一篇论文的发表有惊无险

徐俊明

(2009 年春节)

摘　要

与颜俊和杨超合作的文章“*Forwarding Index of Cube-Connected Cycles*”终于发表在 *2009* 年的《*Discrete Applied Mathematics*》第 *157* 卷第 *1* 期上。这篇文章的发表有一段非常“悬乎”，而又耐人寻味的经历。借春节长假的闲暇，我把它写出来，供投稿者参考。

§1　论文的主要结果

n 阶连通图 G 的路由选择（routing）R 是 G 中 $n(n-1)$ 条路集，它指定了信息沿 G 中每对顶点 x 和 y 的传递路径，记 $R(x,y)$。路由选择承担网络中信息转发任务。为了度量路由选择的优劣，Chung 等 [1] 提出路由转发指数概念。G 中顶点 x（或者边 e）对于路由选择 R 的负载 $\xi(G,R,x)$（或者 $\pi(G,R,e)$）定义为 R 中路经过点 x（或者边 e）的条数。参数

$$\xi(G,R)=\max_{x\in V(G)}\xi(G,R,x) \quad \text{and} \quad \pi(G,R)=\max_{e\in E(G)}\pi(G,R,e)$$

就分别定义为 G 关于 R 的点转发指数和边转发指数。参数

$$\xi(G)=\min_{R}\xi(G,R) \quad 和 \quad \pi(G)=\min_{R}\pi(G,R)$$

就分别定义为 G 的点转发指数和边转发指数。

路由选择是网络的重要功能，也是组合网络理论研究的重要内容之一。一般说来，确定图的转发指数是困难的, 因为 Saad [4] 已经证明了: 对于直径至少为 2 的图, 确定点转发指数问题是 NP-hard 问题。因此，确定特殊网络的转发指数是有意义的。十几年来，它一直吸引着众多研究工作者的注意力。在这方面，我们做了一些工作，取得一些研究进展，也确定了一些著名网络的转发指数。

所谓立方连通圈网 $CCC(n)$ 就是在 n 维超立方体网络 Q_n 中用一条长为 n 的圈 C_n 替代 Q_n 的每个点后得到的图。$CCC(n)$ 是个 Cayley 图。2001 年，Shahrokhi 和 Székely [6] 利用概率方法给出立方连通圈网 $CCC(n)$ 的边转发指数渐近表达式：

$$\pi(CCC(n))=\frac{5}{4}n^2 2^n(1-o(1)).$$

但立方连通圈网 $CCC(n)$ 的点转发指数一直还没有确定，甚至连渐近表达式也没有见到。

2009 年的《Discrete Applied Mathematics》第 157 卷第 1 期上 [9] 发表了颜俊、徐俊明和杨超合作的文章“Forwarding Index of Cube-Connected Cycles”。这篇文章获得如下结果：

定理　对任何正整数 $n\geq 2$, 立方连通圈网 $CCC(n)$ 的点转发指数为

$$\xi(CCC_n)=\frac{7}{4}n^2 2^n(1-o(1)).$$

这篇文章的发表有惊无险。至今，我还保留着所有讨论稿、修改稿和通信。回顾这篇文章的完成和发表过程很有意思。今年春节，我哪里也没有去，写下这篇文章完成和发表的全过程，算是过了一个有意义的春节。

§2 论文的完成过程和定理的证明思路

定理证明的主要框架是由颜俊完成的。颜俊，科大计算机系99级本科生，对数学有极浓厚的兴趣。2003级计算机系硕博连读研究生，在中科院软件所攻读计算机软件专业。在读本科期间，他参加我的2003年暑期大学生研究计划《互连网络拓扑结构的设计、分析和性能评估》。从此，我认识了他，建立了师生关系。研究计划涉及图论和组合网络理论研究，特别是路由转发指数的研究。颜俊与周涛和杜野合作的大学生研究计划结题论文 “A new upper bound on forwarding index of graphs” 发表在《Ars Combinatoria》上 [8]。

颜俊在大研期间，力图确定立方连通圈网 $CCC(n)$ 的点转发指数，一直到读研期间，他也没有忘记这件事情。于2006年12 月27日，他给我发来一篇他自己完成的论文。他在信中说：“*我在暑假把大研的那个求 $CCC(n)$ 转发指数的问题做了一下，得到了它的渐近表达式：$\frac{7}{4}\,n^2\,2^n\,(1+o(1))$。(附件中的定理 9) 我检查了好几遍，也像您教我的那样隔了 3 个月再检查了几遍，果然修正了不少错误。但现在我仍担心证明的正确性。恰好这两天我要回科大几天，想与您讨论一下，让您帮忙看看证明是否有误。不知您是否有空？我周三早上到合肥。附件中是该结果的草稿，目前还写得很乱。不过我可以当面给您讲讲，很快的。工作的主要难度在于估计所有最短路径上 cyclic edge 的条数。*”

我略浏览了一下颜俊发来的附件，全文不到5页。这是一篇论文框架，包括6个引理和3个定理，既没有前言，也没有参考文献，甚至连文中的许多符号也没有定义。但该文得到的主要结果（定理9）是清楚的，给出了立方连通圈网 $CCC(n)$ 的点转发指数的渐近值：

$$\xi(CCC_n) = \frac{7}{4}\,n^2 2^n(1-o(1)). \tag{2.1}$$

如果这个结论是正确的话，这是一个很好的结果。由于太过于简洁，我看不懂证明过程，于是给颜俊回信：“这是一个很好的结果。不过你目前的文稿，我是看不懂的。星期三下午3点在理化中心1508教室向我报告一下，还有我的几个学生。” 颜俊如约向我们做了报告，我们大致理解定理证明的基本思路，同时也提出一些问题，并希望他把证明细节写清楚，给出一些图例说明。

2006年12月30日，颜俊给我回信：“*这两天我主要把证明的各个步骤详细写了一下，见附件。在文稿的一些位置需要插入一些图说明，但我实在画不出来。另外，把最短路从 CCC_n 映射到 C_n 上的 walk 部分 (Theorem 5) 感觉写得还不是很好。Lemma 4 的证明写得比较省略，主要是感觉它没什么东西，且有些繁琐。我预计下周二晚上必须离开合肥回北京。希望您这两天能抽空帮我检查一下证明的细节，以便有不清楚的地方可以当面讨论一下。您什么时候在办公室？我把向您借的书 (《互联网络拓扑结构分析》) 还给您，并把文稿中用到的图交给您。(共三处图，我手画了一份。)*”

我收到修改稿后，抓紧时间看完了，还有些不明白的地方，就给颜俊去信：“我正在看你的文稿，其中的图已经叫我的研究生扬超画好了。现在请你解释一下定义2中的 “ordered partitions of positive integer n”，这里的 “ordered” 是什么意思？（1，1，2，3）和（3，1，1，2）都是7的可重复，且其元素都不大于3的有序划分，是否符合你的定义。如果不是，请你举几个例子说明一下。”

颜俊回信说：“*正如您所说的，我定义 (1，1，2，3) 和 (3，1，1，2) 为 7 的两个不同拆分；所以称之为 “ordered”。不知道组合中有没有标准的名字？(我从网上没有找到；孙淑玲和许胤龙的书上称 “有*

序拆分”，所以我翻译作 *ordered partition*。一些英文书上只定义 *partition*，指的是无序拆分。*)* 若没有正规定义的话看来我得明确定义一下这个概念。

另外，非常感激您检查我的草稿！您还让您的研究生帮我画的图，请代我向他们致谢！

事实上，我回到北京后，又把草稿给整理了一下。新的草稿在附件中。它与您现在手上的没有本质的区别，我只是把摘要，文章的开头，以及参考文献搞了一下。希望需要的东西都已经添加上去了。此外，我还自己画了两个图（*pdf*文件才能完全看清楚）。肯定没有您的研究生画得好，呵呵。那个 CCC_3 的图本打算用您教材上的那个。

在我现在发给您的草稿中，证明部分就是 *Theorem 5*做了微小的改动。但这个证明我目前还不是特别满意，也没有想到更好的说法写它，让它读起来更容易。草稿的计算部分 *(section 3)* 我没有做任何修改。”

通过几次书信的交流和讨论，我反复看了 Shahrokhi 和 Székely 的文献 [6]，终于弄清定理证明的思路和计算技巧，并着手进行手稿的修改。

证明的基本思想是基于 Heydemann, Meyer and Sotteau [2] 的如下结果：如果 $G=(V,E)$ 是 n 阶连通 Cayley 图，那么

$$\xi(G)=\sum_{y\in V} d(x,y)-(n-1)\ \forall\ x\in V(G). \tag{2.2}$$

因为立方连通圈网 $CCC(n)$ 是 $n2^n$ 阶连通 Cayley 图，由式（2.2）有

$$\xi(CCC_n)=\sum_{\substack{x\in V(Q_n)\\ 0\le j\le n-1}} dist((o\,;0),(x;\ j))-(n2^n-1), \tag{2.3}$$

其中 $dist((o\,;0),(x;j))$ 表示 CCC_n 中两顶点 $(o\,;0)$ 和 $(x;j)$ 之间的距离。

为了证明定理，只需要确定式（2.3）右边第一项中距离和。我们采用了 Shahrokhi 和 Székely 在 [6] 中的分割方法，根据立方连通圈网的结构特征，将距离和分为两部分。设 $x=x_0x_1\ldots x_{n-1}$ 是 Q_n 中顶点，$S_x=\{i\mid x_i=1, 0\le i\le n-1\}$，$m(j,S)$ 是 C_n 中经过 S_x 中所有顶点的最短 $(0,j)$ 链的长度（这里的 S_x 和 $m(j,S_x)$，即 Shahrokhi 和 Székely 用的记号 μ_{d_1} 和 μ_{d_2}）。我们获得一个关键性的结论：CCC_n 中两点 $(o\,;0)$ 和 $(x;j)$ 之间的距离

$$dist((o\,;0),(x;j))=|S_x|+m(j,S_x). \tag{2.4}$$

令

$$R=\sum_{\substack{x\in V(Q_n)\\ 0\le j\le n-1}}|S_x| \quad \text{and} \quad T=\sum_{\substack{x\in V(Q_n)\\ 0\le j\le n-1}} m(j,S_x). \tag{2.5}$$

因此，由式 (2.3)，式 (2.4) 和式 (2.5)，我们有

$$\xi(CCC_n)=R+T-(n2^n-1). \tag{2.6}$$

于是，定理的证明就归结为计算 R 和 T。很容易求出 $R=n^2 2^{n-1}$。但确定 T 的精确值是相当困难。

我们没有采用 Shahrokhi 和 Székely 的概率方法来求 T 的近似值，而是充分利用整数划分的计算技巧给出了 T 的近似值：$T=\frac{5}{4}n^2 2^n(1-o(1))$。证明这个结论最困难的部分是下界的建立。为此，令 $p(n,\ell)$ 表示整数 n 的有序划分数使得每个划分中整数不大于 ℓ。我们获得一个关键的不等式：

$$p(n,\lfloor\log_2^2 n\rfloor)\ge 2^{n-1}(1-n^{2-\log_2 n}). \tag{2.7}$$

耗尽整个寒假时间，颜俊、杨超和我密切合作，对原稿进行多次修改和完善，于 2007 年 04 月 06 日完成文稿，并投到《Discrete Applied Mathematics》，稿件编号：DA7205。

§3 审稿人意见

时隔正好一年，于2008年03月11日收到《Discrete Applied Mathematics》编辑部来函。因为我是该文的通信作者，该函是用电子邮件直接发给我的。该杂志的主编（Editor-in-Chief）Endre Boros 在信中说："Please see our referees' reports on your manuscript. As you will notice, the referees suggest a number of revisions in your paper. Please make the necessary corrections and upload the revised version of the paper to our website at your earliest convenience." 我读完这封信，编辑只是叫我们修改。按惯例，该文的发表是八九不离十了，我很是高兴。

我很急切地打开审稿人报告。从审稿人编号来看，至少有五位审稿人。但附件只有三个评审报告，Reviewer #3、Reviewer #4 和 Reviewer #5。审稿人都是先简要介绍一下本文所讨论问题的意义和本文得到的结果，然后给该文是否接收的结论。其中两个审稿人的结论是令人高兴的。

第五个审稿人的结论是："The originality of the work, however, does not lie in the design of the routings that attain those bounds, since that question has been settled by Meyer and al for general Cayley graphs, but on the intricate calculations and the resulting transformation of the original sum of distances into a nice closed form. The math involved is intricate, if basic in essence.

On the whole, the paper is a nice contribution to an important theory. I recommend its publication in Discrete Math."

第四个审稿人的结论是："The results are interesting and I do not find any formal mistakes in the proofs. The proof techniques are standard in the area. I think the paper can be accepted for publication."

这两位审稿人都还给出了进一步修改稿件的具体意见，主要是笔误和语法表示不妥。第三个审稿人的意见令人失望，其结论是"I cannot recommend acceptance"。评审报告全文如下:

The main result of the submission is an asymptotic bound on the vertex forwarding index of the cube connected cycle CCC_n (of dimension n and order $r = n\,2^n$), given as $7n/4\,r\,(1-o(1))$. The paper contributes little to the theory of forwarding indices, since it makes use of a known formula for expressing the forwarding index of a Cayley graph in terms of the mean distance between nodes. So, the authors concentrate on proving that the mean distance between nodes in CCC_n is $7n/4\,r(1-o(1))$.

There are two problems here.

1. This result appears to have been known for many years, both as an upper bound and as a lower bound. See e.g. the survey table and "Summary" section of: S.R. Öhring, F. Sarkar, S.K. Das, D.H. Hohndei, "Cayley graph connected cycles: A new class of fixed-degree interconnection networks", HICSS 1995, p.479. The bounds there are cited from some earlier work of Shahrokhi and Székely; another proof of the upper bound is also provided.

2. The authors propose their work as complementary to a result of Shahrokhi and Székely, DAM 108 (2001) 175-191 (ref. [6]), concerning edge forwarding indices. The methods applied in both papers are however very similar. For the most important lower bound, expressions with the same coefficients - "2/4" and "5/4" - are derived in both papers. For the proof of the "5/4"-part, [6] uses random variables with uniform distribution, here the authors use a slightly more elegant combinatorial counting argument, but it basically amounts to the same; even the "cut-off" point of $\log n^2$ is identical in both cases.

[A note, quite aside from the review: I think the result as such also follows immediately from [6], since: vertex forwarding index ≥(expression [6](1) + expression [6](5)) / r].（这段话的意思是：由文

献 [6] 中式（1）和式（5）可以得到转发指数的下界。）

Due the lack of originality of the results and methods, I cannot recommend acceptance.

The paper could be perhaps be of interest if the authors were to find the exact value, or at least a more precise estimate, of the vertex forwarding index of CCC_n.

§4 我们采用的对策

第三位审稿人意见对本文的接收是不利的，也可能是致命的。我一边查找第三位审稿人在评审报告的问题 1 中提到的文献（在此之前，我没有见过此文献），一边将编辑部信转发给颜俊和杨超，想听听他们的意见："颜俊，杨超，我们投到 Dis. Appl. Math. 的文稿被要求修改。附件是评审报告。请你们将评审人提出的主要问题逐一做个回答，然后发给我。" 颜俊很快就给我回信（2008 年 3 月 11 日）（注意，信中提到的文献编号有所修改，均为本文末的编号，信中提到的引理编号均为原初稿中的编号）：

徐老师：您好！在三个评审报告中，两个都是肯定的，而且其中的问题都不足为虑。因此，我们先只讨论第三个评审报告。我仔细看了一下第三个审稿人在报告中指出的两个问题。呵呵，我严重怀疑，这个审稿人就是 *F. Shahrokhi* 和 *L. Székely*（也就是我们的文献 *[6]* 中的两个作者）之一。他居然能轻易指出那个下界可以由文献 *[6]* 中式（*1*）和式（*5*）导出！针对这两个问题，我做的初步分析以及准备采取的措施如下：

对于问题 *1.* 审稿人提到的文献如下：

S.R. Öhring, F. Sarkar, S.K. Das, D.H. Hohndei "Cayley graph connected cycles: A new class of fixed-degree interconnection networks", Proceedings of the 28th Annual Hawaii International Conference on System Sciences - 1995, 479-488

似乎（请您也检查一下）仅给出了一个上界。但我们知道，得到这个上界是容易的，几句话就可以说清楚，我们在文章中的推导也就用了几行字（*Lemma 7*）。这不是关键。关键是，这篇文章中指出文献 *[5]* 中证明了平均距离是 $7n/4$；但文献 *[5]* 是一篇早年的技术报告，我无法找到。另外，值得注意的是，*[5]* 的作者就是我们引用的参考文献 *[6]* 的作者；且文献 *[6]* 指出，他们的结果是基于文献 *[5]* 的。

对于问题 *2,* 审稿人指出，我们的证明与 *[6]* 中的基本相同，且结果可以直接由 *[6]* 中的两个式子导出。由于我没看过 *[6]* 的证明方法，不知道二者之间有没有什么关系；不过，一般来说，组合计数和概率方法都有很大的关系。因此，为了回答这个问题，我需要花一些时间来读 *[6]* 以及 *Cayley* 图的转发指数，看看是不是像审稿人所说的那样。然而，即使情况正如审稿人所说的那样，*[6]* 中毕竟没有指出 CCC_n 的转发指数，这是一件很奇怪的事情。

现在，再从我们的出发点(发文章)小结一下。依我看，阻止我们文章被接受的最强理由是：这个结果已经在 *[5]*（也就是我们在文章中引用的参考文献 *[6]* 中引用的文献 *[3]*）中被证明了。可惜的是，参考文献 *[5]* 我们估计是找不到的；因此这一点我们无法证实。阻止我们文章被接受的另一个理由是：像第三位审稿人所指出的，结果可以直接由文献 *[6]* 中的式（*1*）和式（*5*）得出；这一点有待我去进一步证实。但是，注意到，毕竟 *[6]* 中并未直接给出我们的结果。

最后，谈谈个人的想法。我对文章能够发表总体还是持悲观的态度。毕竟，在数学中，只有第一，没有第二。取得的成果不能发表总是一件很遗憾的事情；特别是当别人告诉你这个结果早就有了，更令人愤怒（呵呵）！对于接下来的工作（回答第三位审稿人）的问题，我还是非常乐意去做的，毕竟，*[6]* 中的方法还是很有趣的；我也很想看看用 *flow* 的方法为什么能得出一些有趣的结果，甚至掌握 *flow* 这个工具。至于第三位审稿人建议做出更精确的近似，我想我可能有一天会去做这件事。

我会争取尽快看完 *[6]*，然后回答审稿人提出的问题。

2008 年 3 月 16 日，我收到颜俊的信。他在信中说："我看了一下 *[6]* 那篇文章：

F. Shahrokhi and L. A. Székely, Constructing integral flows in symmetric networks with application to edge-forwarding index problem, Discrete Applied Mathematics, 108 (2001), 175-191.

特别是其中的 *Lemma 4* 的 *(i), (ii)*，以及 *Theorem 3* 的证明，非常巧合，他们的证明思路跟我们的一模一样：第三位审稿人指出的式（*1*）和式（*5*），正是我们算的 R 和 T *(*乘上一个因子 $n2^n$：点的对称性*)*。只不过他们做渐进分析用的是概率方法，我们用的是直接计算。

F. Shahrokhi and L. A. Székely 的这篇文章看上去很吓人，一上来就是群之类的东西。其实，在定理 *3* 的证明中，根本就没怎么用到群等这些概念：该证明所做的工作就是算我们求的 R 和 T。只不过我们是求和，他们是求 max *(*他们用了一些群的概念是用来说明"要求 max"*)*。

看来，我们的文章真是步人后尘，发表没什么希望了。

附件中是文章的修改稿，以及我对第三位审稿人的回答。对于其他两个审稿人提出的意见，我已在文章中做了相应的修改。"

看了颜俊的两封信和他对第三位审稿人提出的问题所作的回答，我再次仔细阅读第三位审稿人提到的两篇参考文献，我心中有了底，对本文的发表充满信心。我对本文的看法是：

1. 颜俊在准备此稿之前并没有认真阅读文献 [6]（或许是文中涉及到群、轨道和流的知识超过了他作为计算机系本科生的知识范围），也就是说，这篇文稿的初稿中结果和证明思路的是他独立完成的。但我看过文献 [6]，并且发现颜俊在初稿中求距离和的思路与文献 [6] 基本一致，但表述不是很清楚（这对于非数学系学生是可以理解的）。也正是受到文献 [6] 启发，在对文稿进行修改，定义了"gap"概念，添加了与文献 [6] 中一样的图示。我们并没有回避文献 [6]，并明确提出"The concept of the gap, first introduced by Shahrokhi and Székely [6], can be used to express $m(j, S)$"。
2. 定理证明的关紧是确定式（2.5）中的 T。由于都是求点可迁图 CCC_n 的距离和，首先想到求特殊点$(o\,;0)$ 到一般点 $(x;j)$ 之间的距离是自然的。正如第四位审稿人在他的评审报告中所说的："The proof techniques are standard in the area"。因此思路和结论都是一样是不足为奇。文献 [6] 利用了"群"、"轨道"、"流"等概念，采取概率方法对 T 进行估值；而我们利用 CCC_n 的结构特征和整数的有序划分，采用直接计算的方法，简洁明了，有独特之处。
3. 这是最重要的，本文明确指出是确定 CCC_n 的点转发指数的渐近值。第三位审稿人在文献 [6]（可以肯定他就是作者之一）已经明确给出 CCC_n 的边转发指数的渐近值，他们应该很自然地想到 CCC_n 的点转发指数。既然能指出我们的结果可以直接由文献 [6] 中的式（1）和式（5）得出，那为什么他们不给出 CCC_n 的点转发指数的渐近值呢？显然，他没有想到 CCC_n 的点转发指数。至于第三位审稿人提到 [5] 已证明了我们的结果，我们认为 [5] 是一篇没有发表的技术报告，我们也看不到这篇报告。从文献 [3] 的表 1 看，文献 [5] 证明了 CCC_n 的平均距离为 $7n/4\,(1-o(1))$。究竟是怎么证明的？正确性如何？不得而知，因此不能作为拒绝我们文章发表的理由。按照学术界惯例，应以公开发表的学术论文为依据。
4. 最后一点，编辑部发给我们的三位审稿人的评审报告，其中两位支持该文发表，而且一位评价较高："On the whole, the paper is a nice contribution to an important theory"。我们相信主编会对本文是否发表做出正确的决断。

我们认真修改文稿，做好了"Rejected"的最坏打算。于 2008 年 4 月 6 日，完成对本文的修改，发给了编辑部。按理，我们应该给编辑部附上一份"Responses to reviewers"，逐一回答审稿人提出的问题，特别是要回答第三位审稿人提出的两个问题。但我们这次例外，没有这样做。遇到这样的事情，会

越解释越麻烦。我们采取“冷处理”的方法，既不理睬第三位审稿人的意见，也不据理力争，只用了很含糊的语言附上一篇短信：

“This is the revised version of the manuscript DA7205. All suggestions mentioned by the reviewers, all of which are the language and presentation, have been adopted in this version. The two problems proposed by the reviewer3, we don’t want to response since it is easy to judge if the problems are true for any reader who has know very well this research topics. ”

修改稿发出去后，我将修改稿和我写给编辑部的短信一起发给了颜俊。颜俊也立即回了信：感谢您百忙中抽空修改文稿。至于能不能被接受，只好听天由命了。

现在，我总是往好的方面想：毕竟，在整个过程中，我们证明了一个定理。同时，就我而言，从这个工作中我学会了很多，也得到了很多东西；不仅仅是数学知识和技巧，还包括攻关的策略，以及对科研生活的体会。更重要的一点是，我正是从那一年暑假跟您做大研、做这个问题开始，我的整个人生观、价值观发生了一次根本的转变，并由此逐步决心投身科学研究的。是您给了我一次机会，引导我体验到了一种不一样的生活，一种更加高尚的追求。尽管这几年我在科研的道路上遇到了很多挫折，犯了很多错误，也清醒地认识到选择这条道路就意味着选择了一种（很可能）寂寞、清贫的生活，但是我想我还是会继续走下去。

现在，我从事的研究大方向是理论计算机科学，这是一个广泛应用概率、组合、代数等数学工具的领域；这里面既有很多您所谓的“智力题”，也有很多“数学题”（我想我现在才终于明白它们之间的差异了）。希望我们将来还有合作的机会。

§5 后记

10天后，2008年4月16日，我们收到《Discrete Applied Mathematics》主编Endre Boros来信:

Dear Professor Xu,

We are pleased to confirm that your paper "Forwarding Index of Cube-Connected Cycles" has been accepted for publication in Discrete Applied Mathematics.

Thank you for submitting your work to this journal.

With kind regards,

Endre Boros

接到接收函，我们非常高兴，终于体会到“有惊无险”一词的滋味。感谢主编“申明大义”做出公正的判决。该文最终发表在2009年《Discrete Applied Mathematics》的第157卷第一期上 [9]。

读者能从本文学到什么？我也不多写了，自己去琢磨、去体会吧!

参考文献

[1] F. R. K. Chung, E. G. Coffman, M. I. Reiman and B. Simon, The forwarding index of communication networks. *IEEE Transactions on Infomation Theory*, **33** (1987), 224-232.

[2] M. C. Heydemann, J. C. Meyer and D. Sotteau, On forwarding indices of networks, Discrete Applied Mathematics, 23 (1989), 103-123.

[3] S. R. Öhring, F. Sarkar, S. K. Das, D. H. Hohndei "Cayley graph connected cycles: A new class of fixed-degree interconnection networks", Proceedings of the 28th Annual Hawaii International Conference on System Sciences - 1995, 479-488

[4] R. Saad, Complexity of the forwarding index problem. *SIAM J. Discrete Mathematics*, **6** (1993), 418-427.

[5] F. Shahrokhi and L. A. Székely, A new approach to the uniform concurrent multicommodity flwo problem : Theory and applications. Technical Report CRPDC-90-8, University of North Texas, Department of Computer Science, October 1990.

[6] F. Shahrokhi and L. A. Székely, Constructing integral flows in symmetric networks with application to edge-forwarding index problem. *Discrete Applied Mathematics*, **108** (2001), 175-191.

[7] Jun-Ming Xu, Chao Yang, Connectivity of Cartesian product graphs. *Discrete Mathematics.* **306** (1) (2006), 159-165.

[8] Jun-Ming Xu, Tao Zhou, Ye Du, Jun Yan, A new upper bound on forwarding index of graphs. *Ars Combinatoria*, **83** (2007), 289-293.

[9] Jun Yan, Jun-Ming Xu, Chao Yang, Forwarding index of cube-connected cycles. *Discrete Applied Mathematics*, **157** (1) (2009), 1-7.