关于周涛同学

徐俊明

(2009 年 2 月 1 日)

摘　要

获悉周涛同学荣获第五届“中国青少年科技创新奖”，很是高兴。我曾在我的网页发布消息，向周涛同学表示祝贺。前几天，我又看到周涛同学在自己的博客上发表了一篇文章：*每周工作回顾 2－关于图的直径和平均距离*，颇有感想，写下这篇小札记，再次向周涛同学表示祝贺。

§1　周涛同学荣获第五届“中国青少年科技创新奖”

来自于中国科学技术大学新闻网 2009 年 01 月 04 日报道：周涛同学荣获第五届“中国青少年科技创新奖”：网络连接：$http://news.ustc.edu.cn/zh\_CN/?article = 00017847$

日前，共青团中央、全国青联、全国学联、全国少工委在人民大会堂隆重举行第五届中国青少年科技创新奖颁奖大会。我校理学院近代物理系 2004 级博士研究生周涛获此殊荣。

中共中央政治局委员、全国人大常委会副委员长王兆国，中共中央政治局委员、国务委员刘延东会见全体获奖学生并为获奖学生颁奖。颁奖大会上，全国政协副主席、中国残联名誉主席邓朴方代表邓小平同志亲属讲话。基金评委会主任杨乐院士介绍了评审情况，共青团中央书记处第一书记陆昊宣读了关于颁发第五届中国青少年科技创新奖的决定，邓小平同志亲属邓楠、邓榕，中央党史研究室副主任龙新民，科技部党组书记、副部长李学勇，团中央书记处常务书记杨岳，中央文献研究室常务副主任杨胜群，中国工程院副院长杜祥琬，中国科协书记处书记冯长根，团中央书记处书记罗梅，全国学联主席刘凯及基金管委会、监委会、评委会部分委员和全国各地中学生代表共 400 余人参加了颁奖大会。团中央书记处书记卢雍政主持颁奖大会。

周涛同学 2000 年自成都市第七中学考入中国科学技术大学少年班系，2004 年本科毕业后作为硕博连读生在中国科学技术大学近代物理系攻读博士学位至今，师从汪秉宏教授。在学期间，周涛同学多次在各种国际国内科技创新及学术学科类竞赛中获得奖励，如国际大学生程序设计大赛、国际大学生数学建模比赛等。仅以其为第一作者或者通讯作者发表在 SCI 检索期刊上的论文就超过 40 篇，迄今为止，他发表的论文获得了超过 550 次引用。此外，周涛多次在国际国内重要学术会议上作大会报告、邀请报告和邀请讲座，并多次在相关学术会议中担任要职，还是十余种国际物理学期刊和国内若干专业期刊的常任审稿人。

邓小平同志生前一直十分关心青少年的健康成长，注重青少年创新精神和创新能力的培养。2004 年邓小平同志诞辰 100 周年之际，邓小平同志亲属遵照他的遗愿，将他生前的全部稿费捐献出来，经党中央批准，由共青团中央、全国青联、全国学联、全国少工委共同设立了中国青少年科技创新奖励基金。基金设中国青少年科技创新奖，主要奖励在校大、中、小学生，是中国青少年的崇高荣誉。据了解，与往届不同的是，今年第五届评选表彰首次将奖励对象扩展到港澳地区在校学生。

此前，我校工程科学学院精密机械与精密仪器系2003级硕士研究生钟小强同学荣获首届“中国青少年科技创新奖”，化学与材料科学学院化学系2002级博士研究生傅尧和生命科学学院2005级本科生谢鑫淼荣获第二届“中国青少年科技创新奖”，微尺度物质科学国家实验室2003级博士研究生赵爱迪荣获第三届“中国青少年科技创新奖”，微尺度物质科学国家实验室2004级博士研究生曾杰荣获第四届“中国青少年科技创新奖”。

§2　关于图的直径和平均距离

来自周涛的发表于2008年12月26日的博客文章：“每周工作回顾2——关于图的直径和平均距离”。该文的网页链接：$http://www.sciencenet.cn/m/user\_content.aspx?id=206890$

这并不是我发表的第二篇论文，选它作为第二个介绍的工作，因为这是我最最喜欢的几篇论文之一，而且它引出了我本科时的第三位导师：徐俊明教授。实际上这是一个很偶然的故事，我那个时候已经选择物理的方向了，但是对于数学和计算机还有割舍不了的情缘，于是在大三上学期的时候，选了一门带有计算机背景的应用数学的课程，叫做组合网络分析，是组合数学和图论的方向。那门课的老师就是徐俊明教授。

课程上到1/3左右的时候，接触到了一个极值图论最基本的定理：Ore定理。极值图论主要是研究在给定了某些限制条件的前提下，图的某些指标（拓扑结构的特征量）的上下界问题。Ore在四十年前给出了一个著名的定理[O. Ore, J. Combinational Theory 5 (1968) 75]，这个定理是一个上界不等式：$\varepsilon \leq d+1/2(v-d+4)(v-d-1)$，其中$\varepsilon$是一个简单无向连通图的边数，$v$是这个图的节点数，$d$是这个图的直径（最长的最短距离）。

尽管在教材中多次用到了Ore定理，但是却没有给出Ore定理的证明。但是各位搞过数学的同仁都知道，一个教材上看起来很简单的定理却没有证明，本身就是一种难以抗拒的诱惑。于是我去问徐老师，他说这个证明很长很烦，在课程要求之外。于是乎我自己尝试去证明（当时并不觉得能成功），结果一不小心证明出来了，而且非常简单。实际上，Ore以及后来一些相关的工作，其证明的思路都是先把网络（图）表达成一种广度搜索树的形式（这种层次结构可以很好表达最短距离这个量），然后在这个平台上play。这些方法也是证明和距离有关系的极值不等式的常见方法（现在常见，四十年前是很不常见的），所以说，这套招术可以看作是少林武当的招术，比较正统。我那个时候，学过的招术很少，所以走了一条邪路，就是把当前的图看作是从一个完全图移除掉一些边得到的，通过分析这个移除过程对Ore定理所涉及的各个量的影响来证明这个问题。有意思的是，这个方法不仅能十倍简单于Ore原来的方法，而且可以处理很多相关相续的工作，例如Entringer, Jakson, Slater, Ng, Teh等人的研究工作。

我当时证明完毕后，又去图书馆的过刊阅览室复印了Ore的工作（看懂他的证明比我自己完成证明消耗了更多的能量），然后把自己的证明整理好给徐俊明老师看。徐老师非常高兴，接着告诉了我一些相关的工作（就是我上面提到的Entringer, Jakson, Slater, Ng, Teh 等人的研究工作），指导我继续深入研究。后来文章由刘隽完成了英文初稿（那个时候我的英文水平还没有达到4级，而刘隽高中的时候雅思考试就已经是整个华中地区的no. 1），再由徐老师整理加工，投到了运筹学学报，很快就得以顺利发表。

我以科大数学系为单位的论文一共只有4篇，这一篇是我最喜欢的。虽然是发表在国内的杂志上，但是我觉得这个文章整个结构和证明思路可以用“雅致”来形容，我自己证明的时候都很享受。后来也发表过一些SCI的纯数学方向的论文，用到一些似乎高深的技术，但都没有这篇文章的精巧。就好

像玩塔罗牌也需要智力和技巧，但终究是无法和围棋媲美的——花样太繁多，规则太复杂，以至于掩盖了单纯的美本身。

PS1：刘隽是个怪才，她精通多种乐器，钢琴有专业水平，美术书法都相当厉害，英语是同龄人中首屈一指的（全国英语辩论赛银奖），还拿过楚才杯的特等奖（在新概念作文比赛前，这是最大的青少年文学比赛之一）。在这种情况下，她高考还得了678分（那年四川省北大清华科大复旦的招分线在610-630之间）。如果她选择了音乐或者文学作为终生事业，或许成为一代大豪。不过现在在新加坡读生物学的博士，不知道是不是一个合适的选择。

PS2：T. Zhou, J. –M. Xu and J. Liu, "On diameter and average Distance of Graphs", 运筹学学报, 8(4), 33-38 (2004).

§3 我所认识的周涛同学

我知道周涛同学这个名字是2002年下学期，他选修了我为数学系99级本科生和02级研究生开设的专业课程《图论及其应用》。少年班选修此课程的本科生只有两位同学，一位是周涛，另一位是吴伊涛，他们俩期末考试成绩都是94分。其实，我当时并不认识周涛。上高年级本科生专业课程，老师与选课的学生接触很少，来问问题的学生也不多。但我当时只是对少年班同学很有好感，认为他们都是天才少年，智力与别人不一般。2003年上学期，我为本专业研究生开设《组合网络理论》。当时有很多本科生选修此课程，周涛就是其中之一。由于他当时参加"挑战杯"竞赛，没有参加期末考试，当然也就没有此门课程的考试成绩。按理他当时已经完成了一篇论文，我可以给他成绩，但他说："成绩有否无所谓，倒是从这门课，我学到了不少东西。"2003年下学期，他又选修了我为本专业研究生开设《代数图论》课程，期末成绩为92分。这段时间，他给我的第一印象是：不大的脸蛋总是挂着乐呵呵的充满自信的笑容。

周涛展示他的数学天才是在选修《组合网络理论》的时候。那时用的教材就是我编写的英文教材《Toplogical Structure and Analysis of Interconnection Networks》[6]。就在该教材的第一章第1.4.1节末，我叙述了一个重要定理（该教材中定理1.4.4）：*对 υ 阶连通 d 直径的无向图 G,*

$$\varepsilon(G) \le d + \frac{1}{2}(\upsilon - d + 4)(\upsilon - d - 1).$$

这是著名的Ore定理，但我在教材中没有给出证明。正如周涛在博客文章所说的，我没有给出其证明，是因为Ore原始证明[4]太不易理解，但也找不到简单证明。我也曾叫一些同学试图给出简单证明，均不理想。周涛说他自己试着给出一个证明，我半信半疑。很快，他就给我一份证明草稿。我看完他的证明，我很高兴。他的证明简单，但完全正确。该证明不涉及更多的图论术语，也不借助任何已知结论，是正真意义上的"self-contained"证明。证明方法独特，考虑从一个υ阶完全图中至少去掉多少条边才能得到直径为d的图。从此，我们的交流多起来，我也就逐渐认识了他。我对他说：能否用此方法将Ore定理推广到有向图情形？他按此方法很快就给有向图的结果：*对 υ 阶强连通 d 直径有向图 D,*

$$\varepsilon(D) \le \upsilon(\upsilon - d + 1) + \frac{1}{2}\left(d^2 - d - 4\right).$$

这是一个全新的结果，文献上从没有报道过。从此，我对这位少年刮目相看了。进而我又叫他考虑该教材中定理1.4.5的证明。

设 G 是 υ 个顶点 ε 条边的图，$\sigma(G)$ 是 G 所有点对之间距离之和。(a) 如果 G 是无向图，那么 $\sigma(G) \ge 2\upsilon(\upsilon-1) - 2\varepsilon$; (b) 如果 G 是有向图，那么 $\sigma(G) \ge 2\upsilon(\upsilon-1) - \varepsilon$。而且如果 $d(G) \le 2$，那么等号成立。

这也是网络设计和分析中一个很重要的定理，其中 (a) 是由 Entringer, Jackson 和 Slater [1] 得到，(b) 由 Ng 和 Teh [3] 得到。但这个定理涉及到的参考文献很难找到，因此，我也没有在教材中给出证明。周涛按照同样的方法加上一些计算技巧给出了证明。事实上，周涛证明了一个更强的结果：

设 G 是直径 $d\,(\geq 2)$ 的图。*(a)* 如果 G 是无向图，那么

$$\sigma(G) \geq \begin{cases} 2\upsilon(\upsilon-1) - 2\varepsilon + \frac{1}{3}d(d-1)(d-2) + \frac{1}{2}(\upsilon-d-1)(d-2)(d-4), & \\ & \text{if } d \text{ is even;} \\ 2\upsilon(\upsilon-1) - 2\varepsilon + \frac{1}{3}d(d-1)(d-2) + \frac{1}{2}(\upsilon-d-1)(d-3)^2, & \\ & \text{if } d \text{ is odd;} \end{cases}$$

(b) 如果 G 是有向图，那么

$$\sigma(D) \geq \begin{cases} 2\upsilon(\upsilon-1) - \varepsilon + \frac{1}{6}d(d-1)(d-2) + \frac{1}{4}(\upsilon-d-1)(d-2)(d-4), & \\ & \text{if } d \text{ is even;} \\ 2\upsilon(\upsilon-1) - \varepsilon + \frac{1}{6}d(d-1)(d-2) + \frac{1}{4}(\upsilon-d-1)(d-3)^2, & \\ & \text{if } d \text{ is odd.} \end{cases}$$

这个结果不但改进了 Entringer-Jackson-Slater 和 Ng-Teh 的结果，还改进了 Plesnik [5] 的结果。周涛给出的证明方法和获得的新结果足以形成一篇很有价值的文章。我建议周涛写成英文可以投出去发表。他交给我的英文稿里去多出一个作者-刘隽，我也没有多问。从他的博客文章里，我现在才知道那个时候，他的英文水平还没有达到 4 级，由刘隽完成了英文初稿。我当时确实不知道周涛的英语水平，实在难为他了。我至今还没有见过刘隽，如果我当时知道她是位多才多艺的女中怪杰，我一定要见见她。

英文稿完成后，我稍作修改和完善，于 2003 年 4 月 16 日投到国内《运筹学学报》，发表的文章中表明稿件收到日期是 2003 年 4 月 21 日。据我的教学日志记载，那一年是 2 月 17 日才开学，2 月 25 日才讲到距离与平均距离。也就是说，周涛从接触问题，到文稿投出去，不到两个月时间，可谓神速。发表时间是 2004 年 11 月 [10]。

顺便提一下，周涛同学对“图直径与平均距离的极值问题研究”获得“挑战杯”一等奖，被推荐在《中国科学技术大学》学报发表 [11]。我当时并不同意这种做法，有“一稿两投”的嫌疑。但最终还是发表了，用的是中文原稿。就是这篇文章获《中国科学技术大学学报》2004 年度优秀论文。

周涛参加我的 2003 年暑期大学生研究计划《互连网络拓扑结构的设计、分析和性能评估》。研究计划涉网络路由转发指数的研究。那年暑假特别的炎热，周涛与计算机系本科生颜俊和杜野，冒着酷暑，密切合作，完成了大学生研究计划，结题论文“A new upper bound on forwarding index of graphs”发表在《Ars Combinatoria》上 [8]。在这篇文章中，周涛运用数论中结论和计算技巧，给出网络路由的点转发指数的上界：

$$\xi(G) \leq (\upsilon-1)(\upsilon-2) - \left(2\upsilon - 2 - \Delta\left\lfloor 1 + \frac{\upsilon-1}{\Delta}\right\rfloor\right)\left\lfloor\frac{\upsilon-1}{\Delta}\right\rfloor,$$

其中 Δ 是该网络的最大度。这个结果改进了（即当 $\Delta = \upsilon - 1$ 时）Heydemann 等 [2] 保持近二十年的上界 $(\upsilon-1)(\upsilon-2)$。

在随后的一些日子里，周涛积极参加我主持的“组合网络问题”的讨论班，每次讨论，他总能提出新的思想和新的方法。我们又合作完成了“关于超立方体和折叠立方体网络的限制连通度和超连通度”一文，发表在《上海交大学报(英文版)》上 [9]。

§4 后记

周涛给出的Ore定理，Entringer, Jackson-Slater和Ng-Teh的简单证明，我已经把它们写进我的《组合网络理论》一书中 [7] （见该书的定理1.4.4和定理1.4.5）。对于Ore定理，我们还可以给出更简单的证明：

设x和y是G使得$d_G(x,y)=d$的两顶点，P是最短xy路。令$Z=V(G-P)$. 则对任何$z\in Z$均有$|N_G(z)\cap V(P)|\leqslant 3$。因此，

$$\begin{aligned}\varepsilon(G) &= \varepsilon(P)+\varepsilon(G[Z])+|E_G(Z,P)|\\ &\leqslant d+\binom{\upsilon-d-1}{2}+3(\upsilon-d-1)\\ &= d+\frac{1}{2}(\upsilon-d-1)(\upsilon-d-2)+3(\upsilon-d-1)\\ &= d+\frac{1}{2}(\upsilon-d+4)(\upsilon-d-1).\end{aligned}$$

这个更简单的证明被写进我的《图论及其应用》（科大校庆精品教材）中。

参考文献

[1] Entringer, R. C., Jackson, D. E., and Slater, P. J., Geodetic connectivity of graphs. *IEEE Transactions on Circuits Systems*, **24** (1977), 460-463.

[2] Heydemann, M. C., Meyer, J. C., and Sotteau, D., On forwarding indices of networks. *Discrete Applied Mathematics*, **23** (1989), 103-123.

[3] Ng, C. P., and and Teh, H. H, On finite graphs of diameter 2. *Nanta Mathematics*, **1** (1966/67), 72-75.

[4] Ore, O., Diameters in graphs. *Journal of Combinatorial Theory*, **5** (1968), 75-81.

[5] Plesnik, J., On the sum of all distances in a graph or digraph. *Journal of Graph Theory*, **8** (1984), 1-21.

[6] J.-M. Xu, Toplogical Structure and Analysis of Interconnection Networks. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 2001.

[7] 徐俊明，组合网络理论，科学出版社，北京，2007年5月。

[8] 徐俊明, 周涛, 杜野, 颜俊, A new upper bound on forwarding index of graphs. Ars Combinatoria, 83 (2007), 289-293.

[9] 徐俊明, 朱强, 侯新民, 周涛, On restricted connectivity and extra-connectivity of hypercubes and folded hypercubes, 上海交大学报(英文版)，E10 (2) (2005), 203-207.

[10] 周涛, 徐俊明，刘隽，“On diameter and average distance of graphs”, 运筹学学报, 8(4) (2004), 33-38.

[11] 周涛, 徐俊明, 刘隽, 图直径与平均距离的极值问题研究. 中国科学技术大学学报, 34(4) (2004), 410-413.