

国家自然科学基金资助项目
《约束数及相关问题研究》
暨《2010-2013 年期间研究成果》
研究工作主要进展和成果总结报告

(2010.01-2013.12. 项目编号: 11071233)

项目负责人: 徐俊明

中国科技大学数学系, 合肥, 230026

xujm@ustc.edu.cn

说 明

这个报告由两部分组成. 第一部分是国家自然科学基金资助项目《约束数及相关问题研究》的结题报告的第二部分“研究工作主要进展和成果总结报告”. 第二部分是我们在 2010 年至 2013 年间其它科学研究工作小结. 我们公布这些研究成果, 其目的有二. 一是接受同行对国家自然科学基金资助项目执行情况的监督; 二是使同行了解我们课题组研究内容和进展. 欢迎同行专家和读者提出宝贵意见.

摘 要

第一部分基金项目《约束数及其相关问题》. 图的约束和加强数数是度量控制数的脆弱性(即图的边减少或者添加对控制数的影响)参数, 在网络分析中有重要应用. 本项目弄清了约束数和加强数的计算复杂性; 证明了对于任意的图, 确定其约束数, 全约束数, 加强数和全加强数问题都是 *NP-hard* 问题, 而且不是 *NP* 完备的除非 $NP = P$. 围绕 Dunbar 等人和 Fischermann 等人关于平面图约束数的猜想, 证明了利用约束数的现有结论是不可能解决这些猜想的. 本项目研究各种限制条件下的控制与约束数, 如 p 控制, 符号控制, Roman 控制及约束数等, 对于某些特殊的图类, 确定了相关参数的值. 本项目共完成并发表学术论文 18 篇. 这些研究成果大大丰富和完善了图的控制理论.

第二部分介绍了我们在 2010 年至 2013 年间完成的与约束数无关的研究工作. 这些研究大部分是以前研究项目内容的继续, 其中包括反馈数、条件连通度、泛圈与泛连通、网络故障诊断等问题. 其中条件连通度问题是国家自然科学基金在研项目《计算机科学中的若干组合问题研究》(2013.1-2016.12)的研究内容之一.

目 录

第一部分 项目《约束数及相关问题研究》研究成果	4
§1 约束数研究	4
§1.1 约束数复杂性	4
§1.2 正则图约束数	6
§1.3 笛卡尔乘积约束数	6
§1.4 交叉数小于 4 的图的约束数	7
§1.5 平面图约束数猜想研究	7
§2 全控制和成对控制研究	10
§2.1 超环面网络的全控制数和成对控制数	10
§2.2 全约束数问题复杂性研究	10
§2.3 格网全约束数的研究	11
§3 p 控制数与约束数的研究	12
§3.1 完全 t 部图的 p 控制数	12
§3.2 树的 p 控制数	13
§3.3 树的 p 约束数	13
§3.4 (γ_t, γ_2) 树的刻画	14
§3.5 距离 p 控制数	14
§4 Roman 控制数及约束数的研究	15
§4.1 Roman 控制数	15
§4.2 Roman 约束数	15
§5 关于加强数的研究	16
§5.1 加强数的复杂性	17
§5.2 某些特殊图的加强数	19
§5.3 符号加强数	20
§6 关于控制划分数研究	20
§6.1 符号控制划分数	20
§6.2 全 $\{k\}$ 控制划分数	21
§7 控制收缩数	22
§8 广义控制数与独立数研究	22

第二部分 2010-2013 年期间其它研究成果	24
§9 关于反馈数的研究	24
§9.1 Kautz 无向图和 De Bruijn 无向图的反馈数	24
§9.2 Kautz 有向图和 De Bruijn 有向图的反馈数	25
§9.3 (n, k) 星图的反馈数	25
§9.4 有向图的边反馈数	26
§9.5 Caccetta-Häggkvist 猜想	27
§10 关于网络条件连通度研究	28
§10.1 立方体及其变型网络	29
§10.2 星图和 (n, k) 星图	30
§10.3 (n, k) 布置图	31
§10.4 分层超立方体网络	32
§10.5 对偶立方体网络	33
§10.6 交换超立方体网络	33
§10.7 增广立方体网络	34
§10.8 笛卡尔乘积图的有界 Menger 数	35
§11 关于网络泛圈和泛连通性研究	35
§11.1 超立方体网络	35
§11.2 折叠超立方体网络	36
§11.3 局部扭立方体网络	36
§11.4 笛卡尔乘积图	37
§12 关于网络故障诊断研究	38
§12.1 (n, k) 布置、分层超立方体和对偶立方体网络	39
§12.2 冒泡排序图	39
§13 其它研究问题	40
§13.1 一类新的点可迁图	40
§13.2 Kronecker 乘积图的直径	41
§13.3 正则图的宽直径	42
§13.4 幸存路径图的直径	42
§14 附录：发表的学术论文和著作	44

第一部分 项目《约束数及相关问题研究》研究成果

本项目共完成并发表学术论文 18 篇; 出版英文专著一部《Combinatorial Theory in Networks》(Mathematics Monograph Series 26)(数学专著系列(英文版) 26, 科学出版社, 2013). 本项目还完成了一篇综述文章《On bondage numbers of graphs – a survey with some comments》, 它系统地总结了约束数研究的历史、进展、主要结果、问题和猜想、并附有作者的评论, 发表在《International Journal of Combinatorics》(2013) 中. 本项目的研究工作进展和所取得的成果分述如下.

§1 约束数研究

设 G 是图, $D \subseteq V(G)$. 如果不在 D 中点都与 D 中某个点相邻, 则称 D 为 G 的控制集. 最小控制集中的点数称为 G 的控制数 (domination number), 记为 $\gamma(G)$. 图的控制问题是图论最基本研究内容之一. 然而, 确定一般图的控制数问题是 NP 完备问题 (见 Garey 和 Johnson 的书¹ 中附录 GT2). 通过对控制集添加条件, 衍生出各种各样的控制问题, 如全控制, 成对控制, p 控制等. 早期的研究文献被收集在由 Hedetniemi 和 Laskar 编写的《Bibliography on domination in graphs》² 一文中; 其研究结果被收录在由 Haynes, Hedetniemi 和 Slater 编写的两本著作《Fundamentals of Domination in Graphs》³ 和《Domination in Graphs: Advanced Topics》⁴ 中.

图的控制问题研究, 除了图论本身意义外, 在网络分析中也有重要意义. 网络连线发生故障 (即图的边移去) 势必影响网络的控制数. Walikar 和 Acharya⁵, Bauer 等人⁶ 首先研究这个问题. 1990 年, Fink 等人⁷ 正式提出约束数概念.

设 $B \subseteq E(G)$, 如果 $\gamma(G - B) > \gamma(G)$, 则称 B 为 G 的约束集. 最小约束集中的边数称为 G 的约束数 (bondage number), 记为 $b(G)$.

约束数是度量控制集脆弱性的主要参数之一, 自 1990 年提出以来, 备受研究工作者的关注. 本项目完成了一篇综述文章《On bondage numbers of graphs – a survey with some comments》, 它系统地总结了约束数研究的历史、进展、主要结果、问题和猜想、并附有作者的评论, 发表在《International Journal of Combinatorics》(2013) 中.

§1.1 约束数复杂性

人们已经知道, 确定任意图的控制数问题是 NP 完备的, 但确定任意图的约束数是否是 NP 完备问题一直没有解决. 本项目给出了肯定的回答, 将这些问题归结为已知的 3 可满足问题 (是 NP 完备问题).

¹M.R. Garey, D.S. Johnson, Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness, Freeman, San Francisco, 1979.

²S. T. Hedetniemi and R. Laskar, Bibliography on domination in graphs. *Discrete Mathematics*, **86** (1990), 257-277.

³T.W. Haynes, S. T. Hedetniemi, P. J. Slater, *Fundamentals of Domination in Graphs*. Marcel Dekker, New York, 1998.

⁴T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, P. J. Slater (Eds.), *Domination in Graphs: Advanced Topics*. Marcel Dekker, New York, 1998.

⁵H. B. Walikar and B. D. Acharya, Domination critical graphs. *National Academy Science Letters*, **2** (1979), 70-72.

⁶D. Bauer, F. Harary, J. Nieminen and C. L. Suffel, Domination alteration sets in graphs. *Discrete Mathematics*, **47** (1983), 153-161.

⁷J. F. Fink, M. S. Jacobson, L. F. Kinch, J. Roberts, The bondage number of a graph. *Discrete Mathematics*, **86** (1990), 47-57.

3 可满足问题被陈述如下:

3 可满足问题 (3SAT)

实例: 令 $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_m\}$ 是变量集 $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ 上的 3 句子集.

问题: U 是否有满足 \mathcal{C} 中所有句子的真值赋值?

结论: 3 可满足问题是 NP 完备问题.

约束数问题陈述如下:

约束数问题:

实例: 令 G 是非空图, k 是正整数.

问题: 是否有 $b(G) \leq k$?

定理 1.1 确定任意图的约束数是 NP-hard 问题.

证明的基本思路是: 构造一个图 G 并取 $k = 1$ 使得 \mathcal{C} 是可满足的当且仅当 $b(G) = 1$.

对每个 $i = 1, \dots, n$, 变量 $u_i \in U$ 对应一个三角形 $T_i = \{u_i, \bar{u}_i, v_i\}$; 对每个 $j = 1, 2, \dots, m$, 句子 $C_j = \{x_j, y_j, z_j\} \in \mathcal{C}$ 对应一个顶点 c_j 并添加边集 $E_j = \{c_j x_j, c_j y_j, c_j z_j\}$; 最后添加一条路 $P = s_1 s_2 s_3$ 连接 s_1 和 s_3 到每个 c_j ($1 \leq j \leq m$), 取 $k = 1$. 图 1 所示的图 G 就是由 $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ 和 $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, C_3\}$ 构造出来的, 其中 $C_1 = \{u_1, u_2, \bar{u}_3\}$, $C_2 = \{\bar{u}_1, u_2, u_4\}$, $C_3 = \{\bar{u}_2, u_3, u_4\}$. 易知, $\gamma(G) = 5$, 其中 5 个黑点组成一个 γ 集.

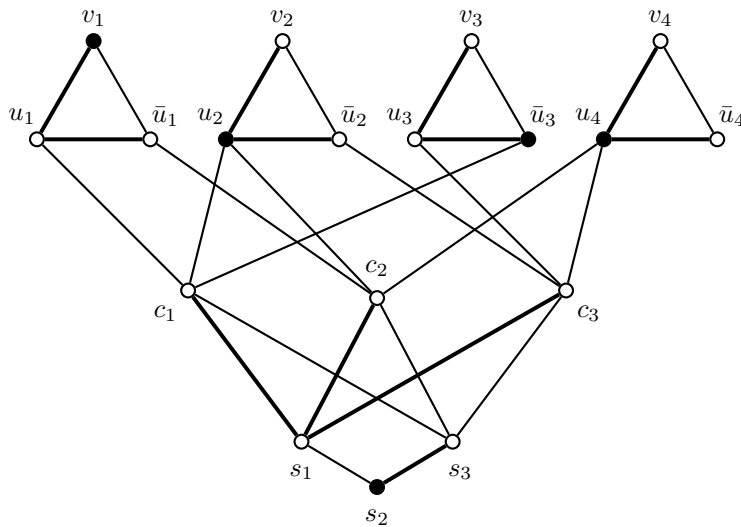


图 1 由一个 3 句子集构造出的图 G , $\gamma(G) = 5$ 且 $b(G) = 1$

然后通过下面 2 个命题就证明了我们的结论:

- (i) $\gamma(G) = n + 1$ 当且仅当 \mathcal{C} 是可满足的;
- (ii) $\gamma(G) = n + 1$ 当且仅当 $b(G) = 1$.

这个结果表明: 对于一般的图, 不存在多项式算法或者无法给出统一公式来表达约束数, 除非 $NP = P$. 因此, 寻找多项式近似算法, 建立上界与下界或者确定某些特殊图类的精确值都是很有

意义. 我们还指出: 在 $P \neq NP$ 的假设下, 确定任意图的约束数问题是 NP-hard 问题, 但不是 NP 完备的, 除非控制数问题是 P 问题. 这是因为对任意的 $B \subset E(G)$, 目前还没有一个多项式算法来验证 $\gamma(G - B) > \gamma(G)$.

这个结果包含在《On the complexity of the bondage and reinforcement problems, Journal of Complexity, 28 (2) (2012), 192-201》一文中.

§1.2 正则图约束数

设 G 是 n (≥ 2) 阶 k 正则图. 当 $k = n - 1$ 时, G 是完全图 K_n . Fink 等人⁸证明了: 完全图 K_n ($n \geq 2$) 的约束数为 $\lceil n/2 \rceil$. 当 $k = n - 2$ 时, 设 G 是完全 t 部分图 $K_t(2)$, 其中 $t = n/2, n \geq 4$ 为偶数. Fink 等人在同一篇文章中证明了: n 阶完全 t 部分图 $K_t(2)$ 图的约束数为 $n - 2$. 当 $k = n - 3$ 时, 我们首先证明了: 对任何 n 阶 $(n - 3)$ 正则图 G , 如果 $n \geq 4$, 那么 G 的控制数 $\gamma(G) = 2$. 然后证明了:

定理 1.2 设 G 是 n 阶 $(n - 3)$ 正则图, 那么 G 的约束数 $b(G) = n - 3$.

这个成果包含在《The bondage number of $(n - 3)$ -regular graph of order》一文中, 该文已被《Ars Combinatoria》(2011) 接收.

§1.3 笛卡尔乘积约束数

用 P_n 和 C_n 分别表示 n 阶路和圈. 对于两个图 G_1 和 G_2 的笛卡尔乘积, Dunbar 等人⁹确定了 $b(C_n \times P_2)$ ($n \geq 3$), Sohn 等人¹⁰确定了 $b(C_n \times C_3)$ ($n \geq 4$), 康丽英等人¹¹确定了 $b(C_n \times C_4)$ ($n \geq 4$), 黄佳等人¹²确定了 $b(C_{5i} \times C_{5j})$ (对某些 i 和 j), Cao 等人¹³确定了 $b(C_n \times C_5)$ ($n \geq 5, n \not\equiv 3 \pmod{5}$).

用 $M_{n,m}$ 表示两条路 P_m 和 P_n 的笛卡尔乘积 $P_m \times P_n$. 本项目确定了当 $m = 2, 3, 4$ 时, $G_{m,n}$ 的约束数 $b(M_{m,n})$.

定理 1.3 $b(M_{2,2}) = 3, b(M_{3,2}) = 2$, 并且当 $n \geq 3$ 时,

$$b(M_{n,2}) = \begin{cases} 1 & \text{如果 } n \text{ 是奇数,} \\ 2 & \text{如果 } n \text{ 是偶数.} \end{cases}$$

$$b(M_{n,3}) = \begin{cases} 1 & \text{如果 } n \equiv 1 \text{ 或 } 2 \pmod{4} \\ 2 & \text{如果 } n \equiv 0 \text{ 或 } 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

$$b(M_{5,4}) = b(M_{9,4}) = 3, b(M_{6,4}) = 2, \text{ 且当 } n \notin \{1, 2, 3, 5, 6, 9\} \text{ 时, } b(M_{n,4}) = 1.$$

⁸J. F. Fink, M. S. Jacobson, L. F. Kinch, J. Roberts, The bondage number of a graph. *Discrete Mathematics*, 86 (1990), 47-57

⁹J. E. Dunbar, T. W. Haynes, U. Teschner, L. Volkmann, Bondage, insensitivity, and reinforcement. *Domination in Graphs: Advanced Topics* (T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi, P.J. Slater eds.), *Monogr. Textbooks Pure Appl. Math.*, 209, Marcel Dekker, New York, 1998, pp. 471-489.

¹⁰M. Y. Sohn, X.-D. Yuan and H. S. Jeong, The bondage number of $C_3 \times C_n$. *Journal of the Korean Mathematical Society*, 44(6) (2007), 1213-1231.

¹¹L.-Y. Kang, M. Y. Sohn and H. K. Kim, Bondage number of the discrete torus $C_n \times C_4$. *Discrete Mathematics*, 303 (2005), 80-86.

¹²J. Huang and J.-M. Xu, The bondage numbers and efficient dominations of vertex-transitive graphs. *Discrete Mathematics*, 308 (4) (2008), 571-582.

¹³J.-X. Cao, X.-D. Yuan, and M.Y. Sohn, Domination and bondage number of $C_5 \times C_n$. *Ars Combinatoria*, 97A (2010), 299-310.

这些成果包含在《The bondage number of mesh networks, *Frontiers of Mathematics in China*, 7 (5) (2012), 813-826》一文中.

§1.4 交叉数小于 4 的图的约束数

2000 年, 康丽英和原晋江¹⁴ 证明了: 对任何平面图 G , $b(G) \leq \min\{8, \Delta + 2\}$, 其中 Δ 是 G 的最大度. 后来, Carlson 和 Develin¹⁵ 提出一个新方法给出这个结果的简单证明. 利用这个方法, 黄佳等¹⁶ 曾研究过在交叉数限制下约束数问题. 本项目利用这个方法证明了康丽英和原晋江的结果对交叉数 $cr(G)$ 小于 4 的图 G 也是成立的.

定理 1.4 对于连通图 G , $b(G) \leq \Delta(G) + 2$, 如果 G 满足下列之一:

- (a) $cr(G) \leq 3$,
- (b) $cr(G) = 4$ 且 G 不是 4 正则的,
- (c) $cr(G) = 5$ 且 G 不含 4 度点.

定理 1.5 设 G 是连通图且 $\Delta(G) \geq 6$ 且 $cr(G) \leq 3$. 如果 $\Delta(G) \geq 7$ 或者 $\Delta(G) = 6$, $\delta(G) \neq 3$ 并且每条边 $e = xy$, $d_G(x) = 5$, $d_G(y) = 6$ 被包含在最多一个三角形中, 那么 $b(G) \leq \min\{8, \Delta(G) + 1\}$.

定理 1.6 设 G 是连通图且 $\Delta(G) = 5$, $cr(G) \leq 4$. 如果任何三角形都不含 2 个 5 度点, 那么 $b(G) \leq 6 = \Delta(G) + 1$.

这些成果在《The bondage number of graphs with crossing number less than four, *Ars Combinatoria*, 112 (2013), 493-502》一文中.

§1.5 平面图约束数猜想研究

关于平面图的约束数, 有两个著名的猜想.

猜想 1.7 Fink 等人猜想: $b(G) \leq \Delta + 1$ 对任何平面图 G .

康丽英和原晋江的结果 $b(G) \leq \min\{8, \Delta + 2\}$ 表明: 为了解决这个猜想, 只需要考虑 $3 \leq \Delta \leq 6$ 的平面图. 2003 年, Fischermann 等人¹⁷ 利用围长 $g(G)$ 得到进一步结果: 对任何平面图 G ,

$$b(G) \leq \begin{cases} 6, & \text{if } g(G) \geq 4; \\ 5, & \text{if } g(G) \geq 5; \\ 4, & \text{if } g(G) \geq 6; \\ 3, & \text{if } g(G) \geq 8. \end{cases}$$

并提出如下猜想:

¹⁴L.-Y. Kang, J.-J. Yuan, Bondage number of planar graphs. *Discrete Mathematics*, **222** (2000), 191-198.

¹⁵K. Carlson and M. Develin, On the bondage number of planar and directed graphs. *Discrete Mathematics*, **306** (8-9) (2006), 820-826.

¹⁶J. Huang and J.-M. Xu, The bondage number of graphs with small crossing number. *Discrete Math.* **307**(14) (2007), 1881-1897.

¹⁷M. Fischermann, D. Rautenbach and L. Volkmann, Remarks on the bondage number of planar graphs. *Discrete Mathematics*, 260 (2003), 57-67.

猜想 1.8 *Fischermann* 等人猜想: 对任何平面图 G ,

$$b(G) \leq \begin{cases} 7; \\ 5 & \text{if } g(G) \geq 4; \\ 4 & \text{if } g(G) \geq 5. \end{cases}$$

目前所获得的有关约束数的结果, 都是利用现有的上界得到的. 最为有用的两个上界为:

引理 1.9 设 G 是连通图, 则 G 的约束数

- (1) $b(G) \leq \min\{d_G(x) + d_G(y) - 1 : \forall x, y \in V(G), d_G(x, y) \leq 2\}$;
- (2) $b(G) \leq \min\{d_G(x) + d_G(y) - 1 - |N_G(x) \cap N_G(y)| : \forall x, y \in V(G), xy \in E(G)\}$.

其中第一个上界由 *Fink* 等人¹⁸ 和 *Teschner*¹⁹ 得到, 第二个上界由 *Hartnell* 和 *Rall*²⁰ 得到. 人们试图利用这两个上界来证明猜想 1.7 和猜想 1.8. 本项目通过构造相应的例子说明: 利用现有的上界来证明平面图约束数的猜想是不可能的. 为了说明我们的结论, 令

$$B(G) = \min_{x, y \in V(G)} \left\{ \begin{array}{l} \{d_G(x) + d_G(y) - 1 : 1 \leq d_G(x, y) \leq 2\} \cup \\ \{d_G(x) + d_G(y) - |N_G(x) \cap N_G(y)| - 1 : d_G(x, y) = 1\} \end{array} \right\}.$$

由引理 1.9, 立刻有

$$b(G) \leq B(G).$$

实际上, *康丽英*和*原晋江*, *Fischermann* 等人实际上证明如下结果. 对任何平面图 G ,

$$B(G) \leq \begin{cases} \min\{8, \Delta(G) + 2\}; \\ 6 & \text{if } g(G) \geq 4; \\ 5 & \text{if } g(G) \geq 5; \\ 4 & \text{if } g(G) \geq 6; \\ 3 & \text{if } g(G) \geq 8. \end{cases}$$

显然, 下面的猜想意味着猜想 1.7 和猜想 1.8:

猜想 1.10 对任何平面图 G ,

$$B(G) \leq \begin{cases} \Delta(G) + 1; \\ 7; \\ 5 & \text{if } g(G) \geq 4; \\ 4 & \text{if } g(G) \geq 5. \end{cases}$$

该项目通过构造 3 个平面图 G_1, G_2 和 G_3 使得 $B(G_1) = 8, B(G_2) = 6$ 且 $g(G_2) = 4, B(G_3) = 5$ 且 $g(G_3) = 5$ 来否定这个猜想.

图 G_3 是十二面体, 如图 2 (a) 所示, 它是围长为 5 的 3 正则平面图. 由引理 1.9, 容易验证 $B(G_3) = \Delta + 2 = 5 = g(G_3)$. 这个例子否定了猜想 1.10 中的第一和最后一个上界.

¹⁸J. F. Fink, M. S. Jacobson, L. F. Kinch, J. Roberts, The bondage number of a graph. *Discrete Mathematics*, 86 (1990), 47-57.

¹⁹U. Teschner, New results about the bondage number of a graph. *Discrete Mathematics*, 171 (1997), 249-259.

²⁰B. L. Hartnell and D. F. Rall, Bounds on the bondage number of a graph. *Discrete Mathematics*, 128 (1994), 173-177.

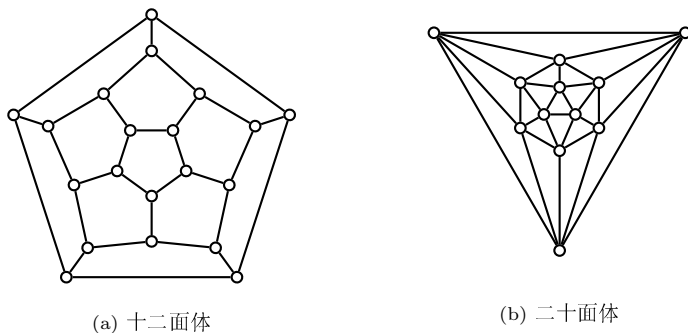


图 2 两个正则平面图

另外两个平面图 G_1 和 G_2 构造如下.

图 G_1 的构造: 令 H 是二十面体, 如图 2 (b) 所示, 它是 5 正则平面图. 令 H' 是通过细分 H 中每条边一次所得到的图. 于是, H 中每个顶点 u 在 H' 中仅与 5 个细分点相邻. 连接这些细分点形成一个长为 5 的圈且保持平面性, 如图 3 所示. 这样得到的平面图为 G_1 . 由引理 1.9 (2), 容易验证, $B(G_1) = 8$. 这个例子否定了猜想 1.10 中的第二个上界.

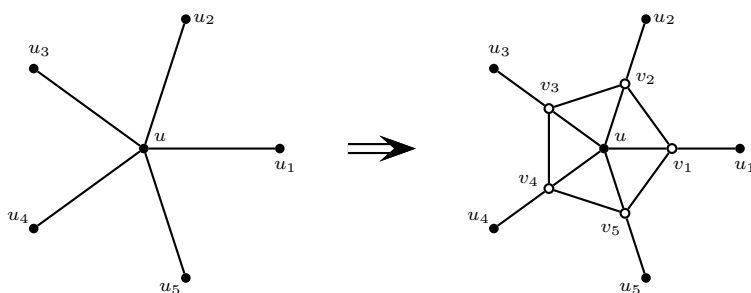
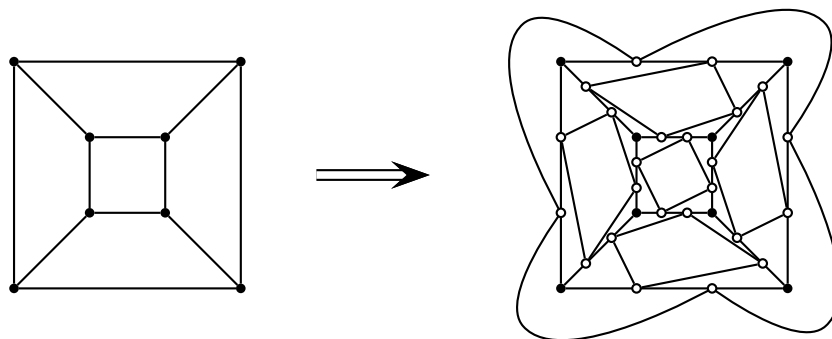
图 3 图 G_1 的构造

图 G_2 的构造: 令 H 是 3 维立方体 Q_3 , H' 是通过细分 H 中每条边两次所得到的图. 连接这些细分点使得得到的图是围长为 4 的平面图, 令为 G_2 , 见图 4. 由引理 1.9 (1), 容易验证, $B(G_2) = 6$ 且 $g(G_2) = 4$. 这个例子否定了猜想 1.10 中的第三个上界.

图 4 图 G_2 的构造

这些例子说明: 利用现有的上界来证明平面图约束数的猜想是不可能的.

这个成果包含在《Note on conjectures of bondage numbers of planar graphs. Applied Mathematical Sciences, 6 (66) (2012), 3277-3287》一文中. 因此, 试图解决平面图猜想, 必须另找出路, 或者寻找平面图约束数新的上界. 这是个非常有挑战性的问题.

§2 全控制和成对控制研究

设 G 是非空边的图, $D \subseteq V(G)$. 如果 G 中每个点都与 D 中某个点相邻, 则称 D 为 G 的全控制集. 最小全控制集中的点数称为 G 的全控制数 (total domination number), 记为 $\gamma_t(G)$.

设 D 是图 G 的控制集. 如果导出子图 $G[D]$ 包含完备匹配, 则称 D 为 G 的成对 (paired) 控制集. 这个概念是由 Haynes 和 Slater²¹. 图 G 的成对控制数 (paired domination number) $\gamma_{pai}(G)$ 定义为最小成对控制集中的点数. 显然,

$$\gamma(G) \leq \gamma_t(G) \leq \gamma_{pai}(G).$$

Pfaff 等人²² 和 Haynes 等人²³ 分别证明了: 确定全控制数和成对控制数问题都是 NP 完备问题.

§2.1 超环面网络的全控制数和成对控制数

用记号 $G_{n,m}$ 表示超环面网络, 它是两个圈 C_n 和 C_m 的笛卡尔乘积 $C_n \times C_m$. Klavžar 和 Seifter²⁴ 确定了 $\gamma(G_{n,m})$, $n \geq 3, m \in \{3, 4, 5\}$. 该项目获得如下结果.

定理 2.1 对任何整数、 $n \geq 3$,

$$\begin{aligned} \gamma_t(G_{n,3}) &= \lceil \frac{4n}{5} \rceil; \\ \gamma_{pai}(G_{n,3}) &= \begin{cases} \lceil \frac{4n}{5} \rceil & \text{if } n \equiv 0, 2, 4 \pmod{5}, \\ \lceil \frac{4n}{5} \rceil + 1 & \text{if } n \equiv 1, 3 \pmod{5}; \end{cases} \\ \gamma_t(G_{n,4}) = \gamma_{pai}(G_{n,4}) &= \begin{cases} n & \text{if } n \equiv 0 \pmod{4}, \\ n + 1 & \text{if } n \equiv 1, 3 \pmod{4}, \\ n + 2 & \text{if } n \equiv 2 \pmod{4}. \end{cases} \end{aligned}$$

该项目还给出 $\gamma_t(G_{n,5})$ 和 $\gamma_{pai}(G_{n,5})$ 的上界. 这些结果包含在《Total and paired domination numbers of toroidal meshes. Journal of Combinatorial Optimization, 27 (2) (2014), 369-378》一文中.

§2.2 全约束数问题复杂性研究

设 $B \subseteq E(G)$. 如果 $\gamma_t(G - B) > \gamma_t(G)$, 则称 B 为 G 的全约束集. 最小全约束集中的边数称为 G 的全约束数, 记为 $b_t(G)$.

定理 2.2 确定任意图的全约束数是 NP-hard 问题.

这个定理证明与定理 1.1 的证明一样, 将这个问题归结为已知的 3 可满足问题.

设 $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ 和 $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_m\}$ 是 3 可满足问题的实例. 构造一个图 G 并取 $k = 1$ 使得 \mathcal{C} 是可满足的当且仅当 $b(G) = 1$.

对每个 $i = 1, \dots, n$, 变量 $u_i \in U$ 对应一个图 H_i , $V(H_i) = \{u_i, \bar{u}_i, v_i, v'_i\}$ 且 $E(H_i) = \{v_i u_i, u_i \bar{u}_i, \bar{u}_i v_i, v_i v'_i\}$; 对每个 $j = 1, 2, \dots, m$, 句子 $C_j = \{x_j, y_j, z_j\} \in \mathcal{C}$ 对应一个顶点 c_j 并添

²¹T. W. Haynes and P. J. Slater, Paired-domination and the paired-domatic number. Congresses Numerantium, 109 (1995), 65-72.

²²J. Pfaff, R.C. Laskar, S.T. Hedetniemi, NP-completeness of total and connected domination and irredundance for bipartite graphs, Technical Report 428, Clemson University, Dept. Math. Sciences, 1983.

²³T. W. Haynes and P. J. Slater, Paired-domination in graphs. Networks, 32 (1998), 199-206.

²⁴S. Klavžar and N. Seifter, Dominating cartesian products of cycles. Discrete Applied Mathematics, 59 (1995), 129-136.

加边集 $E_j = \{c_jx_j, c_jy_j, c_jz_j\}$, $1 \leq j \leq m$; 最后添加一个图 H , $V(H) = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$ 且 $E(H) = \{s_1s_2, s_1s_4, s_2s_3, s_2s_4, s_4s_5\}$, 连接 s_1 和 s_3 到每个 c_j ($1 \leq j \leq m$), 取 $k = 1$. 图 ?? 所示的图 G 就是由 $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ 和 $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, C_3\}$ 构造出来的, 其中 $C_1 = \{u_1, u_2, \bar{u}_3\}$, $C_2 = \{\bar{u}_1, u_2, u_4\}$ 和 $C_3 = \{\bar{u}_2, u_3, u_4\}$. 易知, $\gamma_t(G) = 10$, 其中 10 个黑点组成一个 γ_t 集.

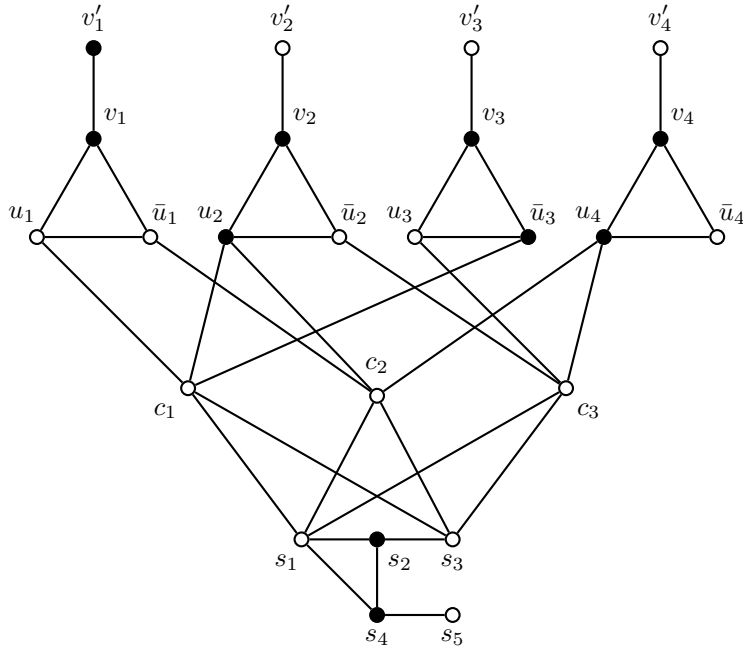


图 5 由一个 3 句子集构造出的图 G , $\gamma_t(G) = 10$ 且 $b_t(G) = 1$

然后通过下面 2 个命题就证明了我们的结论:

- (i) $\gamma_t(G) = 2n + 2$ 当且仅当 \mathcal{C} 是可满足的;
- (ii) $\gamma_t(G) = 2n + 2$ 当且仅当 $b_t(G) = 1$.

这些研究成果包含在《On the complexity of the bondage and reinforcement problems, Journal of Complexity, 28 (2) (2012), 192-201》一文中.

§2.3 格网全约束数的研究

用记号 $M_{n,m}$ 表示格网络, 它是两个路 P_n 和 P_m 的笛卡尔乘积 $P_n \times P_m$. Gravier²⁵ 确定了 $\gamma_t(G_{n,m})$, $m \in \{1, 2, 3, 4\}$. 该项目确定了 $M_{n,2}$ 和 $M_{n,3}$ 的全约束数, 并给出 $M_{n,4}$ 的全约束数上界. 具体结果为:

²⁵S. Gravier, Total domination number of grid graphs. Discrete Applied Mathematics, 121 (2002), 119-128.

定理 2.3 对任何整数 $n \geq 2$,

$$b_t(G_{n,2}) = \begin{cases} 1 & \text{如果 } n \equiv 0 \pmod{3}, \\ 2 & \text{如果 } n \equiv 2 \pmod{3}, \\ 3 & \text{如果 } n \equiv 1 \pmod{3}. \end{cases}$$

$$b_t(G_{n,3}) = 1.$$

$$b_t(G_{6,4}) = 2,$$

$$b_t(G_{n,4}) \begin{cases} = 1 & \text{如果 } n \equiv 1 \pmod{5}, n \neq 6; \\ = 2 & \text{如果 } n \equiv 4 \pmod{5}; \\ \leq 3 & \text{如果 } n \equiv 2 \pmod{5}; \\ \leq 4 & \text{如果 } n \equiv 0, 3 \pmod{5}. \end{cases}$$

这些结果包含在《The total bondage number of grid graphs. Discrete Applied Mathematics, 160 (16-17) (2012), 2408-2418》一文中.

§3 p 控制数与约束数的研究

设 G 是图, $D \subseteq V$, p 是正整数. 如果不在 D 中的点在 D 中至少有 p 个邻点, 则称 D 为 G 的 p 控制集. 显然, 当 $p = 1$ 时, p 控制集就是通常意义下的控制集. 因此, p 控制集是经典控制集的推广. 下面的命题是显然的.

命题 3.1 图 G 中每个 p 控制集一定包含所有其度最多为 $p - 1$ 的顶点.

最小 p 控制集称为 γ_p 集, γ_p 集中的点数称为 G 的 p 控制数, 记为 $\gamma_p(G)$. 图的 p 控制数是由 Fink 等人²⁶ 提出来的.

§3.1 完全 t 部图的 p 控制数

显然, 图的 p 控制数问题是 NP 完备问题. 因此, 确定特殊图类的 p 控制数是有意义的. 2009 年, Shaheen²⁷ 获得 $\gamma_2(C_m \times C_n)$ 上下界, 并确定某些情形的精确值. 除此以外, 没有任何结果. 本项目确定完全 t 部图 K_{n_1, n_2, \dots, n_t} 的 p 控制数.

令 $\{V_1, V_2, \dots, V_t\}$ 是 K_{n_1, n_2, \dots, n_t} 的 t 部划分, $N_t = \{1, 2, \dots, t\}$. 对任意 $I \subseteq N_t$, 令

$$f(I) = \sum_{i \in I} n_i.$$

注意到由命题 3.1, 当 $t = 1$ 或者 $f(N_t) \leq p$ 时, $\gamma_p(G) = |V(G)|$. 因此, 总可以假定 $t \geq 2$ 且 $f(N_t) > p$. 令

$$\mathcal{I}_p = \{I \subset N_t : |I| \leq t - 2, f(I) < p, \lceil \frac{p-f(I)}{t-|I|-1} \rceil \leq n_i, i \in N_t - I\}.$$

并且令

$$s_1 = \min\{f(I) : I \subseteq N_t, f(I) \geq p\},$$

$$s_2 = \begin{cases} \min\{\lceil \frac{p-f(I)}{t-|I|-1} \rceil : I \in \mathcal{I}_p\} & \text{if } \mathcal{I}_p \neq \emptyset; \\ \infty & \text{if } \mathcal{I}_p = \emptyset. \end{cases}$$

²⁶J. F. Fink, M. S. Jacobson, n -Domination in graphs, in: Y. Alavi, A. J. Schwenk (Eds.), Graph Theory with Applications to Algorithms and Computer Science, Wiley, New York, (1985) 283-300.

²⁷R. S. Shaheen, Bounds for the 2-domination number of toroidal grid graphs. International Journal of Computer Mathematics, 86 (4) (2009) 584-588.

利用这些记号, 我们的结果可以表示如下:

定理 3.2 设 $G = K_{n_1, n_2, \dots, n_t}$ 是完全 t 部图. 如果 $t \geq 2$ 且 $f(N_t) > p$, 那么对任何 $p \geq 1$,

$$\gamma_p(G) = \min\{s_1, p + s_2\}.$$

这个结果在《The p -domination number of complete multipartite graphs. Discrete Mathematics, Algorithms and Applications, 6 (4) (2014) 1450063 (9 pages)》一文中.

§3.2 树的 p 控制数

许多作者研究了唯一控制集问题. Gunther 等人²⁸ 刻画了具有唯一控制集的树. 该项目研究了树的唯一 p 控制集问题, $p \geq 2$, 给出具有唯一 p 控制集的 3 个等价条件, 然后刻画了具有唯一 p 控制集的树. 为了表述我们的结果, 定义几个记号: 设 T 是树, $D \subset V(G)$, $x \in D$, $p \geq 2$,

$$PN_p(x, D) = \{y \in N_G(x) : |D \cap N_G(y)| = p\};$$

$$X_p(T) = \{x \in V(T) : d_T(x) \geq p\}.$$

D 是理想的如果对每个 $x \in D \cap X_p(T)$, 或者 $|D \cap N_T(x)| \leq p - 2$ 或者 $|PN_p(x, D)| \geq 2$.

定理 3.3 设 T 是树, $p \geq 2$, $D \subset V(T)$. 下面 3 个条件是等价的:

- (a) D 是 T 中唯一的 γ_p 集;
- (b) D 是理想的 γ_p 集;
- (c) D 是理想的 p 控制集.

定理 3.4 设 T 是树, $p \geq 2$, $D \subset V(T)$. 那么 D 是 T 的唯一 γ_p 集当且仅当 D 是 γ_p 集且满足对每个 $x \in D \cap X_p(T)$, 或者 $|D \cap N_T(x)| \leq p - 2$ 或者 $\gamma_p(T - x) > \gamma_p(T)$.

该项目从 $K_{1,t}$ 出发, 递归地改造一类树 \mathcal{T}_p , 并且证明

定理 3.5 设 T 是树, $p \geq 2$. 那么 T 有唯一的 γ_p 集当且仅当 $\Delta(T) \leq p - 1$ 或者 $T \in \mathcal{T}_p$.

这些成果包含在《Trees with unique minimum p -dominating sets. Utilitas Mathematica, 86 (2011), 193-205》中.

§3.3 树的 p 约束数

作为约束数的自然推广, 该项目提出图的 p 约束数(p -bondage number). 子集 $B \subseteq E$ 称为图 G 的 p 约束集, 如果 $\gamma_p(G - B) > \gamma_p(G)$. 最小 p 约束集中的边数称为 G 的 p 约束数, 记为 $b_p(G)$. 显然, $b_1(G) = b(G)$.

Blidia 等人²⁹ 给出树 T 的 p 控制数的界, 根据这些界容易确定 $1 \leq b(T) \leq 2$. Teschner³⁰, Hartnell 和 Rall³¹ 分别刻画了达到下界和上界的所有树. 对于 $p \geq 2$ 和树 T 满足 $\Delta(T) \geq p$, 该项目证明 $1 \leq b_p(T) \leq \Delta(T) - p + 1$ 并刻画了达到下界和上界的所有树. 由命题 3.1, 仅需要考虑其最大度 $\Delta \geq p$ 的树.

²⁸G. Gunther, B. Hartnell, L. R. Markus, D. Rall, Graphs with unique minimum dominating sets, Congr. Numer. 101 (1994) 55-63.

²⁹M. Blidia, M. Chellali and L. Volkmann, Some bounds on the p -domination number in trees. Discrete Math., 306 (2006), 2031-2037.

³⁰U. Teschner, New results about the bondage number of a graph. Discrete Math., 171 (1997), 249-259.

³¹B. L. Hartnell and D. F. Rall, A characterization of trees in which no edge is essential to the domination number. Ars Combin., 33 (1992), 65-76.

定理 3.6 如果树 T 满足 $\Delta(T) = \Delta \geq p$. 那么 $1 \leq b_p(T) \leq \Delta - p + 1$.

下面结果给出其 p 约束数为 1 的树的刻画.

定理 3.7 如果树 T 满足 $\Delta(T) \geq p$. 那么 $b_p(T) = 1$ 当且仅当对 T 中任何 γ_p 集 D 存在一条边 xy 使得 $x \in D$ 且 $y \in PN_p(x, D)$ 或者 $y \in D$ 且 $x \in PN_p(y, D)$.

为了刻画其 p 约束数达到最大值 $\Delta - p + 1$ 的树, 从 $K_{1, \Delta}$ 出发, 定义了 3 个运算. 令

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \{T : T \text{ 是树 } \Delta(T) = \Delta \geq p + 1, b_p(T) = \Delta - p + 1\}, \\ \mathcal{B} &= \{T : T \text{ 是由 } K_{1, \Delta} \text{ 通过一系列给定运算得到的树}\}. \end{aligned}$$

定理 3.8 $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

该成果包含在《The p -bondage number of trees. Graphs and Combinatorics, 27 (1) (2011), 129-141》一文中.

§3.4 (γ_t, γ_2) 树的刻画

对于图 G , 如果它的全控制数 $\gamma_t(G)$ 等于它的 p 控制数 $\gamma_p(G)$, 即, $\gamma_t(G) = \gamma_p(G)$, 那么 G 被称为 (γ_t, γ_p) 图. Haynes 等人³² 证明了: 对任何树 T 有 $\gamma_t(T) \leq \gamma_2(T)$. 该项目完全刻画了 (γ_t, γ_2) 树.

这个结果包含在《A characterization of (γ_t, γ_2) -trees. Discussiones Mathematicae Graph Theory, 30 (3) (2010), 425-436》一文中.

§3.5 距离 p 控制数

对于整数 $k \geq 1$ 和顶点 $x \in V(G)$, 用记号 $N_k(x, G)$ 表示 x 的 k 领域, 即 $N_k(x, G) = \{y \in V(G) : 0 < d_G(x, y) \leq k\}$. 对于子集 $S \subseteq V(G)$, 如果对任何 $x \in V(G) \setminus S$ 均有 $|N_k(x) \cap S| \geq p$, 那么 $S \subseteq V(G)$ 为 G 的 k 距离 p 控制集, 简称 (k, p) 控制集. 最小 (k, p) 控制集中的点数称为 G 的 (k, p) 控制数, 记为 $\gamma_{k,p}(G)$. 显然, $\gamma_{1,1}(G) = \gamma(G)$, 而且对任何连通图 G 均有

$$\gamma_{2,2}(G) \leq \gamma_t(G) \leq 2\gamma(G).$$

Bean 等人³³ 研究了 $\gamma_{k,p}(G)$ 并提出猜想: 如果 $\delta_k(G) \geq k + p - 1$, 那么 $\gamma_{k,p}(G) \leq \frac{np}{k+p}$, 其中 $n = |V(G)|$, $\delta_k(G) = \min\{|N_k(x)| : x \in V(G)\}$. 2005 年, Fischermann 和 Volkmann³⁴ 证明了这个猜想是成立的对任何 k 和 $p \equiv 0 \pmod{k}$. 2008 年, Korneffel 等人³⁵ 证明了 $\gamma_{2,2}(G) \leq \frac{n+1}{2}$ 而不需要条件“ $\delta_2(G) \geq 3$ ”, 且刻画了使等号成立的所有图 G .

本项目考虑树, 并获得如下结果.

³²T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi, M.A. Henning and P.J. Slater, H-forming sets in graphs, Discrete Math. 262 (2003) 159-169.

³³T. J. Bean, M. A. Henning and H. C. Swart, On the integrity of distance domination in graphs, Australas. J. Combin., 10 (1994), 29-43.

³⁴M.Fischermann and L.Volkmann, A remark on a conjecture for the (k, p) -domination number. Utilitas Math., 67, (2005), 223-227.

³⁵T.Korneffel, D.Meierling and L.Volkmann, A remark on the $(2, 2)$ -domination number, Discuss. Math. Graph Theory 28 (2) (2008), 361-366.

定理 3.9 设 T 是非平凡树, 那么

$$\gamma_{2,2}(T) \geq \frac{2}{3}(\gamma(T) + 1)$$

并且刻画了使得等号成立的所有树.

定理 3.10 设 T 是阶数至少为 3 的树. 那么 $\gamma_{2,2}(T) = 2\gamma(T)$ 当且仅当 T 满足以下 3 个条件:

- (1) T 有唯一的 γ 集 D ,
- (2) D 中每个顶点至少与两个 1 度点相邻,
- (3) D 中任何两顶点 x 和 y 均没有公共邻点.

注. 注意到不等式: $\gamma_{2,2}(G) \leq \gamma_t(G) \leq 2\gamma(G)$. 本项目给出满足 $\gamma_{2,2}(T) = 2\gamma(T)$ 的树 T 的刻画. 但满足 $\gamma_{2,2}(T) = \gamma_t(T)$ 的树 T 的刻画似乎很困难.

这些结果包含在《On the (2,2)-domination number of trees. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 30 (2) (2010), 185-199》一文中.

§4 Roman 控制数及约束数的研究

图 G 上的 Roman 控制函数是由 Cockayne 等人³⁶提出的, 是指映射 $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, 2\}$ 使得每个取值为 0 的点至少与一个取值为 2 的点相邻. 令 $V_i = \{x \in V(G) : f(x) = i\}$, $i = 0, 1, 2$. 则 (V_0, V_1, V_2) 是 $V(G)$ 的划分. 易见, $V_1 \cup V_2$ 是 G 的控制集, 称为 Roman 控制集, 记为 $D_R = (V_1, V_2)$. $f(G) = \sum_{x \in V} f(x)$ 称为 f 的权. Roman 控制数 $\gamma_R(G)$ 是指所有 Roman 控制函数中最小的权. Roman 控制数 $\gamma_R(G)$ 与经典控制数 $\gamma(G)$ 之间的关系:

$$\gamma(G) \leq \gamma_R(G) \leq 2\gamma(G).$$

§4.1 Roman 控制数

目前关于 Roman 控制数的结果并不多. 本项目获得如下结果.

定理 4.1 关于图 G 的 Roman 控制数, 我们得到如下结果:

- ① 对于二部图, Roman 控制数问题是 NP 完备的.
- ② 如果 $n \geq 3$, 则 $\gamma_R(G) = 3$ 当且仅当 $\Delta = n - 2$.
- ③ 如果 G 是 $n - 3$ 正则的且阶 $n \geq 4$, 则 $\gamma_R(G) = 4$.

§4.2 Roman 约束数

图 G 的 Roman 约束数 $b_R(G)$ 是由 Stewart³⁷ 提出来的, 定义为使得 Roman 控制数增加所需要去掉的最少边数. 关于图 G 的 Roman 约束数, 我们得到如下结果:

³⁶E.J. Cockayne, P.A. Dreyer Jr., S.M. Hedetniemi, S.T. Hedetniemi, A.A. McRae, Roman domination in graphs. *Discrete Mathematics*, 278 (1-3) (2004), 11-22.

³⁷I. Stewart, Defend the Roman Empire. *Scientific American*, 281 (1999), 136-139.

定理 4.2 确定任意图 G 的 Roman 约束数问题是 NP-hard 问题, 即使 G 是 2 部图.

定理 4.3 对于连通图 G , 我们获得 Roman 约束数 $b_R(G)$ 的上界:

① 如果阶 $n \geq 3$ 且 $\gamma_R(G) = \gamma(G) + 1$, 则 $b_R(G) \leq \min\{b(G), \eta_\Delta\}$, 其中 η_Δ 是 G 中最大度为 Δ 的点数.

② 设阶 $n \geq 4$. 如果 $\gamma_R(G) = 3$, 那么

$$b_R(G) \leq \begin{cases} \Delta(G) = n - 2 & \text{如果 } \gamma_R(G) = 3, \\ \Delta(G) + \delta(G) - 1 & \text{如果 } \gamma_R(G) = 4. \end{cases}$$

定理 4.4 我们确定了某些图的 Roman 约束数 $b_R(G)$ 的精确值:

① 如果 G 有唯一的最小 Roman 控制函数, 则 $b_R(G) = 1$.

② 设 $K_{3,3,\dots,3}$ 是完全 t 部图, $t \geq 3$. 如果 $G = K_{3,3,\dots,3}$, 那么 $b_R(G) = n - 1$; 如果 $G \neq K_{3,3,\dots,3}$, 则 $b_R(G) = n - 2$.

③ 如果 $n \geq 2$, 设 $b_R(P_2 \times P_n) = 2$.

④ 设 $G = K_{m_1, m_2, \dots, m_t}$ 是完全 t (≥ 2) 部图, 其中 $m_1 = m_2 = \dots = m_i < m_{i+1} \leq \dots \leq m_t$, $n = \sum_{j=1}^t m_j$ 且 $n \geq 3$. 那么

$$b_R(G) = \begin{cases} \lceil \frac{i}{2} \rceil & \text{如果 } m_i = 1, n \geq 3; \\ 2 & \text{如果 } m_i = 2, i = 1; \\ i & \text{如果 } m_i = 2, i \geq 2; \\ n - 1 & \text{如果 } m_i = 3, i = t \geq 3; \\ n - m_t & \text{如果 } m_i \geq 3, m_t \geq 4. \end{cases}$$

这些结果包含在两篇文章《On the Roman bondage number of a graph, Discrete Mathematics, Algorithms and Applications, 5 (1) (2013)》和《Roman bondage numbers of some graphs, Australasian Journal of Combinatorics, 58 (1) (2014), 106-118》中.

§5 关于加强数的研究

用 G^c 表示图 G 的补图, 即 $V(G^c) = V(G)$, $E(G^c) = \{xy : xy \notin E(G)\}$. 子集 $B \subseteq E(G^c)$ 称为 G 的加强集, 如果 $\gamma(G + B) < \gamma(G)$. 最小加强集中的边数称为 G 的加强数 (Reinforcement number), 记为 $r(G)$. 加强数概念是由 Kok 和 Mynhardt³⁸提出. 黄佳等人³⁹研究过有向图的加强数. 与约束数一样, 加强数也是度量图的控制数脆弱性的重要概念. 类似的可以定义其它派生控制的加强数. 例如:

子集 $B \subseteq E(G^c)$ 称为 G 的全加强集, 如果 $\gamma_t(G + B) < \gamma_t(G)$. 最小全加强集中的边数称为 G 的全加强数 (total reinforcement number), 记为 $r_t(G)$.

子集 $B \subseteq E(G^c)$ 称为 G 的 p 加强集, 如果 $\gamma_p(G + B) < \gamma_p(G)$. 最小 p 加强集中的边数称为 G 的 p 加强数 (p -reinforcement number), 记为 $r_p(G)$.

³⁸J. Kok and C. M. Mynhardt, Reinforcement in graphs, *Congr. Numer.* **79** (1990) 225-231.

³⁹J. Huang, J.-W. Wang and J.-M. Xu, Reinforcement numbers of digraphs. *Discrete Applied Mathematics*, **157**(8) (2009), 1938-1946.

§5.1 加强数的复杂性

图 G 的加强数问题可以表述如下:

加强数问题 (Reinforcement problem):

实例: 任意给定图 G 和正整数 k .

问题: 是否有 $r(G) \leq k$?

定理 5.1 加强数问题是 NP -hard 问题.

证明的基本思路是: 构造一个图 G 并取 $k = 1$ 使得一个 3 句子集 \mathcal{C} 是可满足的当且仅当 $r(G) = 1$.

对每个 $i = 1, \dots, n$, 变量 $u_i \in U$ 对应一个三角形 $T_i = \{u_i, \bar{u}_i, v_i\}$; 对每个 $j = 1, 2, \dots, m$, 句子 $C_j = \{x_j, y_j, z_j\} \in \mathcal{C}$ 对应一个顶点 c_j 并添加边集 $E_j = \{c_j x_j, c_j y_j, c_j z_j\}$; 最后添加一个顶点 s 连接 s 到每个 c_j ($1 \leq j \leq m$), 取 $k = 1$.

图 11 是由 $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ 和 $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, C_3\}$ 构造出来的图 G , 其中 $C_1 = \{u_1, u_2, \bar{u}_3\}$, $C_2 = \{\bar{u}_1, u_2, u_4\}$, $C_3 = \{\bar{u}_2, u_3, u_4\}$. 易知, $\gamma(G) = 5$, 其中 5 个黑点组成一个 γ 集; $r(G) = 1$, 比如添加边 $e = u_1 s$, 那么 $\gamma(G + e) = 4$.

首先证明: $\gamma(G) = n + 1$. 然后证明: \mathcal{C} 是可满足的当且仅当 $r(G) = 1$.

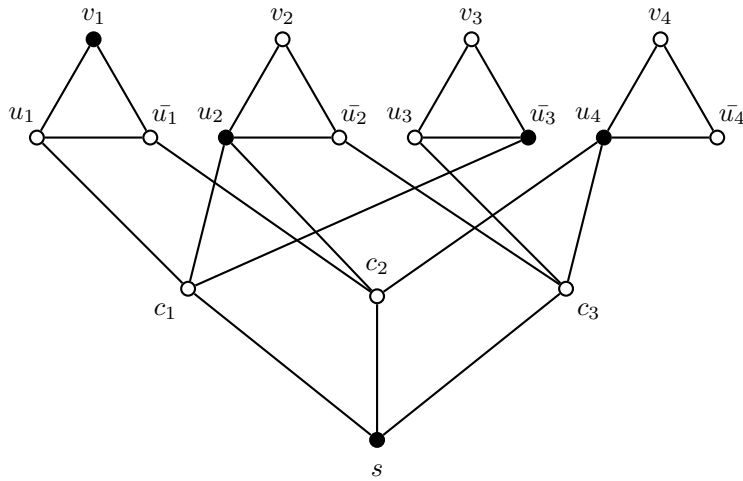


图 6 由一个 3 句子集构造出的图 G

图 G 的全加强数问题可以表述如下:

全加强数问题 (Total reinforcement problem):

实例: 任意给定图 G 和正整数 k .

问题: 是否有 $r_t(G) \leq k$?

定理 5.2 全加强数问题是 NP -hard 问题.

证明的基本思路与定理 5.1 一样, 构造一个图 G 并取 $k = 1$ 使得一个 3 句子集 \mathcal{C} 是可满足的当且仅当 $r_t(G) = 1$.

对每个 $i = 1, \dots, n$, 变量 $u_i \in U$ 对应一个子图 H_i , 其中 $V(H_i) = \{u_i, \bar{u}_i, v_i, v'_i\}$, $E(H_i) = \{v_i u_i, u_i \bar{u}_i, \bar{u}_i v_i, v_i v'_i\}$; 对每个 $j = 1, 2, \dots, m$, 句子 $C_j = \{x_j, y_j, z_j\} \in \mathcal{C}$ 对应一个顶点 c_j 并添加边集 $E_j = \{c_j x_j, c_j y_j, c_j z_j\}$; 最后添加一个路 $P = s_1 s_2 s_3$ 并连接 s_1 到每个 c_j ($1 \leq j \leq m$), 取 $k = 1$.

然后证明: \mathcal{C} 是可满足的当且仅当 $r_t(G) = 1$.

这两个结果包含在《On the complexity of the bondage and reinforcement problems, Journal of Complexity, 28 (2) (2012), 192-201》一文中.

现在考虑图 G 的 p 加强数问题. 当 $p = 1$ 时, G 的 1 加强数问题就是经典的加强数问题, 由定理 5.1 知, 它是 NP-hard 问题. 因为经典的加强数问题是 p 加强数问题的子问题, 所以 p 加强数问题也是 NP-hard 问题.

我们考虑另一类复杂性问题. 对于每个固定的 p , p 控制数问题却是 P 问题 (见 Downey 和 Fellows 的两篇文章⁴⁰). 然而, 即使 p 是固定的, 确定 p 问题也是 NP 难问题. 这个问题可以表述如下:

固定 p 加强数问题 (fixed p -reinforcement problem):

实例: 任意给定图 G 和固定的正整数 $p (\geq 2)$.

问题: 是否有 $r_p(G) \leq 1$?

定理 5.3 对于固定的正整数 $p (\geq 2)$, p 加强数问题是 NP-hard 问题.

证明的基本思路是: 把 3 可满足问题 (3SAT) 归结为 p 加强数问题. 为此, 设 $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ 和 $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_m\}$ 是 3SAT 的任意实例. 构造一个图 G 如下.

- a. 对每个变量 $u_i \in U$, 设置一个图 H_i , 其中 H_i 是从以顶点集为 $\{u_i, \bar{u}_i\} \cup (\cup_{j=1}^p \{v_{i,j}, \bar{v}_{i,j}\})$ 的完全图 K_{2p+2} 添加边集 $\cup_{j=1}^{p-1} \{u_i \bar{v}_{i,j}, \bar{u}_i v_{i,j}\}$ 而得到的图;
- b. 对每个句子 $C_j \in \mathcal{C}$, 设置一个顶点 c_j 并且连接 c_j 到 H_i 中每个顶点 u_i (或者 \bar{u}_i) 当且仅当文字 u_i (或者 \bar{u}_i) 出现在句子 C_j 中 ($i \in \{1, \dots, n\}$);
- c. 添加一个完全图 $T (\cong K_p)$ 并且连接它的所有顶点到每个 c_j .

然后证明: \mathcal{C} 是可满足的当且仅当 $r_p(G) = 1$.

这个研究成果在文章《On the p -reinforcement and the complexity, Journal of Combinatorial Optimization, Online First 2013-02-25》一文中.

⁴⁰R.G. Downey, M.R. Fellows, Fixed-parameter tractability and completeness I: Basic results. SIAM J. Comput. 24 (1995), 873-921.

R.G. Downey, M.R. Fellows, Fixed-parameter tractability and completeness II: On completeness for $W[1]$. Theoretical Computer Science, 54 (3) (1997), 465-474.

§5.2 某些特殊图的加强数

我们确定了路 P_n 和圈 C_n 的 p 加强数. 当 $p = 1$, Kok 和 Mynhardt⁴¹ 确定了 $r(P_n) = r(C_n) = i$ 如果 $n = 3k + i \geq 4$, 其中 $i \in \{1, 2, 3\}$. 该项目确定了当 $p \geq 2$ 时, $r_p(P_n)$ 和 $r_p(C_n)$ 的精确值.

定理 5.4 对于 $p \geq 2$, 如果 $\gamma_p(P_n) > p$ 那么

$$r_p(P_n) = \begin{cases} 2 & \text{if } p = 2 \text{ and } n \text{ is odd} \\ 1 & \text{if } p = 2 \text{ and } n \text{ is even} \\ p - 2 & \text{if } p \geq 3; \end{cases}$$

如果 $\gamma_p(C_n) > p$ 那么

$$r_p(C_n) = \begin{cases} 2 & \text{if } p = 2 \text{ and } n \text{ is odd} \\ 4 & \text{if } p = 2 \text{ and } n \text{ is even} \\ p - 2 & \text{if } p \geq 3. \end{cases}$$

对于完全 t 部分图 K_{n_1, \dots, n_t} , 令 $X = \{n_{i_1}, \dots, n_{i_r}\}$ 是 $\{n_1, \dots, n_t\}$ 子集, 定义

$$|X| = r \text{ 且 } f(X) = \sum_{j=1}^r n_{i_j},$$

$$\mathcal{X} = \{X : X \subseteq \{n_1, \dots, n_t\} \text{ 且 } f(X) \geq \gamma_p(G)\}.$$

对每个 $X \in \mathcal{X}$, 定义

$$f^*(X) = \max\{f(Y) : Y \subseteq X \text{ 且 } |Y| = |X| - 1, f(Y) < p\}.$$

定理 5.5 设 G 是完全 t 部分图 $G = K_{n_1, \dots, n_t}$, $t \geq 2$. 如果 $\gamma_p(G) > p$, 那么对任何 $p \geq 1$,

$$r_p(G) = \min\{(p - f^*(X))(f(X) - \gamma_p(G) + 1) : X \in \mathcal{X}\}.$$

对于一般的图, 我们得到如下结果:

定理 5.6 $r_p(G) \leq \Delta(G) + p$; 如果 $\delta(G) < p$, 那么 $r_p(G) \leq \delta(G) + p$; 如果 $\gamma_p(G) > p$ 且 $\Delta(G) < p$, 那么 $r_p(G) = p - \Delta(G)$.

推论 5.7 对任何树 T 和 $p \geq 2$, $r_p(T) \leq p + 1$.

值得注意的是, 推论 5.7 仅对 $p \geq 2$ 成立. 对于 $p = 1$, Blair 等人⁴² 证明了: $r_1(T) \leq \frac{n}{2}$, 其中 n 是树 T 的阶. 当 $p \geq 3$ 时, 我们递归地构造出使得 $r_p(T) = p + 1$ 的所有树 T . 但我们的构造方法不适于 $p = 2$ 的情形. 最近, 陆由等⁴³ 给出树 T 有 $r_2(T) = 3$ 一个充分必要条件.

这些研究成果包含在文章《On the p -reinforcement and the complexity, Journal of Combinatorial Optimization, Online First 2013-02-25》和《Trees with maximum p -reinforcement number. Discrete Applied Mathematics, 175 (1) (2014), 43-54.》中.

⁴¹J. Kok and C.M. Mynhardt, Reinforcement in graphs. *Congr. Numer.* 79 (1990) 225-231.

⁴²J.R.S. Blair, W. Goddard, S.T. Hedetniemi, S. Horton, P. Jones and G. Kubicki, On domination and reinforcement numbers in trees. *Discrete Math.*, 308 (2008): 1165-1175.

⁴³Y. Lu, W. Song and H-L. Yang, Trees with 2-reinforcement number three. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, to appear in 2014.

§5.3 符号加强数

图 G 控制函数是映射 $f: V(G) \rightarrow \{0,1\}$ 使得 f 在每个点 x 的闭邻点集 $N_G[x]$ 有 $f(N_G[x]) \geq 1$. 映射 f 是 G 的控制集 D 的特征函数, 控制数 $\gamma(G)$ 就是 $\min\{f(G) : f \in F(G)\}$, 其中 $F(G)$ 为 G 的控制函数集. 替代 $\{0,1\}$ 为 $\{-1,1\}$ 就得到符号控制函数. 符号控制数 $\gamma_s(G) = \min\{f(G) : f \in F_s(G)\}$, 其中 $F_s(G)$ 为 G 的符号控制函数集. 符号控制数是由 Dunbar 等人⁴⁴ 提出来的.

本项目确定了某些图 G 的符号加强数 $r_s(G)$ 的值. 例如:

定理 5.8 设 $n \geq 3$.

$$\begin{aligned} r_s(K_{1,n-1}) &= 1; \\ r_s(P_n) &= \begin{cases} 2, & n \equiv 2 \pmod{3} \\ 1, & \text{otherwise;} \end{cases} \\ r_s(C_n) &= \begin{cases} 0, & n = 3, 4 \\ 3, & n \equiv 0 \text{ or } 1 \pmod{3} \text{ and } n \geq 6 \\ 2, & n \equiv 2 \pmod{3}; \end{cases} \\ r_s(W_n) &= \begin{cases} 0, & \text{if } n = 4, \\ 2, & n = 1 \pmod{3}, \\ 1, & \text{otherwise.} \end{cases} \end{aligned}$$

对于树 T_n , $n \geq 2$, 只能给出上界 $r_s(T) \leq 2$. 但这个上界是最好的, 因为 $r_s(T_{3k+2}) = 2$.

这些结果包含在《Signed reinforcement numbers of certain graph, AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics, 9 (1) (2012), 59-70》一文中.

§6 关于控制划分数研究

设 G 是图, $\Omega(G)$ 是 $V(G)$ 的划分. 如果 $\Omega(G)$ 中每个子集都是 G 的控制集, 则称 $\Omega(G)$ 称为 G 的控制划分. G 的控制划分数 (domatic number) $d(G)$ 是 $V(G)$ 的控制划分 $\Omega(G)$ 中子集的最小数目. 图 G 的控制划分数 $d(G)$ 类似于 G 的点色数 $\pi(G)$. 图 G 的控制划分数与控制集概念有关, 而点色数与独立集有关. 词 “domatic” 是由词 “dominating” 和词 “chromatic” 生成. 图的 domatic 数概念是由 Cockayne 和 Hedetniemi⁴⁵ 提出来的. 本项目研究了两类控制划分数: 符号控制划分数和全 $\{k\}$ 控制划分数.

§6.1 符号控制划分数

在 §5.3 节, 我们定义了符号控制. Volkmann 和 Zelinka⁴⁶ 研究了符号控制划分数 $d_s(G)$, 并且证明了: $d_s(G)$ 是奇数. 该项目考虑符号边控制划分数 $d'_s(G)$.

图 G 的符号边控制函数是映射 $f: E(G) \rightarrow \{-1,1\}$ 使得 $f(e)$ 在每个边 e 的闭邻边集 $N_G[e]$ 有 $f(N_G[e]) \geq 1$. 图 G 的符号边控制划分数 $d'_s(G)$ 是最大数 d 使得 G 的 d 个不同的符号边控制函数 $\{f_1, \dots, f_d\}$ 满足对任何边 e 有 $\sum_{i=1}^d f_i(e) \leq 1$. 对于非空图 G , $d'_s(G)$ 和 $d_s(G)$ 有下列关系:

⁴⁴J. E. Dunbar, S. T. Hedetniemi, M. A. Henning and P. J. Slater, Signed domination in graphs, Graph Theory, Combinatorics, and Applications, John Wiley & Sons, Inc. 1 (1995), 311-322.

⁴⁵E. J. Cockayne and S. T. Hedetniemi, Towards a theory of domination in graphs. Networks, 7 (1977), 247-261.

⁴⁶L. Volkmann, B. Zelinka, Signed domatic number of a graph. Discrete Applied Mathematics, 150 (2005), 261-267.

$d'_s(G) = d_s(L(G))$ 是奇数, 其中 $L(G)$ 是 G 的线图.

本项目确定了某些特殊图类的符号边控制划分数, 如路、圈、星、格网络、完全图等.

定理 6.1 对于 $n \geq 3$,

$$d'_s(C_n) = d_s(C_n) = \begin{cases} 3 & n \equiv 0 \pmod{3}, \\ 1 & n \equiv 1, 2 \pmod{3}. \end{cases}$$

$$d'_s(K_{1,n}) = d_s(K_n) = \begin{cases} n & n \equiv 1 \pmod{2}, \\ \lfloor \frac{n}{2} \rfloor_o & n \equiv 0 \pmod{2}. \end{cases}$$

其中 $\lfloor n \rfloor_o$ 表示不超过 n 的最大奇数.

$$d'_s(P_n) = 1, n \geq 2.$$

$$d'_s(P_n \times P_m) = 1, n, m \geq 2.$$

定理 6.2 对于完全图 K_n , $n \geq 2$,

$$d'_s(K_n) = \begin{cases} n-1 & \text{if } n \equiv 0 \pmod{2}; \\ n & \text{if } n \equiv 3 \pmod{4} \text{ and } H(n+1) \text{ exists}; \\ n-2 & \text{if } n \equiv 1 \pmod{4} \text{ and } H(n-1) \text{ exists}, \end{cases}$$

其中 $H(n)$ 是 Hadamard 矩阵.

这个结果说明: 如果 n 是奇数, $d'_s(K_n)$ 的确定依赖于 Hadamard 矩阵 $H(4k)$ 的存在性. 这个结果建立了符号边控制划分数与 Hadamard 矩阵之间的密切联系.

这些结果包含在《Signed edge-domestic number of a graph, Graphs and Combinatorics, 29 (6) (2013), 1881-1890》一文中.

§6.2 全 $\{k\}$ 控制划分数

对于给定正整数 k , 图 G 的全 $\{k\}$ 控制函数是映射 $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, \dots, k\}$ 使得 f 在每个点 x 的邻点集 $N_G(x)$ 有 $f(N_G(x)) \leq k$. 图 G 的全 $\{k\}$ 控制划分数 $d_t^{\{k\}}(G)$ 是最大数 d 使得 G 的 d 个不同的全 $\{k\}$ 控制函数 $\{f_1, \dots, f_d\}$ 满足对任何点 x 有 $\sum_{i=1}^d f_i(x) \leq k$.

全 $\{k\}$ 控制划分数是由 Sheikholeslami 和 Volkmann⁴⁷ 首先研究. 本项目确定了轮和完全图的全 $\{k\}$ 控制划分数.

定理 6.3 对于轮 W_{n+1} ($n \geq 3$), 当 $n \equiv 0 \pmod{4}$ 时,

$$d_t^{\{k\}}(W_{n+1}) = \begin{cases} 2 & \text{如果 } k = 1; \\ 3 & \text{其他情形}, \end{cases}$$

当 $n \not\equiv 0 \pmod{4}$ 时,

$$d_t^{\{k\}}(W_{n+1}) = \begin{cases} 3 & \text{如果 } (\lfloor \frac{k}{3} \rfloor - 1)n \geq k; \\ 2 & \text{其他情形}. \end{cases}$$

⁴⁷S.M. Sheikholeslami, L. Volkmann, The total k -domestic number of a graph. Journal of Combinatorial Optimization, 23 (2) (2012), 252-260.

定理 6.4 对于阶完全图 K_n ($n \geq 3$),

$$d_t^{\{k\}}(K_n) = \begin{cases} \lfloor \frac{kn}{k+1} \rfloor & \text{如果 } 1 \leq k \leq n-2; \\ n-2 & \text{其他情形.} \end{cases}$$

这些结果包含《The total $\{k\}$ -domatic number of wheels and complete graphs. Journal of Combinatorial Optimization, 24 (3) (2012), 162-175》一文中.

§7 控制收缩数

图 G 的控制细分数 $sd_\gamma(G)$ 定义为最小的边数使得这些边被细分一次导致图的控制数增加. Arumugam 提出这个参数并证明了: 对于 n 阶树 T_n ($n \geq 3$), $sd_\gamma(T) \leq 3$, 并猜想这个上界对任何图成立. 2001 年, Haynes 等人⁴⁸ 给出反例 $G = K_t \times K_t$ ($t \geq 4$) 否定了这个猜想, 因为 $sd_\gamma(G) = 4$. 一个平行的概念是全控制细分数 $sd_{\gamma_t}(G)$. 2003 年, Haynes 等人⁴⁹ 证明: 对任何树 T 有 $sd_{\gamma_t}(T) \leq 3$.

我们考虑边收缩对控制数的影响. 图 G 的控制 (全控制) 细分数 $ct_\gamma(G)$ ($ct_{\gamma_t}(G)$) 定义为最小的边数使得这些边被收缩导致图的控制数减少. 如果 $\gamma(G) = 1$, 则定义 $ct_\gamma(G) = 0$; 如果 $\gamma_t(G) = 2$, 则定义 $ct_{\gamma_t}(G) = 0$.

易知, 对路 P_n 和圈 C_n , 如果 $n \geq 4$, 那么

$$ct_\gamma(P_n) = ct_\gamma(C_n) = i, \quad n = 3k + i, \quad 1 \leq i \leq 3;$$

如果 $n \geq 5$, 那么

$$ct_{\gamma_t}(C_n) = ct_{\gamma_t}(P_n) = \begin{cases} 1 & \text{if } n \equiv 1, 2 \pmod{4}; \\ 2 & \text{if } n \equiv 3 \pmod{4}; \\ 3 & \text{if } n \equiv 0 \pmod{4}. \end{cases}$$

定理 7.1 对连通图 G , $ct_\gamma(G) \leq 3$ 且 $ct_{\gamma_t}(G) \leq 3$.

根据它们的取值, 我们分类并刻画了所有的图. 这些结果包含在《Domination and total domination contraction numbers of graphs. Ars Combinatoria, 94 (2010), 431-443》一文中.

§8 广义控制数与独立数研究

图 G 的宽直径 $d_m(G)$ 是最小整数 d 使得对 G 中任何两点 x 和 y 存在 m 条内点不交且长度不超过 d 的 xy 路. 显然, $d_1(G)$ 就是经典的直径 $d(G)$.

图 G 的广义控制数 $\gamma_{d,m}(G)$ 是最小整数 k , G 中存在点数为 k 的子集 D 使得对任何不在 D 中的点 x , 存在 m 条内点不交且长度不超过 d 的 xy 路. 显然, $\gamma_{1,1}(G)$ 就是经典的控制数 $\gamma(G)$. 因此, 对于一般的图 G , 确定 $\gamma_{d,m}(G)$ 问题是 NP 完备的. 对任何 m 连通图 G , 如果 $d \geq d_m(G)$, 那么 $\gamma_{d,m}(G) = 1$. 因此, 如果 $d < d_m(G)$, 那么 $\gamma_{d,m}(G) \geq 2$.

图 G 的广义独立数 $\alpha_{d,m}(G)$ 是最小整数 k , G 中存在点数为 k 的子集 D 使得对 D 中任何两点 x 和 y 它们的宽距离 $d_m(G; x, y) > k$. 显然, $\alpha_{1,1}(G)$ 就是经典的控制数 $\alpha(G)$. 因此, 对于一般

⁴⁸T.W. Haynes, S.M. Hedetniemi, S.T. Hedetniemi, D.P. Jacobs, J. Knisely, van der Merwe, C. Lucas, Domination subdivision numbers. Discuss. Math. Graph Theory, 21 (2001), 239-253.

⁴⁹T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi, van der Merwe, C. Lucas, Total domination subdivision numbers. J. Combin. Math. Combin. Comput. 44 (2003), 115-128.

的图 G , 确定 $\alpha_{d,m}(G)$ 问题是 NP 完备的. 显然, 对任何 m 连通图 G , $\alpha_{d,m}(G) = 1 \Leftrightarrow d \geq d_m(G)$. 因此, 如果 $d < d_m(G)$, 那么 $\alpha_{d,m}(G) \geq 2$.

双环面网络 $G_{m,n} = C_m \times C_n$ 是 4 正则 4 连通图. 令 $d_4 = d_4(C_m \times C_n)$, 并且令 $e = \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$. 本项目研究双环面网络 $G_{m,n}$ 的广义控制数 $\gamma_{d,4}(G_{m,n})$ 和广义独立数 $\alpha_{d,4}(G_{m,n})$, 获得部分结果.

定理 8.1 设 $G_{m,n} = C_m \times C_n$. 那么,

$$\gamma_{d,4}(G_{m,3}) = 2 \Leftrightarrow d_4 - e \leq d < d_4, m \geq 5;$$

$$\gamma_{d,4}(G_{m,4}) = 2 \text{ 如果 } d_4 - (2e - \lfloor \frac{m+2}{2} \rfloor) \leq d < d_4, m \geq 4;$$

$$\gamma_{d,4}(G_{m,n}) = 2 \text{ 如果 } d_4 - e + 2 \leq d < d_4, m = n \geq 4.$$

这些结果包含在《Domination number of undirected toroidal mesh. Acta Mathematica Sinica, English Series, 28 (3) (2012), 453-462》一文中.

定理 8.2 设 $G_{m,n} = C_m \times C_n$. 那么,

$$\alpha_{d,4}(G_{m,3}) = h + 1 \text{ 如果 } d = d_4 - h, \text{ 其中 } 1 \leq h \leq e - 2, m \geq 7;$$

$$\alpha_{d,4}(G_{m,4}) = \begin{cases} 2 & \text{如果 } m \in \{21, 23, 24, 25, 27\}, \\ 3 & \text{其它情形}; \end{cases}$$

$$\alpha_{d,4}(G_{m,n}) = 2 \text{ 如果 } d = d_4 - 1, m = n \geq 10.$$

这些结果包含在《无向超环面网的 (d, m) 独立数. 系统科学与数学, 32 (3) (2012), 327-333》一文中.

第二部分 2010-2013 年期间其它研究成果

这部分介绍了我们在 2010 年至 2013 年间完成的与约束数无关的研究工作. 这些研究大部分是以前研究项目内容的继续, 其中包括反馈数、条件连通度、泛圈与泛连通、网络故障诊断等问题. 其中条件连通度问题是在研国家自然科学基金项目《计算机科学中的若干组合问题研究》(2013.1-2016.12) 的研究内容之一.

§9 关于反馈数的研究

对简单图 $G = (V, E)$, 它的圈秩 (cycle rank) 或者 Betti 数 (Betti number) 是最小边数 $\rho(G)$, 这个数目的边集从 G 中移去就导致剩下的子图不含圈. 从所周知, 如果 G 是无向图, 那么 $\rho(G) = \varepsilon - v + \omega$, 其中 ε, v 和 ω 分别是 G 的边数, 顶点数和连通分支数.

对应的问题是顶点的移去. 设顶点子集 $F \subset V$, 如果由 $G - F$ 不含圈, 则称 F 是 G 的反馈点集. 最小反馈点集中的点数称为反馈数 (the feedback number). 已经证明: 确定对一般图的最小反馈点集问题是 NP 完备问题⁵⁰. Beineke 和 Vandell⁵¹ 称反馈数为反圈数 (decycling number) 并且给出任意无向图反馈数的下界.

引理 9.1 设 G 是无向图, 阶数为 v , 边数为 ε , 最大度为 Δ . 那么对 G 的任何反馈集 F 均有

$$|F| \geq \left\lceil \frac{\varepsilon - v + 1}{\Delta - 1} \right\rceil.$$

本项目研究了某些著名图类的反馈数问题.

§9.1 Kautz 无向图和 De Bruijn 无向图的反馈数

Kautz 无向图 $UK(d, n)$ 是从 Kautz 有向图 $K(d, n)$ 中删去每条边的方向后再删去重边而得到的图. 显然, $UK(d, n)$ 有 $d^n + d^{n-1}$ 个顶点, $d^{n+1} + d^n - \frac{1}{2}d(d+1)$ 条边, 最大度为 $2d$ ($n \geq 3$), 最小度为 $2d - 1$ ($n \geq 2$).

De Bruijn 无向图 $UB(d, n)$ 是从 De Bruijn 有向图 $B(d, n)$ 中删去每条边的方向后再删去环和重边而得到的图. 显然, $UB(d, n)$ 有 d^n 个顶点, $d^n - \frac{1}{2}d(d-1) - d$ 条边, 最大度为 $2d$, 最小度为 $2d - 2$.

用 $f_{UK}(d, n)$ 表示 $UK(d, n)$ 的反馈数, $f_{BK}(d, n)$ 表示 $UB(d, n)$ 的反馈数. Královič 和 Ružička⁵² 确定了:

$$f_{UK}(2, n) = 2^{n-1}, \quad f_{UB}(2, n) = \left\lceil \frac{2^n - 2}{3} \right\rceil.$$

对一般的 $d \geq 2$, 本项目给出 $f_{UK}(d, n)$ 和 $f_{UB}(d, n)$ 的界.

定理 9.2 对任何 $d \geq 2$ 和 $n \geq 3$, Kautz 无向图 $UK(d, n)$ 的反馈数 $f_{UK}(d, n)$ 满足

$$\left\lceil \frac{d^{n+1} - d^{n-1} - \frac{d(d+1)}{2} + 1}{2d-1} \right\rceil \leq f_{UK}(d, n) \leq d^n - \left(\left\lceil \frac{d^2}{4} \right\rceil + 1 \right) d^{n-2}.$$

特别地, $f_{UK}(2, n) = 2^{n-1}$.

⁵⁰M. R. Garey, D. S. Johnson, Computers and Intractability, Freeman, San Francisco, CA, 1979

⁵¹L. W. Beineke, R. C. Vandell, Decycling graphs, J. Graph Theory, 25 (1997), 59-77.

⁵²R. Královič and P. Ružička, Minimum feedback vertex sets in shuffle-based interconnection networks. Inf. Processing Letters 86 (4) (2003), 191-196.

这个结果包含在《Feedback Numbers of Kautz Undirected Graphs. Australasian Journal of Combinatorics, 52 (2012), 3-9》中.

定理 9.3 对任何 $d \geq 3$ 和 $n \geq 1$, De Bruijn 无向图 $UB(d, n)$ 的反馈数 $f_{UB}(d, n)$ 满足

$$\left\lceil \frac{d^{n+1} - d - \frac{d(d-1)}{2} - d^n + 1}{2d-1} \right\rceil \leq f_{UB}(d, n) \leq d^n \left(1 - \left(\frac{d}{1+d} \right)^{d-1} \right) + \binom{n+d-2}{d-2}.$$

这个结果包含在《Bounds on feedback numbers of de Bruijn graphs. Taiwanese Journal of Mathematics, 15 (3) (2011), 1101-1113》一文中.

§9.2 Kautz 有向图和 De Bruijn 有向图的反馈数

2007 年, 我们研究了 Kautz 有向图 $K(d, n)$ 的反馈数. 2007 年, 我们首先得到如下结果⁵³.

定理 9.4 对任何整数 $d \geq 2$ 和 $n \geq 1$, Kautz 有向图 $K(d, n)$ 的反馈数

$$\vec{f}_K(d, n) = \begin{cases} d & \text{for } n = 1; \\ \frac{(\varphi \odot \theta)(n)}{n} + \frac{(\varphi \odot \theta)(n-1)}{n-1} & \text{for } 2 \leq n \leq 7; \\ \frac{d^n}{n} + \frac{d^{n-1}}{n-1} + O(nd^{n-4}) & \text{for } n \geq 8, \end{cases}$$

其中 $(\varphi \odot \theta)(n) = \sum_{i|n} \varphi(i)\theta\left(\frac{n}{i}\right)$, $i | n$ 意味着 i 能整除 n , $\theta(i) = d^i + (-1)^i d$, $\varphi(1) = 1$ 且 $\varphi(i) = i \cdot \prod_{j=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_j}\right)$ ($i \geq 2$), p_1, \dots, p_r 是 i 的两两不同的素因子.

对于 De Bruijn 有向图 $B(d, n)$, 本项目获得类似结果.

定理 9.5 对任何整数 $d \geq 2$ 和 $n \geq 1$, De Bruijn 有向图 $B(d, n)$ 的反馈数

$$\vec{f}_B(d, n) = \begin{cases} \frac{1}{n} \sum_{i|n} d^i \varphi\left(\frac{n}{i}\right) & \text{for } 2 \leq n \leq 4; \\ \frac{d^n}{n} + O(nd^{n-4}) & \text{for } n \geq 5, \end{cases}$$

其中 $i | n$ 意味着 i 能整除 n , $\varphi(1) = 1$ 且 $\varphi(i) = i \cdot \prod_{j=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_j}\right)$ ($i \geq 2$), p_1, \dots, p_r 是 i 的两两不同的素因子.

这个结果包含在《Feedback numbers of de Bruijn digraphs. Computers and Mathematics with Applications, 59 (2010), 716-723》一文中.

§9.3 (n, k) 星图的反馈数

令 $I_n = \{1, \dots, n\}$, $P(n, k)$ 是 I_n 上的 k 置换集 ($1 \leq k < n$), 即, $P(n, k) = \{x_1 x_2 \dots x_k \mid x_i \in I_n, x_i \neq x_j, 1 \leq i \neq j \leq k\}$. 令 $p(n, k) = |P(n, k)|$. 则 $p(n, k) = n! / (n-k)!$.

⁵³J.-M. Xu, Ye-Zhou Wu, Jia Huang and Chao Yang, Feedback number of Kautz digraph. Discrete Mathematics, 307(13) (2007), 1589-1599.

(n, k) 星图 $S_{n,k}$ ($1 \leq k < n$) 有顶点集 $P(n, k)$. 顶点 $x_1 x_2 \dots x_i \dots x_k$ 与下列顶点相邻

- (1) $x_i x_2 \dots x_{i-1} x_1 x_{i+1} \dots x_k, 2 \leq i \leq k$.
- (2) $\alpha x_2 x_3 \dots x_k, \alpha \in I_n - \{x_i | 1 \leq i \leq k\}$.

图 7 所示的是 $(4, 2)$ 星图 $S_{4,2}$.

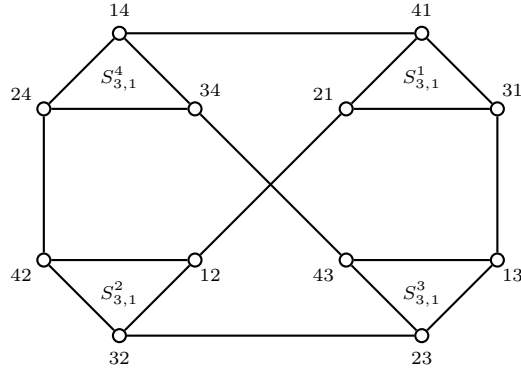


图 7 $(4, 2)$ 星图 $S_{4,2}$

定理 9.6 对每个 $k, 2 \leq k < n, \theta = \min\{k-1, n-k+1\}$, (n, k) 星图 $S_{n,k}$ 的反馈数 $f_S(n, k)$ 满足

$$p(n, k) - 2(k-1)! \binom{n}{k-1} \leq f_S(n, k) \leq p(n, k) - 2(k-1)! \sum_{i=0}^{\theta-1} \binom{n-2i-1}{k-i-1}.$$

当 $k=2$ 和 $k=3$ 时, 定理 9.6 的下界分别为 $n(n-3)$ 和 $n(n-1)(n-4)$. 徐喜荣等人⁵⁴ 证明了 $f_S(n, 2) = n(n-3)$ 和 $f_S(n, 3) = n(n-1)(n-4)$. 这说明定理 9.6 的下界是可以达到的.

这个结果包含在《On the bounds of feedback numbers of (n, k) -star graphs. Information Processing Letters, 112 (12) (2012), 473-478》一文中.

§9.4 有向图的边反馈数

设 $G = (V, E)$ 是有向图. 如果它不含有向圈, 则称 G 为反圈 (acyclic) 有向图. 设 $X \subseteq E(G)$, 如果 $G - X$ 是反圈的, 则称 X 为 G 的反馈边集 (feedback edge set). 用 $\beta(G)$ 表示 G 中最小反圈边集中边数.

这个概念对无向图 G 也是有效的, 而且 $\beta(G) = \varepsilon(G) - v(G) + \omega(G)$. 但对有向图, Karp⁵⁵ 证明了确定最小反圈边集问题却是 NP 完备的.

用 $\rho(G)$ 表示有向图 G 中不相邻的点对数目. Chudnovsky 等人⁵⁶ 证明了: 如果 G 不含三角形, 那么 $\beta(G) \leq \rho(G)$, 并提出如下猜想.

猜想 9.7 如果有向图 G 不含有向 3 圈, 那么, $\beta(G) \leq \frac{1}{2} \rho(G)$.

⁵⁴X.-R. Xu, B.-C. Wang, J. Wang, Y. Zhang, Y.-S. Yang, Feedback number of (n, k) -star graphs. Utilitas Math., to appear.

⁵⁵R. M. Karp, Reducibility among combinatorial problems, in: Complexity of Computer Computations, (R. E. Miller and J. W. Thatcher, eds.), New York, Plenum, 1972, pp. 85-103.

⁵⁶M. Chudnovsky, P. Seymour and B. Sullivan, Cycles in dense digraphs. *Combinatorica* 28 (2008), 1-18.

关于这个猜想, Dunkum 等人⁵⁷ 证明了 $\beta(G) \leq 0.88 \rho(G)$; Chen 等人⁵⁸ 修改它为 $\beta(G) \leq 0.8616 \rho(G)$. Sullivan⁵⁹ 提出下面更一般的猜想.

猜想 9.8 如果有向图 G 的围长 $g(G) > m \geq 3$, 那么

$$\beta(G) \leq \frac{2}{(m+1)(m-2)} \rho(G).$$

当 $m \in \{4, 5\}$ 时, 猜想 9.8 中上界分别为 $\frac{1}{5} \rho(G)$ 和 $\frac{1}{9} \rho(G)$. 本项目得到如下结果.

定理 9.9 如果有向图 G 的围长 $g(G) > 4$, 那么 $\beta(G) \leq \frac{3-\sqrt{5}}{2} \rho(G) \approx 0.3819 \rho(G)$.

定理 9.10 如果有向图 G 的围长 $g(G) > 5$, 那么 $\beta(G) \leq (2 - \sqrt{3}) \rho(G) \approx 0.2679 \rho(G)$.

这些结果包含在《On Sullivan's conjecture on cycles in 4-free and 5-free digraphs. Acta Mathematica Sinica, English Series, 29 (1) (2013), 53-64》一文中.

当 $m \in \{4, 5\}$ 时, Sullivan 证明了 $\beta(G) \leq \frac{1}{m-2} \rho(G)$. 本项目改进了这个结果.

定理 9.11 如果有向图 G 的围长 $g(G) > m \geq 4$, 那么 $\beta(G) \leq \frac{1}{m-2} \gamma(G)$.

这个结果包含在《Minimal feedback arc set of m -free digraphs. Information Processing Letters, 113 (8) (2013) 260-264》一文中.

§9.5 Caccetta-Häggkvist 猜想

猜想 9.7 与下面的 Caccetta - Häggkvist 猜想密切相关. 1978 年, Caccetta 和 Häggkvist⁶⁰ 提出如下的著名猜想:

猜想 9.12 设 G 是 n 阶有向图. 如果 $\delta^+(G) \geq r$, 那么 G 必含出度不大于 $\lceil n/r \rceil$ 的有向圈.

当 $r = 1$ 时, 猜想 9.12 显然成立. 当 $r = 2$ 时, Caccetta 和 Häggkvist 证明猜想成立. 1987 年, Hamidoune⁶¹, Hoáng 和 Reed⁶² 分别证明了当 $r = 3$ 和 $r = 4, 5$ 时猜想成立. 最近, Shen⁶³ 证明了当 $r < \sqrt{n/2}$ 时猜想成立. 对于一般的 r , 此猜想至今仍未被解决.

当 $r = \frac{n}{3}$ 时, 猜想 9.12 可以表述为:

猜想 9.13 设 G 是 n 阶有向图. 如果 $\delta^+(G) \geq \frac{n}{3}$, 那么 G 必含有向 3 圈.

⁵⁷M. Dunkum, P. Hamburger and A. Pór, Destroying cycles in digraphs. *Combinatorica* 31 (2011), 55-66

⁵⁸K. Chen, S. Karson, D. Liu, J. Shen, On the Chudnovsky-Seymour-Sullivan Conjecture on Cycles in Triangle-free Digraphs. A manuscript submitted to *Discrete Math.* for possible publication. ArXiv preprint arXiv:0909.2468, 2009 - arxiv.org.

⁵⁹B. Sullivan, Extremal Problems in Digraphs. Ph.D. thesis, Princeton University, May 2008.

⁶⁰L. Caccetta and R. Häggkvist, On minimal digraphs with given girth. *Proc. 9th S-E Conf. Combinatorics, Graph Theory and Computing* (1978) 181-187.

⁶¹Y. O. Hamidoune, A note on minimal directed graphs with given girth. *J. Combin. Theory, Ser. B*, 43(3) (1987), 343-348.

⁶²C. Hoáng and B. Reed, A note on short cycles in digraphs. *Discrete Math.*, 66(1-2) (1987), 103-107.

⁶³J. Shen, On the girth of digraphs. *Discrete Math.*, 211(1-3) (2000), 167-181.

为了证明这个猜想, 人们寻找尽可能小的常数 c 使得每个 n 阶有向图 G , 只要它的最小出度 $\delta^+(G) \geq cn$, G 必含有向 3 圈. Caccetta 和 Häggkvist 证明了 $c \leq 0.3819$; Bondy⁶⁴ 证明了 $c \leq 0.3797$; 沈建⁶⁵ 修改它到 $c \leq 0.3542$; Hamburger 等人⁶⁶ 修改到 0.35312. In 2009, Hladký 等人⁶⁷ 进一步修改它到 0.3465. 这个结果表明: 任何 n 阶有向图 G , 如果它的最小出度 $\delta^+(G) \geq 0.3465n$, 那么 G 必含有向 3 圈.

本项目考虑 $r = \frac{n}{4}$, 得到: 如果有向图 G 的最小出度 $\delta^+(G) \geq 0.28866n$, 那么 G 必含有长度不大于 4 的有向圈. 后来, 我们改进了这个结果如下.

定理 9.14 设 G 是 n 阶有向图. 如果 $\delta^+(G) \geq 0.28724n$, 那么 G 必含有长度不大于 4 的有向圈.

这些结果包含在《有向图最小圈长不大于 4 的一个充分条件. 吉林大学学报, 51 (2) (2013), 241-243》和《关于 Caccetta-Haggkvist 猜想的注记. 数学学报, 56 (4) (2013), 479-486》中.

当考虑 $r = \frac{n}{5}$, 本项目得到:

定理 9.15 设 G 是 n 阶有向图. 如果 $\delta^+(G) \geq 0.24817n$, 那么 G 必含有长度不大于 5 的有向圈.

这个结果包含在《A note on directed 5-cycles in digraphs. Applied Mathematics, 3 (7) (2012), 805-808》一文中.

§10 关于网络条件连通度研究

设 $G = (V, E)$ 是连通图, $X \subseteq V(G)$. 对于给定的整数 $h (\geq 0)$, 如果 $G - X$ 不连通且 $\delta(G - X) \geq h$, 那么称 F 为 G 的 h 超点割, 或者 h 点割. G 的 h 超点连通度 $\kappa_s^{(h)}(G)$ 定义为最小 h 点割中的边数. 显然, $\kappa_s^{(0)}(G) = \kappa(G)$, 其中 $\kappa(G)$ 是图 G 的经典点连通度. 对于 $h \geq 1$, 如果 $\kappa_s^{(h)}(G)$ 存在, 则 $\kappa_s^{(h-1)}(G) \leq \kappa_s^{(h)}(G)$.

同样地可以定义 G 的 h 超边连通度. 设 $F \subseteq E(G)$. 对于给定的整数 $h (\geq 0)$, 如果 $G - F$ 不连通且 $\delta(G - F) \geq h$, 那么称 F 为 G 的 h 超边割, 或者 h 边割. G 的 h 超边连通度 $\lambda_s^{(h)}(G)$ 定义为最小 h 边割中的边数. 显然, $\lambda_s^{(0)}(G) = \lambda(G)$, 其中 $\lambda(G)$ 是图 G 的经典边连通度. 对于 $h \geq 1$, 如果 $\lambda_s^{(h)}(G)$ 存在, 则 $\lambda_s^{(h-1)}(G) \leq \lambda_s^{(h)}(G)$.

对于任意的图 G 和给定的整数 h , 确定 $\kappa_s^{(h)}(G)$ 和 $\lambda_s^{(h)}(G)$ 是相当困难的, 因为 Latifi 等人⁶⁸ 猜测它是 NP-hard 问题. 事实上, $\kappa_s^{(h)}(G)$ 和 $\lambda_s^{(h)}(G)$ 的存在性问题还是一个没有解决的问题. 因此确定著名网络的 h 超点连通度和 h 超边连通度是有意义的. 当 h 较小时, 某些著名网络的 h 超边连通度已被确定. 对于一般的 h , 其结果较少. 对于超立方体 Q_n , 当 $k \leq n - 2$ 时, Oh 等人⁶⁹ 和 Wu 等人⁷⁰ 独立地确定了 $\kappa_s^{(k)}(Q_n) = 2^k(n - k)$; 当 $h \leq n - 1$ 时, 徐俊明⁷¹ 确定了 $\lambda_s^{(h)}(Q_n) = 2^h(n - h)$.

⁶⁴J. A. Bondy, Counting subgraphs: A new approach to the Caccetta-Haggkvist conjecture. *Discrete Math.* 165/166 (1997), 71-80.

⁶⁵J. Shen, Directed triangles in digraphs. *J. Combin. Theory, Ser. B*, 74 (1998), 405-407.

⁶⁶P. Hamburger, P. Haxell, and A. Kostochka, On the directed triangles in digraphs. *Electronic J. Combin.* 14 (2007), Note 19.

⁶⁷J. Hladký, D. Král' and S. Norine: Counting flags in triangle-free digraphs. *Electronic Notes in Discrete Mathematics.* 34 (2009), 621-625.

⁶⁸S. Latifi, M. Hegde, M. Naraghi-Pour, Conditional connectivity measures for large multiprocessor systems, *IEEE Trans. Comput.* 43 (2) (1994) 218-222.

⁶⁹A. D. Oh, H. Choi, Generalized measures of fault tolerance in n -cube networks. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, 4 (1993), 702-703.

⁷⁰J. Wu, G. Guo, Fault tolerance measures for m -ary n -dimensional hypercubes based on forbidden faulty sets. *IEEE Transactions on Computers*, 47 (1998), 888-893.

⁷¹J.-M. Xu, On conditional edge-connectivity of graphs, *Acta Math. Appl. Sin.* 16 (4) (2000) 414-419.

观察到在超点连通度概念中, 如果 S 是个 h 超点割, 那么 $\delta(G - S) \geq h$. 因此, $G - S$ 的每个连通分支至少有 $h + 1$ 个顶点. Fàbrega 和 Fiol⁷² 引入 h 强连通度 (h -extra connectivity) 概念.

设 G 是连通图, $S \subseteq V(G)$ (或者 $F \subseteq E(G)$). 如果 $G - S$ (或者 $G - F$) 不连通而且每个连通分支至少有 $h + 1$ 个点, 那么称 S (或者 F) 为 G 的 h 强点割 (或者 h 强边割). 图 G 的 h 强点连通度 $\kappa_o^{(h)}(G)$ (或者 h 强边连通度 $\lambda_o^{(h)}(G)$) 定义为最小 h 强点割中点数 (或者 h 强边割中的边数).

条件连通度一直是我们多年来研究内容之一, 曾对较小的 h 值, 确定了一些网络关于这些参数值. 但采用的证明方法不能推广到一般的 h . 本项目进一步研究这些参数, 利用某些网络的递归结构, 采用归纳方法, 对一般的 h , 确定了一些网络关于这些参数值.

§10.1 立方体及其变型网络

设 $G_0 = (V_0, E_0)$ 和 $G_1 = (V_1, E_1)$ 是两个不交的图且 $|V_0| = |V_1|$, $\sigma : V_0 \rightarrow V_1$ 是双射, $M_\sigma = \{x\sigma(x) \mid x \in V_0, \sigma(x) \in V_1\}$. 用 $G_0 \oplus_\sigma G_1$ 表示图 $G = (V_0 \cup V_1, E_0 \cup E_1 \cup M_\sigma)$. 显然, M_σ 是 G 的完备匹配. 而且, 如果 σ 是 $V(G_0)$ 上的恒等置换, 那么 $G_0 \oplus_\sigma G_0 = G_0 \times K_2$.

根据 σ 的不同, 运算 \oplus_σ 可以不同的图. 递归地运用运算 \oplus_σ , 可以一类被称为 n 维超立方体图类 (hypercube-like graphs) HL_n . 递归定义如下:

- (1) $HL_0 = \{G_0\}$, 其中 $G_0 = K_1$;
- (2) $G_n \in HL_n \Leftrightarrow G_n = G_{n-1} \oplus_\sigma G'_{n-1}$, 其中 $G_{n-1}, G'_{n-1} \in HL_{n-1}$.

显然, 每个图 $G_n \in HL_n$ 是 2^n 阶的 n 正则 n 连通图.

由定义, 容易验证: 超立方体 (hypercube) $Q_n = Q_{n-1} \oplus_{\sigma_1} Q_{n-1}$, 变形 (varietal hypercube) $VQ_n = VQ_{n-1} \oplus_{\sigma_2} VQ_{n-1}$, 扭立方体 (twisted cube) $TQ_n = TQ_{n-1} \oplus_{\sigma_3} TQ_{n-1}$, 局部扭立方体 (locally twisted cube) $LTQ_n = LTQ_{n-1} \oplus_{\sigma_4} LTQ_{n-1}$, 交叉立方体 (crossed cube) $CQ_n = CQ_{n-1} \oplus_{\sigma_5} CQ_{n-1}$, Möbius 立方体 $MQ_n = MQ_{n-1} \oplus_{\sigma_6} MQ_{n-1}$. 至于递归循环图 (recursive circulant) $G(2^n, 4)$, 当 $n \in \{2, 3, 4\}$ 时, $V(G(2^{n-1}, 4))$ 上存在一个置换 σ 使得 $G(2^n, 4) = G(2^{n-1}, 4) \oplus_\sigma G(2^{n-1}, 4)$ (see Fig. 8). 一般地, $G(2^n, 4)$ 不能从两个递归循环通过运算 \oplus_σ 而得到. 然而, Kim⁷³ 证明: $V(G(2^{n-2} \times K_2, 4))$ 中存在置换 σ 使得 $G(2^n, 4) = [G(2^{n-2}, 4) \times K_2] \oplus_\sigma [G(2^{n-2}, 4) \times K_2]$. 因此, $\{Q_n, VQ_n, TQ_n, LTQ_n, CQ_n, MQ_n, G(2^n, 4)\} \subseteq HL_n$.

本项目确定了 $G_n \in HL_n$ 的 h 超边连通度.

定理 10.1 对任何 $G_n \in HL_n$, 任何 n 和 $h \in I_{n-1} = \{1, 2, \dots, n-1\}$,

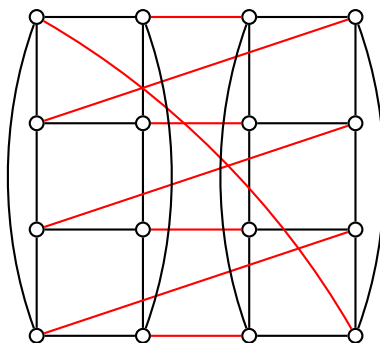
$$\lambda_s^{(h)}(G_n) = 2^h(n-h).$$

推论 10.2 对任何 n 和 $h \in I_{n-1}$, 如果 $G_n \in \{Q_n, VQ_n, CQ_n, MQ_n, TQ_n, LTQ_n, G(2^n, 4)\}$, 那么 $\lambda_s^{(h)}(G_n) = 2^h(n-h)$.

这个研究结果包含在《Edge-fault tolerance of hypercube-like networks. Information Processing Letters, 113 (19-21) (2013), 760-763》一文中.

⁷²J. Fàbrega, M. A. Fiol, Extraconnectivity of graphs with large girth. Discrete Mathematics, 127 (1994), 163-170.

⁷³klp11

图 8 图 HL_4

§10.2 星图和 (n, k) 星图

对于给定的整数 $n (\geq 2)$, 令 $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$, $I'_n = \{2, \dots, n\}$, $P(n) = \{p_1 p_2 \dots p_n : p_i \in I_n, p_i \neq p_j, 1 \leq i \neq j \leq n\}$ 是 I_n 上的置换集. 对每个整数 $k (1 \leq k \leq n-1)$, 令 $P(n, k) = \{p_1 p_2 \dots p_k : p_i \in I_n, p_i \neq p_j, 1 \leq i \neq j \leq k\}$ 是 I_n 上的 k 置换集. 显然, $|P(n)| = n!$, $|P(n, k)| = \frac{n!}{(n-k)!}$. 对每个 $i \in I'_n$, 令 $p^i = p_i p_2 \dots p_{i-1} p_1 p_{i+1} \dots p_n$.

n 维星图 (star graph) S_n 是无向图, 其中 $V(S_n) = P(n)$, $E(S_n) = \{pp^i : p \in P(n), i \in I'_n\}$.

与超立方体 Q_n 一样, 星图 S_n 是 $(n-1)$ 正则的点、边可迁的 Cayley 图 $C_\Gamma(S)$, 其中 Γ 是 I_n 上的对称群, $S = \{t^2, t^3, \dots, t^n\}$, 其中 t 是恒等置换⁷⁴.

广义星图- (n, k) 星图 $S_{n,k}$, 它的顶点集为 $P(n, k)$, 顶点 $p = p_1 p_2 \dots p_i \dots p_k$ 与下列顶点相邻:

- (a) $p_i p_2 \dots p_{i-1} p_1 p_{i+1} \dots p_k$, 其中 $i \in I'_k$.
- (b) $p'_1 p_2 p_3 \dots p_k$, 其中 $p'_1 \in I_n \setminus \{p_i : i \in I_k\}$.

显然, $S_{n,1} \cong K_n$, $S_{n,n-1} \cong S_n$. 所以, (n, k) 星图是星图的推广. (n, k) 星图是由 Chiang 等人⁷⁵提出来的, 它是 $(n-1)$ 正则 $(n-1)$ 连通的点可迁图. 杨卫华等人⁷⁶证明了: 如果 $2 \leq k \leq n-2$, 那么 $\kappa_s^{(1)}(S_{n,k}) = n+k-3$ ($n \geq 3$), $\kappa_s^{(2)}(S_{n,k}) = n+2k-5$ ($n \geq 4$). 本项目完全确定了 $\kappa_s^{(h)}(S_{n,k})$.

定理 10.3 如果 $2 \leq k \leq n-1$ 且 $0 \leq h \leq n-k$, 那么

$$\begin{aligned} \kappa_s^{(h)}(S_{n,k}) &= n + h(k-2) - 1; \\ \lambda_s^{(h)}(S_{n,k}) &= \begin{cases} (n-h-1)(h+1), & h \leq \min\{k-2, \frac{n}{2}-1\}, \\ (n-k+1)(k-1), & \text{其他情形.} \end{cases} \end{aligned}$$

这两个结果分别包含在《Fault-tolerance of generalized star networks. Applied Mathematics and Computation, to appear》一文和《Generalized measures of edge fault tolerance in (n, k) -star graphs. Mathematical Science Letters. 1 (2) (2012), 133-138》一文中.

⁷⁴S. B. Akers, B. Krishnamurthy, A group theoretic model for symmetric interconnection networks. IEEE Transactions on Computers, 38 (4) (1989), 555-566.

⁷⁵W.-K. Chiang, R.-J. Chen, The (n, k) -star graphs: A generalized star graph, Inform. Process. Lett. 56 (1995) 259-264.

⁷⁶W.-H. Yang, H.-Z. Li, X.-F. Guo, A kind of conditional fault tolerance of (n, k) -star graphs, Inform. Process. Lett. 110 (2010) 1007-1011.

正如我们所看到的, 当 $k = n - 1$ 时, $S_{n,n-1} \cong S_n$. Cheng 等人⁷⁷, Hu 等人⁷⁸, 聂晓冬等人⁷⁹ 和 Rouskov 等人⁸⁰ 独立确定了 $\kappa_s^{(1)}(S_n) = \lambda_s^{(1)}(S_n) = 2n - 4$ ($n \geq 3$). 这些结果都包含在定理 10.3.

然而, 杨卫华等人⁸¹ 确定了 $\lambda_s^{(2)}(S_n) = 6(n - 3)$ ($n \geq 4$). 张昭等人⁸² 确定了 $\kappa_s^{(2)}(S_n) = 6(n - 3)$ ($n \geq 4$). 这些结果却不包含在定理 10.3. 事实上, 我们获得下面更一般的结果.

定理 10.4 对任何整数 k , 如果 $0 \leq k \leq n - 2$, 那么

$$\kappa_s^{(k)}(S_n) = \lambda_s^{(k)}(S_n) = (k + 1)!(n - k - 1).$$

这个结果包含在《Generalized Connectivity of Star Graphs. Networks, 63 (3) (2014), 225-230》一文中.

§10.3 (n, k) 布置图

正如我们看到的, 星图 S_n 有 $n!$ 个顶点. 要想扩充 S_n 到 S_{n+1} , 顶点数目从 $n!$ 到 $(n + 1)!$, 其中有很大的空隙. 为了克服这个缺点, Day 等人⁸³ 提出 (n, k) 布置图 (arrangement graph) $A_{n,k}$, 其中 $V(A_{n,k}) = P_{n,k}$, $E(A_{n,k}) = \{(p, q) \mid p \text{ 和 } q \text{ 仅一个坐标不同}\}$. 图 9 所示的是 $(4, 2)$ 布置图 $A_{4,2}$.

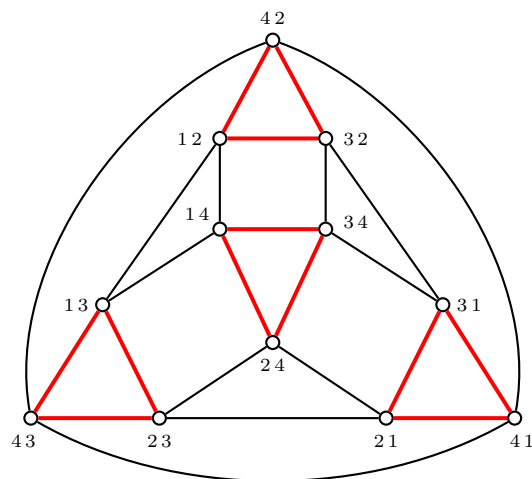


图 9 $(4, 2)$ 布置图 $A_{4,2}$

(n, k) 布置图 $A_{n,k}$ 是 $\frac{n!}{(n-k)!}$ 阶的 $k(n - k)$ 正则图, 是点、边可迁的且 $\kappa(A_{n,k}) = k(n - k)$. 而且, $A_{n,1} \cong K_n$, $A_{n,n-1} \cong S_n$. Chiang 等人⁸⁴ 证明: $A_{n,n-2} \cong AG_n$, 其中 AG_n 是 n 维交错群图.

对于 n 维交错群图 AG_n , Cheng 等人⁸⁵ 证明: $\kappa_s^{(1)}(AG_4) = 4$, $\kappa_s^{(1)}(AG_n) = 4n - 11$ ($n \geq 5$). 张

⁷⁷E. Cheng, M. J. Lipman, Increasing the connectivity of the star graphs. Networks, 40 (3) (2002), 165-169.

⁷⁸S.-C. Hu, C.-B. Yang, Fault tolerance on star graphs. International Journal of Foundations of Computer Science, 8 (2) (1997), 127-142.

⁷⁹68. 聂晓冬, 刘红美, 徐俊明, Star 图互连网络的容错性分析,《数学物理学报》, 24 (2) (2004) 168-176.

⁸⁰Y. Rouskov, S. Latifi, P. K. Srimani, Conditional fault diameter of star graph networks. Journal of Parallel and Distributed Computing, 33 (1) (1996), 91-97.

⁸¹W.-H. Yang, H.-Z Li, J.-X Meng, Conditional connectivity of Cayley graphs generated by transposition trees. Information Processing Letters, 110 (23) (2010), 1027-1030.

⁸²M. Wan, Z. Zhang, A kind of conditional vertex connectivity of star graphs. Applied Mathematics Letters, 22 (2009), 264-267.

⁸³K. Day, A. Tripathi, Arrangement graphs: a class of generalized star graphs, Information Processing Letters 42(5)(1992) 235-241.

⁸⁴W. K. Chiang, R.J. Chen, On the arrangement graph. Information Processing Letters, 66(4)(1998) 215-219.

⁸⁵E. Cheng, L. Lipták, F. Sala, Linearly many faults in 2-tree-generated networks, Networks 55(2)(2010) 90-98.

昭等人⁸⁶证明: $\kappa_s^{(2)}(AG_4) = 4$, $\kappa_s^{(2)}(AG_n) = 6n - 18$ ($n \geq 5$). 我们推广这些结果到 $A_{n,k}$.

定理 10.5 设 $A_{n,k}$ 是 (n, k) 布置图. 那么

$$\kappa_s^{(1)}(A_{n,k}) = (2k - 1)(n - k) - 1 \text{ for } k \geq 3, n \geq k + 1.$$

$$\kappa_s^{(2)}(A_{n,k}) = (3k - 2)(n - k) - 2 \text{ for } k \geq 4, n \geq k + 2.$$

这些结果包含在《Conditional fault tolerance of arrangement graphs. Information Processing Letters, 111 (21-22) (2011), 1037-1043》一文中.

设 G 是 κ 连通图. 如果每个最小点割都分离一个顶点, 则称 G 是超 κ 连通 (super κ -connected) 图. 如果每个最小点割都分离 G 为两个连通分支, 其中一个为一个顶点, 则称 G 是紧超 κ 连通 (tightly super κ -connected) 图. 例如, 完全 2 部图 $K_{n,n}$ 是超 n 图, 但不是紧超 n 图.

超 κ 图是由 Bauer 等人⁸⁷提出来的. Cheng 等人⁸⁸研究了星图 S_n 和交错群图 AG_n 等的紧超连通性: 当 $n \geq 4$ 时, S_n 是紧超 $(n - 1)$ 连通的; 当 $n \geq 5$ 时, AG_n 是紧超 $(2n - 4)$ 连通的. 我们推广这些结果到更一般的 (n, k) 布置图. 容易验证: $A_{4,2}$ 不是紧超连通的, 所以假定 $k \geq 3$.

定理 10.6 对任何 $n \geq 4$, $k \geq 3$, $A_{n,k}$ 是紧超 $k(n - k)$ 连通的.

这些结果包含在《Fault diagnosability of arrangement graphs. Information Sciences, 246 (10) (2013), 177-190》一文中.

§10.4 分层超立方体网络

正如我们所知的, n 维立方体连通圈 CCC_n 是将一条长为 n 的圈 C_n 去替代 n 维超立方体 Q_n 的每个顶点而得到的图. Malluhi 等人⁸⁹提出 n 维分层超立方体 (hierarchical hypercube) HHC_n , 它是用一个 n 维超立方体 Q_{2^m} 去替代 Q_{2^m} 的每个顶点而得到的图. 因此, $|V(HHC_n)| = 2^n$, 其中 $n = 2^m + m$ 且 $m \geq 2$. Wu 等人⁹⁰证明了: $\kappa(HHC_n) = \lambda(HHC_n) = \delta(HHC_n) = n + 1$. 我们获得如下结果.

定理 10.7 如果 $n = 2^m + m$ 且 $m \geq 2$, 那么 $\kappa_0^{(1)}(HHC_n) = 2m$, $\kappa_0^{(2)}(HHC_n) = 3m - 2$.

这个结果包含在《Conditional fault diagnosis of hierarchical hypercubes. International Journal of Computer Mathematics, 89 (16) (2012), 2152-2164》一文中.

⁸⁶Z. Zhang, W. Xiong, W.H. Yang, A kind of conditional fault tolerance alternating group graphs. Information Processing Letters, 110(2010) 998-1002.

⁸⁷D. Bauer, F. Boesch, C. Suffel, and R. Tindell, Connectivity extremal problems and the design of reliable probabilistic networks, The theory and application of graphs. Y. Alavi and G. Chartrand (Editors), Wiley, New York (1981), 89-98.

⁸⁸E. Cheng, M. J. Lipman, and H. A. Park, Super connectivity of star graphs, alternating group graphs and split-stars. Ars Combinatoria, 59 (2001), 107-116.

⁸⁹Q.M. Malluhi, M.A. Bayoumi, T.R.N. Rao, On the hierarchical hypercube interconnection network, Proceedings of the International Parallel Processing Symposium, 1993, 524-530.

⁹⁰R.-Y. Wu, G.-H. Chen, Y.-L. Kuo, G.J. Chang, Node-disjoint paths in hierarchical hypercube networks, Information Sciences 177(2007) 4200-4207.

§10.5 对偶立方体网络

对偶立方体 (dual-cube) 网络 DC_n 有 2^{2n+1} 个顶点, $V(DC_n) = \{x_{2n}x_{2n-1}\dots x_0 : x_i \in \{0, 1\}, 0 \leq i \leq 2n\}$, 两顶点 $x = x_{2n}x_{2n-1}\dots x_0$ 和 $y = y_{2n}y_{2n-1}\dots y_0$ 相邻当且仅当它们满足下述条件:

- (1) x 和 y 仅第 i 个坐标不同;
- (2) 如果 $0 \leq i \leq n-1$, 那么 $x_{2n} = y_{2n} = 0$;
- (3) 如果 $n \leq i \leq 2n-1$, 那么 $x_{2n} = y_{2n} = 1$.

DC_n 是对偶立方 (dual-cube) 网络, 由 Li 等人⁹¹ 提出来的. DC_n 是 Cayley 图, 因此是点可迁的. 周书明等人⁹² 确定了:

$$\kappa_s^{(h)}(DC_n) = 2^n(n+1-h), h \in \{0, 1, 2\}.$$

我们获得如下结果.

定理 10.8 对任何整数 $n \geq 3$, DC_n 是紧超 $n+1$ 连通的, 并且

$$\kappa_o^{(1)}(DC_n) = 2n, \quad \kappa_o^{(2)}(DC_n) = 3n-2.$$

这个结果包含在《Conditional fault diagnosability of dual-cubes. International Journal of Foundations of Computer Science, 23 (8) (2012), 1729-1749》一文中.

§10.6 交换超立方体网络

对于给定的两个整数 s 和 t , 令

$$V(s, t) = \{u_{s+t}\dots u_{t+1}u_t\dots u_1u_0 \mid u_0, u_i \in \{0, 1\}, i \in I_{s+t}\}.$$

交换超立方体 (exchanged hypercube) 网络 $EH(s, t)$ 的顶点集为 $V(s, t)$, 两顶点 $u = u_{s+t}\dots u_0$ 和 $v = v_{s+t}\dots v_0$ 相邻当且仅当它们满足下面条件:

- (a) u 和 v 不同仅第 r 个或者最后一个坐标,
- (b) 如果 $r \in I_t$, 那么 $u_0 = v_0 = 1$,
- (c) 如果 $r \in I_{s+t} - I_t$, 那么 $u_0 = v_0 = 0$.

图 10 所示的是 $EH(1, 1)$ 和 $EH(1, 2)$.

交换超立方体网络 $EH(s, t)$ 是由 Loh 等人⁹³ 提出来的. 它是超立方体变型之一, 因为 $EH(s, t)$ 可以从超立方体 Q_{s+t+1} 中移去一些边而得到. 容易看到, $EH(s, t) \cong EH(t, s)$. 因此, 可以假定 $s \leq t$. 马美杰等人⁹⁴ 确定了: 如果 $1 \leq s \leq t$, 那么 $\kappa_s^{(0)}(EH(s, t)) = \lambda_s^{(0)}(EH(s, t)) = s+1$, $\kappa_s^{(1)}(EH(s, t)) = \lambda_s^{(1)}(EH(s, t)) = 2s$. 我们推广这个结果到更一般的情形.

⁹¹Y. Li, S. Peng, Dual-cubes: a new interconnection network for high-performance computer clusters. In: Proceedings of the 2000 International Computer Architecture, (2000), pp. 51-57.

⁹²X. Yang, S. Zhou, On conditional fault tolerant of dual-cubes. International Journal of Parallel, Emergent and Distributed Systems, 28 (3) (2013), 199-213.

⁹³P. K. K. Loh, W. J. Hsu, Y. Pan, The exchanged hypercube. IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems, 16 (9) (2005), 866-874.

⁹⁴M. Ma and L. Zhu, The super connectivity of exchanged hypercubes. Information Processing Letters, 111 (2011), 360-364.

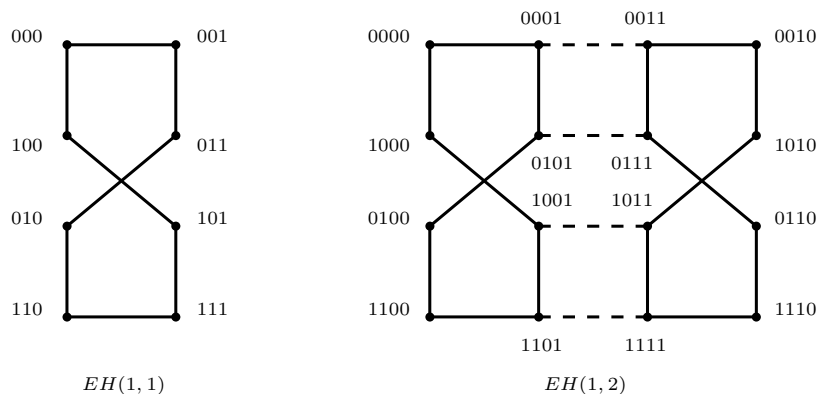


图 10 交换超立方体 $EH(1,1)$ 和 $EH(1,2)$

定理 10.9 如果 $1 \leq s \leq t$, 那么对任何 $h, 0 \leq h \leq s$,

$$\kappa_s^{(h)}(EH(s,t)) = \lambda_s^{(h)}(EH(s,t)) = 2^h(s+1-h).$$

当 $s = t = n$ 时, $EH(n,n) \cong DC_n$ (DC_n 的定义见 §10.5). 周书明等人⁹⁵ 确定了: $\kappa_s^{(h)}(DC_n) = 2^n(n+1-h)$ 对每个 $h \in \{0, 1, 2\}$. 我们的结果包含了这些结果.

推论 10.10 对任何 h , 如果 $0 \leq h \leq n$, 那么

$$\kappa_s^{(h)}(DC_n) = \lambda_s^{(h)}(DC_n) = 2^n(n+1-h).$$

这些结果包含在《Generalized measures of fault tolerance in exchanged hypercubes. Information Processing Letters, 113 (14-16) (2013), 533-537》一文中.

§10.7 增广立方体网络

n 维增广立方体 (augmented cube) 网络 AQ_n 有顶点集 $V(AQ_n) = \{x_n x_{n-1} \cdots x_1 : x_i \in \{0, 1\}, 1 \leq i \leq n\}$, 按下述方式递归构造而成:

$AQ_1 = K_2, V(K_2) = \{0, 1\}$. 对 $n \geq 2, AQ_n$ 是有两个不交的 $(n-1)$ 维增广立方体 AQ_{n-1}^0 和 AQ_{n-1}^1 , 其中 $V(AQ_{n-1}^0) = \{0x_{n-1} \cdots x_2 x_1 : x_i \in \{0, 1\}, 1 \leq i \leq n-1\}$ 和 $V(AQ_{n-1}^1) = \{1x_{n-1} \cdots x_2 x_1 : x_i \in \{0, 1\}, 1 \leq i \leq n-1\}$, AQ_{n-1}^0 中的点 $X = 0x_{n-1} \cdots x_2 x_1$ 与 AQ_{n-1}^1 中的点 $Y = 1y_{n-1} \cdots y_2 y_1$ 有边相连当且仅当或者 (i) $x_i = y_i, 1 \leq i \leq n-1$, 或者 (ii) $x_i = \bar{y}_i, 1 \leq i \leq n-1$. 图 11 所示的是 AQ_1, AQ_2 和 AQ_3 .

增广立方体 AQ_n 是由 Choudum 和 Sunitha⁹⁶提出来的, 它是 $(2n-1)$ 正则 $(2n-1)$ 连通的 ($n \geq 4$), 而 $\kappa(AQ_3) = 4$. 我们曾证明⁹⁷: $\kappa_o^{(1)}(AQ_n) = 4n-8$ ($n \geq 6$), $\lambda_o^{(1)}(AQ_n) = 4n-4$ ($n \geq 2$). 对于 $h=2$, 我们得到如下结果:

定理 10.11 $\kappa_o^{(2)}(AQ_n) = 6n-17$ ($n \geq 9$), $\lambda_o^{(2)}(AQ_n) = 6n-9$ ($n \geq 4$).

⁹⁵X. Yang, S. Zhou, On conditional fault tolerant of dual-cubes. International Journal of Parallel, Emergent and Distributed Systems, 28 (3) (2013), 199-213.

⁹⁶S. A. Choudum, V. Sunitha, Augmented cubes. Networks, 40 (2) (2002), 71-84.

⁹⁷M. Ma, G. Liu, J.-M. Xu, The super connectivity of augmented cubes. Information Processing Letters, 106 (2) (2008), 59-63. See a corrigendum: M. Ma, X. Tan, J.-M. Xu, G. Liu, A note on "The super connectivity of augmented cubes". Information Processing Letters, 109 (12) (2009), 592-593.

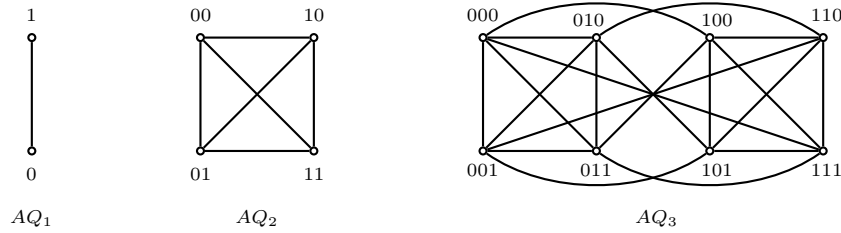


图 11 增广立方体 AQ_1 , AQ_2 和 AQ_3

这些成果包含在《Fault-tolerant analysis of augmented cubes. AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics, 10 (1) (2013), 37-55》一文中.

§10.8 笛卡尔乘积图的有界 Menger 数

设 x 和 y 是连通图 G 的两个不同顶点. 有界 xy -Menger 数 $\zeta_\ell(x, y)$ 是 G 中内点不交且长度不超过 ℓ 的 xy 路的最大条数. 图 G 的有界 Menger 数 $\zeta_\ell(G) = \min\{\zeta_\ell(x, y) : x, y \in V(G)\}$. 如果 $\ell < d(G)$, 那么 $\zeta_\ell(G) = 0$. 显然, $\zeta_\ell(G) \leq \delta(G)$, 而且 $\zeta_{d(G)}(G) \leq \zeta_{d(G)+1}(G) \leq \dots \leq \zeta_{n-1}(G)$, 其中 $d(G)$ 是 G 的直径.

对于笛卡尔乘积图, 我们获得如下结果.

定理 10.12 对于两个连通图 G_1 和 G_2 , 如果 $\ell_i \geq 2, i = 1, 2$, 那么

$$\zeta_{\ell_1+\ell_2}(G_1 \times G_2) \geq \zeta_{\ell_1}(G_1) + \zeta_{\ell_2}(G_2).$$

这个结果包含在《The Menger number of cartesian product of graphs. Applied Mathematics Letters, 24 (5) (2011), 627-629.》一文中.

§11 关于网络泛圈和泛连通性研究

网络的泛圈和泛连通性是上一期的国家自然科学基金项目《网络中若干图论问题研究》(2007.1-2009.12) 中主要研究内容之一. 在该项目结题之后, 我们还做了一些研究, 获得一些研究成果.

设 G 是 n 阶图, k 是个整数, $k \leq n$. 如果对每个 $\ell (k \leq \ell \leq n)$, G 包含长为 ℓ 的圈, 则称 G 为 k 泛圈的 (pancyclic); 如果 $k = g(G)$ (G 的围长), 这称 G 是泛圈的. 设 x 和 y 是 G 任意两顶点, $d = d_G(x, y)$. 如果对任意整数 $\ell (d \leq \ell \leq n - 1)$ (或者 $d \leq \ell \leq n - 1$ 且 $\ell \equiv d \pmod{2}$), G 中存在长为 ℓ 的 xy 路, 则称 G 是泛连通的 (panconnected) (或者偶泛连通的 (bipanconnected)). 2009 年, 我们完成了一篇有关网络泛圈和泛连通性的研究进展的综述文章⁹⁸.

§11.1 超立方体网络

设 Q_n 是超立方体, f_v 和 f_e 分别表示 Q_n 故障点数和边数. Fu⁹⁹ 证明: 如果 $n \geq 3$ 且 $f_v \leq$

⁹⁸J.-M. Xu, and M.-J. Ma, A survey-on path and cycle embedding in some networks. Frontiers of Mathematics in China, 4 (2) (2009), 217-252.

⁹⁹J. S. Fu, Fault-tolerant cycle embedding in the hypercube. Parallel Computing, 29 (2003), 821-832.

$2n-4$, 那么 Q_n 包含长至少为 $2^n - 2f_v$ 的无故障圈. Hsieh¹⁰⁰ 改进到: 如果 $n \geq 3$, $f_e + f_v \leq 2n-4$ 且 $f_e \leq n-2$, 那么 Q_n 包含长至少为 $2^n - 2f_v$ 的无故障圈.

Fu 给出例子说明: 如果 $f_v = 5$, 那么 Q_4 中不存在长至少为 $6 (= 2^4 - 2 \times 5)$ 的无故障圈. 同时指出: 对于 $n \geq 5$ 且 $f_v \geq 2n-3$, 不易证明 Q_n 中不存在长至少为 $2^n - 2f_v$ 的无故障圈. 我们证明了下述结果, 并且回答了这个问题.

定理 11.1 如果 $n \geq 5$ 且 $f_v = 2n-3$, 那么 Q_n 中存在长至少为 $2^n - 2f_v$ 的无故障偶圈.

这个结果包含在《A note on cycle embedding in hypercubes with faulty vertices. Information Processing Letters, 111(3) (2011), 557-560》一文中.

§11.2 折叠超立方体网络

作为超立方体网络 Q_n 的变型, n 维超折叠超立方体网络 FQ_n 是从 Q_n 中任何两个互补的顶点之间添加一条补边而得到的图. 正如我们知道的, 超立方体 Q_n 是 Cayley 图 $C_{Z_2^n}(S)$, 其中 $Z_2^n = Z_2 \times Z_2 \times \cdots \times Z_2$, $S = \{(10 \cdots 0), (010 \cdots 0), \dots, (0 \cdots 010 \cdots 0), \dots, (0 \cdots 01)\}$, 而且是边可迁的. 对折叠超立方体 FQ_n 也有类似的结果.

定理 11.2 折叠超立方体 FQ_n 是 Cayley 图 $C_{Z_2^n}(S \cup \{(11 \cdots 1)\})$, 而且是边可迁的.

我们曾证明¹⁰¹: FQ_n 是 2 部图当且仅当 n 是奇数. 关于 FQ_n 泛连通性, 我们得到如下结果.

定理 11.3 设 x 和 y 是 FQ_n 任意两顶点且距离为 d . 如果对任意整数 ℓ ($h \leq \ell \leq 2^n - 1$), G 中存在长为 ℓ 的 xy 路, 其中 $h \in \{d, n+1-d\}$, 而且 ℓ 与 h 有相同的奇偶性.

这个结果包含在《Algebraic properties and panconnectivity of folded hypercubes. Ars Combinatoria. 95 (2010), 179-186》一文中.

§11.3 局部扭立方体网络

n 维局部扭立方体 (locally twisted cube) 网络 LTQ_n ($n \geq 2$) 递归构造如下:

(1) $LTQ_2 \cong Q_2$.

(2) 对 $n \geq 3$, LTQ_n 由两个不交的 $(n-1)$ 维局部扭立方体 LTQ_{n-1}^0 和 LTQ_{n-1}^1 , LTQ_{n-1}^0 中的顶点 $x = 0x_2x_3 \dots x_n$ 与 LTQ_{n-1}^1 中的顶点 $y = 1(x_2 + x_n)x_3 \dots x_n$ 连边, 其中 '+' 表示模 2 加法. 图 12 所示的是 LTQ_3 和 LTQ_4 .

局部扭立方体 LTQ_n 是杨小帆等人¹⁰²提出来的, 并且证明了: LTQ_n 包含 4 到 2^n 所有长度的圈. 我们曾¹⁰³ 改进这个结果到: 对 LTQ_n 的任何边, 存在所有长度的圈包含这条边. 在故障存在的情况下, Chang 等人¹⁰⁴ 和 Park 等人¹⁰⁵ 独立证明了: 只要 $f_v + f_e \leq n-2$, LTQ_n 仍然存在所有长度的无故障圈. 我们证明了如下结果:

¹⁰⁰S.-Y. Hsieh, Fault-tolerant cycle embedding in the hypercube with more both faulty vertices and faulty edges. *Parallel Computing*, 32(1) (2006), 84-91.

¹⁰¹J. M. Xu and M. Ma, Cycles in folded hypercubes, *Applied Mathematics Letters*, 19 (2006), 140-145.

¹⁰²X.F. Yang, D.J. Evans, G.M. Megson, The locally twisted cubes, *International Journal of Computer Mathematics* 82 (4) (2005) 401-413.

¹⁰³M.-J. Ma, J.-M. Xu, Weak Edge-pancyclicity of locally twisted cubes, *Ars Combinatoria* 89 (2008) 89-94.

¹⁰⁴Q.-Y. Chang, M.-J. Ma, J.-M. Xu, Fault-tolerant pancyclicity of locally twisted cubes (in Chinese). *J. China Univ. Sci. Tech.*, 36 (6) (2006) 607-610.

¹⁰⁵J.-H. Park, H.-S. Lim, H.-C. Kim, Panconnectivity and pancyclicity of hypercube-like interconnection networks with faulty elements, *Theoretical Computer Science* 377 (2007) 170-180.

定理 11.4 如果 $f_v + f_e \leq n - 3$ 且 $n \geq 3$, 那么对 LTQ_n 中任何非故障边 e 和任何整数 l ($6 \leq l \leq 2^n - f_v$), LTQ_n 中存在长为 l 的无故障圈包含 e .

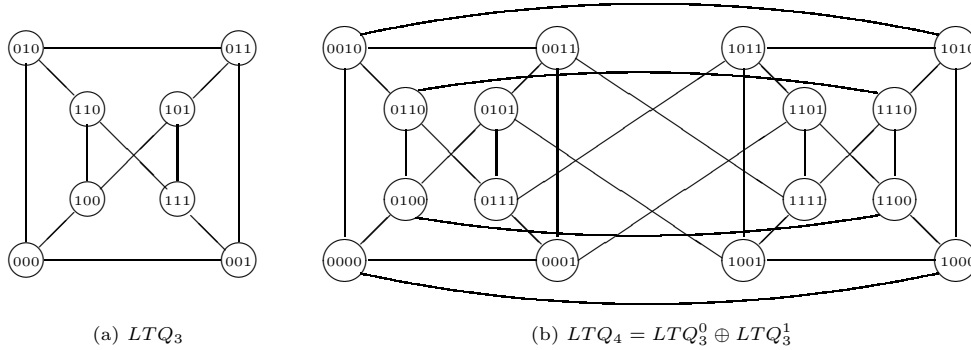


图 12 局部扭立方体 LTQ_3 和 LTQ_4

这个结果包含在《Fault-tolerant edge-pancyclic of locally twisted cubes. Information Sciences, 181(11) (2011), 2268-2277》一文中.

§11.4 笛卡尔乘积图

In 1984 年, Bhuyan 和 Agrawal¹⁰⁶ 提出广义超立方体 (generalized hypercube) $Q_n(k_1, \dots, k_n)$, 它是笛卡尔乘积 $K_{k_1} \times \dots \times K_{k_n}$, 其中 K_{k_i} 是 k_i 阶完全图 ($i = 1, \dots, n, k_i \geq 2$). 显然, $Q_n(2, \dots, 2)$ 是超立方体 Q_n , $Q_n(3, \dots, 3)$ 是 3 叉 n 立方体 Q_n^3 . Hsieh 等人¹⁰⁷ 证明了: Q_n^3 是泛连通的. 我们推广了这个结果.

定理 11.5 如果阶数至少为 3 的两个图 G_1 和 G_2 都是泛连通的, 那么 $G_1 \times G_2$ 也是泛连通的.

推论 11.6 对任何 $n \geq 2, k_i \geq 2$ ($i = 1, 2, \dots, n$), $Q_n(k_1, k_2, \dots, k_n)$ 是泛连通的当且仅当 $k_i \geq 3$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

推论 11.7 Q_n^3 是泛连通的.

这个结果包含在《Panconnectivity of cartesian product graphs. Journal of Supercomputing, 56 (2) (2011), 182-189》一文中.

对每个 $i = 1, \dots, n$, 用 C_{k_i} 表示长为 k_i 的圈. 笛卡尔乘积 $C_{k_1} \times \dots \times C_{k_n}$ 通常叫 n 维超环网络 (undirected toroidal mesh), 记为 $C_n(k_1, \dots, k_n)$. $C_n(k, \dots, k)$ 通常叫 k 叉 n 立方体 (k -ary n -cube), 记为 Q_n^k . Hsieh 等人¹⁰⁸ 证明了: 如果 $n \geq 2$ 且 $k \geq 4$ 是偶数, 那么 Q_n^k 是偶泛连通的. Stewart 等人¹⁰⁹ 证明了: 如果 $n \geq 2$ 且 $k \geq 3$ 是奇数, 那么 Q_n^k 也是偶泛连通的. 我们推广了这些结果如下.

¹⁰⁶L. N. Bhuyan and D. P. Agrawal, Generalized hypercube and hyperbus structures for a computer network. IEEE Trans. Computers, 33(4) (1984), 323-333.

¹⁰⁷S. Y. Hsieh, T. J. Lin and H. L. Huang, Panconnectivity and edge-pancyclicity of 3-ary n -cubes. J. Supercomput., 42 (2007), 225-233.

¹⁰⁸S.-Y. Hsieh and T.-J. Lin, Panconnectivity and edge-pancyclicity of k -ary n -cubes. Networks, 54 (1) (2009), 1-11.

¹⁰⁹I. A. Stewart and Y. Xiang, Bipanconnectivity and bipancyclicity in k -ary n -cubes. IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems, 20 (1) (2009), 25-33.

定理 11.8 对每个子 $i = 1, 2$, 如果 G_i 是奇阶偶泛连通 Hamilton 图, 或者是阶数至少为 4 的偶泛连通 2 部图, 那么 $G_1 \times G_2$ 偶泛连通的.

定理 11.9 对任何整数 $n \geq 2$ 和 $k_i \geq 3$ ($i = 1, \dots, n$), $C_n(k_1, \dots, k_n)$ 偶泛连通的.

推论 11.10 对任何整数 $n \geq 2$ 和 $k \geq 3$, Q_n^k 偶泛连通的.

这些结果包含在《Bipanconnectivity of cartesian product graphs. Australasian Journal of Combinatorics, 46 (2010), 297-306》一文中.

§12 关于网络故障诊断研究

图 $G = (V, E)$ 的比较诊断策略可以用重图 $M = (V, C)$ 来表示, 其中 C 是加权边集. 如果处理器 u 和 v 是通过处理器 w 进行比较, 则存在一条加权边 (u, v) , 记为 $(u, v)_w$, 并且称 w 为 u 与 v 的比较器. 这样的 w 不是唯一的, 所以 M 是重图. 用 $\sigma((u, v)_w)$ 表示比较结果:

$$\sigma((u, v)_w) = \begin{cases} 0 & \text{如果 } u \text{ 和 } v \text{ 的输出是一样的;} \\ 1 & \text{如果 } u \text{ 和 } v \text{ 的输出是不一样的.} \end{cases}$$

如果 w 是非故障处理器且 $\sigma((u, v)_w) = 0$, 那么 u 和 v 也是非故障的; 而 $\sigma((u, v)_w) = 1$ 意味着 3 个处理器 u, v 和 w 中至少一个发生了故障. 如此定义的函数 $\sigma: C \rightarrow \{0, 1\}$ 称为该诊断的校验子 (syndrome).

如果处理器 w 发生了故障, 则比较结果是不可靠的. 因此, 故障点集可能产生不同的校验子. 子集 $F \subseteq V$ 与校验子 σ 是可比较的, 如果 σ 能导致 F 中所有点是故障点, 而 $V - F$ 中所有点是非故障点.

系统 G 是可诊断的, 如果对每个校验子 σ , 存在唯一的子集 $F \subset V$ 使得它与 σ 是可比较的. 系统 G 是 t 可诊断的, 如果 G 是可诊断的, 只要故障点数不超过 t . G 的 t 可诊断度 (diagnosability) $t(G)$ 定义为

$$t(G) = \max\{t: G \text{ 是 } t \text{ 可诊断的}\}.$$

设 $\sigma_F = \{\sigma: \sigma \text{ 与 } F \text{ 是可比较的}\}$. $V(G)$ 中两个不同子集 F_1 和 F_2 是不可识别的当且仅当 $\sigma_{F_1} \cap \sigma_{F_2} \neq \emptyset$, 否则是并且是可识别的. 在比较模型下, 存在许多不同的方法检验系统是否是 t 可诊断的. Sengupta 和 Dahbura¹¹⁰ 给出一个充分必要条件以确保系统的可识别性.

引理 12.1 图 G 中两个不同的点子集 F_1 和 F_2 是可识别的当且仅当它们至少要满足下列条件条件之一.

- (1) 存在两个不同 $u, w \in V(G - F_1 \cup F_2)$ 和一个 $v \in F_1 \Delta F_2$ 使得 $(u, v)_w \in C$, 其中 $F_1 \Delta F_2 = (F_1 \setminus F_2) \cup (F_2 \setminus F_1)$;
- (2) 存在两个不同的 $u, v \in F_1 \setminus F_2$ (或者 $F_2 \setminus F_1$) 和一个 $w \in V(G - F_1 \cup F_2)$ 使得 $(u, v)_w \in C$.

2008 年, Lin 等人¹¹¹ 提出条件诊断度概念. 设 $F \subset V(G)$. 如果 $G - F$ 不含孤立点, 则称 F 为 G 的条件故障集. 如果 $V(G)$ 中任何两个不同的条件故障集 F_1 和 F_2 , $|F_1| \leq t$, $|F_2| \leq t$, 都是可识

¹¹⁰A. Sengupta, A. Dahbura, On self-diagnosable multiprocessor systems: diagnosis by the comparison approach. IEEE Transaction on Computers, 41(1992), 1386-1396.

¹¹¹C. K. Lin, J. J. M. Tan, L. H. Hsu, E. Cheng, and Lipták, Conditional diagnosability of cayley graphs generalized by transposition tree under the comparison diagnosis model. Journal of Interconnection networks, 9(2008), 83-97.

别的, 则称 G 是条件 t 可诊断的. G 的条件 t 可诊断度 (conditional diagnosability) $t_c(G)$ 定义为

$$t_c(G) = \max\{t : G \text{ 是条件 } t \text{ 可诊断的}\}.$$

显然, $t_c(G) \geq t(G)$.

§12.1 (n, k) 布置、分层超立方体和对偶立方体网络

Lin 等人提出条件诊断度概念的同时, 在确定了在比较模型下星图 S_n 的条件可诊断度 $t_c(S_n) = 3n - 7$ ($n \geq 5$). 2010 年, 周书明等人¹¹²确定了在比较模型下交换群图 AG_n 的条件可诊断度 $t_c(AG_n) = 6n - 19$ ($n \geq 6$). 我们推广这些结果到更一般的 (n, k) 布置图 $A_{n,k}$, 获得如下结果.

定理 12.2 设 $A_{n,k}$ 是 (n, k) 布置图, $k \geq 4$. 则

$$t_c(A_{n,k}) = \begin{cases} 3n - 7 & \text{如果 } n = k + 1; \\ (3k - 2)(n - k) - 3 & \text{如果 } n \geq k + 2. \end{cases}$$

这个结果包含在《Fault diagnosability of arrangement graphs. Information Sciences, 246 (10) (2013), 177-190》一文中.

对于分层超立方体网络 HHC_n , 我们得到如下结果.

定理 12.3 如果 $n = 2^m + m$ 且 $m \geq 2$, 那么 $t_c(HHC_n) = 3m - 2$.

这个结果包含在《Conditional fault diagnosis of hierarchical hypercubes. International Journal of Computer Mathematics, 89 (16) (2012), 2152-2164》一文中.

对于偶立方体网络 DC_n (定义见 §10.5), 我们得到如下结果.

定理 12.4 $t_c(DC_n) = 3n - 2$ for $n \geq 3$.

这个结果包含在《Conditional fault diagnosability of dual-cubes. International Journal of Foundations of Computer Science, 23 (8) (2012), 1729-1749》一文中.

§12.2 冒泡排序图

n 维冒泡排序图 (bubble-sort graph) B_n 是由 Akers 等人¹¹³提出的, 它的顶点集是 $P(n)$, 两顶点 $x = x_1x_2 \cdots x_n$ 和 $y = y_1y_2 \cdots y_n$ 相邻当且仅当 $x_i = y_{i+1}$, $x_{i+1} = y_i$ 对某个 i 且 $x_j = y_j$ 对所有 $j \neq i$ 或者 $i + 1$. 图 13 所示的是 B_2 , B_3 和 B_4 .

处理系统的自我诊断的 PMC 模型是由 Preparata 等人¹¹⁴提出的. 在这个模型下, 我们确定了冒泡排序图 B_n 的条件诊断度 $t_c(B_n)$.

定理 12.5 在 PMC 模型下, 当 $n \geq 4$ 时,

$$t_c(B_n) = \begin{cases} 5 & \text{如果 } n = 4; \\ 4n - 11 & \text{如果 } n \geq 5. \end{cases}$$

这个结果包含在《Conditional fault diagnosis of bubble sort graphs under the PMC model. International Journal of Foundations of Computer Science, 23 (8) (2012), 1729-1749》一文中.

¹¹²S.M. Zhou, and W.J. Xiao, Conditional diagnosability of alternating group networks. Information Processing Letters, 110(10)(2010), 403-409.

¹¹³ak89

¹¹⁴F.P. Preparata, G. Metze, R.T. Chien, On the connection assignment problem of diagnosable systems, IEEE Transactions on Computers 16(1967) 848-854.

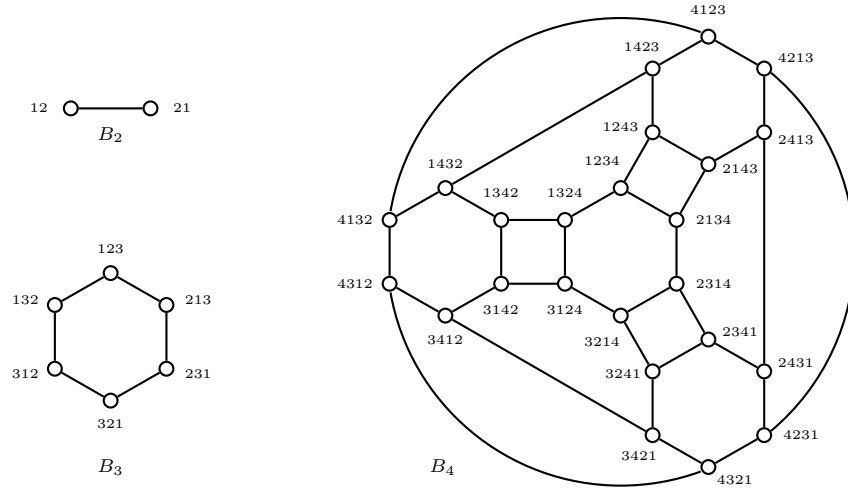


图 13 冒泡排序图 B_2, B_3 and B_4 .

§13 其它研究问题

§13.1 一类新的点可迁图

设 n, m 和 i 是给定的整数且满足 $n \geq m \geq i \geq 0$, Ω_n 是集 $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 的幂集. 令 $\Omega_n^m = \{X \in \Omega_n : |X| = m\}$. Godsil 和 Royle¹¹⁵ 定义了一类图 $J(n, m, i)$. 它的点集为 Ω_n^m , 两子集 X 和 Y 相邻当且仅当 $|X \cap Y| = i$. 当 $n \geq 2m$ 时, 图 $J(n, m, m-1)$ 是 Johnson 图; $J(n, m, 0)$ 是 Kneser 图; $J(5, 2, 0)$ 是 Petersen 图.

对任何整数 n , 和 $k, n \geq k \geq 1$, 我们定义一类新的图 $H(n, k)$, 它的点集为 Ω_n , 两子集 X 和 Y 相邻当且仅当 $|X \Delta Y| = k$, 其中 $X \Delta Y$ 是 X 和 Y 的对称差.

显然, $H(n, k)$ 有 2^n 个顶点, $H(n, 0)$ 是无边图 K_{2^n} , $H(n, n) = 2^{n-1}K_2$. 一般地, 当 $0 < k < n$ 时, 容易证明: 显然, $H(n, k)$ 是 2^n 个顶点的 $\binom{n}{k}$ 正则图.

令 $\Omega_n^m = \{X \in \Omega_n : |X| = m\}$, $\Omega_n^o = \{X \in \Omega_n : |X| \text{ 是奇数}\}$, $\Omega_n^e = \{X \in \Omega_n : |X| \text{ 是偶数}\}$. 那么, $|\Omega_n| = 2^n$, $|\Omega_n^m| = \binom{n}{m}$, $|\Omega_n^o| = |\Omega_n^e| = 2^{n-1}$. 记 $H^m(n, k)$ ($H^o(n, k)$, $H^e(n, k)$) 为 $H(n, k)$ 中由 Ω_n^m (Ω_n^o , Ω_n^e) 导出的子图.

容易证明: 如果 n 是偶数, k 是奇数, 那么 $H(n, k) \cong H(n, n-k)$. 如果 k 是偶数, 那么 $H^o(n, k) \cong H^e(n, k)$.

定理 13.1 对任何整数 n, m 和 $i, n \geq m \geq i \geq 0$, 如果 $n \geq 2m - 2i$, 那么

$$H^m(n, 2m - 2i) = J(n, m, i).$$

因此, $H^m(n, k)$ 包含 Johnson 图, Kneser 图和 Petersen 图. 而且我们证明了: 对任何正整数 n , $H(n, 1) \cong Q_n$, 其中 Q_n 是 n 维超立方体. 我们获得图 $H(n, k)$ 许多良好的代数性质和结构性质.

对于固定的元素 $X \in \Omega_n$, 定义映射 $\rho_X : \Omega_n \rightarrow \Omega_n$ 如下.

$$\rho_X : Y \mapsto X \Delta Y, \quad \forall Y \in \Omega_n \tag{13.1}$$

¹¹⁵C. Godsil and G. Royle, *Algebraic Graph Theory*. Springer Press, New York, 2004.

并且令

$$H_n = \{\rho_X : X \in \Omega_n\}, \text{ 其中 } \rho_X \text{ 如 (13.1) 所定义.}$$

因为 ρ_X 是 Ω_n 上的一个置换, 所以 H_n 是 $\text{Aut}(H(n, k))$ 的子群.

定理 13.2 图 $H(n, k)$ 是 Cayley 图 $C_\Gamma(S)$, 其中 Γ 是集 Ω_n 上关于运算“ Δ ”的 Abelian 群, $S = \Omega_n^k$. $H(n, k)$ 是弧可迁的. $\text{Aut}(H(n, k))$ 包含阶为 $2^n n!$ 的子群 $H_n S_n$. 而且 $\text{Aut}(H(n, 1)) = H_n S_n$, 其中 S_n 是 n 元素集上的对称群.

定理 13.3 如果 k 是偶数, 那么 $H(n, k)$ 是由两个同构的连通分支 $H^o(n, k)$ 和 $H^e(n, k)$ 组成. 如果 k 是奇数, 那么 $H(n, k)$ 是连通的 2 部 Hamilton 图, 而且 $\kappa(H(n, k)) = \binom{n}{k}$, 直径为

$$d(H(n, k)) = \begin{cases} \lceil \frac{n-1}{k} \rceil + 1 & \text{如果 } n \geq 2k - 1; \\ \lceil \frac{n-1}{n-k} \rceil + 1 & \text{如果 } n \leq 2k - 2. \end{cases}$$

这些结果包含在《A new class of transitive graphs. Discrete Mathematics, 310 (4) (2010), 877-886》一文中.

§13.2 Kronecker 乘积图的直径

两个图 G_1 和 G_2 的 Kronecker 乘积 $G_1 \otimes G_2$ 有顶点集 $V(G_1) \times V(G_2)$, 两顶点 $x_1 x_2$ 和 $y_1 y_2$ 相邻当且仅当 $(x_1, y_1) \in E(G_1)$ 且 $(x_2, y_2) \in E(G_2)$.

对每个 $i = 1, 2$, 用 e_i 和 d_i 分别表示图 G_i 的本原指数和直径. 我们确定了 $G_1 \otimes G_2$ 的直径.

定理 13.4 设对每个 $i = 1, 2$, G_i 连通图, $d_i \geq 1$. 如果 G_1 包含奇圈, 那么

$$d(G_1 \otimes G_2) = \begin{cases} e_1 & \text{if } e_1 = e_2; \\ \max\{e_2 + 1, d_1\} & \text{if } e_1 > e_2; \\ \max\{e_1 + 1, d_2\} & \text{if } e_1 < e_2. \end{cases}$$

用 K_n^+ 表示由 K_n 的每个顶点加上一条环所得到的图. 显然, 每个 n 阶无平行边的图 G , $e(G) = 1 \Leftrightarrow G \cong K_n^+$. 下面我们给出仅与因子图直径有关的 $d(G_1 \otimes G_2)$ 表达式.

定理 13.5 设对每个 $i = 1, 2$, G_i 是 $n_i (\geq 2)$ 阶连通图. 则 $d(G_1 \otimes G_2) = 1 \Leftrightarrow G_1 \cong K_{n_1}^+$ 且 $G_2 \cong K_{n_2}^+$.

定理 13.6 设 G 是 $n (\geq 2)$ 阶连通图, $G \not\cong K_n^+$ 且 $m \geq 2$. 则

$$d(K_m^+ \otimes G) = \begin{cases} 2, & d(G) = 1; \\ d(G), & d(G) \geq 2. \end{cases}$$

定理 13.7 设 G 连通图, 直径 $d = d(G) \geq 1$, 且 H 是完全 $t (\geq 3)$ 部图. 则

$$d(G \otimes H) = \begin{cases} d, & d \geq 3; \\ 2, & d \leq 2 \text{ and } e(G) \leq 2; \\ 3, & d \leq 2 \text{ and } e(G) > 2. \end{cases}$$

推论 13.8 设 C_m 是奇圈, H 是 n 阶连通图, 直径 $d = d(H) \geq 1$.

(1) 如果 H 是 2 部图, 那么 $d(C_m \otimes H) = \max\{m, d\}$. 因此, $d(C_m \otimes P_n) = \max\{m, n-1\}$, 且 $d(C_m \otimes C_n) = \max\{m, \frac{n}{2}\}$ 如果 n 是偶的.

(2) 如果 $H = C_n$ 且 n 奇的, 那么

$$d(C_m \otimes C_n) = \begin{cases} m-1 & \text{if } m = n, \\ \max\{n, \frac{m-1}{2}\} & \text{if } m > n \\ \max\{m, \frac{n-1}{2}\} & \text{if } m < n. \end{cases}$$

这些结果包含在《On the diameter of the Kronecker product graph. Mathematical Sciences Letters, 2 (2) (2013), 121-127》一文中.

§13.3 正则图的宽直径

图 G 的宽度为 m 的直径 $d_m(G)$ 是最小整数 d 使得 G 中任何两顶点之间至少存在 m 条其长度都不超过 d 的内点不交的路. 它是把连通度和直径结合起来一起考虑的图论参数, 是网络理论的基本概念, 也是我们课题组多年研究的内容之一.

宽直径是由许德标¹¹⁶ 和李皓等人¹¹⁷ 于 1994 年独立提出. 对于一般的 w 连通图 G , Hsu 证明了确定 $d_w(G)$ 是 NP 完备问题. 对于 n 阶 w 正则 ($w \geq 3$) 连通图 G , 许德标¹¹⁸ 给出一个紧的上界: $d_w(G) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. 我们改进这个结果.

定理 13.9 如果整数 m 满足 $\lceil \frac{2w+5}{3} \rceil \leq m \leq w$, 那么 n 阶 w 正则 w 连通图的宽直径

$$d_m(G) \leq \left\lfloor \frac{(n-2)(w-2)}{(w-m+1)(3m-w-4)} \right\rfloor + 1.$$

推论 13.10 设 G 是 n 阶 w 正则 w 连通图. 如果 $w \geq 5$, 那么 $d_w(G) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

这个结果包含在《The wide-diameter of regular graphs. 中国科学技术大学学报, 43 (8) (2013), 603-606》一文中.

§13.4 幸存路径图的直径

网络路由选择问题是组合网络重要理论之一, 也是我们课题组近几年主要研究问题之一. 我们完成一篇有关路由转发指数问题的综述文章《The Forwarding Indices of Graphs – a Survey. Opuscula Mathematica, 33 (2) (2013), 345-372》. 在这篇文章中, 我们系统地综述了路由转发指数问题的背景和研究进展 (其中包括我们的研究结果), 主要方法和进展困难的原因. 路由选择的另一类问题是路由幸存图的直径问题, 其研究进展缓慢, 结果很少.

设 G 是图, ρ 是 G 的路由选择, $F \subset V(G) \cup E(G)$, $|F| < \kappa(G)$, $F_V = F \cap V(G)$. 幸存路径图 (surviving route graph) $R(G, \rho)/F$ 是有向图, 它的顶点集为 $V(G) \setminus F_V$; 如果 $\rho(x, y)$ 不含 F 中元素, 那么连接有向边从 x 到 y . 对于给定的路由选择 ρ , 幸存路径图的直径 $d(R(G, \rho)/F)$ 与故障集 F 有

¹¹⁶Hsu D H. On container width and length in graphs, groups, and networks. IEICE Trans. Fundam, E (77A) (1994), 668-680.

¹¹⁷Flandrin E. and Li, H. Mengerian properties, Hamiltonicity and claw-free graphs. Networks, 24 (1994), 660-678.

¹¹⁸Hsu D F and Luczak T. Note on the k -diameter of k -regular k -connected graphs. Discrete Math., 132 (1994), 291-296.

关, 而且如果 $\kappa(G) \geq 2$ 且 $|F| < \kappa(G)$, 那么 $d(R(G, \rho)/F)$ 是确定的. 对于给定的路由选择 ρ , 幸存路径图的直径定义为

$$d(G, \rho) = \max\{d(R(G, \rho)/F) : F \subset V(G) \cup E(G), |F| < \kappa(G)\}.$$

Dolev 等人¹¹⁹ 研究超立方体 Q_n 并证明了: $d(Q_n, \rho) \leq 3$ 对任何最小路由选择 ρ . Wada 等人¹²⁰ 推广这个结果到 Q_n^d . 我们¹²¹ 曾推广这个结果到更一般的图 $C_{d_1} \times C_{d_2} \times \dots \times C_{d_n}$, 其中 C_{d_i} 是 $d_i \geq 2$ 的有向圈, $i = 1, 2, \dots, n$.

对于给定的整数 k , 有向图 G 有性质 \mathcal{P}_k 如果 G 满足下面两个条件.

(1) 对 G 任何两不同顶点对 (x, y) , 存在 k 内点不交的有向 (x, y) 路, 其中之一是最短路, 其余的每条能是最多 3 条最短路的并.

(2) 每个 $x \in V(G)$ 被包含在 k 条点不交的有向圈中, 每条有向圈能是最多 3 条最短路的并, 其中一条始于 x .

例如, 有向圈和无向树都有性质 \mathcal{P}_1 , 完全图 K_{k+1} 有性质 \mathcal{P}_k . 我们获得如下结果.

定理 13.11 $d(R(G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n, \rho)/F) \leq 3$ 对任何最小 ρ 且 $|F| < \sum_{i=1}^n k_i$ 如果 G_i 是阶数至少为 2 的强连通有向图, 有唯一最小路由且有性质 \mathcal{P}_{k_i} , $i = 1, 2, \dots, n$.

推论 13.12 $d(R(G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n, \rho)/F) \leq 3$ 对任何最小 ρ 且 $|F| < n$ 如果 G_i 是阶数至少为 2 的强连通有向图, 有唯一最小路由, $i = 1, 2, \dots, n$.

推论 13.13 $d(R(Q(d_1, d_2, \dots, d_n), \rho)/F) \leq 3$ 对任何最小 ρ 且 $|F| < \sum_{i=1}^n d_i - n$.

这个结果包含在《Highly fault-tolerant routings in some cartesian product digraphs. *Ars Combinatoria*, 98 (2011), 461-470》一文中.

¹¹⁹D., Dolev, J., Halpern, B., Simons, R., Strong, A new look at fault tolerant network routing, in: Proceedings of the 16th Annual ACM Symposium on Theory of Computing, 1984, 526-535.

¹²⁰K., Wada, T., Ikeo, K., Kawaguchi, W., Chen, Highly fault-tolerant routings and fault-induced diameter for generalized hypercube graphs, *Journal of Parallel and Distributed Computing*, 43 (1997), 57-62.

¹²¹J.-M., Xu, Connectivity of cartesian product digraphs and fault-tolerant routings of generalized hypercube, *Applied Mathematics, a Journal of Chinese Universities*, 13B (1998), 179-187.

§14 附录：发表的学术论文和著作

1. 胡夫涛, 王建伟, 徐俊明, A new class of transitive graphs. *Discrete Mathematics*, 310 (4) (2010), 877-886.
2. 徐喜容, 曹永昌, 徐俊明, 吴叶舟, Feedback numbers of De Bruijn digraphs. *Computers and Mathematics with Applications*, 59 (2) (2010), 716-723.
3. 徐俊明, 王建伟, 王为伟, Super and restricted connectivity of some interconnection networks. *Ars Combinatoria*, 94 (2010), 25-32.
4. 黄佳, 徐俊明, Domination and total domination contraction numbers of graphs. *Ars Combinatoria*, 94 (2010), 431-443.
5. 陆由, 徐俊明, Bipanconnectivity of Cartesian product graphs. *Australasian Journal of Combinatorics*. 46 (2010), 297-306.
6. 马美杰, 徐俊明, Algebraic properties and panconnectivity of folded hypercubes. *Ars Combinatoria*. 95 (2010), 179-186.
7. 徐俊明, 杨超, Connectivity and super-connectivity of Cartesian product graphs. *Ars Combinatoria*. 95 (2010), 235-245.
8. 梁浩, 潘永亮, 王健, 徐俊明, A note on unimodular congruence of the Laplacian matrix of a graph. *Linear and Multilinear Algebra*, 58 (4) (2010), 497-501.
9. 陆由, 侯新民, 徐俊明, On the $(2, 2)$ -domination number of trees, *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 30 (2) (2010), 185-199.
10. 陆由, 侯新民, 徐俊明, 李宁, A characterization of (γ_t, γ_2) -trees. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 30 (3) (2010), 425-436.
11. 陆由, 徐俊明, The p -bondage number of trees. *Graphs and Combinatorics*, 27 (1) (2011), 129-141.
12. 王健, 潘永亮, 徐俊明, The critical group of $K_m \times C_n$. *Acta Mathematica Sinica*, 27 (1) (2011), 169-184.
13. 潘向峰, 徐俊明, 马美杰, Highly fault-tolerant routings in some cartesian product digraphs. *Ars Combinatoria*, 98 (2011), 461-470.
14. 马美杰, 徐俊明, 朱强, The Menger number of cartesian product of graphs. *Applied Mathematics Letters*, 24 (5) (2011), 627-629.
15. 徐喜荣, 翟文华, 徐俊明, 邓爱华, 杨元生, Fault-tolerant edge-pancyclic of locally twisted cubes. *Information Sciences*, 181(11) (2011), 2268-2277.
16. 杜正中, 徐俊明, A note on cycle embedding in hypercubes with faulty vertices. *Information Processing Letters*, 111(12) (2011), 557-560.
17. 陆由, 徐俊明, Panconnectivity of cartesian product graphs. *Journal of Supercomputing*. 56 (2) (2011), 182-189.

18. 徐喜容, 徐俊明, 曹永昌, Bounds on feedback numbers of de Bruijn graphs. *Taiwanese Journal of Mathematics*, 15 (3) (2011), 1101-1113.
19. 周书明, 徐俊明, Conditional fault tolerance of arrangement graphs. *Information Processing Letters*, 111 (21-22) (2011), 1037-1043.
20. 陆由, 侯新民, 徐俊明, 李宁, Trees with unique minimum p -dominating sets, *Utilitas Mathematica*, 86 (2011), 193-205.
21. 徐喜容, 王建, 徐俊明, 曹永昌, Feedback numbers of Kautz undirected graphs. *Australasian Journal of Combinatorics*, 52 (2012), 3-9.
22. 谢欣, 徐俊明, Domination numbers of undirected toroidal mesh. *Acta Mathematica Sinica, English Series*. 无向超环面网的 $(d, 4)$ 控制数. *数学学报 (英文版)*. 28 (3) (2012), 453-462.
23. 胡夫涛, 徐俊明, On the complexity of the bondage and reinforcement problems. *Journal of Complexity*, 28 (2) (2012), 192-201.
24. 王健, 徐喜荣, 朱德俊, 高丽青, 徐俊明, On the bounds of feedback numbers of (n, k) -star graphs. *Information Processing Letters*, 112 (12) (2012), 473-478.
25. 黄佳, 徐俊明, Note on conjectures of bondage numbers of planar graphs. *Applied Mathematical Sciences*, 6 (66) (2012), 3277-3287.
26. 李宁, 侯新民, 陈兢, 徐俊明, Signed reinforcement numbers of certain graphs. *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*, 9 (1) (2012), 59-70.
27. 胡夫涛, 陆由, 徐俊明, The total bondage number of grid graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 160 (16-17) (2012), 2408-2418.
28. 胡夫涛, 徐俊明, Bondage number of mesh networks. *Frontiers of Mathematics in China*, 7 (5) (2012), 813-826.
29. 李向军, 徐俊明, Generalized measures of edge fault tolerance in (n, k) -star graphs. *Mathematical Science Letters*. 1 (2) (2012), 133-138.
30. 谢欣, 徐俊明, 无向超环面网的 (d, m) 独立数. *系统科学与数学*, 32(3) (2012), 327-333.
31. 梁浩, 徐俊明, A note on directed 5-cycles in digraphs. *Applied Mathematics*, 3 (7) (2012), 805-808.
32. 周书明, 林丽美, 徐俊明, Conditional fault diagnosis of hierarchical hypercubes. *International Journal of Computer Mathematics*, 89 (16) (2012), 2152-2164.
33. 周书明, 陈兰香, 徐俊明, Conditional fault diagnosability of dual-cubes. *International Journal of Foundations of Computer Science*, 23 (8) (2012), 1729-1749.
34. 周书明, 王建, 徐喜荣, 徐俊明, Conditional Fault Diagnosis of Bubble Sort Graphs under the PMC Model. *Intelligence Computation and Evolutionary Computation, Advances in Intelligent Systems and Computing Volume 180*, 2013, pp 53-59.

35. 梁浩, 徐俊明, On Sullivan's conjecture on cycles in 4-free and 5-free digraphs. *Acta Mathematica Sinica, English Series*. 29 (1) (2013), 53-64.
36. 徐俊明, *Combinatorial Theory in Networks (数学专著系列 (英文版) 26)*. Academic Press, Beijing, 2013
37. 徐俊明, 徐敏, The Forwarding Indices of Graphs – a Survey. *Opuscula Mathematica*, 33 (2) (2013), 345-372.
38. 梁浩, 徐俊明, Minimal feedback arc set of m -free digraphs. *Information Processing Letters*, 113 (8) (2013) 260-264.
39. 梁浩, 徐俊明, 有向图最小圈长不大于4的一个充分条件, *吉林大学学报*, 51 (2) (2013), 241-243.
40. 李向军, 徐俊明, Generalized measures of fault tolerance in exchanged hypercubes. *Information Processing Letters*, 113 (14-16) (2013), 533-537.
41. A.Bahremanpour, 胡夫涛, S.M.Sheikholeslami, 徐俊明, On the Roman bondage number of a graph. *Discrete Mathematics, Algorithms and Applications*, 5 (1) (2013), 1350001 (15 pages).
42. 徐俊明, On bondage numbers of graphs – a survey with some comments. *International Journal of Combinatorics*, vol. 2013, Article ID 595210, 34 pages, 2013. doi:10.1155/2013/595210.
43. 杨超, 徐俊明, Connectivity of lexicographic product and direct product of graphs. *Ars Combinatoria*, 111 (2013), 3-12.
44. 胡夫涛, 徐俊明, On the diameter of the Kronecker product graph. *Mathematical Sciences Letters*, 2 (2) (2013), 121-127.
45. 马美杰, 宋亚星, 徐俊明, Fault-tolerant analysis of augmented cube. *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*, 10 (1) (2013), 37-55.
46. 周书明, 徐俊明, Fault diagnosability of arrangement graphs. *Information Sciences*, 246 (10) (2013), 177-190.
47. 梁浩, 徐俊明, 关于 Caccetta-Haggkvist 猜想的注记. *数学学报*, 56 (4) (2013), 479-486.
48. 李向军, 徐俊明, Edge-fault tolerance of hypercube-like networks. *Information Processing Letters*, 113 (19-21) (2013), 760-763.
49. 李佳傲, 徐俊明, The wide-diameter of regular graphs. *中国科学技术大学*, 43 (8) (2013), 603-606.
50. 李向军, 徐俊明, Signed edge-domestic number of a graph. *Graphs and Combinatorics*, 29 (6) (2013), 1881-1890.
51. 曹永昌, 黄佳, 徐俊明, The bondage number of graphs with crossing number less than four. *Ars Combinatoria*, 112 (2013), 493-502.
52. 胡夫涛, 徐俊明, Roman bondage numbers of some graphs. *Australasian Journal of Combinatorics*, 58 (1) (2014), 106-118.

-
53. 洪振木, 徐俊明, Vulnerability of super edge-connected graphs. *Theoretical Computer Science*, 520 (2014), 75-86.
 54. 胡夫涛, 徐俊明, Total and paired domination numbers of toroidal meshes. *Journal of Combinatorial Optimization*, 27 (2) (2014), 369-378.
 55. 李向军, 徐俊明, Generalized measurements for fault tolerance of star networks. *Networks*, 63 (3) (2014), 225-230.
 56. 陆由, 徐俊明, Trees with maximum p -reinforcement number. *Discrete Applied Mathematics*, 175 (1) (2014), 43-54.
 57. 肖力, 曹瑾, 徐俊明, Transitivity of varietal hypercube networks. *Frontiers of Mathematics in China*, 9 (6) (2014), 1401-1410.
 58. 曹瑾, 肖力, 徐俊明, Cycles and paths embedded in varietal hypercubes. *中国科学技术大学学报*, 44 (9) (2014),.
 59. 洪振木, 徐俊明, Edge fault-tolerance of super restricted edge-connected Cartesian product graphs. *中国科学技术大学*, 44 (9) (2014),.
 60. 陆由, 徐俊明, The p -domination number of complete multipartite graphs. *Discrete Mathematics, Algorithms and Applications*, 6 (4) (2014) 1450063 (9 pages).
 61. 李向军, 徐俊明, Fault-tolerance of generalized star networks. *Applied Mathematics and Computation*. Accepted on 2014-10-03.