论文险被拒– 线图惹的祸

徐俊明

(2013 年 12 月 25 日)

摘　要

2012 年 *9* 月 *4* 日, 一份来自《*Graphs and Combinatorics*》编辑部的电子邮件告诉我们: 李向军与我合作的文章 "*Signed Edge-Domatic Number of a Graph*" 被接收了. 这篇文章是我们在 *2011* 年 *5* 月 *26* 日投到该杂志的. *2011* 年 *11* 月 *29* 日收到编辑部的反馈意见, 其中一位审稿人不推荐接收该文, 理由是: 线图建立了点-边的结果之间的联系. 言下之意, 我们的结果可以由已知结果通过线图导出. 我们仔细研究了评审者的意见, 觉得我们的结果不能由已知结果通过线图导出. 于是, 我们给编辑部写信, 表达了自己的意见. 最终这篇文章还是发表了.

论文险被拒, 是线图惹的祸. 于是有必要重温一下线图及其线图中的问题.

§1　论文险被拒, 祸起线图

首先回顾一下某些图论概念. 图 G 的顶点子集 D 称为 G 的控制集（dominating set）, 如果不在 D 的点与 D 中某个点相邻. 图 G 的控制数 $\gamma(G)$ 是 G 中最小控制集中的点数. 众所周知, 确定任意图的控制数问题是 NP 完备的（见 Garey 和 Johnson (1979)[1]）. 1977 年, Cockayne 和 Hedetniemi[2] 提出控制集划分概念, 即图的顶点集按控制集进行划分. G 的关于控制划分数（domatic number）$d(G)$ 是最大整数 k 使得 G 的顶点划分 $\{D_1, \ldots, D_k\}$ 中每个 D_i 都是 G 的控制集. 图 G 的控制划分数 $d(G)$ 可以理解为最大颜色数 k 使得 k 色类 $\{V_1, \ldots, V_k\}$ 中每个集 V_i 是 G 的控制集.

概念的推广是数学研究基本模式之一. 2011 年, Volkmann 和 Zelinka[3] 推广控制划分数到符号控制划分数概念.

图 $G = (V, E)$ 的符号控制（signed domination）是函数 $f : V \to \{1, -1\}$ 使得对每个 $x \in V(G)$ 都有 $\sum\limits_{u \in N_G[x]} f(u) \geqslant 1$. 显然, $D = \{x : \; f(x) = 1, x \in V\}$ 是 G 的控制集. 图 G 关于符号控制划分数（signed domatic number）$d_s(G)$ 是最大整数 k 使得符号控制集 $\{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ 对每个 $x \in V$ 均有 $\sum\limits_{i=1}^{k} f_i(x) \leqslant 1$.

Volkmann 和 Zelinka 证明了 $d_s(G)$ 是奇数, 并确定了完全图、圈、扇和轮等结构简单的图的符号控制划分数. 例如：

$$d_s(K_n) = \begin{cases} n & n \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\ 2), \\ \lfloor \frac{n}{2} \rfloor_o & n \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ 2). \end{cases}$$

[1]M. R. Garey and D. S. Johnson, Computers and Intractability. A Guide to the theory of NP-completeness. San Francisco: W. H. Freeman, 1979.

[2]E. J. Cockayne, S. T. Hedetniemi, Towards a theory of domination in graphs. Networks, 7 (1977), 247-261.

[3]L. Volkmann, B. Zelinka, Signed domatic number of a graph. Discrete Applied Mathematics, 150 (2005), 261-267.

对于这些关于点的概念, 自然有相应的边概念. 徐宝根[4] 提出符号边控制（signed edge-domination）概念. 李向军考虑图 G 关于符号边控制划分数 $d_s'(G)$, 并完成了一篇题为“Signed Edge-Domatic Number of a Graph”的论文.

点-边概念之间的联系可以用线图来描述. 为了说明符号控制划分数 $d_s(G)$ 和符号边控制划分数 $d_s'(G)$ 之间的关系, 该文陈述了以下结果.

命题 1.1 *设 G 是非空图, $L(G)$ 是 G 的线图. 则 $d_s'(G) = d_s(L(G))$.*

注意到圈 C_n 的线图仍是 C_n, 星 $K_{1,n}$ 的线图是完全图 K_n. 由命题 1.1 和 Volkmann 和 Zelinka 关于 $d_s(G)$ 的结果, 立即知 $d_s'(G)$ 是奇数而且确定了 $d_s'(C_n)$ 和 $d_s'(K_{1,n}) = d_s(K_n)$. 另外, 该文根据定义确定了路、扇、格等结构简单的图的符号边控制划分数。

该文重点是试图确定完全图 K_n 的符号边控制划分数 $d_s'(K_n)$. 当 n 是偶数时, 不难确定 $d_s'(K_n) = n-1$. 当 n 是奇数时, $d_s'(K_n)$ 的确定是相当的困难, 因为它涉及非常困难的问题: Hadamard 矩阵 $H(4k)$ 或者对称 $(4k-1, 2k-2, k-1)$ 设计的存在性. 首先我们得到一个关键性结果：

引理 1.1 *设 f 是完全图 K_{2k+1} 的最小符号边控制函数, H 是 K_{2k+1} 中由边集 $\{e \in E(K_{2k+1}) : f(e) = -1\}$ 导出子图. 那么$H \cong K_{k+1} \cup K_k$, 其中 K_{k+1} 和 K_k 是两个不交的完全图.*

n 阶 Hadamard 矩阵 $H(n)$ 是 n 阶 $\{1,-1\}$ 矩阵 H, 它满足性质: $HH^T = nI_n$, 其中 H^T 是 H 的转置, I_n 是单位方阵. Hadamard 矩阵 $H(n)$ 中的 $n = 1, 2$ 或者 $n \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ 4)$. 著名的 Hadamard 猜想是说: 对任何整数 $k \geq 1$, Hadamard 矩阵 $H(4k)$ 是存在的. 这个猜想至今还没有解决. 已经证明: 当 $k \leq 166$ 时 $H(4k)$ 是存在的. 2008 年, Đoković[5] 列出当 $167 \leq k \leq 500$ 时仅 13 个整数：

$$167, 179, 223, 251, 283, 311, 347, 359, 419, 443, 479, 487, 491,$$

$H(4k)$ 的存在性还没有确定. 这些事实强烈支持 Hadamard 猜想是真的. 对 Hadamard 有兴趣的读者可以参见 Horadam 的专著 [6]和 Seberry 和 Yamada 的综述文章 [7].

设 $P = \{1, 2, \ldots, n\}$ 是 n 个点集, $\mathscr{D} = \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ 是 P 中 k 元素（称为块）集. 如果 P 中每个不同点对恰出现在 λ 个块中, 则称 $\mathscr{D}$ 为对称 (n, k, λ) 设计. 注意到, 对称 (n, k, λ) 设计中每个点恰好属于 k 个块中. 容易看到: $\mathscr{D}^c = \{P \setminus D_1, P \setminus D_2, \ldots, P \setminus D_n\}$, 称为 $\mathscr{D}$ 的补设计, 也是对称 $(n, n-k, n-2k+\lambda)$ 设计. 下面的结论给出 Hadamard 矩阵和对称设计的紧密联系(见[8]).

命题 1.2 *对每个 $k \geq 1$, Hadamard 矩阵 $H(4k)$ 存在当且仅当存在对称 $(4k-1, 2k-1, k-1)$ 设计.*

利用引理 1.1, 我们确定了 $d_s'(K_{2k+1})$ 的值, 它依赖于 Hadamard 矩阵 $H(4k)$ 或者对称 $(4k-1, 2k-2, k-1)$ 设计的存在性, 即

$$d_s'(K_n) = \begin{cases} n & \text{if } n \equiv 3 \,(\mathrm{mod}\ 4) \text{ and } H(n+1) \text{ exists;} \\ n-2 & \text{if } n \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\ 4) \text{ and } H(n-1) \text{ exists.} \end{cases}$$

由上面的说明可知, 当 $k \leq 166$ 时, $H(4k)$ 存在, 因此 $d_s'(K_n)$ 也被确定. 另外我们能证明: 如果 $d_s'(K_n) = n$ (其中 $n \equiv 3 \,(\mathrm{mod}\ 4)$), 那么 Hadamard 矩阵 $H(n+1)$ 存在. 换句话说, $d_s'(K_n) = n$

[4]B.-G. Xu, On signed edge domination numbers of graphs. Discrete Mathematics, 239 (2001), 179-198.
[5]D. Ž. Đoković, Hadamard matrices of order 764 exist. Combinatorica, 28 (4) (2008), 487-489.
[6]K. J. Horadam, Hadamard matrices and Their Applications, Princeton University Press, 2007.
[7]J. Seberry and M. Yamada, Hadamard matrices, sequences and block designs; in: Contemporary Design Theory, A Collection of Surveys, (J. H. Dinitz and D. R. Stinson, eds.), pp. 431-560, J. Wiley, New York, 1992.
[8]R. Merris, Combinatorics (Second Edition). John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2003.

$(n\equiv 3\,(\mathrm{mod}\ 4))$ 当且仅当 Hadamard 矩阵 $H(n+1)$ 存在. 则说明当 $n\equiv 3\,(\mathrm{mod}\ 4)$ 时, 确定 $d'_s(K_n)$ 的困难性与确定 Hadamard 矩阵 $H(n+1)$ 的困难性是等价的.

这是个非常令人满意的结果, 于 2011 年 5 月 26 日, 我们将该文投到杂志《Graphs and Combinatorics》.

半年后, 即 2011 年 11 月 29 日, 我们收到编辑部的反馈意见, 并附上一位审稿人的评审报告. 编辑部在信中说: "We have received a report from the referees. Before I ask other referees to submit their reports, may I ask you to revise the paper according to the report and send the new version to me as soon as possible? I will send the new version to the referees." 编辑部的信还是令人高兴了一阵子, 因为文稿需要修改, 没有被拒.

我急切第打开附件中的评审报告. 报告的第一句就令人失望: "Though I found the connection with Hadamard matrices interesting, I was annoyed at reading this paper."

审稿人一开始就用"I was annoyed at reading this paper." (阅读这篇文章令我很生气.) 我继续读下去, 想知道审稿人为什么会生气.

审稿人的生气理由: "The authors refuse to clarify the intimate connection between the "edge-variant" and the original parameter, and in general the paper is too long for its content. I am unable to recommend publication, though a much shorter note would be worth publishing somewhere. "

审稿人进一步阐述不推荐的理由: "The authors eventually observe in Proposition 1.1 that there is a connection between the edge-variant and the original parameter. But this connection should be the first thing to notice - indeed, like many so-called edge variants."

对于审稿人给出这样的生气和拒稿理由, 我们百思不知其意. 我们不得不怀疑这位"专家"的学术水平. 我们立即给编辑部写信, 信中强调: "We were annoyed at reading this reviewing report. The reviewer himself (or herself) has just refused to clarify the intimate connection between the "edge-variant" and the original parameter. Although the vertex-version of this concept was studied by Volkmann and Zelinka and the there is a connection between two concepts by the line graph, the main results such as $d'_s(K_n)$ in this paper cannot be deduced from Volkmann and Zelinka's results by the line graph. We refuse to the reviewer's comments about our manuscript. Would you please wait for the other reviewers."

在随后的几个月中, 我们从编辑部回答询问的来信中得知: "As you know, we received three reports regarding your paper. Among them, two strongly recommend for publication while one does not recommend for publication. I sent the revised vision and your correspondences to the referee."

2012 年 9 月 4 日, 我们接到编辑部来信: "Based on these reports, we are pleased to inform you that the paper has been accepted for publication, subject to minor changes suggested by the referees." 最终, 该文于 2013 年 11 月见刊了:

Xiang-Jun Li and Jun-Ming Xu, Signed edge-domatic number of a graph. Graphs and Combinatorics, 29 (6) (2013), 1881-1890.

这件事情又一次告诉我们: 有时候审稿人的意见并不一定都是对的. 遇到这种情况, 不要轻易放弃, 提出自己的反驳理由, 相信绝大多数编辑和审稿人是明哲事理的高学术水平的专家.

那位审稿人之所以做出这样的评论, 其实质是他 (她) 没有弄清线图在点和边概念中到底起到什么样的作用. 我们有必要重温一下线图概念及其在点和边概念中的桥梁作用.

§2　线图– 点和边概念之间的桥梁

非空有向图 D 的**线图** (line digraph) $L(D)$ 是以 $E(D)$ 为顶点集的图, 并且若 a_i, $a_j\in E(D)$, 则 $(a_i,a_j)\in E(L(D))\Leftrightarrow$ 在 D 中, a_i 的终点是 a_j 的起点.

线图是基本构图方法. 例如, Kautz 有向图 $K(d,n)$ 可以定义为 K_{d+1} 的 $(n-1)$ 重线图 $L^{n-1}(K_{d+1})$, 即, $K(d,n)=L^{n-1}(K_{d+1})$; de Bruijn 有向图 $B(d,n)$ 可以定义为 K_d^+ 的 $(n-1)$ 重线图 $L^{n-1}(K_d^+)$, 即, $B(d,n)=L^{n-1}(K_d^+)$, 其中 K_{d+1} 是完全有向图, 而 $K_d^+(d\geqslant 2)$ 表示在 K_d 的每个顶点处添加一个环后得到的有向图.

线图有许多非常重要的性质（感兴趣的读者可以参见《组合网络理论》[9]的第二章）, 例如: 对于非平凡强连通有向图 D, 它和线图 L 的直径有关系:

$$d(D)\leqslant d(L)\leqslant d(D)+1, \text{而且 } d(D)=d(L)\Leftrightarrow D \text{ 是有向圈}.$$

根据这个关系, 立即得到 Kautz 有向图 $K(d,n)$ 和 de Bruijn 有向图 $B(d,n)$ 的直径:

$$d(B(d,n))=d(L^{n-1}(K_d^+))=n,\quad d(K(d,n))=d(L^{n-1}(K_{d+1}^*))=n.$$

图论文献中常常涉及到无向图的线图. 非空无向图 G 的**线图** (line graph) $L(G)$ 是以 $E(G)$ 为顶点集的图, 并且若 e_i, $e_j\in E(G)$, 则 $e_ie_j\in E(L(G))\Leftrightarrow$ e_i 和 e_j 在 G 中相邻.

有关线图的经典结果和近期结果参见两篇综述文章, Hemminger and Beineke (1978)[10] 和 Prisner (1996)[11].

图论中, 凡是提到“点”的概念, 总有与之对应的“边”的概念. 两概念之间的联系就是“线图”.

例如, 前面提到的控制数 $\gamma(G)$ 与边控制数 $\gamma'(G)$ 之间有关系: $\gamma'(G)=\gamma(L(G))$; 符号控制划分数 $d_s(G)$ 和符号边控制划分数 $d_s'(G)$ 之间有关系：$d_s'(G)=d_s(L(G))$. 下面, 我们再列举两对关系.

点染色与边染色

简单无向图 G 中点的 k 染色 (vertex k-coloring) 是指 k 种颜色对 $V(G)$ 中元素的一种分配, 使得相邻两顶点所染颜色不同; 所用颜色的最小值称为 G 的点色数 (chromatic number), 记为 $\chi(G)$.

求 G 的点色数问题是十分困难问题, 存在界：$1\leqslant\chi(G)\leqslant\Delta(G)+1$, 而且下界和上界都可以达到, 即 $\chi(K_n^c)=1$, $\chi(K_n)=n$.

无环非空图 G 中边的 k 染色 (edge k-coloring) 是指 k 种颜色对边集 $E(G)$ 中元素的一种分配, 使得相邻两条边所染颜色不同; 所用颜色的最小值称为 G 的边色数 (edge-chromatic number), 记为 $\chi'(G)$.

求 G 的边色数问题也是十分困难问题, 存在界：$\Delta(G)\leqslant\chi'(G)\leqslant\Delta(G)+1$, 而且下界和上界都可以达到. 所谓的图分类问题：哪些图 G 有 $\chi'(G)=\Delta(G)$, 哪些图 G 有 $\chi'(G)=\Delta(G)+1$, 是个没有解决的难问题.

毫无疑问, 图 G 的边色数和点色数满足下列关系: $\chi'(G)=\chi(L(G))$.

目前还不知道求图的点染色与边染色的有效算法, 它们都属于 NPC 问题. 从问题性质来说, 两者的难度是一样的.

特别令人不解的是下面的例子.

独立数与匹配数

设 $G=(V,E)$ 是无环图. 非空子集 $S\subseteq V(G)$ 被称为 G 的独立集 (independent set), 如果 S 中任何两顶点在 G 中均不相邻. G 中最大独立集中的点数称为 G 的独立数 (independent number), 记为 $\alpha(G)$.

[9]徐俊明, 组合网络理论. 科学出版社, 北京, 2007 年 5 月.

[10]R. L. Hemminger and L. W. Beineke, Line graphs and line digraphs. In “Selected Topics in Graph Theory” (Beineke and Wilson, Eds.), pp. 127-167, Academic Press, New York, 1978.

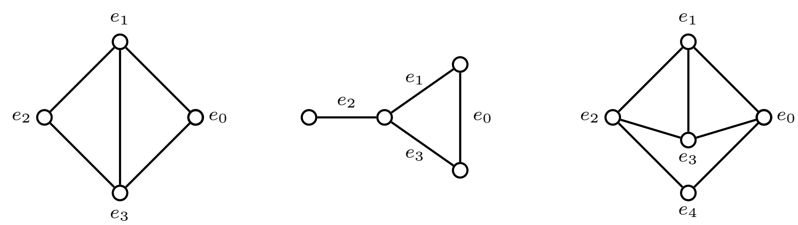
[11]E. Prisner, Line graphs and generalizations – A survey. Congr. Numer. 116 (1996), 193-230.

非空子集 $M \subseteq E(G)$ 被称为 G 的匹配 (matching) 如果 M 中任何两条边在 D 中均不相邻. G 中最大匹配中的边数称为 G 的匹配数 (matching number), 记为 $\alpha'(G)$.

这两个概念可以通过线图把它们联系起来: $\alpha'(G) = \alpha(L(G))$.

存在许多有效算法求任意图的匹配数. 按照那位审稿人的说法, 应该存在多项式算法求解独立数问题. 然而, 目前还不知道求图的最大独立数的有效算法. 前者属于 P 问题, 而后者属于 NPC 问题. 从问题性质来说, 两者难度有着本质的区别.

问题到底出在哪？问题出在：*并不是每个图 H 都存在一个图 G 使得 $H = L(G)$*. 例如, 图 1 (a) 中图 H 是（b）中图 G 的线图, 即 $H = L(G)$; 由此容易看到（c）中图 H' 不是任何一个图的线图.



(a) $H = L(G)$　　(b) G　　(c) 非线图 H'

图 1　线图和非线图的例子

那么, 什么样的图 G 才具有这种性质呢？回答这个问题需要了解图论中一个重要的研究专题–线图的刻画.

§3　线图的刻画

图 G 被称为线图, 如果存在图 H 使得 $G = L(H)$, H 称为 G 的根图（root graph）. 1932 年, Whitney[12] 证明了：除了 K_3 和 $K_{1,3}$, 在同构意义下, 每个线图的根图是唯一的. 从那以后, 许多学者对线图进行各种各样的刻画, 其中最为有影响力的是 Beineke (1968)[13] 给出的刻画：图 G 是线图当且仅当它不含如图 2 所示的 9 个禁子图中任何一个作为它的导出子图.

这个结果确保了判定一个图是否是线图的有效算法的存在性. 事实上, Roussopoulos (1973)[14] 和 Lehot (1974)[15] 分别给出线性算法判定一个图 G 是否是线图, 而且能构造出根图 H 如果 G 是线图. Syslo (1982)[16] 将这些方法推广到有向线图.

另外, Bermond and Meyer (1973)[17] 刻画了重图的线图的 7 个禁子图; Cvetković et al. (1981)[18] 刻画了重图的线图的 31 个禁子图; Chartrand (1964)[19] 和 Hedetniemi (1971)[20] 刻画 2 部分图的线图的

[12]Whitney, H. Congruent graphs and the connectivity of graphs. Amer. J. Math. 54 (1932), 150-168.

[13]Beineke, L.W. Derived graphs of digraphs. Beitrage zur graphentheorie, H. Sachs, H. Voz, H. Walther, Eds., Teubner, Leipzig, 1968, pp. 17-33.

[14]Roussopoulos, N. D., A max$\{m, n\}$ algorithm for determining the graph H from its line graph G. Information Processing Letters 2 (4) (1973), 108-112.

[15]Lehot, Philippe G. H., An optimal algorithm to detect a line graph and output its root graph. Journal of the ACM 21 (1974), 569-575.

[16]Syslo, Maciej M., A labeling algorithm to recognize a line digraph and output its root graph. Information Processing Letters 15 (1) (1982), 28-30.

[17]J. C. Bermond and J. C. Meyer, Graphes représentatifs des arêtes d'un multigraph. Math. Pures Appl. 52 (1973), 299-308.

[18]D. Cvetković, M. Doob, and S. Simić, Generalized line graphs. J. Graph Theory 5 (1981), 385-399.

[19]G. Chartrand, "Graphs and Their Associated Line Graphs," Ph.D. thesis, Michigan State University, 1964.

[20]S. T. Hedetniemi, Graphs of (0, 1)-matrices, in "Recent Trends in Graph Theory" (Capobianio et al., Eds.), pp. 157-171, Springer-Verlag, New York, 1971.

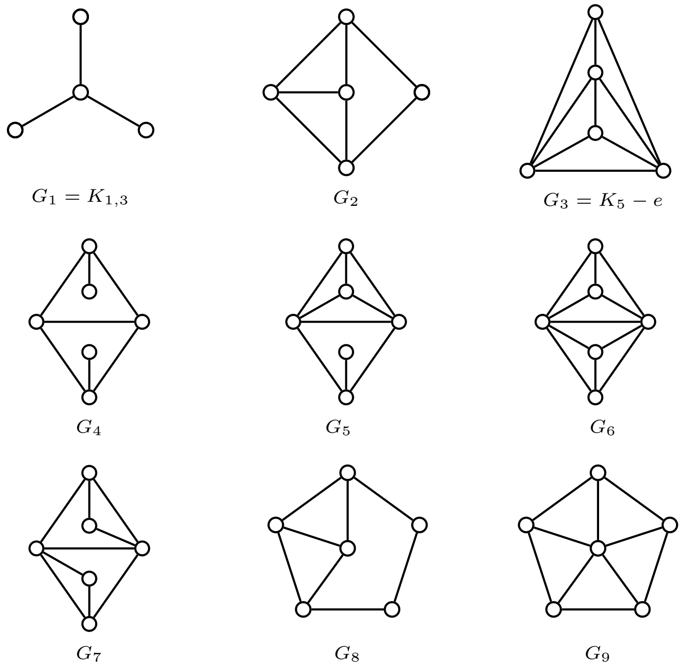


图 2 线图的禁子图

紧子图; Cai et al.(1996)[21] 刻画 2 部分重图的线图的紧子图.

1994 年, Šoltés[22] 刻画了连通线图的 7 个禁子图 $\{G_1, \ldots, G_6, G_8\}$ 并且不同构与 $\{G_7, G_9, H_1, H_2, H_3\}$ 中任何一个图, 其中 H_1, H_2, H_3 如图 3 所示. 2001 年, Lai 和 Šoltés[23] 刻画了最小度至少 7 的非哑铃图（dumbbell）是线图的 3 个禁子图 $\{K_{1,3}, K_5 - e, G_5\}$, 其中哑铃图是有一条公共边的两个完全图.

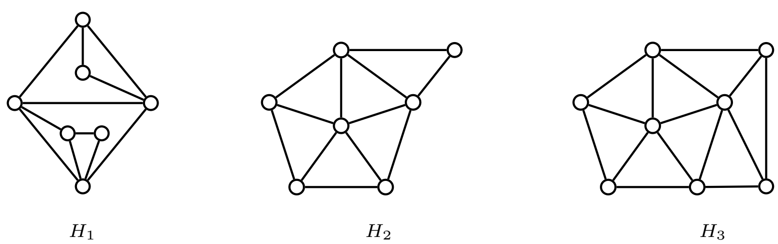


图 3 线图的禁子图

[21] L. Cai, D. Corneil, and A. Proskurowski, A generalization of line graphs: (X, y)-intersection graphs. J. Graph Theory, 21 (1996), 267-287.

[22] Ľ. Šoltés, Forbidden induced subgraphs for line graphs. Discrete Math. 132 (1994), 391-394.

[23] H.-J. Lai and Ľ. Šoltés, Line graphs and forbidden induced subgraphs. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 82 (2001), 38-55.