$q_k \geqslant 2\,(1 \leqslant k \leqslant p)$, 那么

$$\gamma_t(EB)=d^{n-p}.$$

如果$\{q_1,\ldots,q_p\}$ 中仅有$r\,(0 \leqslant r \leqslant p-1)$ 元素为1, 那么

$$d^p-d^r \leqslant b_t(EB) \leqslant d^p-1;$$

如果 $q_1, \ldots, q_p \geqslant 2$, 那么 $b_t(EB) = d^p - 1$. 特别地,

$$\gamma_t(B(d,n) = d^{n-1}, \qquad b_t(B(d,n)) = d-1.$$

设 $EK = EK(d,n;q_1,\ldots,q_p)$. 如果 $q_k \geqslant 2$, $k = 1,2,\ldots,p$, 那么

$$\gamma_t(EK) = d^{n-2p}(d+1)^p,$$

如果 $q_k \geqslant 2$, $k = 1,2,\ldots,p$, 那么

$$b_t(EK)) = d^p.$$

特别地, $\gamma(K(d,n)) = d^{n-1} + d^{n-2}$, $\qquad b_t(K(d,n)) = d$.

这些结果发表在《Computer and Mathematics with Applications》(53 (2007), 1206-1213)上.

8.4 p-控制数的约束数

图 G 的 p 控制数 $\gamma_p(G)$ 已经定义在 7.4 节. 该项目研究引进图 G 的 p-控制数的约束数 $b_p(G)$, 定义为

$$b_p(G) = \min\{|B|:\ B \subseteq E(G), \gamma_p(G-B) > \gamma_p(G)\}.$$

显然, $b_1(G) = b(G)$.

对于给定 $p \geq 2$ 和满足 $\Delta(T) \geqslant p$ 的树 T, 该项目给出了 $b_p(T)$ 的界:

$$1 \leqslant b_p(T) \leqslant \Delta(T) - p + 1. \tag{8.8}$$

对于子集 $S \subset V(G)$ 和 $x \in S$, 令

$$N_p(x,S,G) = \{y \in \overline{S} \cap N_G(x):\ |N_G(y) \cap S| = p\}.$$

那么, 达到式(8.8)中下界 1 的树 T 能被刻画如下. $b_p(T) = 1$ 当且仅当对 T 的任何 γ_p 集 S, 存在一条边 $xy \in (S,\overline{S})$ 使得 $y \in N_p(x,S,T)$. 该项目还进一步刻画了达到式(8.8)中上界 $\Delta(T) - p + 1$ 的所有树 T.

这些结果已经被《Graphs and Combinatorics》于 2010 年 6 月 1 日在线发表(DOI 10.1007/s00373-010-0956-3).

8.5 加强数

边的减少会使图的控制数增加. 反之, 边的添加会使图的控制数减少. 与约束数对偶的概念是图的加强数(reinforcement number), 对于无向图, 它是由 Kok 和 Mynhardt [Reinforcement in graphs. Congr. Numer. 79 (1990), 225-231] 首先提出来的. 图 G 的加强数 $r(G)$ 定义为欲使控制数 $\gamma(G)$ 减少需要添加的最小边数. 我们推广这个概念到有向图, 并进行原创性研究.

对于一个给定的无向图 G, 存在定向图 H_1 和 H_2 使得 $r(H_1) \leqslant r(G) \leqslant r(H_2)$; 建立了 $R(G)$ 的上界, 并刻画出达到上界的图; 研究了正则图和广义的 de Bruijn 有向图和 Kautz 图, 并确定了 de Bruijn 有向图 $B(d,n)$ 和 Kautz 图 $K(d,n)$ 的加强数.

$$r(B(d,n)) = \begin{cases} d & \text{if } n \text{ is odd;} \\ 1 & \text{if } n \text{ is even.} \end{cases} \qquad r(K(d,n)) = d+1.$$

这些结果发表在《Discrete Applied Mathematics》(157 (2009), 1938-1946)上.

8.6 全控制收缩数

图 G 的控制细分数（domination subdivision number）$sd_\gamma(G)$ 是使得细分图 SG 的控制数 $\gamma(SG)$ 大于 G 的控制数 $\gamma(G)$ 增加所需要细分的最小边数（一条边最多一次）. Arumugam 和 Paulraj Joseph [S. Arumugam, J. Paulraj Joseph, Domination in subdivision graphs. J. Indian Math. Soc. (N.S.), 62 (1-4) (1996), 274-282] 首先定义这个图论参数, 证明了: 至少 3 个点的树 T 有 $sd_\gamma(T) \leqslant 3$, 并且提出猜想: 这个上界对任何至少 3 个顶点的图都成立. Haynes 等人[T.W. Haynes, S.M. Hedetniemi, S.T. Hedetniemi, D.P. Jacobs, J. Knisely, van der Merwe, C. Lucas, Domination subdivision numbers. Discuss. Math. Graph Theory, 21 (2001), 239-253] 给出反例, 证明了: $sd_\gamma(K_t \times K_t) = 4$ $(t \geqslant 4)$. Swaminathan 和 Sumathi [V. Swaminathan and P. Sumathi, Subdivision number of graphs and falsity of a conjecture. Electron. Notes Discrete Math., 15, Elsevier, Amsterdam, 2003] 也构造了一个图 G 使得 $sd_\gamma(G) = 5$.

基于全控制概念, 就有图 G 的全控制细分数 $sd_{\gamma_t}(G)$. Haynes 等人[T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi, van der Merwe, C. Lucas, Total domination subdivision numbers. J. Combin. Math. Combin. Comput., 44 (2003), 115-128] 提出这个参数, 并且通过点度建立了一些上界; 给出若干使得 $sd_{\gamma_t}(G) \leqslant 3$ 的充分条件; 证明了对任何树 T, 有 $sd_{\gamma_t}(T) \leqslant 3$. 使得 $sd_{\gamma_t}(T) = 3$ 的树 T 被构造在[T.W. Haynes, M.A. Henning, L. Hopkins, Total domination subdivision numbers of trees. Discrete Math., 286 (2004), 195-202.] 中.

类似的, 我们考虑 G 的边收缩（edge contraction）图 CG, 并提出控制收缩数 $ct_\gamma(G)$ 和全控制收缩数 $ct_{\gamma_t}(G)$ 概念, 它们分别定义为使得边收缩图 CG 的控制数 $\gamma(CG) > \gamma(G)$ 和 CG 的全控制数 $\gamma_t(CG) > \gamma_t(G)$ 增加所需要收缩的最小边数.

我们证明了: 对任何图连通 G, 有

$$ct_\gamma(G) \leqslant 3, \quad ct_{\gamma_t}(G) \leqslant 3.$$

而且, 根据这两个上界, 我们分别对取值 $0, 1, 2, 3$ 的图进行了分类和刻画.

这些结果发表在《Ars Combinatoria》（94 (2010), 431-443）上.

§9 关于反馈数的研究

图 G 的反馈数（feedback number）是使得 G 不含圈所需要移去的最小点数. 确定图的最小反馈数, 除了它在各领域中（特别是在互连网络）有广泛的应用背景外, 还有其深刻的图论意义.

设 G 是有 υ 个顶点, ε 条边, ω 个连通分支, 那么使得 G 不含圈所需要移去的最小边数（即 Betti 数）$\rho(G) = \varepsilon - \upsilon + \omega$. 因此, 反馈数是 Betti 数的点情形. 除此之外, 确定反馈数等价于确定 G 中导出子林的最大阶（见 Erdős 等 [P. Erd"os, M. Saks, and V. T. Sós, Maximum induced trees in graphs. J. Combin. Theory Ser. B., 41 (1986), 61-79]）, 因为它们的和等于 G 的阶.

已经证明: 对一般图确定最小反馈数是 NP-hard 问题[M. R Garey, D. S. Johnson, Computers and Intractability, Freeman, San Francisco, CA, 1979].

在这个项目中, 我们主要研究了 Kautz 有向图和无向图、De Bruijn 有向图和无向图的反馈数问题.

9.1 Kautz 有向图的反馈数

用 $f_K(d,n)$ 表示 Kautz 有向图 $K(d,n)$ 的反馈数. 在上一个项目中 [《运筹与管理》(14 (3) (2005), 10-14)], 我们确定了 $f_K(d,n)$ 的上下界为：

$$\frac{(\varphi\odot\theta)(n)}{n}+\frac{(\varphi\odot\theta)(n-1)}{n-1}\le f_K(d,n)\le\sum_{i=1}^{d}i^{n-1},\quad d\ge 2,n\ge 1,$$

其中 $(\varphi\odot\theta)(n)=\sum\limits_{i|n}\varphi(i)\theta\left(\frac{n}{i}\right)$, $i\mid n$ 意味着 i 能整除 n, $\varphi(i)$ 是 Euler φ 函数, 即, $\theta(i)=d^i+(-1)^i d$, $\varphi(1)=1$ 且 $\varphi(i)=i\cdot\prod\limits_{j=1}^{r}\left(1-\frac{1}{p_j}\right)$ $(i\ge 2)$, $p_1,\ldots,p_r$ 是 i 的两两不同且不为 1 的素因子.

在这个项目中, 我们进一步确定了当 $1\le n\le 7$ 时 $f_K(d,n)$ 的精确值, 并确定了当 $n\ge 8$ 时 $f(d,n)$ 的渐近值，即下面的结果.

$$f_K(d,n)=\begin{cases} d & \text{for } n=1;\\ \dfrac{(\varphi\odot\theta)(n)}{n}+\dfrac{(\varphi\odot\theta)(n-1)}{n-1} & \text{for } 2\le n\le 7;\\ \dfrac{d^n}{n}+\dfrac{d^{n-1}}{n-1}+O(nd^{n-4}) & \text{for } n\ge 8.\end{cases}$$

这个结果发表在《Discrete mathematics》（307 (2007),1589-1599）上.

9.2 De Bruijn 有向图的反馈数

用 $f_B(d,n)$ 表示 de Bruijn 有向图 $B(d,n)$ 的反馈数. 我们确定了De Bruijn 有向图的反馈数 $f_B(d,n)$ 当 $2\le n\le 4$ 时的精确值和当 $n\le 5$ 时的渐近值, 即: 对 $d\ge 2$ 和 $n\ge 2$,

$$f_B(d,n)=\begin{cases} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i|n}d^i\varphi\left(\dfrac{n}{i}\right) & \text{for } 2\le n\le 4;\\ \dfrac{d^n}{n}+O(nd^{n-4}) & \text{for } n\ge 5,\end{cases}$$

其中 $i\mid n$ 意味着 i 整除 n, $\varphi(i)$ 是 Euler φ 函数, 即, $\varphi(1)=1$ 且当 $i\ge 2$ 时$\varphi(i)=i\cdot\prod\limits_{j=1}^{r}\left(1-\frac{1}{p_j}\right)$, 其中 $p_1,\ldots,p_r$ 是 i 的两两不同且不为 1 的素因子.

这个结果发表在《Computers and Mathematics with Applications》（59 (2010), 716-723）.

9.3 De Bruijn 无向图的反馈数

用 $f_{UB}(d,n)$ 表示 de Bruijn 无向图 $UB(d,n)$ 的反馈数.

R. Královič and P. Ružička [Minimum feedback vertex sets in shuffle-based interconnection networks. Information Processing Letters, 86 (4) (2003), 191-196] 证明了:

$$f_{UB}(2,n)=\left\lceil\frac{2^n-2}{3}\right\rceil.$$

当 $d\ge 3$ 时, 我们获得如下的界:

$$f_{UB}(d,n)\le d^n\left(1-\left(\frac{d}{1+d}\right)^{d-1}\right)+\binom{n+d-2}{d-2}.$$

这个结果已经被《Taiwanese Journal of Mathematics》接收（2009-11-25）.

§10 临界群问题研究

图的临界群的概念来自 [C. Godsil, G. Royle. *Algebraic Graph Theory* GTM 207, Springer-Verlag, New York, 2001], 国际著名数学家 Biggs 在[N. L. Biggs, Chip-Firing and the Critical Group of a Graph. *Journal of Algebraic Combinatorics* 9 (1999) 25-45] 证明了图的临界群能够被 G 的 Laplace 矩阵的 Smith 标准型所刻划. 已经证明: 任何图的临界群的阶数等于该图支撑树的数目. 因此, 研究图的临界群是有意义的.

该项目研究了几类笛卡尔乘积图的临界群, 给出 $K_m \times P_n$, $K_m \times C_n$ 和 $C_4 \times C_n$ 的临界群结构和支撑的树数目, 并得到几个新的三角恒等式, 其中 K_m, P_n 和 C_n 分别是 n 阶完全图, 路和圈.

10.1 $K_m \times P_n$ 的临界群

我们给出笛卡尔乘积图 $K_m \times P_n$ 的临界群为:

$$Z/tZ \oplus (Z/mtZ)^{m-2},$$

其中

$$t = \frac{1}{\sqrt{m^2+4m}}\left(\left(\frac{m+2+\sqrt{m^2+4m}}{2}\right)^n - \left(\frac{m+2-\sqrt{m^2+4m}}{2}\right)^n\right).$$

当 $m=3$ 时, 就是文章 [陈平鸽, 侯耀平, 图 $P_n \times C_3$ 的临界群, 湖南师范大学自然科学学报, 2005 年第 4 期] 中的结果.

由这个结果, 我们得到笛卡尔乘积图 $K_m \times P_n$ 的支撑树数目:

$$\tau(K_m \times P_n) = m^{m-2} t^{m-1},$$

代入 t 的表达式, 可得

$$\tau(K_m \times P_n) = m^{m-2}\left[\frac{1}{\sqrt{m^2+4m}}\left(\left(\frac{m+2+\sqrt{m^2+4m}}{2}\right)^n - \left(\frac{m+2-\sqrt{m^2+4m}}{2}\right)^n\right)\right]^{m-1}.$$

于是就得到了一个新的三角恒等:

$$\prod_{j=1}^{n-1}\left(m+2+2\cos\left(\frac{\pi j}{n}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{m^2+4m}}\left(\left(\frac{m+2+\sqrt{m^2+4m}}{2}\right)^n - \left(\frac{m+2-\sqrt{m^2+4m}}{2}\right)^n\right).$$

这些结果发表在《Linear Algebra and its Applications》（428（2008）, 2723-2729）上.

10.2 $K_m \times C_n$ 的临界群

我们进一步计算出了笛卡尔乘积图 $K_m \times C_n$ 的临界群.

当 $n = 2s+1$ 为奇数时, $K_m \times C_n$ $(m, n \geq 3)$ 的临界群为:

$$Z_{s_1(B)} \oplus Z_{s_2(B)} \oplus \underbrace{Z_{s_1(W)} \oplus \cdots \oplus Z_{s_1(W)}}_{m-2} \oplus Z_\gamma \oplus \underbrace{Z_{s_2(W)} \oplus \cdots \oplus Z_{s_2(W)}}_{m-3} \oplus Z_\varphi,$$

其中

$$\begin{cases} s_1(B) & = (n, g_s), \\ s_2(B) & = h_s, \\ s_1(W) & = h_s, \\ \gamma & = \frac{h_s}{(n,g_s)}(n, h_s), \\ s_2(W) & = mh_s, \\ \varphi & = \frac{nmh_s}{(n,h_s)}. \end{cases}$$

当 $n = 2s$ 为偶数时, $K_m \times C_n$ $(m,\, n \geq 3)$ 的临界群为:

$$Z_{s_1(B)} \oplus Z_\zeta \oplus \underbrace{Z_{s_1(W)} \oplus \cdots \oplus Z_{s_1(W)}}_{m-3} \oplus Z_\eta \oplus Z_\rho \oplus \underbrace{Z_{s_2(W)} \oplus \cdots \oplus Z_{s_2(W)}}_{m-3} \oplus Z_\xi,$$

其中

$$\begin{cases} s_1(B) & = (u_s, 2\tau_s), \\ \zeta & = \left(\frac{u_s(n,(m+4)u_s,u_s-4\tau_s)}{(u_s,2\tau_s)}, (m,2)\, u_s\right), \\ s_1(W) & = (m,2)\, u_s, \\ \eta & = \frac{u_s^2(m,2)(n,(m+4)u_s,u_s-4\tau_s)}{(u_s,2\tau_s)\left(\frac{u_s(n,(m+4)u_s,u_s-4\tau_s)}{(u_s,2\tau_s)},(m,2)u_s\right)}, \\ \rho & = \frac{(m+4)u_s}{(m,2)}\left(m, \frac{n(m,2)}{(n,(m+4)u_s,u_s-4\tau_s)}\right), \\ s_2(W) & = \frac{m(m+4)u_s}{(m,2)}, \\ \xi & = \frac{nm(m+4)u_s}{(n,(m+4)u_s,u_s-4\tau_s)\left(m,\frac{n(m,2)}{(n,(m+4)u_s,u_s-4\tau_s)}\right)}. \end{cases}$$

其中的数列 $h_p = u_p + u_{p+1}$ 和 $g_p = \tau_p + \tau_{p+1}$ 由如下的值确定

$$u_p := \tfrac{1}{\alpha-\beta}\left(\alpha^p - \beta^p\right), \\ v_p := \alpha^p + \beta^p,\ \tau_p := \tfrac{p-u_p}{m},$$

而

$$\alpha = \tfrac{m+2+\sqrt{m^2+4m}}{2}, \\ \beta = \tfrac{m+2-\sqrt{m^2+4m}}{2}.$$

于是, 我们得到 $K_m \times C_n$ 的支撑树数目

$$\frac{n}{m}\left(\left(\frac{m+2+\sqrt{m^2+4m}}{2}\right)^n + \left(\frac{m+2-\sqrt{m^2+4m}}{2}\right)^n - 2\right)^{m-1},$$

和一个新的恒等式

$$\prod_{j=1}^{n-1}\left(m+2-2\cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right)\right) \\ = \frac{1}{m}\left(\left(\frac{m+2+\sqrt{m^2+4m}}{2}\right)^n + \left(\frac{m+2-\sqrt{m^2+4m}}{2}\right)^n - 2\right).$$

这些结果被《Acta Mathematica Sinica》(2009)接收.

10.3 $C_4 \times C_n$ 的临界群

在得到了 $K_m \times P_n$ 和 $K_m \times C_n$ 的临界群后结构之后, 我们希望能进一步求出 $C_m \times C_n$ 的临界群, 但是临界群的结构非常复杂, 我们给出在 $m = 4$ 时的结果, 即 $C_4 \times C_n$ 的临界群.

若 $n = 2s + 1$ 为奇, 则$C_4 \times C_n$ $(n \geq 3)$ 的临界群为:

$$Z_{(n,\, h'_s,\, g'_s)} \oplus Z_{(h'_s,\, g'_s)} \oplus Z_{\frac{(n,\, h'_s)(h'_s,\, g'_s)}{(n,\, h'_s,\, g'_s)}} \oplus Z_{h'_s} \oplus Z_{\frac{h'_s(nh'_s,ng'_s,h'_sg'_s)}{(n,h'_s)(h'_s,g'_s)}} \oplus Z_{\frac{h'_sg'_s}{(h'_s,g'_s)}} \oplus Z_{\frac{4nh'_sg'_s}{(nh'_s,ng'_s,h'_sg'_s)}};$$

若 $n = 2s$ 且 s 为奇, 则 $C_4 \times C_n$ $(n \geq 3)$ 的临界群为:

$$Z_{(s,e_s,f_s)} \oplus Z_{(e_s,f_s)} \oplus Z_{\frac{(s,e_s)(e_s,f_s)}{(s,e_s,f_s)}} \oplus Z_{e_s} \oplus Z_{\frac{4e_s(se_s,sf_s,e_sf_s)}{(s,e_s)(e_s,f_s)}} \oplus Z_{\frac{12e_sf_s}{(e_s,f_s)}} \oplus Z_{\frac{48se_sf_s}{(se_s,\, sf_s,\, e_sf_s)}};$$

若 $n = 2s$ 且 s 为偶, 则 $C_4 \times C_n$ $(n \geq 3)$ 的临界群为:

$$Z_{(s,\, e_s,\, f_s)} \oplus Z_{(e_s,\, f_s)} \oplus Z_{\frac{4(s,\, e_s)(e_s,\, f_s)}{(s,\, e_s,\, f_s)}} \oplus Z_{6e_s} \oplus Z_{\frac{6e_s(se_s,sf_s,e_sf_s)}{(s,e_s)(e_s,\, f_s)}} \oplus Z_{\frac{2e_sf_s}{(e_s,f_s)}} \oplus Z_{\frac{8se_sf_s}{(se_s,sf_s,e_sf_s)}};$$

其中

$$e_s = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left((2+\sqrt{3})^s - (2-\sqrt{3})^s\right),$$
$$f_s = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left((3+2\sqrt{2})^s - (3-2\sqrt{2})^s\right),$$
$$h'_s = e_s + e_{s+1},\ g'_s = f_s + f_{s+1}.$$

结合这个结果和矩阵-树定理的特征形式，我们进而得到一个新的三角恒等式:

$$\prod_{j=1}^{n-1}\left(4-2\cos\tfrac{2\pi j}{n}\right)^2\left(6-2\cos\tfrac{2\pi j}{n}\right)$$
$$= \frac{1}{4^{n+2}}\left((\sqrt{3}+1)^n - (\sqrt{3}-1)^n\right)^4\left((\sqrt{2}+1)^n - (\sqrt{2}-1)^n\right)^2.$$

这些结果已被《Ars Combinatoria》(2009) 接收.

§11 其他图论问题

11.1 发现了一类新的点可迁图

设 n, m 和 i 是给定的整数且满足 $n \geq m \geq i \geq 0$, Ω_n 是集 $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ 的幂集. 令 $\Omega_n^m = \{X \in \Omega_n :\ |X| = m\}$. Godsil 和 Royle 在 [C. Godsil and G. Royle, *Algebraic Graph Theory.* Springer Press, New York, 2004.] 定义了一类图 $J(n,m,i)$. 它的点集为 Ω_n^m, 两子集 X 和 Y 相邻当且仅当 $|X \cap Y| = i$. 当 $n \geq 2m$ 时, 图 $J(n,m,m-1)$ 是 Johnson 图; $J(n,m,0)$ 是 Kneser 图; $J(5,2,0)$ 是 Petersen 图.

该项目定义了新的图 $H(n,k)$, 它的点集为 Ω_n, 两子集 X 和 Y 相邻当且仅当 $|X\Delta Y| = k$, 其中 $X\Delta Y$ 是 X 和 Y 的对称差.

令 $\Omega_n^m = \{X \in \Omega_n :\ |X| = m\}$ 且记 $H^m(n,k)$ 为 $H(n,k)$ 中由 Ω_n^m 导出的子图. 那么, 当 $n \geq 2m-2i$ 时, $H^m(n, 2m-2i) = J(n,m,i)$. 因此, $H^m(n,k)$ 包含 Johnson 图, Kneser 图和 Petersen 图. 而且, 对任何正整数 n, $H(n,1) \cong Q_n$, 其中 Q_n 是 n 维超立体.

该项目研究了 $H(n,k)$ 的拓扑性质和代数性质. 例如, $H(n,k)$ 是 Cayley 图; $H(n,k)$ 的自同构群包含 $2^n n!$ 阶子群; $H(n,k)$ 有最大连通度 $\binom{n}{k}$; 如果 k 是奇数, $H(n,k)$ 是 Hamilton 的, 而且直径 $d(H(n,k)) = \lceil \frac{n-1}{k} \rceil + 1$ if $n \geq 2k-1$, $d(H(n,k)) = \lceil \frac{n-1}{n-k} \rceil + 1$ if $n \leq 2k-2$; 如果 k 是偶数, $H(n,k)$ 由两个同构的连通分支的并.

这些结果发表在《Discrete Mathematics》(310 (4) (2010), 877-886) 上.

11.2 某些乘积图的小石块覆盖数

假定图中堆放一些小石块. 在图上进行小石块移动的步骤为从一个点上取走两个小石块, 并在它的邻点上放上一个小石块. 显然, 存在某个正整数, 当图中所有小石块的总数不小于这个数时, 无论小石块在图中有何种初始分布, 都可以经过一系列上述步骤, 使得每个点至少有一个小石块. 满足此条件的正整数就称为该图的小石块覆盖数(cover pebbling number).

这个问题首先由 Chung (金芳蓉) [F. R. K. Chung, Pebbling in hypercubes. SIAM Discrete Mathematics, 2(1989), 467-472], 已引起广泛重视, 见 Hurlbert 的两篇综述文章 [G. Hurlbert, A survey of graph pebbling. Congressus Numerantium, 139 (1999), 41-46] 和 [G. Hurlbert, Recent progress in graph pebbeling. Graph Theory Notes of New York, 49 (2005), 25-37].

该项目确定了字典乘积图和一些强乘积图的小石块数, 并给出任意一个图的关键点与达到直径的两端点之间的关系.

此结果发表在《中国科学技术大学学报》(38(9) (2008), 1030-1035) 上.

§12 附录：基金项目研究成果目录

在这个项目中完成专著和教材6部, 其中已经出版4部, 已经签订合同待出版2部; 完成学术论文84篇, 其中发表58, 接收待发表15篇, 要求修改的4篇, 投稿在审7篇. 在发表、接收待发表和要求修改的的77篇中, 属于国际杂志40篇, 国内会议论文集3篇, 其余均属于国内核心杂志. 投稿在审的7篇, 均投国际杂志.

12.1 论著和教材

① 已出版的论著和教材

1. 徐俊明,《组合网络理论》, 科学出版社, 2007 年5 月. 2010 年第二次印刷.
2. 徐俊明,《图论及其应用》(第三版) （“十一”国家重点图书, 教育部推荐研究生教学用书, 中国科学技术大学精品教材）, 中国科学技术大学出版社, 2010 年 4 月.

② 准备出版的论著和教材

1. 徐俊明,《Combinatorial Network Theory》, 科学出版社, 预计 2010 年出版.

12.2 学术论文

① 已发表的学术论文

1. 吕敏, 陈国良, 徐俊明, On super edge-connectivity of Cartesian product graphs. Networks. 49(2) (2007), 135-157.
2. 徐敏, 徐俊明, The forwarding indices of augmented cubes. Information Processing Letters, 101(5) (2007), 185-189.
3. 朱强, 徐俊明, 侯新民, 徐敏, On reliability of the folded hypercubes. Information Science, 177 (8) (2007) 1782-1788.
4. 马美杰, 刘桂真,徐俊明, Panconnectivity and edge-fault-tolerant pancyclicity of augmented cube. Parallel Computing, 33(1) (2007), 36-42.
5. 常青彦,马美杰,徐俊明, 纽立方体网络的容错泛圈性.《运筹与管理》. 16 (1) (2007), 52-57.
6. 潘向峰,徐俊明,杨超,周敏杰, Some graphs with minimum Hosoya index and maximum Merrifield-Simmons index. MATCH Commun. Math. Comput. Chem. 57 (1) (2007), 235-242.
7. 徐俊明,吴叶舟,黄佳,杨超, Feedback number of Kautz digraph. Discrete Mathematics, 307(13) (2007), 1589-1599.
8. 谢歆, 徐俊明, 超立方体网络的(d, k) 控制数,《数学研究》, 40 (2) (2007), 217-222.
9. 徐俊明, 杨超, Fault diameter of product graphs. Information Processing Letters, 102(6) (2007), 226-228.

10. 王为伟,马美杰,徐俊明, Fault-tolerant pancyclicity of augmented cubes. Information Processing Letters, 103 (2) (2007), 52-56.

11. 黄佳, 徐俊明, The bondage number of graphs with small crossing number, Discrete Mathematics, 307(14) (2007), 1881-1897.

12. 黄佳,徐俊明, The total domination and bondage numbers of extended de Bruijn and Kautz digraphs. Computer and Mathematics with Applications, 53(8) (2007), 1206-1213.

13. 徐俊明, 吕敏, 范英梅, The restricted edge-connectivity of de Bruijn undirected graphs. Ars Combinatoria, 83 (2007), 321-333.

14. 徐俊明, 周涛, 杜野, 颜俊, A new upper bound on forwarding index of graphs. Ars Combinatoria, 83 (2007), 289-293.

15. 徐敏, 胡晓东, 徐俊明, Edge-pancyclicity and Hamiltonian laceability of the balanced hypercubes. Applied Mathematics and Computation, 189 (2007), 1393-1401.

16. 徐俊明, 朱强, 徐敏, Fault-tolerant analysis of a class of networks. Information Processing Letters, 103(6) (2007), 222-226.

17. 田方, 徐俊明, On distance connected domination numbers of graphs. Ars Combinatoria, 84(2007), 357-367.

18. 徐敏, 徐俊明, 孙犁, The forwarding index of the circulant networks,《数学杂志》. 27 (6) (2007), 623-629.

19. 侯新民, Total domination of Cartesian products of graphs，Discuss. Math. Graph Theory. 27(1)(2007), 175-178.

20. 黄佳, 徐俊明, The bondage numbers and efficient dominations of vertex-transitive graphs. Discrete Mathematics, 308 (4) (2008), 571-582.

21. 马美杰,刘桂真,徐俊明, The super connectivity of augmented cubes, Information Processing Letters, 106(2) (2008), 59-63.

22. 田方, 徐俊明, Distance domination-critical graphs. Applied Mathematics Letters, 21 (4) (2008), 416-420.

23. 杨超, 徐俊明, Connectivity and edge-connectivity of strong product graphs.《中国科学技术大学学报》, 38 (5) (2008), 449-455.

24. 周敏杰, 徐敏, 徐俊明, Forwarding indices of 3-connected and 3-regular Graphs,《中国科学技术大学学报》, 38(5) (2008), 456-459,495.

25. 谢歆, 徐俊明, $(n, 2n)$-dominating numbers of undirected toroidal mesh $C(3, 3, ..., 3)$, 数学研究与评论, 28 (2) (2008), 266-272.

26. 徐俊明,吕敏, Restricted edge-connectivity of de Bruijn digraphs. Ars Combinatoria, 87 (2008), 385-392.

27. 经紒, 杜正中, 马美杰, 徐俊明, Edge-fault-tolerant bipanconnectivity of hypercubes.《中国科学技术大学学报》, 38 (9) (2008), 1017-1019.

28. 杜正中, 经紒, 马美杰, 徐俊明, Cycle embedding in hypercubes with faulty vertices and edges.《中国科学技术大学学报》, 38 (9) (2008), 1020-1023.

29. 马美杰, 徐俊明, Weak edge-pancyclicity of locally twisted cubes. Ars Combinatoria. 89(2008), 89-94.

30. 马美杰, 刘桂真, 徐俊明, Fault-tolerant embedding of paths in crossed cubes. Theoretical Computer Science, 407(1-3) (2008), 110-116.

31. 杨超, 徐俊明, Reliability of interconnection networks modeled by cartesian product digraphs. Networks, 52 (4)(2008), 202-205.

32. 侯新民, Paired domination vertex critical graphs. Graphs and Combinatorics, 24(2008), 453-459

33. 侯新民, A Characterization of $(2\gamma, \gamma_p)$-trees. Discrete Mathematics, 308(2008), 3420-3426.

34. 江璠, 侯新民, Strongly total domination critical graphs. 中国科学技术大学学报, 38(9) (2008), 1024-1029.

35. 李宁, 侯新民, On the total k-domination number of Cartesian products of graphs. J. Combinatorics Optimalization. 18 (2) (2009), 173-178.

36. 侯新民, 陆由, On the k-domination number of Cartesian products of graphs. Discrete Math. 309(10)(2009), 3413-3419.

37. 颜俊, 徐俊明, 杨超, Forwarding index of cube-connected cycles, Discrete Applied Mathematics, 157 (1) 2009) 1-7.

38. 王海亮, 王建伟, 徐俊明, Edge-fault-tolerant bipanconnectivity of hypercubes, Information Sciences, 179 (4) (2009) 404-409.

39. 田方,徐俊明, A note on distance domination numbers of graphs. The Australasian Journal of Combinatorics, 43 (2009), 181-190.

40. 叶和溪, 杨超, 徐俊明, Diameter vulnerability of graphs by edge deletion. Discrete Mathematics, 309 (4) (2009), 1001-1006.

41. 田方, 徐俊明, Average distances and distance domination numbers. Discrete Applied Mathematics, 157 (5) (2009), 1113-1127.

42. 徐喜荣, 徐俊明, 吕敏, 张宝升, 曹楠, On (a, d)-antimagic labelings of generalized Petersen graphs. Ars Combinatoria, 90 (2009), 411-421.

43. 马美杰, 谭学工,徐俊明, 刘桂真, A note on "The super connectivity of augmented cubes". Information Processing Letters, 109(12) (2009), 592-593.

44. 曹永昌,徐俊明,徐喜荣, On bondage numbers of toroidal graphs.《中国科学技术大学学报》, 39 (3) (2009), 229-232 .

45. 胡青, 徐俊明, On addition of edges of graphs.《中国科学技术大学学报》, 39 (3) (2009), 229-232.

46. 徐俊明, 马美杰, A survey on cycle and path embedding in some networks. Frontiers of Mathematics in China, 4 (2) (2009), 217-252.

47. 黄佳,王建伟, 徐俊明, Reinforcement numbers of digraphs. Discrete Applied Mathematics, 157 (8) (2009), 1938-1946.

48. 侯新民, 徐俊明, 徐敏, The forwarding index of wrapped butterfly networks. Networks, 53 (4) (2009), 329-333.

49. 陆由, 徐俊明, 侯新民, Bounded edge-connectivity and edge-persistence of Cartesian product of graphs. Discrete Applied Mathematics. 157(15) (2009), 3249-3257.

50. 刘子龙, 田方,徐俊明, Probabilistic analysis of upper bounds for 2-connected distance k-dominating sets in graphs. Theoretical Computer Science, 410 (38-40) (2009), 3804-3813, 6 September.

50. 王海亮, 王建伟, 徐俊明, Fault-tolerant panconnectivity of augmented cubes. Frontiers of Mathematics in China, 4 (4) (2009), 697-719.

52. 陆由, 侯新民, 徐俊明, A note on the p-domination number of trees. Opuscula Mathematica, 29 (2) (2009), 157-164.

53. 王建伟, 徐俊明, Reliability analysis of varietal hypercube networks.《中国科学技术大学学报》, 39 (12) (2009), 1248-1252.

54. 吕敏, 陈国良, 徐喜荣, On super edge-connectivity of product graphs. Applied Mathematics and Computation, 207 (2009), 300-306.

55. Rui Yang, Xinmin Hou, Ning Li, Wei Zhong, A note on the distance-balanced property of generalized Petersen graphs, Electron. J. Combin., 16 (2009), N33.

56. Li, Ning; Hou, Xin Min，Bipartite graphs $K_{n,n+r} - A(|A| \leq 3)$ determined by their cycle length distributions. J. Math. Res. Exposition 29 (2009), no. 4, 571-579.

57. 胡大涛, 王建伟, 徐俊明, A new class of transitive graphs. Discrete Mathematics, 310 (4) (2010), 877-886.

58. 徐喜容,曹永昌, 徐俊明, 吴叶舟, Feedback numbers of De Bruijn digraphs. Computers and Mathematics with Applications, 59 (2) (2010), 716-723.

59. 徐俊明, 王建伟, 王为伟, Super and restricted connectivity of some interconnection networks. Ars Combinatoria, 94 (2010), 25-32.

60. 黄佳, 徐俊明, Domination and total domination contraction numbers of graphs. Ars Combinatoria, 94 (2010), 431-443.

61. 陆由, 徐俊明, Bipanconnectivity of Cartesian product graphs. Australasian Journal of Combinatorics. 46 (2010), 297-306.

62. 马美杰, 徐俊明, Algebraic properties and Panconnectivity of Folded Hypercubes. Ars Combinatoria. 95 (2010), 179-186.

63. 徐俊明,杨超, Connectivity and super-connectivity of Cartesian product graphs. Ars Combinatoria. 95 (2010), 235-245.

64. 梁浩, 潘永亮, 王健, 徐俊明, A note on unimodular congruence of the Laplacian matrix of a graph. Linear and Multilinear Algebra, 58 (4) (2010), 497-501.

65. 陆由, 侯新民, 徐俊明, On the (2,2)-domination number of trees, Discussiones Mathematicae Graph Theory, 30 (2) (2010), 185-199.

66. 陆由, 侯新民, 李宁, 徐俊明, A characterization of (γ_1, γ_2)-trees. Discussiones Mathematicae Graph Theory, 30 (3) (2010), 425-436.

② **已接收的学术论文**

1. 杨超,徐俊明, Connectivity of lexicographic product and direct product of graphs. Ars Combinatoria on 2006-08-26. Accepted on 2007-01-10.

2. 曹永昌, 黄佳, 徐俊明, The bondage number of graphs with crossing number less than four. Ars Combinatoria, Accepted on 2008-08-14.

3. 陆由, 侯新民,徐俊明, 李宁, Trees with unique minimum p-dominating sets, Utilitas Mathematica. Accepted on 2009-01-29.

4. 潘向峰,徐俊明,马美杰, Highly fault-tolerant routings in some cartesian product digraphs. Ars Combinatoria, Accepted on 2009-06-26.

5. 陆由, 徐俊明, Panconnectivity of Cartesian product graphs. Journal of Supercomputing. Accepted on 2009-10-19. In Press, Available online 2009

6. 徐喜荣, 杨超, 曹永昌, 徐俊明, Bounds on feedback numbers of de Bruijn graphs. Taiwanese Journal of Mathematics. Accepted on 2009-11-25.

7. 王健, 潘永亮, 梁浩, 徐俊明, The critical group of $K_m \times C_n$. Acta Mathematica Sinica, Accepted on 2009-12-23.

8. 王健, 潘永亮, 徐俊明, The critical group of $C_4 \times C_n$. Ars Combinatoria, Accepted on 2009-12-5.

9. 陆由, 徐俊明, The p-bondage number of trees. Graphs and Combinatorics. Accepted on 2010-05-25. In Press, Available online 2010-06-10